
哥白尼行星系統的和諧性

錢宜新^{1*} 姚珩²

¹桃園縣立同德國民中學

²國立臺灣師範大學 物理系

壹、前言

無論是現代人或古人對世界的組成及起源都充滿好奇，並期待能尋找最佳的解答；抬頭所見的深邃穹蒼更是人們想像力馳騁的園地，也是值得極盡智慧去探索的密境。人類一直都嘗試著能闡述終生仰望、浩瀚無涯的宇宙天際。

早期西方天文學是以亞里士多德（Aristotle, 384-322 B.C.）以人為中心之哲學觀為出發點，並在西元一世紀初由托勒密（Ptolemy, 85-165）所整理及發表成的重要著作—《天文學大成》（Almagest）—奠定了基礎。他們主張地球靜止在宇宙的中心，恆星散佈在宇宙天球上，宇宙天球是原動者，推動各層行星、太陽和月球繞地球運轉，配合均輪（deferent）和本輪（epicycle），相當成功地解釋了天體運行的問題，且可完成許多天象的預測。之後一千多年，由於天文資料逐漸累積，爲了要能更正確符合這些新的觀測數據，需要不斷加上更多的本輪，造成「地心說」變成了相當龐大複雜的系統。

16世紀，文藝復興運動鼎盛，這場關於文學、藝術、與科學思想等各方面的文化發揚，成爲日後天文革新的紮實背景。

人文主義摧毀了亞里士多德自然哲學的基本概念，認爲要從不變的精神世界中去發現實體，而不是從日常生活中的變動事物切入。柏拉圖（Plato, 427-347 B.C.）是這個理念的最初及最主要的來源，並融入後期希臘一些神秘的宗教冥思色彩後，就成爲了「新柏拉圖主義」。新柏拉圖主義學者主張要從可變的生活世界中，提昇到一個純粹精神的永恆世界裡，而數學則是必要樞紐，在數學中可發現開啓神聖靈性、以及宇宙基本性質的鑰匙（伯特，1994）。

科學革命的開創者哥白尼（N. Copernicus, 1473-1543）爲新柏拉圖主義的一位堅定信仰者，他承繼了其中兩個主要的哲學概念：算術與幾何的簡單性與和諧性是了解自然現象的根本關鍵，以及太陽爲宇宙中一切活力與能量的重要來源。哥白尼曾經如此描述著他心目中的新宇宙：「太陽的王位雄踞在所有位置的中心，在這個最爲壯麗的殿堂裡，我們還能把這光芒四射的天體放在比這更好的位置，並使它可以立刻普照萬物嗎？」哥白尼對數學簡潔性的想法，和對太陽的崇拜，促使他開始思考：如何重新安排宇宙中各星體，才能展現自然的完美（庫恩，1985）。

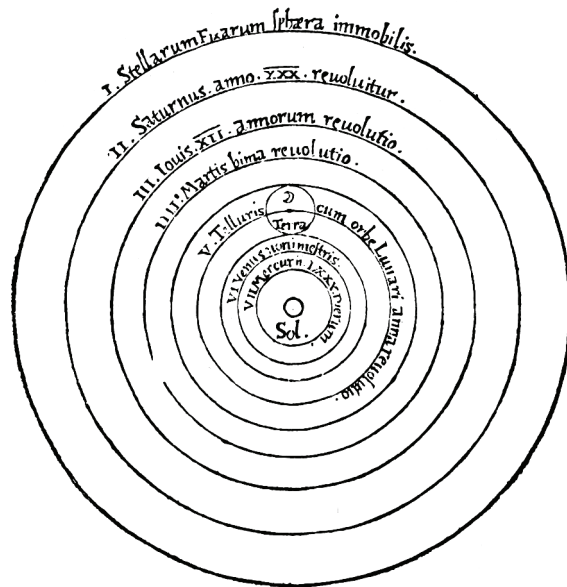
* 爲本文通訊作者

貳、日心說的建立

哥白尼看到托勒密體系的雜亂無章，所添加的大小本輪讓整個體系顯得不協調，他無法想像神造的世界會如此不完美。因此認為，傳統天文學一定有個關鍵性的錯誤。文藝復興時期回復並榮耀古希臘時期的中心思想，加上印刷術的發展，使得哥白尼有機會閱讀許多古籍。他發現希臘時代的赫拉克立德（Heraklides, 387-312 B.C.）主張地球在運動，像一只車輪般，繞著某中心旋轉；費羅勞斯（Philolaus, 480-385 B.C.）則相信地球像太陽和月亮一樣，沿著傾斜的圓周繞著一團火旋轉。哥白尼受到這些古人的啟發，加上新柏拉圖主義找尋現象背後實體的精神，他於是嘗試追求比托勒密系統更完美

的宇宙模型。這是一個突破性的想法，直指體系核心的錯誤，而不像歷代天文學家在大小本輪上做細部修改，或是見風轉舵地為不同現象做獨立解讀。

在 1543 年他所發表的革命性著作《天體運行論》中的第一卷，哥白尼簡短地述說新宇宙的美學與哲學觀，太陽為宇宙的中心，恆星天球是最遙遠的一層，行星在固定的圓形軌道上作均勻的等速率運動，由內而外依序是水星、金星、地球和月球、火星、木星和土星，以幾何的眼光來說這是一個相當簡單的宇宙模型（圖一）。哥白尼強調天體運行的對稱性和和諧關係，而地球的位置與運動，則是他的新天文系統與托勒密系統最大的不同點（哥白尼，1543）。



圖一：哥白尼的簡單宇宙模型

參、複雜的行星逆行與簡單和諧的日心說

哥白尼系統中各行星以太陽為中心，分別沿著不同的同心圓軌道運行，具有對稱之美；每顆行星又皆以等速率運動，符合均勻原則；且各行星軌道半徑間的固定比例，如同醉人音律般所呈現的和諧。哥白尼宇宙體系最大的優點即在於以此種簡單的幾何形式，將看似複雜的天體運行現象，化成為簡潔清晰的結構。

一、複雜的行星逆行現象

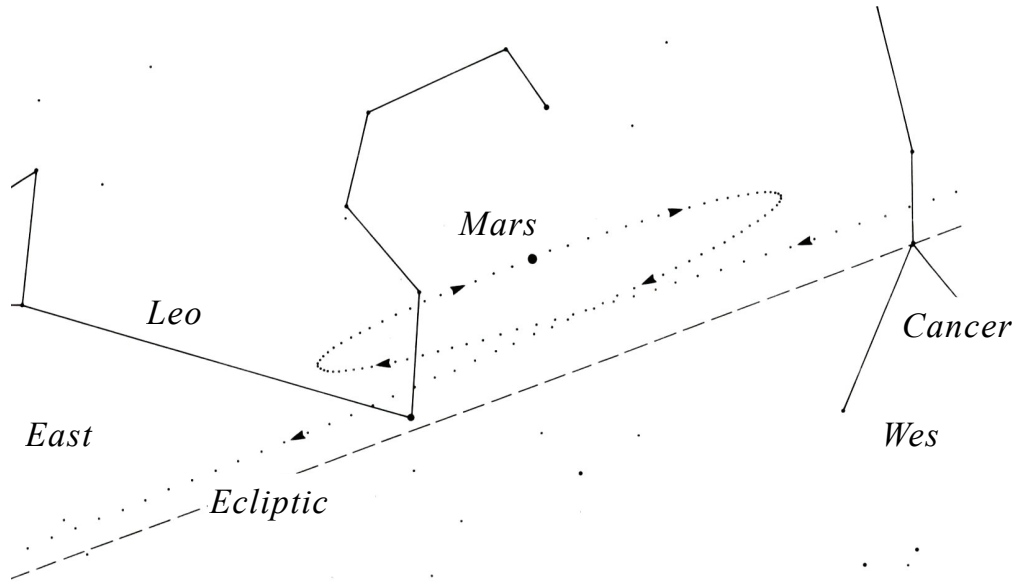
托勒密系統所面對最棘手的問題，即是要能描繪與詮釋行星所呈現出不規則的運動—逆行現象。行星每到夜裡會從東方升起，有如月亮一般，但若在每天午夜紀錄其位置，卻可發現奇異的不規則現象(如圖二)。此圖為火星在 2006 年於不同午夜時分所記錄出的不同位置，可看出它的運行並不總是規律地向東，而是在一段時間後，將出現短暫的停「留」，回頭向西「逆行」，接著再經歷一次停「留」，回到繼續朝向東方的順行運動 (Zeilik & Gregory, 1998)。這種行星的逆行造成托勒密必須在各自行星繞地的圓軌道上，不斷再加上許多小圓(即本輪)，到最後累計起來可多達八十多個 (Pananides & Arny, 1979)。而在哥白尼系統中，行星的逆行只是地球與行星同為繞日運動，因不同相對位置，所形成簡單的自然現象。哥白尼的同心圓宇

宙模型中，地球為排列第三的行星，在地球軌道以內的水星和金星可以稱為地內行星 (inferior planet)；地球軌道以外的火星、木星和土星則可稱為地外行星 (superior planet)。茲以地內行星為例，如圖三，地球在軌道上運行，位置依序為 E1、E2、... E5，而行星的位置則依序為 P1、P2、... P5；1、2、... 5 則代表從地球上觀察行星在天球上的相對應位置。位置 1 到 2 與位置 4 到 5 間，行星的運行是正常順行，但從位置 2 到 4 時，則發生了逆行情形。如此可以很輕易地描述出複雜的行星逆行現象 (庫恩, 1985)。為了得到更精準的確認，現將進一步介紹行星逆行簡易的數學分析。

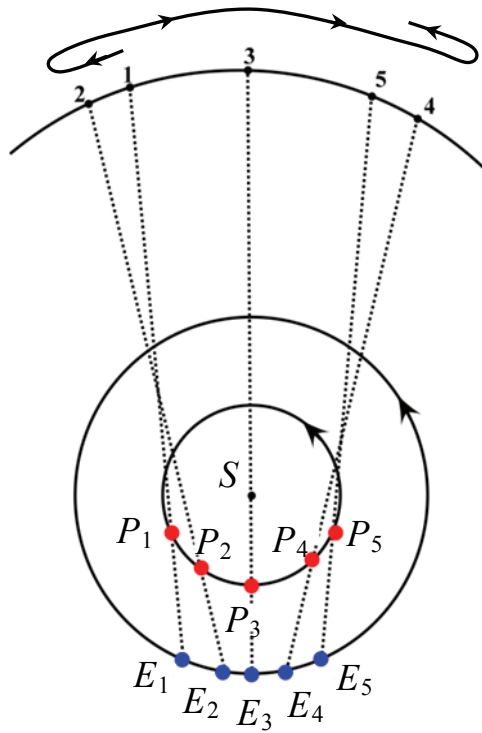
二、行星逆行中簡單的數量關係

(一)行星的逆行與繞日週期

茲先探討地內行星逆行現象與繞日週期之關係，地外行星的情形非常類似(錢宜新和姚珩, 2009)。對地內行星而言，它與地球、太陽的相對位置可繪成圖四，行星的軌道在地球之內，故地球看該行星，與地球看太陽的夾角總是侷限在某個角度之內。可以依照方位的不同分成東大距 (eastern greatest elongation) 與西大距 (western greatest elongation)，且它們的發生具有週期性。當地球—行星—太陽三點共線時，且行星位於中間時，稱為下合 (inferior conjunction)。



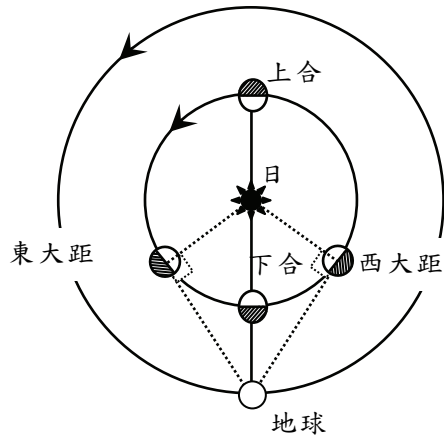
圖二：2006年火星逆行的軌跡圖



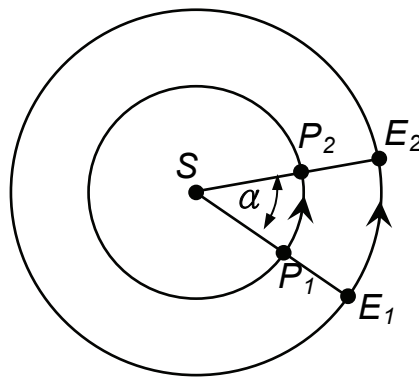
圖三：地內行星的逆行示意圖：發生逆行的中間處點3，地球、行星與太陽恰為 E_3-P_3-S 恰形成下合

因地球公轉一周的時間為 1 年，因此地球的平均角速率可寫為 $\omega_E = 360^\circ/1\text{年}$ ，若地內行星公轉週期為 T 年，則該行星的平均角速率為 $\omega_p = 360^\circ/T\text{年}$ 。當日—行星—地球的相對位置為下合(即 $S-P_1-E_1$)(圖五)，此時為行星逆行運動的中間點(圖

三)。經過 t 年，日—行星—地球的相對位置又形成另一個下合($S-P_2-E_2$)，則 t 年便代表了兩次下合發生的時間間隔。另一方面，在 t 年之間，地內行星行進了 $(360 + \alpha)^\circ$ ，其中 α 為兩直線 SP_1E_1 與 SP_2E_2 間之夾角。



圖四：太陽、地內行星與地球相對位置示意圖



圖五：地內行星發生連續兩次下合與地球的位置關係圖

行星繞日公轉圓週運動的平均角速率
則為

$$\omega_P = \frac{360^\circ}{T\text{年}} = \frac{(360 + \alpha)^\circ}{t\text{年}}$$

而地球公轉的角速率為

$$\omega_E = \frac{360^\circ}{1\text{年}} = \frac{\alpha^\circ}{t\text{年}}$$

由上兩式，可得

$$\frac{360^\circ}{T} = \frac{360^\circ}{t\text{年}} + \frac{360^\circ}{1\text{年}}$$

同除 360° 後，可知

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{t} + 1 \quad \text{或} \quad t = \frac{T}{1-T} \quad (1)$$

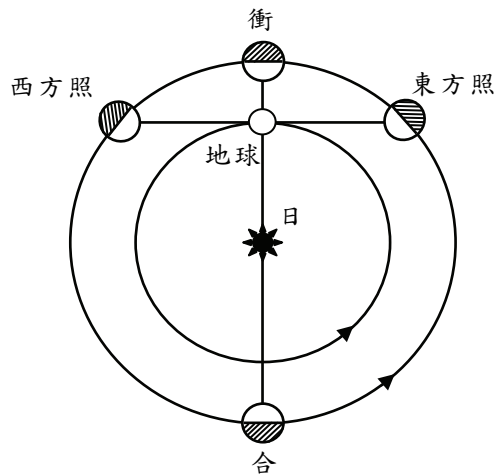
此式清楚地表示了兩次地內行星下合的時間間距 t ，與公轉週期 T 之關係。同理，若行星繞日為圓軌道，且為等速率圓周運動，則兩次地外行星衝的時間間距 t 與公轉週期 T 之關係可表示為 (Bechler, 1991)

$$t = \frac{T}{T-1} \quad (2)$$

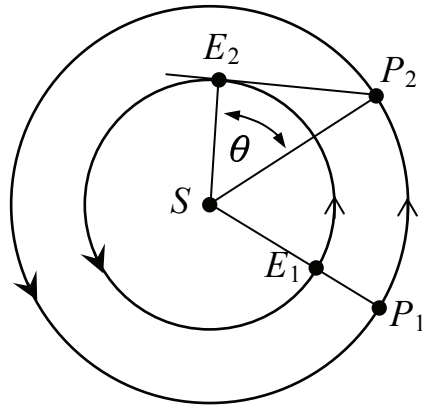
(二) 行星的逆行與繞日軌道半徑

為對應起見，此處先探討地外行星的逆行現象與繞日軌道半徑之關係，地內行星的情形非常類似。以地外行星(如火星、木星及土星)為例，在哥白尼系統的論述中，有兩個重要的行星位置需要掌握。當太陽、地球與行星連成一直線，且地球在太陽與行星中間時，稱為行星衝 (opposition)；當太陽-地球-行星成直角時，稱為方照 (quadrature)；如圖六。若地球軌道半徑 $r=1$ ，地外行星軌道半徑為 R ，從相對位置為衝開始 ($S-E_1-P_1$)，經過時間 τ 後，地球、行星位置分別為 E_2 、 P_2 ，形成方照，此時 $\overline{SE_2} \perp \overline{P_2E_2}$ 。在 ΔP_2SE_2 中， $\angle P_2SE_2 = \theta$ ，地外行星與地球的軌道半徑比值即為(圖七)

$$\cos \theta = \frac{r}{R} = \frac{1}{R} \quad \text{或} \quad R = \sec \theta \quad (3)$$



圖六：太陽、地球與地外行星相對位置示意圖



圖七：太陽、地球和地外行星在衝過後形成方照的相對位置圖

此外

$$\angle E_1 S E_2 = \angle P_1 S P_2 = \omega_E \times \tau,$$

及

$$\angle P_1 S P_2 = \angle E_1 S P_2 = \omega_p \times \tau,$$

故

$$\begin{aligned} \angle P_2 S E_1 = \theta &= \angle P_1 S E_2 - \angle P_1 S P_2 \\ &= \omega_E \times \tau - \omega_p \times \tau \end{aligned}$$

由

$$\omega_E = 360^\circ/1\text{年}, \quad \omega_p = 360^\circ/T\text{年},$$

可得

$$\begin{aligned} \theta &= (\omega_E - \omega_p) \times \tau = \left(\frac{360^\circ}{1} - \frac{360^\circ}{T} \right) \times \tau \\ &= 360^\circ \tau \left(1 - \frac{1}{T} \right) = 360^\circ \tau \left(\frac{T-1}{T} \right) \end{aligned}$$

上式括弧中之數值，由式(2)，為兩次逆行或兩次衝的時間間距 t 之倒數，即

$$\theta = \frac{360^\circ \tau}{t}$$

最後將上式與式(3)結合，則有

$$R = \sec\left(\frac{360^\circ \tau}{t}\right)$$

或

$$\tau = \frac{t}{360^\circ} \sec^{-1} R \quad (4)$$

此式表示出行星繞日軌道半徑 R 、兩次逆行時間間距 t 、與地外行星衝至方照時間間隔 τ 之關係。同理，若 τ 為地內行星下合至大距的時間間隔，則它可以地內行星繞日軌道半徑 R 、與兩次逆行時間間距 t 來表示 (Bechler, 1991)。

$$\tau = \frac{t}{360^\circ} \cos^{-1} R \quad (5)$$

肆、觀測比較、討論與預測

我們將以哥白尼日心模型中，已知的各行星環繞太陽之公轉週期 T ，各行星至太陽

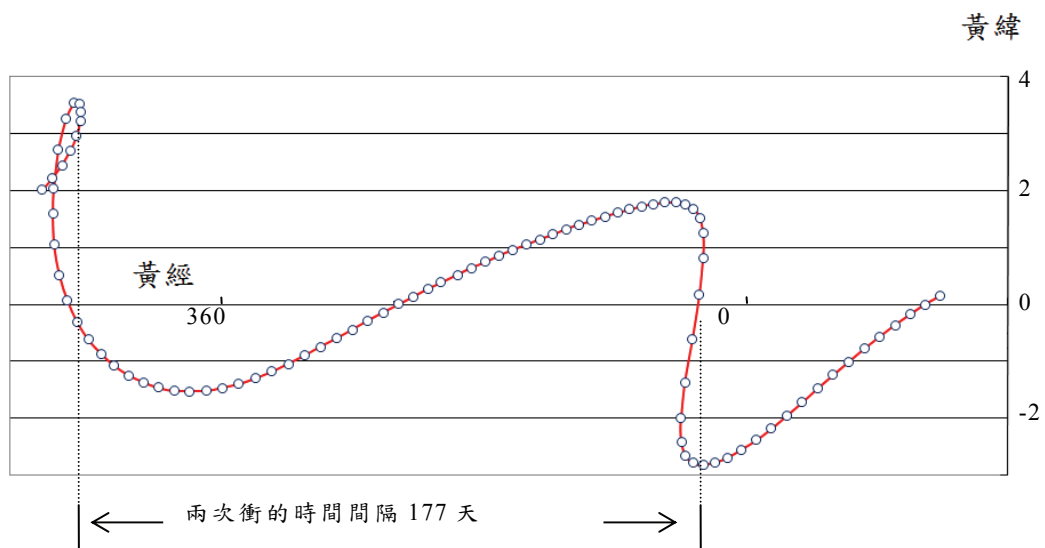
的距離 R ，藉著上式(1)、(2)、(4)與(5)計算出兩次行星逆行的時間間距 t ，及衝至方照（或下合至大距）的時間間隔 τ 的簡單關係，來表示和諧的日心模型如何可呈現出奇特的逆行現象。現整理這些重要物理量的計算值，並與觀測值比較，列於下表一。

由表中可看出行星兩次逆行時間間距的計算值與觀測值非常吻合，僅水星與火星約有 7%或 2%之誤差，代表哥白尼的日心模型可簡單且精確地，描繪出行星逆行發生的時間與現象。而衝至方照（或下合至大距）的時間間隔也與觀測值相當接近，可再佐證日心模型的正確性。

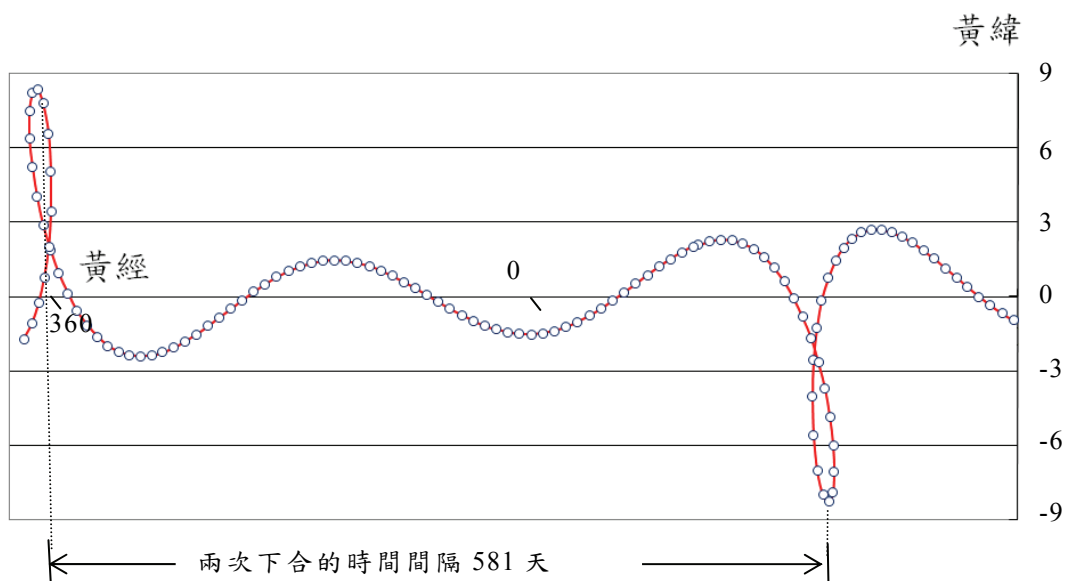
行星逆行發生時，行星會很接近地球，若是地外行星(火星、木星和土星)則能在夜晚中以肉眼觀測；地內行星則因為下合時，其在天空中位置與太陽接近而較難觀測，需以望遠鏡等工具輔助。若我們把在每天特定時刻，如午夜零時或清晨六時，所觀察到的地外或地內行星位置記錄下來，畫在天球上，則可發現行星路徑有明顯的逆行現象。圖八~十是由美國海軍天文台專用的天文軟體(MICA)計算出之行星位置，分別所繪成地外行星(火星)在連續兩次逆行（衝）前後，以及地內行星(金星、水星)在連續兩次逆行（下合）前後的軌跡圖。

表一：日心說中兩次逆行時間間距 t 與衝至方照(地外行星)或下合至大距(地內行星)時間間隔 τ 之計算值，及其對應之觀測值（公轉週期單位為年，軌道半徑單位為地球軌道半徑）。

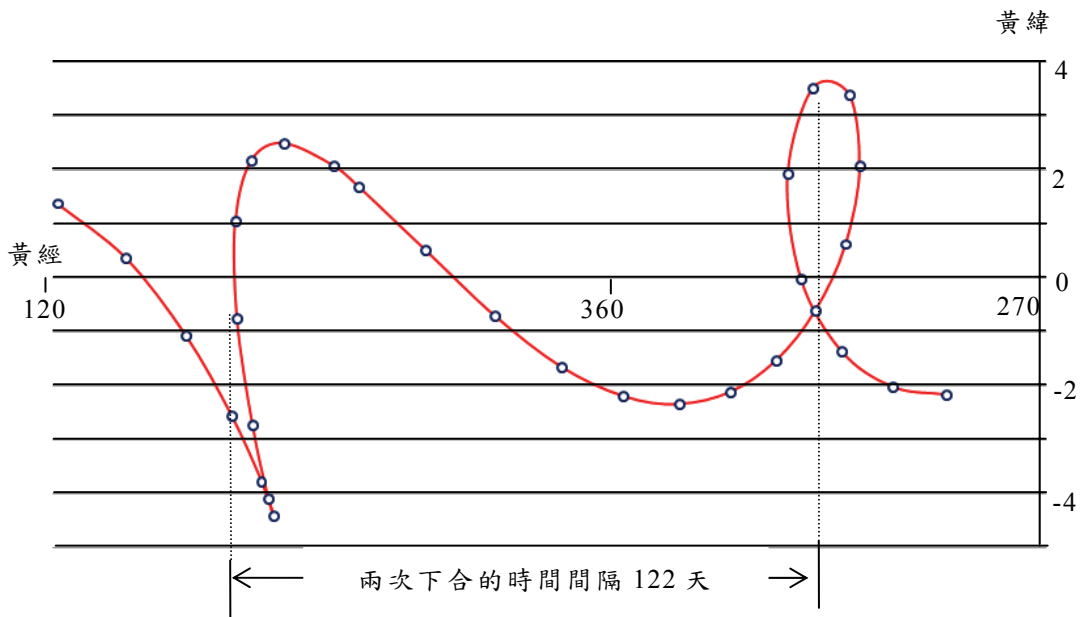
行星	水星	金星	火星	土星	木星
公轉週期 (T)	0.241	0.615	1.88	11.9	29.5
軌道半徑 (R)	0.387	0.723	1.52	5.20	9.55
兩次逆行時間間距 t (計算值)	0.318	1.60	2.14	1.09	1.04
兩次逆行時間間距 t (觀測值)	0.342	1.60	2.09	1.09	1.04
衝至方照或下合至大距時間 τ (計算值)	0.059	0.194	0.290	0.239	0.243
衝至方照或下合至大距時間 τ (觀測值)	0.065	0.195	0.266	0.246	0.241



圖八：2005 年 1 月到 2008 年 4 月，連續兩次火星逆行軌跡圖



圖九：2007 年 2 月到 2009 年 9 月，連續兩次金星逆行軌跡圖。



圖十：2008年1月到2008年9月，連續兩次水星逆行軌跡圖。

利用以上的運算結果，我們也可以預測未來最近一次行星逆行的發生時間，並與台北市立天文館所提供的行星資料比較（邱國光，2008）。由表二中可得知對金星、木星和土星而言，預測日期與天文館公布的日期頗為接近，金星的預測延後了3天，木星則提早了2天，土星則完全相同。對水星和火星而言，預測日期和天文館公布的日期相去較遠，水星的預測提早

了8天，火星則延後了14天。

造成水星與火星哥白尼之理論值與觀測值誤差的來源，主要是由於哥白尼假設所有行星軌道皆為正圓形，但實際上行星運行軌道為橢圓形，太陽在一焦點上。離心率越大的行星軌道，如水星與火星，越無法由正圓來代表，其誤差也就會較大（表三）。

表二：以哥白尼日心模型對五顆行星下次逆行發生時間的預測

	最近一次逆行中間點	預測下次逆行中間點	天文館預報
水星	2009年9月20日	2010年1月15日	2010年1月23日
金星	2009年3月27日	2010年11月1日	2010年10月29日
火星	2007年12月24日	2010年2月12日	2010年1月29日
木星	2009年9月19日	2009年10月23日	2009年10月25日
土星	2009年3月8日	2010年3月22日	2010年3月22日

表三：五顆行星的離心率

行星	水星	金星	火星	木星	土星
離心率	0.206	0.007	0.093	0.049	0.056

伍、結論

在哥白尼日心模型中，我們利用非常簡單的數學關係，以已知的行星公轉週期，與行星至太陽的距離，可簡易地計算並描繪出複雜的行星逆行現象，而精緻地呈現出簡單和諧的日心學說之高度有效性與普遍性。

當中世紀末文藝復興期間，對古希臘時代的數學研究群起風湧，導致人們熱切地期望自然也能夠得到充分的數學解釋。從觀測上看，托勒密系統和哥白尼系統二者都與實驗吻合，皆可以表達觀察事實，但是哥白尼體系比托勒密體系更簡單、對稱、均勻。對哥白尼來說，在那時新柏拉圖主義的復興鼓舞下，把複雜的幾何天文迷宮，在數學上轉化成爲一個美麗、簡單、和諧的體系，就是他終身所追求的真實宇宙。

《天體運行論》是一部革命性著作，它掌握了解決行星問題的鑰匙，並爲行星天文學開闢出一條全新的途徑，隨著後繼者克卜勒、伽利略與牛頓的承襲與擴展，它最終引導出一個新的宇宙論，轉變了科學思想的發展方向。這些都是建立於「和

諧的數學爲自然界背後的實體」之信念上，而哥白尼也被譽爲西方科學革命的開創者。

參考文獻

- 伯特 (Burt, E. 1994)：近代物理學的形而上學基礎。成都：四川教育出版社。
- 哥白尼 (Copernicus, N. [1543] 2004)：天體運行論。台北：大塊文化。
- 庫恩 (Kuhn, T. 1985)：哥白尼革命—西方思想發展中的行星天文學。北京：北京大學出版社。
- 錢宜新、姚珩 (2009)：從奇異的行星逆行到日心說的建立，台北：科學月刊，第 479 期，第 858-862 頁。
- 美國海軍天文台用星體位置計算軟體 Multiyear Interactive Computer Alman (MICA), Version 2.0
- 邱國光 (2007)：2008 年星象手冊。台北：台北市立天文科學教育館。
- Bechler, Z. (1991)：Newton's physics and the conceptual structure of the scientific revolution. Boston, MA : Kluwer Academic Pub.
- Panides, N, & Arny, T. (1999) : Introductory Astronomy, 2nded, Cambridge, MA : Addison-Wesley.
- Zeilik, M. & Gregory, S. (1998) : Introductory Astronomy & Astrophysics, 4thed, Orlando, FL : Harcourt Brace & Comp.