克卜勒橢圓定律的前身
--太陽與行星軌道中心的定位

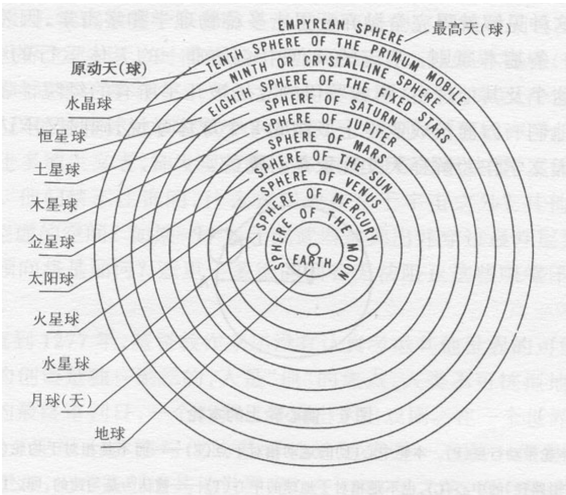
陳鵬仁* 姚珩

國立臺灣師範大學 物理系

壹、前言—托勒密的地心說

每當日照逝去，夜幕低垂，廣袤的夜空閃爍著無數的星辰，那嘆為觀止的星空，自古以來就吸引地上人們的目光，也引發許多古聖先賢對天體或這個宇宙本質的猜想，最基本的想法主要是由亞里士多德 (Aristotle, 384-322 B.C.) 所提出 (圖一)。他將地球視作宇宙的中心，把世界分成月上區和月下區兩個部份。月上區指的是月球以上的部份，包括了漫遊的行星，不動的恆星以及神所居住的地方；而月下區指的就是地球上發生各種事物的場所，俗稱塵世的部份。亞里士多德認為月上區是神所居住的地方，是神聖高潔的，行星在當中運行必定是以最均勻、完美、對稱的正圓軌道行進，並以地球為中心，繞著地球規律地橫過空間。不同的行星繞行所花費的時間不同，則不同的行星有著不同的繞行半徑。故若將這種模式畫成圖，就會是一幅以地球為中心，其他的行星們、月球、太陽在同心球殼上依照各自的軌道運行。

但在更仔細地觀察後發現，有兩種天文現象無法用同心圓模型解釋，一為行星運行速率不一致，有時比較快，有時比較慢；二是行星有逆行現象，原本是朝東移動，在一段時間之後，會反過來向西運行短暫的時間，再繼續朝東移動 (圖二)。

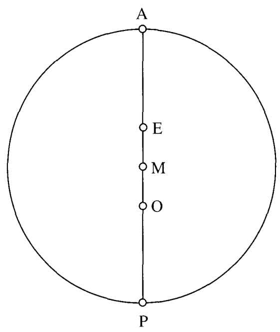


圖一： 天球同心球球層

圖二: 2007/08/28 到 2008/04/28 發生火星逆行的連續拍攝圖 (Tezel)

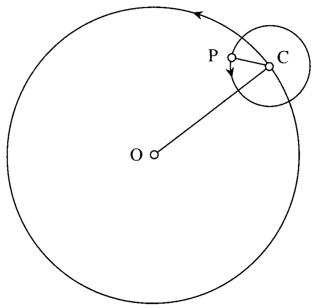
* 為本文通訊作者

對於第一點，可以偏心勻速點 (equant point) 的概念來描述，僅從偏心勻速點看行星運動才是等速率的，地球 O 與偏心勻速點 E 則分別位在圓 (稱爲偏心圓，equant) 軌道中心 M 兩側，但至中心的距離彼此相等；如此行星繞地運行的速率便會有所不同 (圖三(A))。對於第二點，則是引入了均輪—本輪 (deferent-epicycle) 系統，行星在本輪 (小輪) 上 P 做等速率運動，而本輪的中心 C 又在以地球爲中心的均輪 (大輪) 上運行，只要適當調整本輪的大小及旋轉速率，就可以解釋逆行的現象 (圖三(B))。



(A)

圖三(A)、偏心圓圓心 M，偏心勻速點 E 與地球 O



(B)

圖三(B)、均輪與本輪

西元二世紀的天文學家托勒密 (Ptolemy, 85-165 A.D.) 統合了前兩項觀點，利用球面幾何與三角學的方法，架構出完整的天文模型，能夠描述每一顆行星運動的細節，及預測出天文現象的發生，而且與實際觀測的位置誤差不到 10 分角。這個集大成的天文模型理論成爲西方宇宙結構的主流，後來被基督教會定爲圭臬，長達十四個世紀，直到十六世紀文藝復興末期哥白尼 (N. Copernicus, 1473-1543) 的出現，才將人們從思想的桎梏中解放出來。

貳、哥白尼日心說的簡單性與模糊性

哥白尼在看過托勒密的模型後，覺得均輪、本輪的想法太過於人爲化，而且到後來均輪、本輪的個數達到七、八十個才能夠精確地描述行星運動，實在是太繁冗，太複雜了，完全違背了這自然本身應是簡單、和諧、對稱、完美的普適原則。爲了要得出滿足大自然是簡單性的原則，哥白尼拋棄以地球爲中心的假設，他重新發展了古希臘人阿里斯塔恰斯 (Aristarchus, 310-230 B.C.) 的日心論（heliocentric theory），將世界中心的寶座讓予太陽，其他的行星皆以太陽爲中心繞其運轉，地球只不過是一個繞著太陽運行的行星罷了，不再是高高在上的宇宙中心。如此一來，不再需要龐雜無數的均輪、本輪，只剩下以太陽爲中心，行星各自以其軌道繞行太陽的同心圓模型，照此，哥

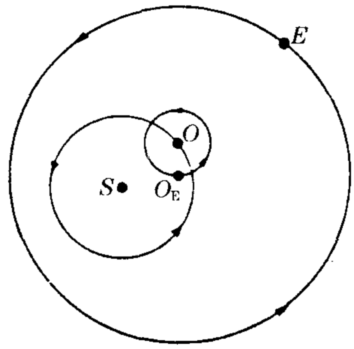
白尼的模型大大簡化了托勒密模型中均輪及本輪的個數，也確實遵循自然是簡單的原則，行星運動再次回歸到簡單、和諧、對稱、完美的理念 (哥白尼，1543；庫恩，2003)。

然而哥白尼對太陽的定位仍顯得曖昧模糊，時而它在共同軌道的中心，時而又在軌道中心的附近，說法反反覆覆，模稜兩可。他曾描述不動的太陽 S 與地球 E 正圓軌道中心 OE 的關係，如圖四(A)，地球軌道中心 OE 並非靜止，它還以小輪繞著圓心 O 旋轉，而圓心 O 又以均輪情形繞著太陽 S 旋轉。對於火星而言，火星 M 在自己的本輪上運行，本輪中心又在以 OM 為中心的均輪上作圓周運動，而 OM 與 OE 的位置並不重合，位置則維持不變 (圖四(B))。顯然地球與火星軌道的中心並不落在太陽上，且對地球與其他行星，又分別採取了不同的處理方法，而不一致、不協調，甚至還攙雜著他自身所反對的人為化與複雜性。哥白尼仍然尚未達成他所期望，能呈現宇宙和諧與完美描述的最終理想。

參、克卜勒的釐清 — 地球與火星均受太陽支配

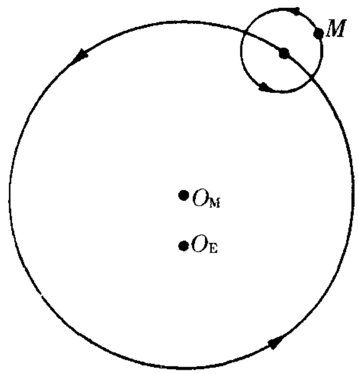
哥白尼的理念五十年後由克卜勒 (J. Kepler, 1571-1630) 發揚光大，並確定了太陽，與含地球在內所有行星共同軌道中心的位置。克卜勒是哥白尼的忠實信徒，他見識到將宇宙中心從地球移至太陽後，由數也數不清的均輪、本輪，蛻變成只要

(A)



圖四(A)、地球運行示意圖，太陽 S 不在地球正圓軌道中心，而地球正圓軌道中心 OE 繞著 O 旋轉，且 O 又繞著太陽 S 旋轉

(B)



圖四(B)、火星運行示意圖，火星運行的本輪中心，在以 OM 為中心的均輪上運行，OM 與 OE 的相對位置固定不變。

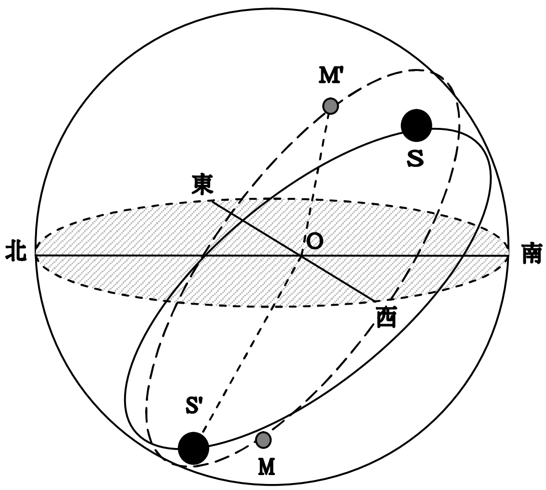
幾個同心圓，便可清楚地明白星體的運行，和預測天象的發生。由繁入簡，多麼簡單、完美，於是對哥白尼的「日心說」推崇不已，且誓言將儘力捍衛它。然而克卜勒並未墨守成規，他深深明白哥白尼模型中一些模糊不清的地方，並採取了不同的基礎點:宇宙的主宰與中心是太陽，它掌控所有行星的運行；地球只是其中一個行

星，不扮演任何特殊角色；地球軌道中心與所有其他行星的軌道中心也沒有差別，不應分別處理。爲了得到更爲正確的行星軌跡，克卜勒重新採用了托勒密的偏心圓理論。

> “在太陽與地球的理論中，確實要有偏心點是相當明顯的，....因為是對所有行星，偏心圓觀念是普遍與共同的，我的工作將對這些原因加以闡述。” (Kepler, 1609)

在此模型中，所有行星以不同半徑，但皆繞著共同圓心作圓周軌運動；太陽並非在共同圓心上，而是偏離圓心一小段距離；且行星既不是繞太陽，也不是繞圓心做規律的等速率運動，而是對第三點 (偏心勻速點) 作等角速率運動。如前圖三(A)，只是將原先地球位置 O 取代爲太陽位置。

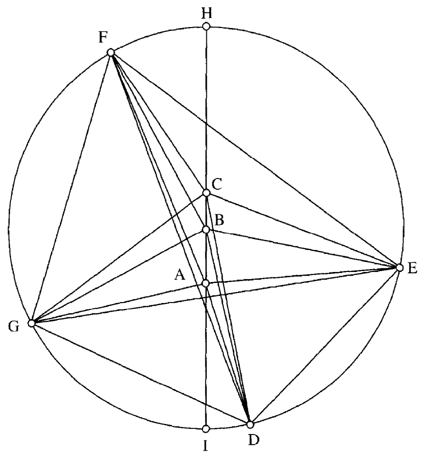
克卜勒很幸運地可使用第谷 (Tycho Brahe, 1546-1601) 所留下來龐大及精確的觀測資料。他不厭其煩，辛勞地分析數據資料，察覺到隱藏在行星運動背後，那不爲人知，晦暗未明的真理，其蛛絲馬跡，如剝繭抽絲般地逐漸浮現在克卜勒眼前。第谷與他皆體會當地球運行到太陽和火星之間，且自地球去觀測火星和太陽成一直線，或夾角爲 180 度時，可當作眾多天文數據中的重要標誌，此特殊排列稱爲「衝」(opposition) 或「三連星」。它對在茫茫天體中，安排出太陽、地球與行星的位置關係上，一直扮演著提綱挈領、無法取代的關鍵角色。除了在薄幕或清晨，偶然同時觀察到火星和太陽，分別在我們的正前後方，而可直接看到衝的形成。此外皆是利用白天時所觀察到太陽的位置 S 及軌跡，將它延續在天體上描繪出圓滑的圓周曲線，而得到夜晚時太陽 S’ 到地球 O 的相對位置或角度 (經度)。如此在清明的夜晚觀察火星 M’時，可同時測得火星 M’與太陽 S’，到地球上觀察者 O 的相對位置或角度 (經度)。如此不僅可得知衝的發生與否，更可獲得任意時刻在地球上所觀測到的火星 M，與太陽 S 之經度 (圖五)。



圖五、火星與太陽之角度決定的簡單示意圖:先觀察太陽 S 白天運行的軌跡，去推算夜晚太陽 S’的位置，在晚上去觀測火星 M’的位置,即可知道太陽與火星相對於觀察者 O 的角度。火星、太陽與觀察者 (OSM 與 OS’M’) 皆會在同一平面—黃道面上。

肆、太陽與火星軌道中心位置的苦苦尋求

克卜勒自第谷的資料裡，選取了發生四次「火星衝」的時間與數據，它們分別是在 1587 年 3 月 6 日、1591 年 6 月 8 日、1593 年 8 月 25 日及 1595 年 10 月 31 日。於圖六，A 爲恆定不動的太陽位置，D、E、F、G 代表四次發生火星衝時的火星經度位置，圖中未繪出地球，但它必分別落在 AD、AE、AF 與 AG 線段上。所有這些點線皆會在同一平面 (即黃道面) 上。



圖六、決定太陽位置 A、火星軌道中心 B、與偏心勻速點 C 之示意圖

克卜勒參考了早期托勒密的偏心圓模型，假設太陽位置 A、火星軌道中心 B、及偏心勻速點 C 均位在同一直線 HI 上，其中 H 爲遠日點，I 爲近日點，HI 亦被稱爲遠近線。欲證明此三點所形成「偏心圓」的存在，他希望 D、E、F、G 可形成一正圓，且其圓心 B 又必須落在 AC 連線上。故一切運算的出發點爲偏心圓直徑、或遠近線 HI 到底落在何處？他首先任意選定 ∠HCF、∠HAF，經由觀察數據，及眾多但簡易的幾何關係，若最後所推算出的

(1) ∠EFG＋∠EDG＝∠DEF＋∠DGF＝180° 滿足四邊形可形成外接圓的條件，則 D、E、F、G 會落在同一圓上。如果算出來的結果不等於 180°，那麼就回過頭來，重新選定∠HCF、∠HAF，以期 D、E、F、G 可形成一圓。進一步，爲讓 B 落在 AC 連線上，又必須滿足

(2) ∠HAF＝∠BAF 的結果，若是∠HAF≠∠BAF，則需再次重新選取∠HCF、∠HAF。如此，反覆進行計算，直到獲得上述兩個重要的預期結果 (Kepler, 1609；Kozhamthadam, 1995；Martens, 2000)。

由於克卜勒在新天文學原著中的運算較複雜，我們稍將其步驟簡化、釐清，並自美國海軍天文台的天文資料 (MICA)，隨機選取最近在北台灣，分別所觀測到的四個火星衝：1950 年 3 月 23 日 (F)、1954 年 6 月 24 日 (G)、1956 年 9 月 10 日 (D) 及 1958 年 11 月 16 日 (E) 的數據爲參考，重新詳盡地描述及保留克卜勒原有的辛勤工作內容、與運算精神，藉此呈現他在獲得其行星三大定律前，所開啓天文學研究的新思維，並揭示其實事求是的科學方法。

一、由觀測數據，決定四次衝時的火星位置至太陽的相對角度

我們所選取上述四個火星衝的經度位置分別是:D 為 348.8°、E 為 54.3°、F 為 182.7°、G 為 273.3° (以春分點之太陽位置、或正東方的經度為 0°)，故

∠DAE＝360°＋54.3°－348.8°＝ 65.5°、∠EAF＝128.4°、∠FAG＝ 90.6°、∠GAD＝75.5°。

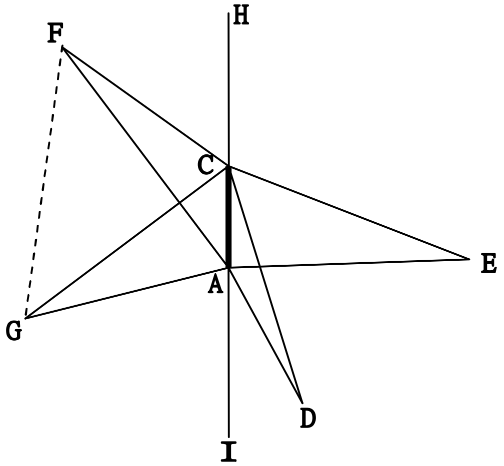
另外，C 為偏心勻速點，火星繞其作等角速率運動。已知火星週期為 687 天，DE 歷時 797 天，所以可算出

∠DCE＝(797－687)/687×360°＝57.6°

同理，也可得到∠ECF＝144.1°、∠FCG＝94.3°、∠GCD＝63.9°。

二、定出太陽至火星的不同距離，尋找火星軌道之圓心

若設太陽至偏心勻速點的距離 AC 為 10000 個單位，在△DAC、△EAC、△FAC 以及△GAC 中，AC 是共邊，那麼 AD、AE、AF、AG 皆可用 AC 來表示 (圖七)。



圖七: 以共邊 AC 表示出太陽至火星的四個不同距離 AD、AE、AF、AG

以△GAC 為例，利用正弦定理，

$$\frac{AC}{\sin AGC}=\frac{AG}{\sin ACG}$$

而

∠ACG＝180°－∠HCF－∠FCG

∠CAG＝∠HAF＋∠FAG

∠AGC＝180°－∠ACG－∠CAG

設 AC 之延長線為遠近線 HI，作為最後欲建立偏心圓的直徑，與其相關的∠HCF 與∠HAF 是唯一可自由選定的兩個值，餘皆不可任意變動。現取

∠HCF＝32.2° 與 ∠HAF＝26.9°

作為計算的起點，如此可以 AC 表示出 AG 長。同理，AD、AE、AF 亦可算出(表一)。

表一：以 AC=10000，表示出太陽至火星的四個不同距離 AG、AD、AE、AF

∠ACG	∠CAG	∠AGC	AG
53.3°	117.5°	9.2°	50116
∠ACD	∠CAD	∠ADC	AD
10.7°	167.0°	2.3°	47251
∠ACE	∠CAE	∠AEC	AE
68.2°	101.5°	10.4°	51649
∠ACF	∠CAF	∠AFC	AF
147.8°	26.9°	5.2°	58550

接著，在△FAG 中，可用餘弦定理求得相鄰兩衝火星之距離 FG，因

FG2＝AF2＋AG2－2×AF×AG×cosFAG

其中∠FAG 已知。以同樣方式，可分別求出 GD、DE、EF (表二)。

表二：相鄰兩衝火星之距離 FG、GD、DE、EF

FG	GD	DE	EF
77434	59633	53674	99269

在同一△FAG 中，∠FAG 已知，用正弦定理，

$$\frac{AF}{\sin AGF}=\frac{AG}{\sin AFG}=\frac{FG}{\sin FAG}$$

可得到∠AFG 和∠AGF。相同地，也可得知∠AGD、∠ADG、∠ADE、∠AED、∠AEF、∠AFE (表三)，做為接著求得火星位置彼此所張之角度之用。

表三：在△FAG、△FAG、△FAG、△FAG 中，以正弦定理計算得到各底角的大小

∠AFG	∠AGF	∠AGD	∠ADG
40.3°	49.1°	50.1°	54.4°
∠ADE	∠AED	∠AEF	∠AFE
61.2°	53.3°	27.5°	24.1°

因此，四個火星衝時，火星位置彼此所張之角度為

∠EDG＝∠ADE＋∠ADG

∠EFG＝∠AFE＋∠AFG

∠DEF＝∠AED＋∠AEF

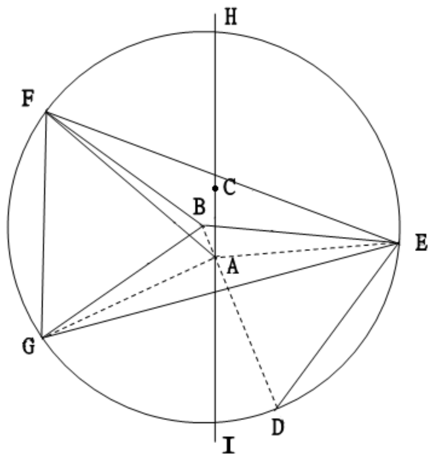
∠DGF＝∠AGD＋∠AGF

如果∠EDG＋∠EFG＝∠DEF＋∠DGF＝180˚，則我們能夠確定 D、E、F、G 必落在同一圓上 (表四)，而完成第一個預期要求。反之，若 D、E、F、G 不落在同一圓上，則必須重新選取∠HCF 或∠HAF，再重覆上述過程，直到四點可形成一圓 (圖八)。我們的結果表示該四點會落在同一圓上，故∠HCF、∠HAF 之選取，通過如式 (1) 所示的第一個要求條件。

表四：確認四個火星位置 D、E、F、G 是否可形成一圓，即∠EDG＋∠EFG＝∠DEF＋∠DGF＝180°

∠EDG	∠EFG	∠DEF	∠DGF
115.6°	64.4°	80.8°	99.2°

∠EDG+∠EFG	∠DEF+∠DGF
180.0°	180.0°



圖八、D、E、F、G 四點落在以 B 為圓心之同一圓上。AC 之延長線(或遠近線 HI) 不一定與通過圓心 B 之直徑重合。

三、決定太陽至軌道圓心及火星之角度

下一步，要決定圓心 B 是否落在 AC 連線上，必須達到第二個預期結果:∠HAF ＝∠BAF。為了求得∠BAF，須在△ABF 中，獲得相關的兩邊一角，以便透過正弦定理求得。對與∠BAF 有關的∠FBG 而言，圓心角∠FBG 為圓周角∠FEG 之兩倍，有

∠FBG＝2 ∠FEG＝2 (∠AEF＋∠AEG)

其中∠AEF 已在表三得知。對∠AEG 而言，在△AEG 中，AE、AG 由表一為已知邊，第三邊 EG 可以餘弦定理

EG2＝AE2＋AG2－2×AE×AG×cosEAG

求得，其中∠EAG＝∠GAD＋∠DAE 已知。有了兩邊一角，經過正弦定理，

$$\frac{EG}{\sin EAG} = \frac{AG}{\sin AEG}$$

遂得知∠AEG 值，也就決定出∠FBG (表五)。

由於 BF＝BG 為圓半徑，△FBG 為等腰三角形，∠BFG＝∠BGF＝(180°－∠FBG)，由正弦定理，

$$\frac{FG}{\sin FBG} = \frac{BF}{\sin BGF}$$

得到 BF=BG 的距離。

最終在△ABF 中，先使用餘弦定理

AB2＝AF2＋BF2－2×AF×BF×cosAFB

求得 AB 的大小，其中∠AFB＝∠BFG－∠AFG 已知。最後通過正弦定理，

$$\frac{AB}{\sin AFB} = \frac{BF}{\sin BAF}$$

終於可確認出∠BAF 之值 (表五)。

表五：在△ABF 中通過兩邊 BF、AB 及一角∠AFB 所獲得的∠BAF

EG	∠AEG	∠FBG	∠BFG=∠BGF
95938	19.2°	93.4°	43.3°
BF=BG	∠AFB	AB	∠BAF
53197	3.0°	6084	26.9°

四、檢視太陽、軌道圓心與偏心勻速點是否成一直線

若∠BAF＝∠HAF，則 B 點即落在 AC 連線上，辛勞的計算即告完成。但如果∠BAF≠∠HAF，就必須再回過頭來，修正假定的∠HAF 和∠HCF 之值，依照同樣的程序計算一遍，直到兩角相符為止 (表六)。

表六：檢視∠BAF＝∠HAF 以確認軌道圓心、太陽與偏心勻速點是否落在同一直線

∠BAF	∠HAF
26.9°	26.9°

最後我們所得到的∠BAF，與最初設定的∠HAF 的值，非常吻合，通過了式 (2) 所示的第二個要求條件。也確認太陽、軌道圓心、與偏心勻速點，的確將落在同一直線上。

我們所重建的偏心圓與克卜勒所完成的偏心圓模型，此二者的太陽 A 至軌道圓心 B 之距離 AB，與軌道圓心 B 至偏心勻速點 C 之距離 BC 的比較，列於表七 (Jacobsen,1999)。兩者相當一致，皆可讓 A、B、C 落於同一直線上，以 B 點爲中心之圓，均可通過四個火星觀測位置，且圓心 B 並不平分距離 AC。

表七：重建的偏心圓模型，與克卜勒所完成的模型之比較 (歸一為將圓半徑 BF=53197→1)

AB	BC
6048	3952
AB (歸一)	BC (歸一)
0.11369	0.07429
AB (克卜勒)	BC (克卜勒)
0.11332	0.07232

克卜勒在完成及釐清太陽位置 A、火星軌道中心 B、及偏心勻速點 C 三者所構造出的偏心圓模型後，曾如此描述當時的心境：

> “如果這種冗長的方法讓你厭煩的話，你或許更會憐憫我起來。因為我花費了巨大的時間，反覆了至少 70 餘次的計算，至今已過了五個年頭。” (Kepler, 1609, p256)。

後來他很快地也察覺到上面辛苦所獲得的偏心圓模型 (他名爲暫代性假說 vicarious hypothesis)，仍未能準確地描述火星運動的路徑，便以它爲參考，往前再嘗試修正，尋找更精確的幾何軌跡，最後終於能建立起行星的橢圓定律 (姚珩、黃秋瑞，2003)。雖然暫代性假說並非完全準確，但不能說對它的探討徒勞無益；反之，它是克卜勒天文思想的基礎，是行星運動軌跡的基本形式。暫代性假說充分地顯示出克卜勒對太陽無可比擬地推崇，太陽自身發光發熱，支配整個世界，是宇宙的主宰，各個行星繞其運轉不歇，不再像哥白尼，太陽與圓軌道中心模糊不分。沒有太陽與軌道圓心的區隔，將很難發現橢圓的焦點與對稱中心之角色，自然也不會有行星橢圓定律的形成。

克卜勒僅利用簡單的幾何特性，及正弦與餘弦定理，逐步建立起了行星理論的基礎，與釐清行星真實運行的情形。這主要是他對太陽至高無上、神聖獨特性的堅持，以及他體會出在哥白尼所欲復興的畢達哥拉斯及新柏拉圖主義中，所揭示自然背後有著簡單數學關係的深刻含義 (伯特，1994)。克卜勒不厭其煩，不辭辛勞，藉找出暫代性假說的理論，透視出行星看似漫遊不定，飄渺虛無的天際移轉背後，所隱匿不出、微言大義的簡單、和諧，令人沉醉不已之數學關係。

伍、結 論

克卜勒始終相信哥白尼以太陽爲宇宙中心的理念爲真，但他卻不甚滿意哥白尼對太陽位置的反覆不定。他認爲太陽是

宇宙中最特別的一個星體，也是一切動力的真正來源，爲了排除哥白尼系統中對太陽定位的模糊性，以及解決行星確實有環繞太陽運動的非等速性，克卜勒接受並自托勒密偏心點理論的架構重新出發。加上嚴格的幾何推算，以其莫大的耐心、毅力，將原本隱晦不清的太陽、圓周軌道中心、與偏心勻速點三者的幾何位置，及彼此間的距離比，分析得清晰透徹，而建立起偏心圓的暫代性假說。從此，三者不再混淆模稜，也非定位不清，而是各自在自己明確的位置上，分別擔任自己的職責，太陽—世界的中心—是在全新、自身所在的獨立一點上。

沒有偏心圓暫代性假說的發現，克卜勒將無法進一步地與觀測數據做更精細的比較，並不斷修正，繼而建立起距離規則，最後才形成著名的三個行星運動定律，彼此環環相扣，顯示行星運動定律是無法僅由數據的歸納就能獲得的。克卜勒將當時的數學方法—幾何學—充分發揮在天文學上，他不相信權威，也不抱殘守缺，實事求是，細膩精確，遍佈創意，超乎前人。他將天文學與數學做了絕佳的結合，並形成最好的典範，也爲古典力學開闊出一條坦途大道。

陸、參考文獻

哥白尼（Copernicus, N. [1543] 2004）：天體運行論。台北：大塊文化。

庫恩（Kuhn, T. 1985）：哥白尼革命—西方思想發展中的行星天文學。北京：北京大學出版社。

姚珩、黃秋瑞 (2003)：克卜勒行星橢圓定律的初始內涵。科學教育月刊，第 256 期，第 33-45 頁。

伯特 (Burtt, E. 1994)：近代物理科學的形而上學基礎。成都市：四川教育出版社。

Jacobsen, T. (1999). Planetary systems from the ancient Greeks to Kepler. Seatle, WA: University Washington.

Kepler, J. ([1609] 1992). New astronomy. New York : Cambridge University Press.

Kozhamthadam, J. (1995). Discovery of Kepler’s law: The Interaction of science, philosophy and religion. Notre Dame, ID : University of Notre Dame.

Martens, R. (2000). Kepler’s philosophy and the new astronomy. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Multiyear Interactive Computer Almanac (MICA, 美國海軍天文台用星體位置計算軟體), Version 2.0

Tezel,T.http://apod.nasa.gov/apod/ap080511.html (火星逆行圖)