

牛頓運動定律 $F = ma$ 何時正式出現

姚 玠，國立臺灣師範大學物理系
李秉書，臺北市立大理高級中學

通訊作者基本資料：

姓名：姚 玠

電話：02-7734-6029

電子郵件信箱：yao@phy.ntnu.edu.tw

通訊地址：台北市汀洲路 4 段 88 號 國立臺灣師範大學物理系

關鍵詞：牛頓運動定律、力、科學史、物理教學、白努利

When did Newton's law of motion $F = ma$ formally appear?

Herng Yao, Department of Physics, National Taiwan Normal University
Bing-Shu Lee, Taipei Municipal Dali High School

壹、前言

古典物理最主要與最普遍的定律可能就是牛頓第二運動定律，國內外的中學與大學教科書皆將它寫成 $F = ma$ （國立台灣師範大學科學教育中心，1995，88 頁；Halliday, Resnick & Walker, 2010, p. 91），但檢視牛頓（I. Newton 1642-1727）的所有著作，從未發現此關係式。大部分學者也都認同該寫法並非出自牛頓之手，歷年來有不少專家皆主張該表示式最先是由瑞士數學家歐拉（L. Euler, 1707-1783）在 1736 年所提出（Jammer, 1997, pp. 88-89；Sharm, 2014），然而我們研究發現，事實並非如此，那麼 $F = ma$ 到底是何時、又如何出現在歷史舞台上？這是本篇欲要呈現的主旨。

貳、力與牛頓運動定律

牛頓是古典物理學的奠基者，他開啟了物理學極為有效的思考方法，並解決了天文與地表的許多自然現象。科學史家 R. Westfall（1924-1996）稱：

通過在物質和運動的基礎上，加上一個新的範疇——力，牛頓使數學力學和機械論哲學彼此協調。牛頓把力放在一個精確的物理背景中，在其中力通過它產生的動量加以計量。這些力都由數學精確地描述。（韋斯特福爾，1971/2000, p152）

牛頓大膽創造使用了「力」概念來詮釋運動現象，而力概念的提出與澄清更是促成古典物理學獲得重大成果的轉捩點（Westfall, 1977/2001）。什麼是力呢？在他的巨著《自然哲學的數學原理》——後人稱為古典物理的聖經——中寫道：

定義 4：外力（impressed force）是施予在物體的作用，可改變其處於靜止或沿一直線作等速度運動的狀態。（Newton, 1687/1846, pp. 73-74）

也就是說「外力」或力並不涉及推、拉、壓縮與碰撞，只要當物體運動「狀態」改變，我們便可說有力作用在物體上。而力與運動狀態改變的量化關係，則由他所寫下的第二運動定律來描述：

定律 II：運動的變化與外加的運動力（motive force）成比例；且運動的變化是沿著外力的直線方向上。（Newton, 1687/1846, p. 83）

在此，運動的變化，指的就是動量的變化（邱韻如，2012）。若以現今的符號表示，第二運動定律最初的原意應該比較接近於動量 p 的變化率與外力 F 成正比，即

$$F = \frac{dp}{dt}$$

在給出《原理》中所有的八個定義之後，牛頓曾寫下底下之說明：

運動量來自於速度與質量；運動力來自於加速度與質量的結合（motive force arises from the accelerative force taken jointly with the same quantity of matter）。
（Newton, 1687/1846, p. 75）

雖然上述第二句話與後來大家所熟悉的第二運動定律的表示很相似，但畢竟他從未指出力、質量與加速度之間的等號關係，也未以符號表示，更未提及彼此方向如何相關。

在《原理》的序言中牛頓寫道：「我奉獻這一作品，作為哲學的數學原理，因為哲學的全部困難似乎在於——從運動的現象去研究自然界中的力，然後從這些力去說明其他自然現象。」（牛頓，1687/2005；Newton, 1687/2005）。「力」概念是他建構出整個牛頓物理學的根本骨架，也是一種全新的心智創見，也可說沒有力概念的使用，就沒有牛頓物理學。

叁、伐立農以微分符號呈現運動定律

第二運動定律在原文中是以一種文字敘述來呈現；即使在運算時，牛頓也從未以數學等式來表示他的第二定律，他總是以幾何或比例的關係來描述。首次將牛頓第二運動定律以近代數學式來描述的人是法國數學家伐立農（P. Varignon, 1654-1722）。他大力推展微分數學，於1700年首先引用同為歐洲大陸上的德人萊布尼茲（G. Leibniz, 1646-1716）的微分符號，將速度 v 與加速度 y （尚未使用現今流行的符號 a ）分別表示為位移 x 與速度 v 對時間 t 的導數，即：（Varignon, 1700, p. 23）

$$\begin{cases} v = \frac{dx}{dt} \\ y = \frac{dv}{dt} \end{cases}$$

接著在 1707 年，伐立農統合了海峽另一邊的牛頓定律，最早寫下力 f 或 φ 與加速度之數學關係式：(Varignon, 1707, p. 268)

1. $\begin{cases} f = du/dt \\ \varphi = dv/d\theta \end{cases}$ (對於一特定物體 A ，其中 u 為物體 A 之速度)
(對於另一特定物體 B ，其中 v 為物體 B 之速度， θ 為時間)
2. $f : \varphi = mdu/dt : \mu dv/d\theta$ (對於質量分別為 m 、 μ 之兩不同物體 A 、 B 之受力比)

他認為當討論個別物體 A 、 B 的運動時，只需考慮各自物體的加速度 du/dt 、 $dv/d\theta$ 就足夠了。若要進一步對不同物體 A 、 B 所受的運動力同時進行比較時，則各自的質量 m 、 μ 也應該要加以考量。在此，伐立農所提出的「 f 正比於 mdu/dt 」之寫法，可說是最早出現的第二運動定律之數學表示式。

肆、白努利正式將運動定律表示為 $F = ma$

1736 年，伐立農的摯友瑞士數學家白努利 (J. Bernoulli, 1667-1748) 寫下：(Bernoulli, 1736, p. 6)

為求更好的了解，必須視運動力為一絕對量，因為它是由物體質量，與加速度所組成。亦即若以 f 表示運動力， m 表示物體質量， a 表示加速度，則我們有

$$f = ma \quad (1)$$

這便是歷史上首先清楚地以 $F = ma$ 正式表示牛頓第二運動定律的出處。由於此式清晰、簡潔，之後便一直成為教科書中所採用第二運動定律的標準寫法，並對以後力學的運算及發展有很大的推促作用，影響深遠。

牛頓本人並不需對力定義任何單位，便可發現許多重要的自然現象，後人為了運算方便與精確要求，才在 1861 年利用定律式 (1) 首次訂出力的單位達因 (dyne) (Rossiter, 1879)，距離牛頓提出第二運動定律，約已近兩百年。隨後在 1948 年於第 9 屆國際度量衡會議中 (The General Conference on Weights and Measures) 採用了 Newton 為力的國際標準單位 (SI Units)，並開始沿用至今。

此外，應注意的是第二運動定律 $F = ma$ 左邊的 F ，並非如教科書中常說的固定推力或拉力，牛頓所討論的力常是指地表物體 (如蘋果) 受到地球、或行星受到太陽作用的向心力，也

就是一種物體與力心距離的位置函數，他從未提過機械或人所施予物體的向上拉力或推力（Newton, 1687/1846, p. 83）。

伍、歐拉所表示的運動定律

目前幾乎所有文獻皆沿襲科學史家 M. Jammer（1915-2010）的說法，認為 $f = ma$ 最早是由歐拉在 1736 年的論文 — *Mechanica* 中所寫下（Jammer, 1997, pp. 88-89），但檢視該原始著作（Euler, 1736/2008），全書皆無（1）式的寫法，僅有較為接近的

$$dc = n p dt / A$$

其中 c, t, A, p 分別代表速度、時間、質量、與力， n 為比例常數，因著不同的測量單位，而會有所不同。如果我們自己將力 p 以 F 代表，並利用速度 c 或 v 對時間的導數為加速度 a ，則可將其改寫成現代的相關式：

$$F = (1/n) m dv/dt = (1/n) ma$$

但斷然不是 $F = ma$ 的形式。

隨後歐拉於 1750 年探討在三維空間中質量為 M 物體所受之力，將它沿 x -方向之分量 P 與位移變化的關係表示為（Euler, 1750；Sharm, 2014）

$$2 M ddx = P dt^2$$

若我們將其改寫，及利用位置 x 對時間的二次導數為加速度 a ，可得分力 P 或 F 為

$$F = P = 2M d^2x / dt^2 = 2Ma$$

依然無法得到 $F = ma$ 的結果。1765 年歐拉在介紹剛體轉動慣量時，曾將剛體運動分解成質心的直線運動及相對轉動，而提出了質心的運動方程式（Euler, 1765）

$$F = Ma / 2g$$

其中 $2g$ 為比例常數。最後在 1775 年，歐拉藉著六個聯立方程式，試著建立起任一物體動力學的普遍方程式（Euler, 1775），其中分力 P 遵循

$$P = \int dM d^2x / dt^2$$

我們若將質量積出 $\int dM = M$ ，可以得到與 $F = Ma$ 相似的結果，但這是經過了改寫，而非直接出自歐拉。

回顧歐拉之著作，他終其一生均未正式寫出 $F = ma$ 的確定關係，因此我們應將昔日多人對第二運動定律的代數式出自於歐拉此說法，更正為：牛頓第二運動定律的數學形式， f 正比於 mdv/dt 或 $f = ma$ ，分別是由伐立農及白努利在 1707 年與 1736 年，最先寫下。

陸、結論

現今每本力學教科書中常使用的牛頓第二運動定律式 $F = ma$ ，並非是由牛頓在《原理》一書中所寫出，第二運動定律最初的原意應該較接近於動量變化與外力成正比，即 $F = dp/dt$ 。

約在《原理》一書發表 50 年之後，才由白努利於 1736 年最早清楚寫下 $f = ma$ ，且此式從未出現在歐拉著作裡。大家普遍認為是由歐拉在 1736 年的論文中提出 $F = ma$ 的觀點，有所謬誤，應予避免。由於學子對此式耳熟能詳，且不斷在使用，值得教師們強調其正確出處，與注意它和原初定律式 $F = dp/dt$ 之異同。

參考文獻

牛頓（Newton, I. [1687], 2005）：自然哲學的數學原理。台北：大塊出版社。

邱韻如（2012）：牛頓有說過 $F = ma$ 嗎？科學月刊，43(3)，174-175。

韋斯特福爾（Westfall, R. [1971], 2000）：近代科學的建構——機械論與力學。上海：復旦大學出版社。

國立台灣師範大學科學教育中心（1995）：高級中學物理第一冊（吳大猷主編）。台北市：國立編譯館。

Bernoulli, J. (1736). *Recherches physiques et géométriques sur la question: Comment se fait la propagation de la lumière*. Paris: Imprimerie Royale.

- Euler, L. (2008). *Mechanica* (I. Bruce, Trans.). from <http://www.17centurymaths.com/contents/mechanica1.html>. (Original work published 1736).
- Euler, L. (1750). *De ´couverte d'un nouveau principe de Me ´canique*, Me ´moires de l' ´acade ´mie des sciences de Berlin, 6, Berlin: Berlin Academy, 185–217.
- Euler, L. (1765). *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum ex primis nostrae cognitionis principiis stabilita, ad omnes motus, qui in hujusmodi corpora cadere possunt, accommodata* Greifswald: Rostochii et Gryphiswaldiae litteris et impensis, A. Rose, Germany.
- Euler, L. (1775). *Nova methodus motum corporum solidorum rigidorum determinandi*. *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, 20, 208-238.
- Halliday, D., Resnick, R., & Walker, J. (2010). *Fundamentals of Physics* (8th ed.). New York: John Wiley & Sons.
- Jammer, M. (1997). *Concepts of Mass in classical and modern physics*. New York: Dover.
- Newton, I. (1846). *Newton's Principia: The Mathematical Principles of Natural Philosophy* (A. Motte, Trans.). New York: Daniel Adee. (Original work published 1687).
- Rossiter, W. (1879). *Dictionary of Scientific Terms*, London: William Collins, Sons/Coy, Lond, p. 109.
- Sharm, A. (2014). *Isaac Newton, Leonhard Euler and $F=ma$* . *Physics Essays*, 27(3), 503-509.
- Varignon, P. (1700). *Maniére g ´n ´rale de d ´terminer les Forces, les Vitesses, les Espaces & les Tems*. *In Acad ´mie Royale des Sciences* (Ed.), *Histoire de l'Academie royale des sciences-Avec les memoires de mathematique & de physique*, Ann ´e 1700, 22-27. Paris: Jean Boudot.
- Varignon, P. (1707). *Des mouvements vari ´s ´ volont ´, compar ´s entre eux et avec les uniformes*. *In Acad ´mie Royale des Sciences* (Ed.), *Histoire de l'Academie royale des sciences-Avec les memoires de mathematique & de physique*, Ann ´e 1707, 222-275. Paris: Gabriel Martin.