引力理論建立的關鍵--向心力概念的形成

田芷綾 [1] 姚珩 [2]*

[1] 桃園縣立大溪高級中學

[2] 國立臺灣師範大學 物理系

壹、前言

萬有引力定律基本上是於 1687 年正式發表於牛頓（Isaac Newton, 1642-1727）的《自然哲學之數學原理》一書裡(Newton, 1687；Chandrasekhar, 1997），但牛頓在與虎克（Robert Hooke, 1635-1703）爭辯引力平方反比律提出之優先權時，曾述說自己早於 1665 年左右,便已提出並完成距離平方反比力的論證，只是晚了二十年才發表。

然而在檢視牛頓思想發展的過程中，可發現他早期並無「引力」的概念，這從他所述有關月球試驗（moon test）的著作裡可清楚看出，他當時認為月球所以會作圓周運動，是因受到離心趨勢的影響，而非引力的作用。亦即牛頓雖然早在 1665 年就提出了力平方反比律的數學描述式，但嚴格而言，他所使用的物理概念並不正確，萬有引力原理也不可能在當時成形（Cohen, 1980）。

只有在 1684 年左右，當他首次提出「向心力」（centripetal force）的概念後，並正確指出：地球表面落體的加速度及月亮環繞地球作圓周運動的向心加速度之比值，與落體及月亮分別至地心距離平方的比值相等時，力平方反比律的數學論證才算完成，而萬有引力原理也就水到渠成，隨即得以圓滿地被建立起來（柯瓦雷，2003）。

*為本文通訊作者

貳、物體作圓周運動的離心力

一般人從最初對物體作圓周運動之經驗感受，常會指出物體具有離開中心的傾向，或者認為有一種離心「力」作用在該物體上。譬如用繩子綁著一顆球，手拉著繩子一端並使球作圓周運動旋轉，手會感受到球欲離開繩子的一種拉力，而且隨著球旋轉得愈快，手感受到的此種離心拉力也愈大；或是人坐在急速轉彎的車子內，會感覺到彷彿受到一股力的作用，要將自己朝外拋出。

牛頓起初也不例外，認為物體作圓周運動時，具有離開中心的趨勢（endeavor away from the center），1665 年牛頓在其《雜記》(Waste Book）中，對物體受到離心趨勢作用下作圓周運動的情形，曾有過清楚的討論。此外，笛卡兒(Rene Descartes, 1596-1650）於 1644 年發表重要著作《哲

學原理》，該書中所述思想，對當時科學界影響很大。他主張自然現象要從質點與運動爲基礎來描述，且質點所受的作用僅能靠接觸或碰撞來傳遞。承襲此傳統，牛頓在尋找作圓周運動物體所受離心趨勢的規則時，他便先從一個物體沿著正四邊形軌道作等速率運動的分析開始（圖 1）。

牛頓認爲若考慮一物體或小球，自一圓外切正方形的其中一切點 *a* 開始，以等速率沿水平直線運動，此物體本身具有「運動力」（force of the body's motion）或「慣性力」，並可以物體所行經的位移表示其大小。當遇到軌道壁時，物體遠離中心的趨勢力會作用於軌道壁上，導致軌道壁會對物體施以一壓縮（pressure）、碰撞、反彈力（force of reflection）或反作用力，造成物體運動方向改變（Brackenridge, 1995）。

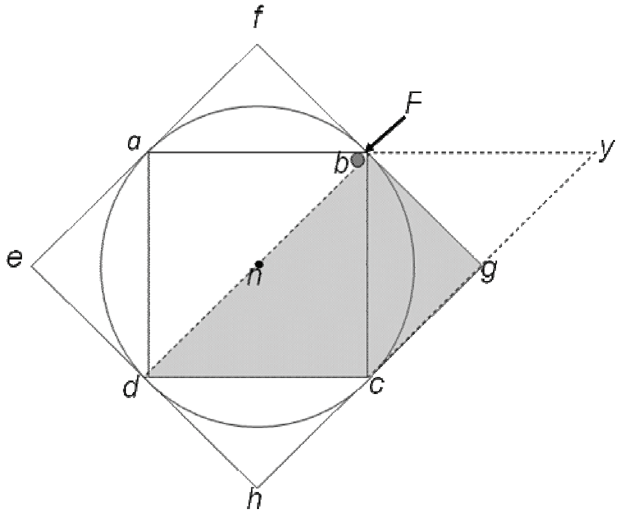

圖 1：由物體在內接於正圓的正四邊形軌道上運行，尋找其所受到之總反彈力

若物體自 *a* 點出發，於不受任何阻撓下運行至 *b*，如果在該處無邊界，物體會繼續運動下去，形成位移 *by*，此值代表持續受運動力影響所形成的位移。但由於在 *b* 點受到反彈力作用，造成物體改變方向形成 *bc* 位移，此時牛頓宣稱，此淨位移 *bc* 是由 *by* 及 *bd* 兩段位移以遵循平行四邊形的合成法則所合成，其運算方式與現代的向量加法同義。而 *bd* 可視爲物體在 *b* 點僅受到反彈力作用時所形成的位移，亦即物體在 *b* 點之後的實際位移 *bc* 是由物體因初始運動所造成的位移 *by*，與物體因反彈力所造成的位移 *bd*（或 *yc*），兩者的合成。如此延續下去，物體將沿著正方形的 *abcd* 軌道運動。

假設物體的運動力與物體運動速度的變化量成正比，因此在兩次碰撞之間固定的每個時段下，運動力與時間之乘積—或稱運動衝量（impulse），與速度的變化量與時間之乘積—即位移 *ab*（= *by*）成正比；同理，假設物體所受到的平均反彈力與物體的速度變化量成正比，因此在相同時段下，平均反彈力所對應的反彈衝量，會與位移 *bd*（=*yc*=2*fa*）成正比。亦即，物體在 *b* 點受到的反彈衝量（以 I_b 表示）與其運動衝量（以 I_o 代表）的比值爲

$$I_b / I_o = bd / by = 2fa / ab$$

利用畢氏定理於等腰直角 Δfab 上

$$fa^2 + fb^2 = 2fa^2 = ab^2$$

因此

$$I_b / I_o = ab / fa$$

若物體自切點 a 開始，沿著正方形軌道 $abcd$ 穩定運動下去，在完成一整圈的過程中，所受到的總反彈衝量大小爲在四個角落分別受到的反彈衝量總和，則總反彈衝量與運動衝量的大小比值，就等於內接正方形的周長與圓半徑的比值，即：

$$(\sum I_b) / I_o = 4ab / fa$$

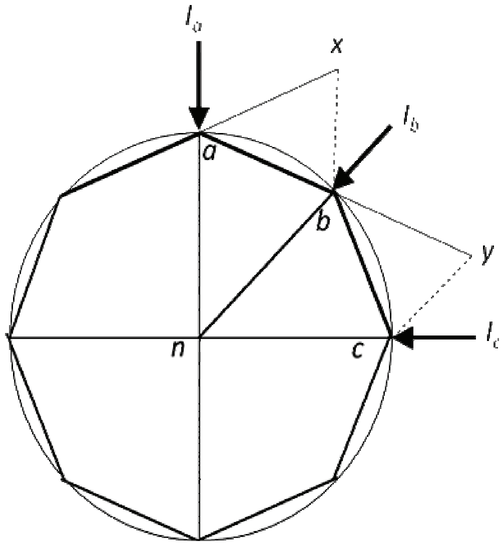

圖 2：由在圓內接正多邊形軌道上運行的物體，論證其所受的總反彈力

若物體自 a 點在圓內以正多邊形的路徑運動（圖 2），物體在 a（b）點若沒有受到反彈力，其位移將是 ax（by），但由於受到反彈力，所以物體的運動軌道變成 ab（bc）。因物體作等速率運動，並設物體運行在 ax（by）上所費時間等於其運行在 ab（bc）所費時間，因此 $ax = ab$（$by = bc$）。又 nb 平行於 yc，$nb = nc$，且 $by = bc$，因此 $\Delta nbc \sim \Delta bcy$，且 $yc/bc = bc/nb$。故物體在 b 點受到的反彈衝量與其運動衝量的比值可寫成

$$I_b / I_o = yc / by = yc / bc = bc / nb$$

而當物體在正多邊形軌道上，完成一整圈的運動中，其在軌道上所受總反彈衝量與運動衝量的大小比值，則同樣爲內接正多邊形之周長與圓半徑的比值，

$$(\sum I_b) / I_o = (\sum bc) / nb$$

當正多邊形趨於無窮多邊而接近於正圓時，正多邊形之周長即接近圓周長 $2\pi r$，而物體作圓周運動所受到軌道壁給予之總反彈衝量，與運動衝量的大小比值，即等於圓周長與半徑之比值：

$$(\sum I_b) / I_o = 2\pi(na) / na = 2\pi$$

若物體的運動衝量或動量 I_o 可以物體的質量與其速率之乘積 mv 表示，則物體作圓周運動受到軌道壁給予之總反彈衝量 $\sum I_b = 2\pi I_o = 2\pi mv$。若衝量與作用時間—即環繞一圈所需時間（週期 T）—之比值爲平均作用力 F，而此平均作用力是由於圓周運動物體的離心趨勢，或如惠更斯（Christian Huygens, 1629-1695）所言之離心力（centrifugal force）作用在軌道壁上所引起的，所以作半徑爲 r 週期爲 T 之等速率圓周運動物體，其離心趨勢或離心力形式爲

$$F = \frac{\sum I_b}{T} = \frac{2\pi mv}{(2\pi r / v)} = \frac{mv^2}{r}$$

這便是牛頓在 1665 年以數學論證推得作

圓周運動物體所受的離心力形式，其大小正比於「切線速度平方與半徑的比值」。以上論述，雖然作圓周運動的物體所受之力 $F \propto v^2/r$，與現今正確結果吻合，但在論證中，可看出牛頓一直依循笛卡兒作圓周運動物體時所具有的爲向外趨勢（outward tendency），或惠更斯的離心力概念，以現代的觀點來看，則並不正確。亦即在此段時間，牛頓認爲作圓周運動物體具有試圖偏離軌道的離心力，它會對軌道壁產生作用，然後軌道壁再向物體產生反作用的推擠，使得物體維持在圓周軌道上。也就是說，物體作圓周運動是由於被動地受到軌道壁的「推擠」，而不是主動地向中心「吸引」；好比手拉著繫上一顆球的繩子，當手讓球作圓周運動時，手感受到的拉力，是由於先有球的離心力之存在所造成。作圓周運動的物體受到的是「離心力」，而非日後所言之「向心力」。

> 正如惠更斯注意到的，「推動」或者「壓力」並不能與「引力」互換，前者並不「朝向」一個物體，也不會產生相互的作用力。（柯瓦雷，2003，p. 152）

參、1666 年之月球試驗與離心力

牛頓於 1666 年對作等速率圓周運動之物體，曾做了如下的分析：半徑爲 r 週期爲 T，作等速率圓周運動物體之速率爲

$$v = 2\pi r / T \Rightarrow v^2 = 4\pi^2 r^2 / T^2$$

$$\Rightarrow v^2 \propto r^2 / T^2$$

接著他利用克卜勒（Johannes Kepler, 1571-1630）的週期律——行星到太陽距離的立方正比於它們的週期平方，或 r^3/T^2 爲定值，而有

$$v^2 \propto r^2 / T^2 = r^2 / r^3 = 1/r$$

因此可得到離心趨勢

$$F \propto v^2 / r = 1/r^2$$

即作圓周運動物體所受離心力必與物體至圓心距離或半徑平方成反比，此關係可稱爲平方反比之離心力律。此即牛頓在 1718 年晚年自傳裡，關於力平方反比律發現的優先權討論中所曾提出的辯駁，認爲毫無疑問他要比 1673 年惠更斯所正式發表類似的相關敘述要早，牛頓說：

> 「可能是 1666 年左右，我開始思考重力延伸到月球軌道，而且也找出如何估計運動質點在球面內運行撞擊至表面時所施的力：由克卜勒的行星週期律，我推算維持行星在它們各自軌道上的力，必定與它們到圍繞中心距離平方成反比。」

此處所提「開始思考重力延伸到月球軌道」，指的即是牛頓在 1666 年考慮的「月球試驗」，在此工作中可反映出：“第一，他將重力延伸至月球的軌道；第二，估計等速率圓周運動的離心趨勢；第三，對於克卜勒的行星週期律相當熟悉；第四，結合離心趨勢與克卜勒定律，得到行星力是反比於其到圍繞中心的距離平方。很明顯地，在此處他假設行星的繞行軌道是正圓，或至少接近正圓。”（Cohen, 1980, p. 231）

牛頓的「月球試驗」基本上分爲兩個步驟：首先，計算地球表面上物體因地球自轉所造成的離心趨勢，並將它與重力比較：

> 牛頓計算赤道上的物體在地球自轉一天的週期內，由於地球自轉而造成的離心趨勢，將使得物體每秒遠離地球約 5/9 英吋。而地球重力卻會使得物體在每秒內朝地心落下約 16 英尺，這大約是離心趨勢的 350 倍。重力是如此地大，因此地球自轉不會使得物體遠離地心並彈入空中。（Cohen, 1980, p. 238）

茲以 SI 國際單位來闡釋上述意義，因地球半徑 R 爲 6400,000 公尺，地球每日自轉週期 T 爲 86,400 秒，若視隨著地球自轉的地表物體在作等速率圓周運動，則此物體的運動速率 v

$$v=\frac{2\pi R}{T}=\frac{2\pi\times 6400,000}{86,400}\cong 465(m/s)$$

依照牛頓的圓周運動離心力律，計算所對應的離心趨勢之加速度 a 爲

$$a\infty\frac{v^2}{R}=\frac{465^2}{6400,000}\sim 0.034(m/s^2)$$

而作等加速度運動物體，一秒內移動距爲

$$at^2/2=0.034/2=0.017(m)=0.67\text{吋}$$

此即離心趨勢使地表物體每秒遠離地球之距離。同理，若地表之重力加速度 g 爲 9.8m/s^2，則物體在每秒內朝地心落下距離爲

$$gt^2/2=9.8/2=4.9(m)=16\text{呎}$$

比較每秒朝地心落下距離與離心趨勢使物體遠離地球距離，其比值爲

16 呎／0.67 吋＝16×12／0.67＝290 倍

與牛頓所述的 350 倍非常接近，也代表地面上重力遠比地球自轉所造成的離心趨勢大 350 倍。即

$$\frac{g}{a}=\frac{9.8}{0.034}=290\approx 350$$

其次，他將月球作等速率圓周運動的離心趨勢，與地表上物體的離心趨勢做比較，再由前述計算所得地表上物體的離心趨勢與地表重力加速度的比值，得出「地表的重力加速度」約爲月球「離心趨勢」的 4000 倍：

> 牛頓將不同圓周運動的離心力律，即 v^2/R 規則，用於計算月球遠離地心的離心趨勢，並與位於地表上物體的離心趨勢比較，發現後者約為前者的 12 又 1/2 倍。因此，他做了結論：「地表的重力約為月球離心趨勢的 4000 倍。」實際上應是 4375（=350×12.5）。（Cohen, 1980, p. 239）

這是因爲月球到地心的距離約爲地球半徑的 60 倍，其值爲 R'=384,000,000 公尺，而月球繞地球運轉的週期爲一個月，或 28 天，則月球運轉週期爲 T'= 2,332,800 秒，若月球繞行地球作等速率圓周運動，則其速率

$$v'=\frac{2\pi R'}{T'}=\frac{2\pi\times 384,000,000}{2,332,800}\cong 997(m/s)$$

依照離心力律，可得月球的離心趨勢 a'

$$a'\infty\frac{v'^2}{R'}=\frac{997^2}{384,000,000}\sim 0.0026(m/s^2)$$

故地表上物體的離心趨勢 a 與月球之離心趨勢 a' 的比值爲

$$\frac{a}{a'}=\frac{0.034}{0.0026}\sim 13$$

牛頓之計算值爲 12 又 1/2。因此，地表重力加速度 g 與月球離心趨勢 a' 的比值爲

$$\frac{g}{a'}=\frac{g}{a}\times\frac{a}{a'}\sim 290\times 13=3770$$

此數值相當接近牛頓所計算的 4000 或 4375 倍（表 1）。

已知月球的圓周軌道半徑約爲地球半徑的 60 倍，故依照日後牛頓萬有引力所述「引力與距離平方成反比」的理論，「地表重力加速度」應當是「月球向心力加速度」(類似最初的離心趨勢)之 3600 倍，以當時的科學精確度而言，4000 倍與 3600 倍可以視爲相近的數據。再者，牛頓當時所使用的數據是以義大利制爲單位，若以英國制爲單位，則數值便會相當接近。牛頓即是利用上述月球試驗，辯稱早在與虎克通信之前，他就已經有物體互相作用力的概念，也暗示月球受到地球重力，與維持行星在其軌道上的力兩者相類似。後來牛頓在晚年說明，由於自己在 1666 年對理論計算值與實際觀測值並不一致，而感到不滿意，加上對數據精確度的要求，使得他晚了二十年才將理論發表：

> 牛頓宣稱他在 1666 年就分析過行星運動，只是在 20 年後才寫在《原理》上，... 。並且在 1660 年代中期，他就認為力是相互作用的：月球拉地球的力與從地球延伸到月球的力一樣大，行星也可能會拉太陽，這兩種力是相同種類的。（Cohen, 1980, p. 232）

然而，即便觀測值與理論值相當接近，也不能證明牛頓在當時已經完成月球與地表物體初步地正確連結，因爲這項月球試驗的問題不是在於牛頓所用的單位，而是其基本概念的錯誤。牛頓在 1679 年到 1680 年間與虎克通信之前，都還是受到笛卡兒跟惠更斯的影響，認爲作繞行運動的行星具有「遠離中心的趨勢」，此時依然還沒有「向心力」的概念：

表 1：牛頓對地表重力(g)與月球離心趨勢(a')比值的估計與實際值之比較

離心趨勢與 重力	地球自轉之離心趨勢 (a)	地表重力 (g)	g/a	月球繞地之離心趨勢 (a')	a/a'	g/a'
牛頓估計值	每秒下降 5/9 吋	每秒下降 16 呎	350		12.5	4375
實際值	0.034 m/s^2	9.8 m/s^2	290	0.0026 m/s^2	13	3770

在 1660 年代，牛頓還是受到笛卡兒的影響，尚未建立行星沿曲線運動是受到「向心力」而非「離心力」的概念，直到 1679 年跟虎克通信後，才被提醒要考慮朝向中心加速的運動與慣性運動的合成，而這就是「向心力」提出的關鍵。天體重力延伸至月球，且是向著中心，這就是為何行星跟月球受到向心力，而持續不斷地偏離他們各自的慣性運動路徑。（Cohen, 1980, p. 231）

1666 年的月球試驗中，重力是朝向地球的力，而月球所受到的力是遠離地球之離心趨勢，牛頓是在毫無任何理論依據下，將「離心趨勢」與「朝向地球的重力加速度」兩個無關的概念進行比較，以致其工作並無實質上的貢獻，這也足以說明他在此時的物理概念還是含糊不清。在向心力的概念確立之前，將兩者進行比較，並無法得到重要結果，對力平方反比律優先權所提出的辯駁，也因此顯得脆弱無力。以致於有些學者考證過後，發現牛頓的自述很有可能是杜撰的：

在 1660 年代於牛頓的手稿中，都未發現任何暗示指出太陽作用在行星之上的力，與地球作用在月球之上的力是同樣的。同時期，他認為行星具有遠離的趨勢，而在 1679~1680 年代或是更晚，他認為行星受到的為向心力，而連續地偏離行星的慣性軌跡，這兩者有很大的區別。也就是說，在 1665 年代，牛頓還沒有將重力普遍化的概念，而他說早有這樣的概念，只是晚了 20 年才發表，這樣的說法是沒有根據的。甚至在當時，他都還沒有月球會有力作用在地球上，或是行星會作用在太陽上的概念。（Cohen, 1980, p. 233）

沒有向心力的概念，牛頓不可能提出「地球拉月球」的「引力」說法，也就無法得到月球所受引力與重力來自於相同形式的觀點。一直要到中年時期，在他將向心力和克卜勒的面積律結合後，及發現橢圓律、週期律與引力平方反比的數學關係，才可能慢慢發展成物理世界中的萬有引力定律。換言之，在 1666 年，牛頓的「萬有引力」尚未成形：

1666 年...牛頓沒有使用引力的概念，仍舊侷限於傳統的機械論哲學思維框架；他沒有指出萬有引力，而只是指出離心的趨向。（韋斯特福爾，2000，p. 157）

肆、虎克與朝向中心的趨勢力

牛頓如何從早期「作圓周運動物體所受之力爲離心趨勢」此種含糊的概念裡，跳脫出來？很主要的原因是來自虎克所給予的提示。

虎克一直對行星軌道爲何是橢圓形的問題有興趣，他曾試圖用「圓錐擺」的實例，來闡明物體從直線偏折爲曲線運動的原因，及可能得到橢圓軌道的情形，並嘗試與行星軌道做比較。圓錐擺的擺錘受力遵循虎克定律，也就是受力與其至擺中心的距離成正比；然而，日後所知的重力是與距離平方成反比，因此兩者之間力的數學形式並不相同。不過，雖然圓錐擺與重力的運動規律相異，但依據文獻記載，

虎克仍然用實驗的方法，提供了地表與天體系統很好的類比。

> 在天花板上懸掛一個擺，擺的末端連著一顆木球；結果發現，如果開始時沿著切向趨勢的衝力強於朝向中心的趨勢，就會產生一個橢圓運動，其最長的直徑與物體在第一擊瞬間所具有的趨向平行；而如果衝力弱於趨向中心的趨勢，那麼此時將產生另一種橢圓運動，其最短的直徑平行於物體在第一擊瞬間所具有的趨向；如果這兩者相等，那麼就會產生一個精確的圓周運動。（柯瓦雷，2003，p. 179）

虎克對於圓周運動的探討，並不是像牛頓一樣承襲於惠更斯，而是因爲本身對於天文學的興趣，他只是試圖解釋爲何行星會像克卜勒所描述的依橢圓軌道運行，並順帶引入圓周運動只是其中的一種可能情況。

> 1666 年 5 月 23 日，有一篇虎克先生的論文被宣讀，它說明一個直線運動是如何通過一種相伴隨的引力定律作用，而變到曲線運動，而這一引力定律還有待發現。其中包含的論述是對一個實驗所作的介紹，用以顯示圓周運動由一種沿著切向的直線運動趨勢，與一種朝向中心的趨勢複合而成。（柯瓦雷，2003，p. 178）

亦即早在 1666 年，虎克便認爲圓周運動是由一種沿著切向的直線運動趨勢，與一種「朝向中心的趨勢」組合而成，這時間比虎克與牛頓在 1679 年到 1680 年間通信討論行星軌道問題，還早了許多。姑且不論此處虎克所言「朝向中心的趨勢」來自何故，但牛頓於 1665 年時，仍主張離心力爲造成物體作圓周運動的原因，且其後十五年內並未發表進一步相關論述，可推知牛頓極有可能是在 1679 年與虎克通信討論之後，才從他身上得知：物體沿曲線軌道運動或圓周運動，是因受到中心「吸引」的觀點。

> 虎克理論可以說是對牛頓的一個很大刺激，因為虎克把行星運動視為「沿切線的直線運動，與指向中心物體的吸引（attraction）運動之合成」。（Cohen, 1980, p251）

此後牛頓便開始採用虎克所提朝向中心的趨勢或吸引力的觀念，來處理物體沿曲線軌道運動的現象，並獲得了突破性的發展（Brackenridge, 1995）。

伍、向心力與平方反比律

縱使虎克影響了牛頓對圓周運動物體的受力觀點，將之從「離心力」轉變爲「朝向中心的趨勢」，但虎克自己卻無法提出任何與朝向中心趨勢及橢圓或圓周運動之間，相關的數學分析與論証，也無法作出有效的預測。然而牛頓一旦轉換受力方向的觀念，立即得到了動力學上許多重大成果。

在 1684 年《自然哲學之數學原理》的前身《論運動》一書裡（Newton, 1684），牛頓從三個定義：向心力、慣性力、阻力，開始他的討論，而第一個定義即為：

定義 1

一物體被推動或吸引，朝向中心點的力，稱爲爲向心力。

這是「向心力」首次在科學文獻中正式出現。緊接著於 1687 年影響物理學深遠之巨著《自然哲學之數學原理》中，牛頓將向心力的物理意義與內涵，置於開宗明義的前兩個命題裡：

命題 1　定理 1

做環繞運動的物體，其指向力的不動中心的半徑所掠過的面積位於同一不動的平面上，而且正比於畫出該面積所用的時間。

命題 2　定理 2

沿平面上任意曲線運動的物體，其半徑指向靜止的或作等速直線運動的點，並且關於該點掠過的面積正比於時間，則該物體受到指向該點的向心力的作用。

互爲逆命題之此二命題，主要是陳述向心力的存在與面積律——物體與某靜止點的連線在相同時間掃過相等面積，完全等價同義，即

向心力的存在 ⟺ 面積律

由於作等速率圓周運動物體在相同時間內劃過相同弧長，掃過相同面積，故必定是受到指向圓心之向心力作用，而非離心力。牛頓在此指出爲何只有向心力才能讓物體作等速率圓周運動的幾何原因，這並非虎克所能體認出來的。

在提出向心力爲探討曲線運動的重要關鍵後，命題 4 接著指出牛頓在二十年前所得到圓周運動的離心力與離心力律的修正式，這依然純屬他個人的獨立創見，而非虎克的論述。

命題 4　定理 4

沿不同圓周等速運動的若干物體之向心力，指向各自圓周的中心，它們之間的比，正比於等時間裡掠過弧長的平方除以圓周的半徑。

命題 4　推論 6

如果週期正比於半徑的 3/2 次方，則向心力反比於半徑的平方；反之亦然。

即任一物體在不同半徑的圓周上作等速率運動，且也符合週期律時，則圓周運動的週期律便等價于距離平方反比力。

正圓的週期律 ⟺ 距離平方反比力

不僅圓周運動，牛頓也證實了受到平方反比力作用的物體會沿著橢圓軌道運動，且亦證明出其反命題：運動物體的軌道橢圓性，代表所受力滿足距離平方反比律。

命題 11　問題 6

物體沿橢圓運動，指向橢圓焦點的向心力反比於其到橢圓焦點距離的平方。在

建立圓與橢圓平方反比律的論証中，皆需使用向心力與面積律的特性。然後在第三卷裡，牛頓結合觀測數據，並利用以上述第一卷命題 4 與 11，完成了萬有引力原理的提出（項武義、張海潮、姚珩，2010；姚珩、田芷綾，2010；閻康年，1989）。

命題 5　系 2

任一行星所生的重力與至此行星中心之距離平方成反比。

註解:

使天體物體維持在其軌道上所謂之向心力，現已很明顯，它實在也就是一種引力（gravitation force），此後我們將稱它為重力（gravity）。

由這些對獲得引力的扼要論述中可清晰看出，向心力的概念貫穿全書，也是牛頓發現萬有引力的關鍵基礎，沒有向心力與其背後的深刻內涵，萬有引力理論幾乎是無法被建立起來。

陸、蘋果落地與月球繞地來自於相同原因

只有在向心力概念被正確建立起來後，牛頓才能提出有意義的月球試驗，以計算月球作圓周運動時，因受向心力影響所產生的下落距離 BD（圖 3），其中月球為 A，地球為 C（Newton, 1687；Chandrasekhar, 1997）。他利用下列數據：

(1) 月球至地球距離為 60 倍之地球半徑。

(2) 地球之圓周長為 1.232×10^8 Paris feet $=4.0\times10^7 m$

或 地球的半徑為

$R=4.0\times10^7 m/2\pi=6.37\times10^6 m$。

(3) 月球環繞地球一周為 27 日 7 時 43 分 =39,343 分。

每分鐘月球掃過之角度為

$\delta\theta = 2\pi/39{,}343$ rad。

(4) 可得每分鐘月球向地球下落之距離 BD 為

$$BD = AC\cdot\delta\theta\cdot\sin(\delta\theta/2)\cong 60R\cdot\delta\theta\cdot(\delta\theta/2)$$
$$=(1/2)\cdot(60\cdot 6.37\times10^6)\cdot(2\pi/39{,}343)^2$$
$$=4.87(m)$$

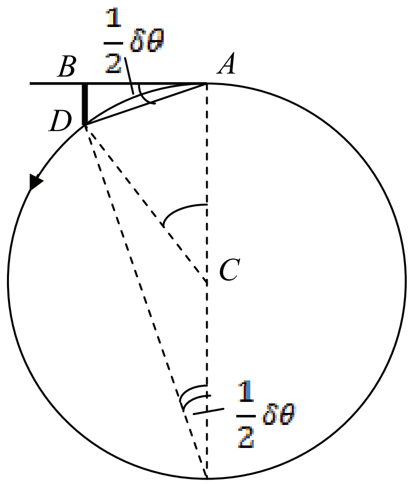

圖 3：正確的「月球試驗」示意圖

另外，由伽利略之水平拋射公式，月球垂直（或向心）下落之距離 y 與向下（或向心）加速度 a 之關係為

$$y = BD = (1/2)at^2$$

則可求得

$$a = 2BD / t^2 = 2 \cdot (4.87 / 60^2)$$
$$= 9.74 / 3600 (m / s^2)$$

若假設月球所受之向心力是平方反比力，在讓月球逐漸下降至地表時，其向心力或向心加速度將增強 3600 倍。令月球在地表的加速度 a'，即

$$a' = 3600 \cdot a = 3600 \cdot (9.74 / 3600)$$
$$= 9.74 (m / s^2) \cong g$$

g 即爲重力原因所造成地表上的重力加速度，其理論值爲 9.8m/s^2。所以，當月球逐漸下降至地表時，其向心加速度等於重力加速度；亦即，使月球運轉之向心力，和在地表上使物體下落之重力實屬同源，也就是來自同一原因，屬於同一力量。

柒、結論

向心力的概念與曲線運動的物體存在著向心力作用，這些想法的產生，實非易事，當初也絕不是一步到位，即全然清晰。從 1640 年左右，笛卡兒提出的「向外趨勢」，或「遠離中心的趨勢」開始，到惠更斯的「離心力」，再至 1665 年，歷經二十餘年，牛頓依然錯用此並非正確的離心力概念，並試圖利用它將地表上的下落物體與月球運動結合，計算出月球離心趨勢與地表重力之比值，還認爲它可合理反應出平方反比的作用意義。且爲了爭辯引力平方反比律提出之優先權時，他甚至還含糊或隱瞞地交待，距離平方反比力是在當時即已確認。然而，月球之離心力與地表向下之重力，此兩概念並無法正確的對應連結，縱使可將該分析數值視爲十分準確，卻無法掩飾其概念之模糊性。

於 1680 年之後，受到虎克的提示，牛頓將「離心力」轉變爲「吸引」的概念，進而提出「向心力」概念，且與他年輕時所作圓周運動的分析結合，充分掌握住了向心力與行星面積律、橢圓律及週期律的深刻關係，才得以建立起正確豐富的距離平方反比力、及萬有引力定律，藉此精確地計算及呈現出月球向心力與地表重力的一致性，並可詮釋其他許多天文現象，獲得了空前的成功與勝利，成爲古典物理時期最偉大的科學家。

一個原理或定律的建立，背後一定蘊藏有深刻且創新的「概念」，在物理學中這些概念並不需要太多，但它們卻時常是歷經層層的困難與障礙，才得以浮現出來的，殊爲難得可貴，且它們必扮演著重要的樞紐角色，更是描述科學原理的基礎。本文強調由於有了正確的「向心力」概念，牛頓才能完成其曲線運動的理論，並從中窺見引力的端倪，繼而提出重大的萬有引力定律。

科學教師們是否體會科學「概念」在科學發展和科學學習上的深刻意涵，決定了他們對科學的態度，及在教學上授課內容的時間分配，與教學時所強調與著重的思考方法。若老師們能明白概念是了解原理的關鍵，相信在一段時間之潛移默化下，學子們必能習得正確的學習方法，及體會出老師們的一片苦心。

捌、參考文獻

牛頓 (Newton, I. [168057] 20)：自然哲學之數學原理。台北：大塊文化。

柯瓦雷 (Koyré, A. 2003)：牛頓研究。北京：北京大學出版社。

韋斯特福爾 (Westfall, S. 2000)：近代科學的建構—機械論與力學。上海：復旦大學出版社。

項武義、張海潮、姚珩 (2010)：千古之謎—幾何、天文與物理兩千年。台北：台灣商務印書館。

姚珩、田芷綾 (2010)：萬有引力平方反比律來自於橢圓律還是週期律。台北：科學教育月刊 (已接受)。

閻康年 (1989)：牛頓的科學發現與科學思想。長沙：湖南教育出版社。

Brackenridge, J. (1995)：*The Key to Newton's Dynamics,* Berkeley：Univ. of California Press.

Chandrasekhar, S. (1997)：*Newton's Principia for the Common Reader*, Oxford：Oxford Univ. Press.

Cohen, I. (1980)：*The Newtonian Revolution,* New York: Cambridge Univ. Press.

Newton, I. (1684)：*On the motion of bodies in orbit,* Register Book of the Royal Society 6.