

# 位能觀念的發生與意義

姚 玠，國立臺灣師範大學物理系

李秉書，臺北市立大理高級中學

## 壹、前言

位能是能量物理學裡的一個重要觀念，它與動能共同形成力學能，而力學能守恆律是描述許多自然現象的基本原理，因此位能的概念頗值得仔細探究。那麼位能的意義是什麼呢？它又是如何發生的？

許多高中及國中教科書認為：重力位能是抵抗重力的外力，將物體由低處抬至高處所作的功轉變而來，並定義此外加拉力所作的功等於重力位能的增加量(國立台灣師範大學科學教育中心，1995，頁 10-17；高涌泉，2011，頁 100；傅昭銘、陳義裕，2011，頁 104；林英智，2014，頁 73)。若將此說法用在行星與太陽上，那麼是什麼樣的拉力，可將行星自離太陽近處移至遠處？位能的介紹非要引入拉力嗎？一個下落石塊，並沒有抵抗重力的拉力作用在石塊上，為何會有位能？物理學家到底是如何來描述位能呢？它又是由那些物理學家所提出？

## 貳、位能概念的提出——克來若

歷史上並沒有出現物理學家主張由拉力來定義位能的想法，位能的觀念最早是由 1743 年法國數學家克來若(A. Clairaut, 1713-1765)所提出。他是在探討重力對地球形狀影響的論述時，認為若重力在地球表面之  $x$  軸與  $y$  軸的分量為  $P$  與  $Q$ ，則重力對物體沿著任意極短路徑上所作的功效(effort)，也就是日後所言的功為  $Pdx+Qdy$ 。他發現(Clairaut, 1743, p. 34)：

當  $Pdx+Qdy$  滿足正合微分(exact differential)的條件：

$$dP/dy = dQ/dx$$

則重力所作的功  $\int Pdx+Qdy$  與路徑無關，而是僅由位置  $(x, y)$  所決定的一個函數。

嚴格來說，克來若所寫下的正合微分條件應以偏微分符號  $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$  表示。茲進一步以現今較完整的說法，可將其主張描述為：

當且僅當  $P$  與  $Q$  滿足正合微分之條件  $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$  時，則  $Pdx + Qdy$  必為一位置函數  $V(x, y)$  之全微分 (total differential)，即

$$dV = Pdx + Qdy$$

因為  $dV = (\frac{\partial V}{\partial x})dx + (\frac{\partial V}{\partial y})dy$ ，若  $dV = Pdx + Qdy$ ，則  $P = \partial V/\partial x$ ， $Q = \partial V/\partial y$ ，此時  $P$  與  $Q$  必符合正合微分條件，即

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right) = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

反之亦然。

克來若認為重力對物體自第一點位置 1 到第二點位置 2，沿任意路徑所作的功皆相等，與路徑無關，且其值為

$$\int_1^2 Pdx + Qdy = \int_1^2 dV = V_2 - V_1$$

也就是只由起點及終點之位置函數值  $V_1$  與  $V_2$  來決定。但他一直都還未明顯表示出  $P$ 、 $Q$  所對應相關函數  $V$  的確切形式，僅指出它是由位置  $(x, y)$  所決定的一個函數。

### 參、位能函數的建立 —— 拉格朗日

1773 年，法人拉格朗日 (J. L. Lagrange, 1736-1813) 於探討行星受太陽吸引的引力問題時，應用了克來若的想法。若行星與太陽距離為單一變數  $r$ ，而不以兩變數  $x$  與  $y$  來表示時，其所受的引力  $F \propto 1/r^2$ ，設其比例常數為  $M$ ，則引力 (Lagrange, 1773, pp. 14-15)

$$F = -\frac{M}{r^2}$$

此處的負號表示方向指向原點。在討論引力作用在行星上的功  $\int Fdr$  時，若  $Fdr$  可表示為一函數  $-V$  的全微分，即

$$-dV = Fdr \quad (1)$$

則引力作用在行星上自第 1 點位置移動到第 2 點位置的功：

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 F dr = -\int_1^2 dV = V_1 - V_2 \quad (2)$$

將僅由  $V$  在起點與終點函數值之差來決定，而與路徑無關；且引力作用在物體上的功就等於初位能減末位能。他並指出此位置函數為

$$V = -\frac{M}{r}$$

因  $-\frac{dV}{dr} = \frac{d}{dr} \left( \frac{M}{r} \right) = -\frac{M}{r^2} = F$  可滿足引力表示式。

繼克來若之後，拉格朗日為首位物理學家指出以一函數  $V(r)$  之全微分  $dV$ ，來表示物體受力  $F$  所作功的微小量，如式(1)所示，此處位置函數  $V(r)$  便是日後物理學上所言之「位能」函數。他倆均未引入除重力以外之任何其它拉力，來導出位能函數  $V(r)$ 。而與式(1)相對應之數學表示：

$$F = -\frac{dV}{dr} \quad (3)$$

也就成為現代教科書上作用力  $F$  與位能函數  $V$  關係式的標準寫法(Halliday, Resnick, & Walker, 2008, p. 176)。

## 肆、位能名詞的確立——格林

至於拉格朗日所使用的符號  $V$  的名稱，則是在其後 1828 年，英國科學家格林(G. Green, 1793-1841)於其著作《論數學應用於電磁學理論之分析》中提到：若帶電體與某一定點的距離為  $q$ ，且所造成的力可表示為  $-dV/dq$  時，則  $V$  可命名為「位能函數」(potential function)。他說：

$-dV/dq$  將給出每一元素由  $V$  所造成的力之和，或作用在  $p$  點上同方向之合力。… 這樣的函數以如此簡單的形式給出…在任意位置受力的數值，由於它在以後文章中將頻繁出現，我們現稱其為屬於該系統元素的位能函數。(Green, 1828, p. 1)。

## 伍、位能的描述不需外在拉力

不少作者所說：在高處的重力位能是為抵抗重力，將物體由水平面的參考位置抬至高處時，外力所作的功 (Benson, 2013, pp. 147-148 ; Serway & Jewett, 2012, p. 180)。此一說法容易讓學生誤認為：重力位能需有重力以外的拉力才會存在，位能也須藉外在拉力做功才可計算得知。但這種觀點從未出現在最初物理學家們的想法裡，克來若認為當重力對物體作的功與路徑無關時，做功之值必可以一位置函數  $V(r)$  來決定，拉格朗日則進一步指出此位置函數導數之負值就是重力，即  $F = -dV/dr$ ，如式(3)，而  $V(r)$  便是現今所言的位能。他倆均未引入除重力以外之任何其它拉力，來描述位能。底下將僅應用重力、彈力或靜電力，而不使用任何外加拉力，分別計算出物體的重力位能、彈性位能與電位能。

## 一、重力位能

以質量為  $m$  的石塊為例，它受重力  $\vec{F} = -mg\vec{j}$  作用， $\vec{j}$  為垂直向上的單位向量，代表著重力  $F$  方向向下。若石塊自高處  $y_1$  以任意方式或沿任意路徑下落至  $y_2$ ，其中微小路徑量可以  $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$  表示，則重力對石塊做功之值為

$$W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{y_1}^{y_2} mg\vec{j} \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j}) = -mg \int_{y_1}^{y_2} dy = -mg(y_2 - y_1) = mgy_1 - mgy_2 \quad (4)$$

也就是功等於在初位置  $y_1$  與末位置  $y_2$  所對應的兩個函數值  $mgy_1$  與  $mgy_2$  之差，我們稱在任意高度  $y$  之狀態函數  $mgy$  為石塊的重力位能。上式已隱含了重力所作功與路徑無關，僅與起點與終點位置相關的性質，並與式(2)內涵一致，為初位能與末位能之差。因此受地球上重力或行星引力作用所對應的位能，並毋須引入重力以外之拉力來描述及計算。將重力位能視為是外力抵抗重力，將物體由低處抬至高處所作的功轉變而來，並非是位能概念原創者所認為的意義。

為方便起見，若將物體運動終點設為參考原點，通常取其為水平面，即  $y_{ref} = 0$ ，則自高處  $y$  下落至水平面，重力對物體所作功，由式(4)為

$$W = \int_y^{y_{ref}} F dy = mgy - mgy_{ref} = mgy$$

此值即為物體在位置  $y$  處之重力位能。有些書稱其為：重力對高「位」置物體具有作功的「能」力。

另外，由功能定理：合力對最初為靜止物體所作的功等於末動能，即  $W = mv^2/2$ ，因此在高處具有位能的物體，落下著地前，位能逐漸消失，但重力對其所作的功可轉換或釋放出動能，而可視為高處物體儲存有能量、或具有潛在能量。

## 二、彈性位能

同理，在受彈力作用下的物體，也無需引入外在拉力，即可算出在任意位置處的彈性位能。由虎克定律，物體受彈力  $F$  作用與其距均衡點位移  $x$  之關係為  $F = -kx$ ，其中  $k$  為彈性係數，方向向右為正。若物體自均衡點左邊  $x_1$  之受壓處，釋放後移動至均衡點左邊  $x_2$  處，由於作用在物體之彈力與物體位移方向相同，均指向右，彈力對物體作正功，其值為

$$W = \int_1^2 F dx = -\int_1^2 kx dx = -\left(\frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2\right) = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 \quad (5)$$

也就是功等於在初位置  $x_1$  與末位置  $x_2$  所對應的兩個函數值  $kx_1^2/2$  與  $kx_2^2/2$  之差，我們稱任意位置  $x$  之狀態函數  $kx^2/2$  為物體的彈性位能。彈力所作的功仍與路徑無關，並與式(2)一致，為初彈性位能與末彈性位能之差。

若將物體運動終點設為參考原點，通常取其為物體不受彈力作用時的均衡點，即  $x_{ref} = 0$ ，則自壓縮處  $x$  恢復至均衡點，彈力對物體所作功，由式(5)為

$$W = \int_x^{x_{ref}} F dx = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}kx_{ref}^2 = \frac{1}{2}kx^2$$

此值即為物體在位置  $x$  處之彈性位能，也可稱為物體所儲存的潛在能量。

## 三、電位能

### (一)、兩個點電荷

位能的概念在電學與原子物理的領域中依然相當重要，對於兩攜帶電荷為  $Q$  與  $q$  之帶電粒子，設電荷  $Q$  固定於原點上，另一電荷  $q$  距原點  $r$  處，受到庫侖力  $\vec{F} = (kQq/r^2)\vec{e}_r$  作用，此處  $k$  為庫侖常數， $\vec{e}_r$  為徑向單位向量。若兩電荷均帶正電， $q$  受靜電力作用，自  $r$  處沿任意路徑運動到無限遠處，其中路徑的微小量可以  $d\vec{r} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + r \sin\theta d\phi\vec{e}_\phi$  表示，而  $\vec{e}_\theta$  與  $\vec{e}_\phi$  為球面坐標中的另外兩個單位向量，則靜電力對  $q$  所作的功為

$$W_{r \rightarrow r_{ref}} = \int_r^{r_{ref}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = kQq \int_r^\infty \frac{1}{r^2} dr = 0 - kQq\left(\frac{-1}{r}\right) = \frac{kQq}{r} \quad (6)$$

上式利用了對任意路徑  $\vec{F} \cdot d\vec{r} = F dr = kQq dr / r^2$ ，故式(6)也表示了靜電力所作的功與路徑無關，僅由徑向之起點與終點位置決定，並符合式(2)所示的性質，等於初位能  $U_r$  與末位能  $U_\infty$  之差。即

$$W_{r \rightarrow r_{ref}} = U_r - U_\infty \quad (7)$$

若選定無限遠處為參考位置，並取其對應位能為零位能，或  $U_\infty = 0$ ，則比較上二式(6)與(7)，可得

$$U_r = \frac{kQq}{r} \quad (8)$$

此值即稱為兩電荷  $q$  與  $Q$  相距  $r$  之電位能，同時電位能為靜電力將電荷  $q$  自  $r$  處移動到無限遠處所作的功，即  $U_r = W_{r \rightarrow \infty}$ 。

若所攜帶電荷均為負電，其情形完全相同，負電荷  $Q$  對負電荷  $q$  自相距  $r$  處，排斥到無限遠處，所作之正功依然為  $kQq/r$ ，兩電荷所形成的電位能仍可以式(8)代表。此電位能也可稱為兩帶電荷所儲存的潛在能量，因它們可將此能量釋放出來，推動電荷  $q$  至無窮遠處。

假如兩物體攜帶異性電荷，設  $Q$  帶負電，固定於原點，另一電荷  $q$  帶正電，彼此為吸引力。在此情況下，則考慮負電荷  $Q$  對正電荷  $q$ ，自無限遠處受靜電力吸引至  $r$  處所作的功。此時因力與位移方向相同，故仍作正功，且其值為

$$W_{r_{ref} \rightarrow r} = \int_{r_{ref}}^r F dr = kQq \int_{\infty}^r \frac{1}{r^2} dr = kQq \left( \frac{-1}{r} \right)$$

並與路徑無關，如式(6)所示；另外由式(2) 與路徑無關的靜電力所作的功等於初位能  $U_\infty$  與末位能  $U_r$  之差，即

$$W_{r_{ref} \rightarrow r} = U_\infty - U_r = -U_r$$

比較此二式，可得負電荷  $Q$  與正電荷  $q$  相距  $r$  時的電位能  $U_r = kQq/r$ ，仍可以式(8) 表示，只是此時電位能為負值。

若將正電荷  $q$  視為測試電荷，電荷  $q$  的運動方向總是受帶正電的源電荷  $Q$  排斥而離開，並朝向帶負電的另一源電荷  $Q'$  靠近，也就是自高(或正)電位能情形改變至低(或負)電位能情形。另一方面，由以上討論可知，無論是同性或異性的兩電荷系統，皆不需要藉著抵抗靜電力的外力所作的功，來求得電位能的形式。

## (二)、三個點電荷

明白上述僅以靜電力建立起兩個點電荷之電位能的意涵，底下可進一步清楚描述出三個

點電荷  $q_1$ 、 $q_2$  與  $q_3$  的電位能之形式。為方便起見設此三電荷均帶正電，彼此相距為  $r_{12}$ 、 $r_{13}$  與  $r_{23}$ ，如圖一。

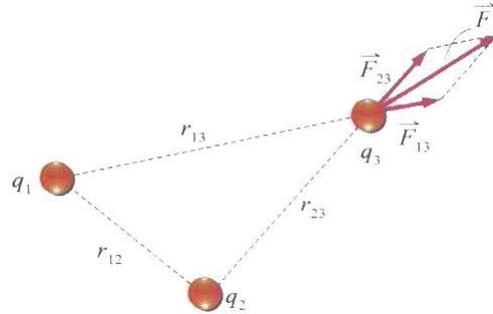


圖 1. 三個正電荷  $q_1$ 、 $q_2$  與  $q_3$ ，彼此相距為  $r_{12}$ 、 $r_{13}$  與  $r_{23}$ ， $q_1$  與  $q_2$  作用在  $q_3$  之總靜電力為  $\vec{F} = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}$ 。此力將  $q_3$  自原處移動至無限遠處所作的功，等於  $\vec{F}_{13}$  將  $q_3$  自  $r_{13}$ ，與  $\vec{F}_{23}$  將  $q_3$  自  $r_{23}$  處，移動至無限遠處所作功之和。

先考慮  $q_1$ 、 $q_2$  固定，它倆對  $q_3$  之總靜電力  $\vec{F} = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}$ ，將  $q_3$  自原處移動至無限遠處所作的功，等於  $\vec{F}_{13}$  將  $q_3$  自  $r_{13}$  與  $\vec{F}_{23}$  將  $q_3$  自  $r_{23}$ ，移動至無限遠處所作功之和，即

$$W = \int_{r_{ref}}^{\infty} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{r_{13}}^{\infty} \vec{F}_{13} \cdot d\vec{r} + \int_{r_{23}}^{\infty} \vec{F}_{23} \cdot d\vec{r} = \frac{kq_1q_3}{r_{13}} + \frac{kq_2q_3}{r_{23}} = U_{13} + U_{23}$$

上式第三個等式使用到式(6)，整式代表：此兩電荷對單一電荷所作功之值等於兩組電位能  $U_{13}$  與  $U_{23}$  之和。再考慮只剩下  $q_1$  與  $q_2$  時，它倆之間的電位能，由式(8)為  $U_{12}$ 。則三個點電荷的總電位能  $U$  為，彼此間的靜電力使  $q_3$  與  $q_2$  分別移至無限遠處所作功之和，最後只剩下孤立的  $q_1$ ，即總電位能

$$U = U_{13} + U_{23} + U_{12} = \frac{kq_1q_3}{r_{13}} + \frac{kq_2q_3}{r_{23}} + \frac{kq_1q_2}{r_{12}}$$

也就是兩兩電荷間的電位能之和。

## 陸、結論

位能概念最早是由克萊若於 1743 年發現，他認為當力為一位置狀態函數的導數，則此力所作的功與路徑無關，並可稱此位置函數為該物體之「位能」。也因為此性質，而可由力所作的功等於兩狀態函數的差，來計算出任意位置的位能值。克萊若並未引入抵抗此力的其他外力，來描述位能。

在中學物理教科書裡最常見的作用力為重力、彈力與庫倫靜電力，物體受此三種力作用下，分別有其對應的位能。一如馬克士威(J. Maxwell, 1831-1879)所說：「一點上的電位能就是靜電力對某正電荷，從該點被帶到無限遠處所作的功。」(Maxwell, 1992, p. 86)。同樣馬克士威也僅單純就靜電力來討論電位能，而沒引入抵抗靜電力的推力對電荷所作的功，來形成位能概念。且在某位置的位能即為單一的力—如重力、彈力或靜電力—作用在物體上，讓物體自該位置移動到參考點處—通常為零位能面，如水平面、均衡點或無限遠處—所作的功，其意義清楚不模糊。且如此的定義，對日後建立此三種力分別所對應的力學能守恆律，將顯得格外簡單清晰。

## 參考文獻

1. 國立台灣師範大學科學教育中心 (1995)。高級中學物理第二冊 (吳大猷主編)。台北市：國立編譯館。
2. 高涌泉 (2011)。高級中學基礎物理二 B 下冊。新北市：龍騰文化。
3. 傅昭銘、陳義裕 (2011)。高級中學基礎物理二 B 下冊。台南市：南一書局。
4. 林英智 (2014)。國中自然與生活科技二下。新北市：康軒文教。
5. Maxwell, J. (1992)。電磁通論 (戈革譯)。武漢市：武漢出版社。(原著出版於 1873 年)
6. Benson, H. (2013). *Physics* (2<sup>nd</sup> revised ed.). New York: Wiley.
7. Clairaut, A. C. (1743). *Theorie de la figure de la terre: tirée des principes de l'hydrostatique*. Paris: Durand.
8. Green, G. (1828). *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*. Nottingham: Printed for the author, by T. Wheelhouse.
9. Halliday, D., Resnick, R., & Walker, J. (2008). *Fundamentals of Physics* (8th ed.). New York: John Wiley & Sons.
10. Lagrange, J. L. (1773). Sur l'équation séculaire de la lune. l'Académie Royale des Sciences (Ed.), *Mémoires de mathématique et de physique, Année* (pp. 1-61). Paris: de l'imprimerie Royale.
11. Serway, R., & Jewett, J. (2012). *Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics* (8th ed.). New York: Brooks/Cole.