
發現克卜勒行星定律的清晰方法

項武義¹ 張海潮² 姚珩^{3*} 陳鵬仁³

¹美國加州大學柏克萊分校 數學系

²國立臺灣大學 數學系

³國立臺灣師範大學 物理系

日心說中地球並非靜止，而是隨時在運動中，但它卻是滿足面積律的一種規則運動，利用此特性可建立起行星－太陽距離與地球－太陽距離的數學關係，配合觀測所得行星環繞太陽之角速率，能很自然地以運動中的地球發現出其他行星的面積律。接著再使用行星繞日的週期性，即行星－太陽距離可表為角度之週期函數，配合實測的行星角度位置，可清晰建立起每顆行星之週期函數，且得知其形式恰為一橢圓方程，如此便能完成克卜勒當初歷經迂回困頓所獲致的橢圓律。我們以相對簡易的幾何、三角及代數運算，描述了行星運動的不變形式，並指出複雜行星系統的分析關鍵。

壹、前言

西方在柏拉圖（Plato, 427-347 B.C.）前後，已開始充分的以數學來描述自然現象，且認為球面幾何是為天文學而生，幾何學是宇宙學之一部分，幾何學原理亦為宇宙結構之實體呈現，故研究幾何學對了解天文學至為重要（克萊因，1972）。

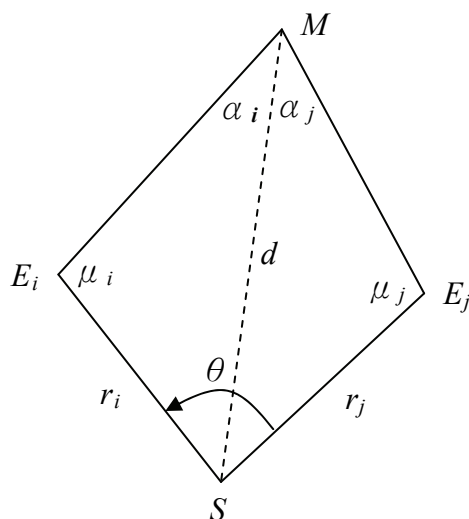
托勒密（Ptolemy, 85-165 AD）的天文學著作《至大論》（Almagest）確立了希臘三角學理論，並延續了一千多年，他以本輪、均輪的概念，相當準確的描繪出行星的運動，一直被大家接受，以至於被人們視為絕對真理。直到哥白尼（N. Copernicus, 1473-1543）以追求數學的和諧與對稱性為理想，強烈質疑本輪、均輪與偏心點的人為運作與複雜性，建立了同心圓的地動說，從而開啓了天文學的革命。

克卜勒（J. Kepler, 1571-1630）深受哥白尼日心理論的啓發，並全力支持，終其一生，進一步提出了以太陽為中心之行星三定律，確立了現代天文學的行星理論，更為牛頓（I. Newton, 1642-1727）的動力學奠定了穩固基礎。克卜勒的行星橢圓律與面積律發表於 1609 年之《新天文學》（Kepler, 1609）一書中，該書相當晦澀難懂，常以複雜冗長的幾何形式呈現，而非以現今易懂的數學表示。在哥白尼與克卜勒的天文系統中，地球不再是恆定不動，使得行星位置的決定也隨著複雜，但若建立了地球的運動規則－即地球的面積律與橢圓律（項武義，張海潮，陳鵬仁，姚珩，2010），則地球反而成為描繪其他行星位置

*為本文通訊作者

的重要有用的起點，與發現其他行星定律的基礎。

爲了讓克卜勒行星定律的根本精神，重新再現於學子面前，本文將以新穎的簡易方法，僅僅利用一般的三角函數及正弦定律，來發現及探索行星面積律與橢圓律，讓原本看似不可能被輕易了解的行星定律之發展，變成清晰親切。並讓學習者從中掌握住幾何、天文與物理學的緊密關係與分析方法，實際地體會出重大科學發展事跡裡的豐富內涵，浸潤在當初偉大科學家發現科學原理的樂趣裡，並培養出廣闊深刻的科學視野。



圖一：太陽 S 、火星 M 與相距一火星年兩地球位置 E_i 、 E_j 之示意圖

貳、火星的面積律

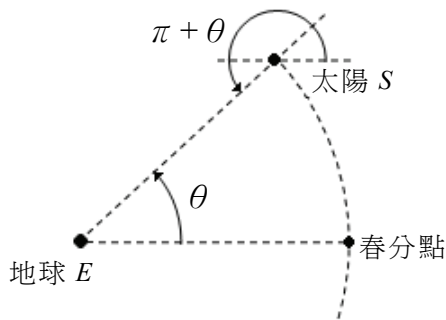
火星繞日週期已知爲 687.03 天或約 687 天，即每隔 687 天火星會回到在天體中相同的位置，而地球繞日週期爲 365 天，由於此二行星的繞日週期並沒有公因數，彼此互質，表示每經過一個火星年，當火星回到原來位置時，所對應的地球位置卻都不相同。如圖一，若 S 表太陽， M 爲火星或次火星年的火星位置， E_i 、 E_j 爲相隔一火星年所對應的地球位置。如此，太陽、火星與兩個地球位置，可形成一個四邊形 SE_iME_j ，其中 SE_i 和 SE_j 線段分別代表太陽到地球在兩個不同位置處的距離（簡稱日地距），並以 r_i 與 r_j 表示， SM 線段則代表太陽至火星之距離（簡稱日火距），以 d 表示。

一、太陽到火星的距離 d

若隨機選取地球在 E_i 位置的日期爲 1950 年 5 月 13 日 5 時，則在 E_j 位置的日期爲 1952 年 3 月 30 日 4 時，其中 E_i 與 E_j 之時間間隔爲一火星年。 $\angle SE_iM = \mu_i$ 是地球在 E_i 位置觀察太陽 S 和火星 M 的夾角，從觀測所得（可由 MICA 軟體系統精確計算所建立的天文資料，來提供與代表），地球在 E_i 處時，火星 M 爲（黃道）經度 172.557° ，太陽 S 爲經度 51.901° ，故 $\mu_i = 172.557^\circ - 51.901^\circ = 120.656^\circ$ 。同理，地球在 E_j 位置時至 S 與 M 所張之角度， $\angle SE_jM = \mu_j = 9.473^\circ + 360^\circ - 228.333^\circ = 141.140^\circ$ 。

此處所謂相對於地球的經度，是天文學家在地球觀測太陽時，將太陽在天球上的投影點以黃道經度標定。以太陽在春分

(3 月 21 日或 22 日) 時，地球觀察太陽的方向訂為經度 0° ，夏至 (6 月 21 或 22 日) 時，太陽的經度為 90° 等等，不過又因為太陽與地球的位置相差 180° ，所以在春分的時刻，太陽看地球的經度變成 180° ，夏至時刻太陽看地球的經度變成 270° ，依此類推 (圖二)。



圖二：自地球看太陽與自太陽看地球的角度關係

圖一中 $\angle E_i S E_j = \theta$ 是以太陽 S 為參考點，觀察地球在 E_i 、 E_j 處所張的角度，由此觀之，它似乎為不可觀測量，但藉上述地球與太陽彼此觀看角度的相對關係， θ 將為可觀測值。因為，若地球在 E_i 處觀測到太陽 S 的經度為 51.901° ，在 E_j 處觀測到 S 的經度為 9.473° ，則自太陽 S 觀測到地球在 E_i 處之經度為 $(51.901^\circ + 180^\circ)$ ，在 S 處觀測到 E_j 的經度為 $(9.473^\circ + 180^\circ)$ ，故

$$\begin{aligned} \angle E_i S E_j &= \theta \\ &= (51.901^\circ + 180^\circ) - (9.473^\circ + 180^\circ) \\ &= 51.901^\circ - 9.473^\circ = 42.428^\circ \end{aligned} \quad (1)$$

θ 值於是可被確定。

底下將利用 μ_i 、 μ_j 及 θ 此三可觀測

量，及地球的面積律，試著尋找出日火距 d 。若 $\angle E_j M S = \alpha_j$ ， $\angle E_i M S = \alpha_i$ ，由四邊形內角和為 360° ，則 $\mu_i + \mu_j + \theta + (\alpha_i + \alpha_j) = 360^\circ$ 或 $\alpha_i = 360^\circ - \mu_i - \mu_j - \theta - \alpha_j$ ，令 $\beta = 360^\circ - \mu_i - \mu_j - \theta$ ， β 則為一可觀測值，且

$$\alpha_i = \beta - \alpha_j \quad (2)$$

另一方面，四邊形 $S E_i M E_j$ 可視為由 $\triangle S E_i M$ 與 $\triangle S E_j M$ 所組成， $S M$ 為共邊，利用正弦定律，

$$\frac{d}{\sin \mu_i} = \frac{r_i}{\sin \alpha_i} \quad \frac{d}{\sin \mu_j} = \frac{r_j}{\sin \alpha_j} \quad (3)$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \alpha_i}{\sin \alpha_j} = \frac{r_i}{r_j} \frac{\sin \mu_i}{\sin \mu_j} \quad (4)$$

且日火距 d 為

$$d = \frac{\sin \mu_j}{\sin \alpha_j} r_j \quad (5)$$

若地球面積律已建立 (項武義，張海潮，陳鵬仁，姚珩，2010)，一如克卜勒在《新天文學》一書中所完成的前半段工作，即

$$r_i^2 / r_j^2 = \omega_j / \omega_i \quad (6)$$

此表示原本難以直接量測出來太陽與不同地球位置的距離比值，能夠藉著地球在不同位置的角速率 (即地球角度對時間的變化大小) 之比值推得，而地球角度的變化在天文觀測中正是能夠天天實測的基本數據。因此， r_i / r_j 之值可知， μ_i 、 μ_j 也已知，由式 (4) 可得 $\sin \alpha_i / \sin \alpha_j$ ，設此比值為 k ，即

$$\sin \alpha_i = k \sin \alpha_j \quad (7)$$

合併式(2)與(7)，可得

$$\sin \beta \cos \alpha_j - \cos \beta \sin \alpha_j = k \sin \alpha_j$$

兩邊同除 $\sin \alpha_j$ 整理後有

$$\alpha_j = \cot^{-1} \left(\frac{k + \cos \beta}{\sin \beta} \right) \quad (8)$$

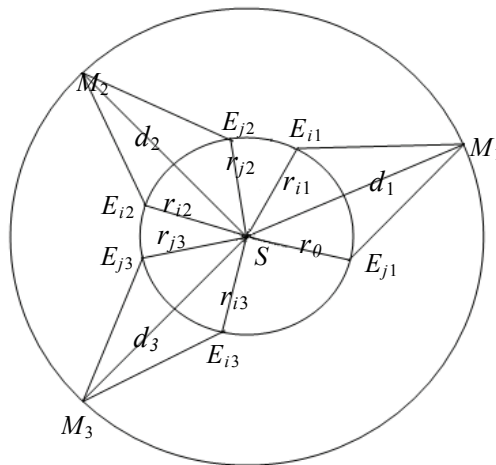
由於 β 及 k 均為可觀測量，故 α_j 亦為一可觀測量。代入式(5)，最後日火距 d 將直

接可以日地距 r_j 表示。

對於隨意選取五個不同的觀測日期，由式(5)與(8)所求得之日火距 d 列於下表一，其中設 1952 年 3 月 30 日的日地距大小 $r_{j1} = r_0 = 100000$ (圖三)。

表一：隨意選取五個不同日期計算所得之日火距 d (括號內日期與無括號日期相差一火星年)

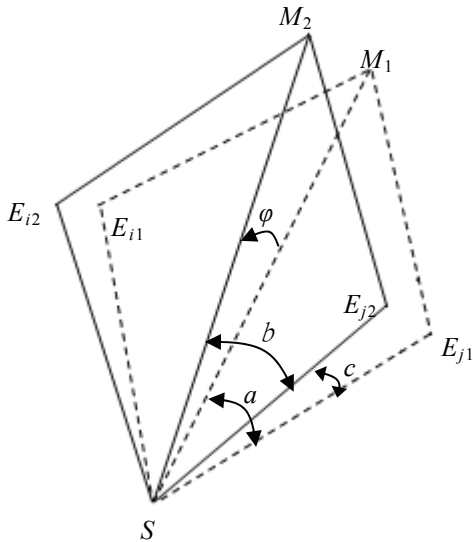
日期	μ_i	μ_j	θ	β	k	α_j	r_j	d
1950. 5. 13 (1952. 3. 30)	120.656°	141.140°	42.456°	304.253°	1.387	22.973°	100000	160750
1952. 6. 21 (1954. 5. 9)	122.319°	130.592°	41.744°	294.655°	1.12	30.593°	101072	150805
1954. 8. 15 (1956. 7. 2)	125.251°	116.179°	41.593°	283.024°	0.906	40.722°	101770	139993
1956.11. 1 (1958. 9. 19)	126.837°	116.786°	43.041°	286.665°	0.885	39.256°	100518	141804
1959. 1. 7 (1960.11.24)	122.044°	133.781°	44.249°	300.073°	1.17	27.383°	98793	155079



圖三：日火距 d 可以日地距 r 來表示，並以 $r_{j1} = r_0 = 100000$ 當作標準

二、火星的角速率 ω

火星繞日的角速率 ω ，代表火星於某段時間內（如一日內）相對於太陽的角度變化，它亦無法直接由觀測得知，必須嘗試尋找它與觀測值的間接關係。



圖四：太陽 S 、地球 E 與火星 M 在間隔一日後，所分別形成的四邊形 $SE_{i1}M_1E_{j1}$ 和 $SE_{i2}M_2E_{j2}$ 。則火星一日內所行經的角度 $\varphi = b + c - a$ 。

圖四為間隔一日，太陽 S 、地球 E 和火星 M 所分別形成的兩組四邊形 $SE_{i1}M_1E_{j1}$ 與 $SE_{i2}M_2E_{j2}$ 。火星每日的角速率 ω 即為火星相對於太陽 S 自 M_1 移動至 M_2 所張的角度 φ 。在四邊形 $SE_{i1}M_1E_{j1}$ 中， $\angle SE_{i1}M_1$ 、 $\angle SE_{j1}M_1$ 和 $\angle E_{i1}SE_{j1}$ 的角度，如圖一中之 μ_i 、 μ_j 和 θ ，為可觀測量，且 $\angle E_{j1}M_1S$ 如圖一中之 α_j ，可由式 (7) 得到。對 $\triangle SE_{j1}M_1$ 而言，由內角和關係（參考表一），

$$\begin{aligned} & \angle M_1SE_{j1} \\ &= 180^\circ - \angle SE_{j1}M_1 - \angle SM_1E_{j1} \\ &= 180^\circ - 141.140^\circ - 22.973^\circ \\ &= 15.887^\circ \end{aligned}$$

同理，對第二天太陽、地球與火星所形成之 $\triangle SE_{j2}M_2$

$$\begin{aligned} & \angle M_2SE_{j2} \\ &= 180^\circ - \angle SE_{j2}M_2 - \angle SM_2E_{j2} \\ &= 180^\circ - 142.194^\circ - 22.438^\circ \\ &= 15.368^\circ \end{aligned}$$

太陽 S 至地球位置 E_{j1} ，及次日地球位置 E_{j2} ，所張角度 $\angle E_{j1}SE_{j2}$ ，類似圖一中之 θ ，可由式 (1) 及觀測值，得知

$$\angle E_{j1}SE_{j2} = 10.461^\circ - 9.473^\circ = 0.988^\circ$$

所以，在一日內火星相對於太陽所經過的角度（圖四）

$$\begin{aligned} \varphi &= \angle M_2SE_{j2} + \angle E_{j1}SE_{j2} - \angle M_1SE_{j1} \\ &= b + c - a \\ &= 15.368^\circ + 0.988^\circ - 15.887^\circ \\ &= 0.469^\circ \end{aligned} \tag{9}$$

即為火星在該日的角速率 ω 。表二列出火星在表一中所選取五個不同日期，計算所得之火星角速率 ω 。

表二：對於表一所選取五個不同日期火星角速率 ω 之計算值

日期	ω
1950. 5.13	0.469
1952. 6.21	0.534
1954. 8.15	0.620
1956.11. 1	0.603
1959. 1. 7	0.504

三、行星面積律

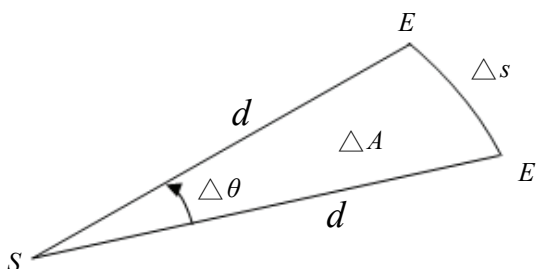
行星之面積律意謂行星與太陽連線在相同時間掃過相等面積，如圖五所示

$$\Delta A = \frac{1}{2} d^2 \Delta \theta$$

所以面積速率

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} d^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} d^2 \omega$$

式中 ω 是行星繞日的角速率



圖五：地球面積律示意圖

故欲發現面積律，即在檢視：不同行星位置至太陽之距離平方，與在該點所對應的行星角速率 ω 之乘積恆為定值，即

$$d_i^2 \omega_i = d_j^2 \omega_j \quad (10)$$

或者檢視 d_j^2 / d_i^2 之比值與 ω_i / ω_j 之值是否會相等。結合表一與表二所提供在不同日期的日火距 d 及火星角速率 ω ，可得 d_j^2 / d_i^2 與 ω_i / ω_j 兩比值（表三）。

其中 d_i 與 ω_i 都取 1950 年 5 月 13 日的數據為比較標準。由表三最後兩行可以看得出來，火星的 d_j^2 / d_i^2 之值與 ω_i / ω_j 之值幾乎恆等，相差不超過 1%，代表了由公認的天文觀測資料，火星確實嚴格遵行著克卜勒面積律，此為讓人感到振奮，

又不出意外的結果。

表三：五個不同日期火星日火距平方 d_j^2/d_i^2 比值與對應角速率 ω_i/ω_j 比值

日期	d	ω	d_j^2/d_i^2	ω_i/ω_j
1950.5.13	160750	0.469	1.000	1.000
1952.6.21	150805	0.534	0.880	0.878
1954.8.15	139993	0.620	0.758	0.756
1956.11.1	141804	0.603	0.778	0.778
1959.1.7	155079	0.504	0.931	0.931

參、火星的橢圓律

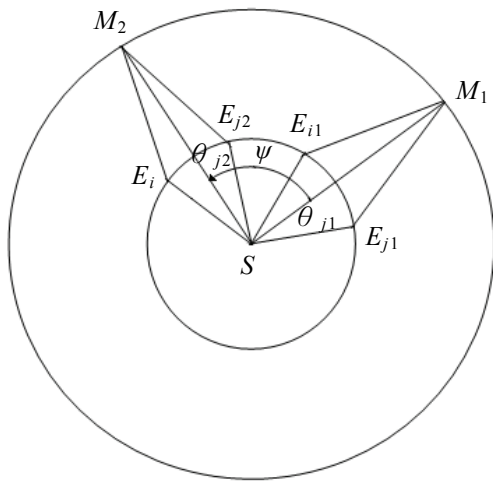
由於火星繞日運轉為週期性運動，代表日火距 d 為火星與太陽連線角度 ψ 的週期函數。而對任一週期函數 d 或其倒數 $1/d$ 均可以傅利葉級數表示（Knopp, 1996），即

$$\frac{1}{d} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\psi + b_n \sin n\psi]$$

茲考慮在最理想情況，此週期函數足以單角 ψ 的正餘弦項來充分代表

$$\frac{1}{d} = a_0 + a_1 \cos \psi + b_1 \sin \psi \quad (11)$$

欲確定上式中的 a_0 、 a_1 及 b_1 三個未知係數，需要三組數據，形成三元一次聯立方程式後求得。



圖六：兩次火星衝之火星相對於太陽的角度變化 ψ

現選取火星 M_1 在 1950 年 5 月 13 日位置作起始參考（如圖六及表一），在 $\triangle SE_{j1}M_1$ 中， $\angle SE_{j1}M_1 = \mu_{j1}$ 為可觀測值， $\angle SM_1E_{j1} = \alpha_{j1}$ 為計算值，可由式（8）得知，並列於表一中，故 $\theta_{j1} = 180^\circ - \mu_{j1} - \alpha_{j1} = 180^\circ - 141.140^\circ - 22.973^\circ = 15.887^\circ$ 。再次觀測火星 M_2 在表一中 1952 年 6 月 21 日之位置，同理可得 $\theta_{j2} = 180^\circ - 130.592^\circ - 30.593^\circ = 18.815^\circ$ 。由觀測地球與太陽之相對角度，也可知地球自 E_{j1} 移動到 E_{j2} 所經過的角度 $\angle E_{j1}SE_{j2} = 38.394^\circ$ ，故 $\angle M_1SM_2 = \psi = \angle E_{j1}SE_{j2} + \theta_{j2} - \theta_{j1} = 38.394^\circ + 18.815^\circ - 15.887^\circ = 41.322^\circ$ 。若取 M_1 至 S 的連線為水平軸，或 0° 角，則 ψ 即為火星在不同位置 M_2 至 S 連線所張之角度。以類似方法，可求得表一中其他兩天 1954 年 8 月 15 日及 1956 年 11 月 1 日火星至太陽連線之角度 ψ （表四）。

表四：依照表一中數據計算所得對應之火星至太陽連線所張之角度 ψ

日期	ψ
1950. 5.13	0.000°
1952. 6.21	41.337°
1954. 8.15	98.458°
1956.11. 1	174.976°

（取 1950 年 5 月 13 日火星至太陽連線為 0° 角作參考）

將 1952 年 6 月 21 日，1954 年 8 月 15 日及 1956 年 11 月 1 日三天之日火距 d 及對應之火星角度 ψ ，代入週期關係式（11），有

$$\frac{1}{d_1} = a_0 + a_1 \cos \psi_1 + b_1 \sin \psi_1$$

$$\frac{1}{d_2} = a_0 + a_1 \cos \psi_2 + b_1 \sin \psi_2$$

$$\frac{1}{d_3} = a_0 + a_1 \cos \psi_3 + b_1 \sin \psi_3$$

解此三元一次方程組，得

$$a_0 = 0.00000662,$$

$$a_1 = -0.00000040,$$

$$b_1 = 0.00000047.$$

因此火星繞日運動距離倒數的週期函數為

$$\frac{1}{d} = 0.00000662 - 0.00000040 \cos \psi + 0.00000047 \sin \psi \quad (12)$$

為證實上述四個火星位置所建立之此週期函數為一普遍式。可再任取五個不同日期，由數據求得該日期所對應火星至太

陽所張之角度 ψ ，並列於表五。由週期關係式 (12) 求得其日火距 d' ，與在尋找面積律中所引用之日火距式 (5) 中之 d 比較， d' 與 d 二值幾乎完全相等，可證實式 (12) 所表角度 ψ 之週期函數 $1/d$ 之正確有效性。

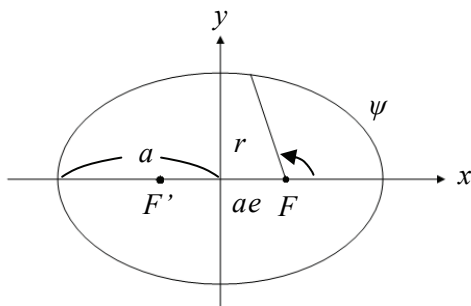
表五：隨意選取五個不同日期，比較週期關係式所求得之日火距 d' 及由式(5) 利用正弦定律所計算之日火距 d

日期	d	ψ	d'	$(d' - d)/d$ (%)
1959.1.7	155090	235.697°	154866	-0.144
1961.2.21	164125	277.814°	163935	-0.116
1963.3.25	166678	310.942°	166587	-0.055
1965.4.29	163511	345.914°	163462	-0.030
1967.6.6	155039	24.493°	155018	-0.014

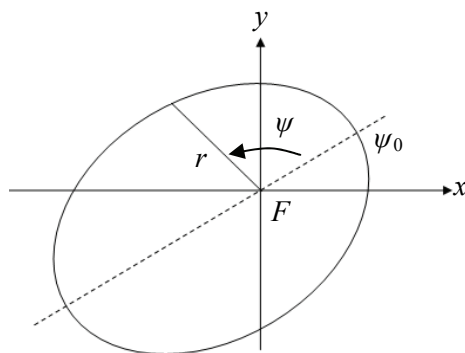
(12)是否會描繪出一橢圓軌道？若假定橢圓的長軸與座標 x 軸重疊，則橢圓方程式為

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\psi}$$

其中， a 為半長軸長， e 為離心率 (圖七) (Harris, 1998 ; Lawrence, 1972 ; Symon, 1971)。此橢圓方程式亦可寫成



圖七：與 x 軸重疊之橢圓的座標表示



圖八：與 x 軸不重疊之橢圓的座標表示

$$\frac{1}{r} = \frac{1+e\cos\psi}{a(1-e^2)} = A + B\cos\psi \quad (13)$$

其中 $A = \frac{1}{a(1-e^2)}$ ， $B = \frac{e}{a(1-e^2)}$ ，如果

橢圓長軸與 x 軸不重疊 (圖八)，則式 (13) 得改寫成

$$\frac{1}{r} = A + B\cos(\psi - \psi_0) = A + n_1 \cos\psi + n_2 \sin\psi \quad (14)$$

此處 $n_1^2 + n_2^2 = B$ ， $\sqrt{n_1^2 + n_2^2}/A = B/A = e$ 。

式 (11) 或 (12) 因此已具備橢圓方程式 (14) 的形式，可確認火星的確是沿著以太陽為焦點的橢圓軌道運動，結合此三式，火星離心率 e 之計算值為

$$e = \frac{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}{a_0}$$

$$= \frac{\sqrt{(-0.00000040)^2 + (0.00000047)^2}}{0.00000662} = 0.0093$$

此結果與火星軌道離心率的公認值 0.093 完全相同，再次證實火星繞日運動的週期函數與橢圓方程式對等，且其運行軌道滿足橢圓律。

對於其他四顆行星—木星、土星、水星、金星可完全以相同方法，發現其面積律與橢圓律（項武義，張海潮，姚珩，

2010），在此僅再舉木星為例，描述其所遵循的行星規則。

肆、木星的行星定律

一、面積律

參考圖一與圖二，木星與太陽之日木距 d 也可由日地距（此處取 1962 年 8 月 6 日之值） $r_{j1} = r_0$ 為 100000 為參考值。則其他隨意選取四個不同日期計算所得之日木距 d ，同理可由式 (5) 及式 (8) 求得，並列於表六。

利用圖四關係，可自木星在表六中所選取不同日期之觀測值，求得所對應之木星角速率 ω ，如此可檢視 $d^2 \omega$ 是否為常數，或 $d_j^2 / d_i^2 = \omega_i / \omega_j$ ，而建立起木星之面積律（如表七所示）

表六：隨意選取五個不同日期計算所得之日木距 d

日期	μ_i	μ_j	θ	β	k	α_j	r_j	d
1962. 8. 6	146.236°	152.523°	49.469°	348.228°	1.191	5.372°	100000	492868
1964.10.19	145.966°	151.732°	50.540°	348.238°	1.169	5.422°	98199	492182
1966.12.28	144.850°	153.833°	50.363°	349.046°	1.311	4.737°	96988	517905
1969. 2.26	145.841°	154.098°	49.561°	349.500°	1.303	4.557°	97683	537089
1971. 4.29	146.757°	153.745°	48.787°	349.289°	1.251	4.757°	99306	529690

表七：任取五個不同日期顯示 d_j^2/d_i^2 與 ω_i/ω_j 幾乎完全相等，證得木星之面積律

日期	d	ω	d_j^2/d_i^2	ω_i/ω_j
1962. 8. 6	492868	0.090	1.000	1.000
1964.10.19	492182	0.090	0.997	0.997
1966.12.28	517905	0.081	1.104	1.104
1969. 2.26	537089	0.076	1.187	1.188
1971. 4.29	529690	0.078	1.155	1.155

二、橢圓律

利用圖六，選取木星在 1962 年 8 月 6 日位置作為起始參考，在表七中其他三個日期之木星至太陽連線所張之角度，可與火星類似方法求得，並列於下表八。

表八：依照表六中數據計算所得對應之木星至太陽連線所張之角度 ψ (取 1962 年 8 月 6 日木星至太陽連線為 0° 角作參考)

日期	ψ
1962. 8. 6	0.000°
1964.10.19	73.328°
1966.12.28	142.104°
1969. 2.26	203.869°

由日木距週期函數式 (11)，可求得木星繞日運動的週期關係式為

$$\frac{1}{d} = 0.000001950 + 0.000000075 \cos\psi + 0.000000058 \sin\psi \quad (15)$$

將此距離關係式計算所得之日木距，與公認的觀測值相比較，彼此完全相等(表九)。可知此週期函數確實可準確描繪出木星之運動軌跡。

由於式 (15) 亦為一橢圓軌跡方程式，如式 (14)，證實木星軌道為一橢圓軌道，且其離心率

$$e = \frac{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}{a_0} = \frac{\sqrt{(-0.000000075)^2 + (0.000000058)^2}}{0.000001950} = 0.049$$

與木星軌道離心率的公認值 0.048 相差無幾，再次顯示木星的運行軌道是以太陽為焦點的橢圓軌道，而滿足行星橢圓律。

伍、結論

我們以地球作為發現各個行星定律的基礎，只是這個地球並非靜止，而是隨時在運動中，但它卻是有規律的運動—滿足面積規律，利用它可建立起行星—太陽距離與地球—太陽距離的數學關係，如式 (5) 所示，配合行星環繞太陽之角速率，便可很自然的發現其他行星之面積律。

由於行星繞日週期運轉，代表行星—太陽距離可表為角度之週期函數，利用觀測的行星角度位置，及由地球的面積律求得之行星至太陽距離，而能建立起每顆行

星之週期函數式，且其形式為一橢圓方程式。由此，不僅可發現描繪行星距離的軌跡式，且證實此行星軌道是以太陽為焦點的橢圓軌道，因而確立了行星橢圓律。

我們以相對簡易清晰的幾何關係、三角學及基本代數，描述了行星運動的不變形式，讓學子體會如何以有力的數學方法，來分析複雜但重要的行星系統，從中尋找出自然現象背後的和諧性與簡潔性，並以此實例，奠定與擴展日後邁向數理科學研究的基礎與信心。

陸、參考文獻

克萊因 (Klein, M. [1972], 1983): 數學史—數學思想的發展。台北: 九章出版社。
項武義, 張海潮, 陳鵬仁, 姚珩 (2010),

重訪克卜勒—地球的面積律與橢圓律, 台北: 數學傳播 (已接受)。
項武義, 張海潮, 姚珩 (2010): 千古之謎—幾何天文與物理兩千年。台北: 台灣商務印書館。
Harris, J. and Stocker, H. (1998). "Ellipse" §3.8.7 in Handbook of Mathematics and Computational Science. New York: Springer-Verlag, 93.
Kepler, J. ([1609] 1992). New Astronomy. New York: Cambridge University Press.
Knopp, K. (1996). "Periodic Functions." Ch. 3 in Theory of Functions Parts I and II, Two Volumes Bound as One, Part II. New York: Dover, 58-92.
Lawrence, J.D. (1972). A Catalog of Special Plane Curves. New York: Dover, 72-78.
MICA — Multiyear Interactive Computer Almanac (美國海軍天文台星體位置計算軟體), Version 2.0
Symon, R. (1971). Mechanics. 3rd ed. New York: Addison-Wesley, 131-133.