

全像原理： 場論與重力的世紀婚禮

文/ 林豐利



量子場論與廣義相對論是兩個在本質上非常不同的理論。可是透過黑洞物理與弦論所啟發的全像原理，卻能使兩者互為一體的兩面，增進了我們對量子重力的理解。除此，我們也可以利用全像原理來研究強作用或強關聯系統。本文將綜述全像原理的發展過程與主要概念。

一、衝突的序曲

量子場論(Quantum Field Theory)與愛因斯坦的廣義相對論(General Relativity)是二十世紀兩個最重要的物理理論。量子場論將次原子層次的物理放在一個統一的架構底下，並且提供一套非常精確的計算工具，將粒子物理的實驗與理論預測緊密的結合起來。廣義相對論則將時空動態化，使得我們可以預測黑洞的存在與宇宙的演化。尤其宇宙大爆炸理論(Big Bang Theory)經由觀測宇宙微波背景輻射(Cosmic Microwave Background Radiation)的證實奠基了現代宇宙學(Modern Cosmology)，從而精確預測了宇宙中元素生成(Nucleosynthesis)的多寡。然而新的突破也帶來新的挑戰。尤其在宇宙大爆炸那一刻與黑洞(Black Hole)中心存在曲率(curvature)無窮大的時空奇點(spacetime singularity)，預告廣義相對論在強重力狀況下的局限性。隨著物理的進展，如何解決以上的問題漸漸成為一種智性上的挑戰。

作者簡介
美國猶他大學博士
國立台灣師範大學物理系教授
E-mail: linfengli@phy.ntnu.edu.tw

回顧量子場論發展的歷史，類似的情況也出現在古典電動力學中由於點粒子的特性造成電子的自能(self energy)無窮大。解決的辦法是引進量子效應並假設量子漲落(quantum fluctuation)的能量是有限的，即截斷紫外發散(cutoff UV divergence)，因此使得電子的點粒子(point particle)特性模糊化，從而使電子自能變成有限大。量子場論更進一步提供一套重整化(Renormalization)程序來處理紫外發散問題，使得量子電動力學(Quantum Electrodynamics)對精細結構常數(fine structure constant)的理論預測與實驗結果達到驚人的吻合程度。這樣的經驗使得當時大部分的高能理論物理學家傾向於引進重力的量子效應來解決時空奇點問題。

然而這樣的想法立刻遇到兩個棘手的難題。第一個難題是重力場的量子化也意謂著時空的量子化(quantization of spacetime)，如此一來，由量子力學的線性疊加原理(linear superposition principle)所得的宇宙波函數(wave function of the Universe)隱含著多重宇宙(multiverse)的可能性，因而觸及到量子力學最根本的難題，也就是時空版的薛丁格的貓(Schrodinger's cat)。



如果我們無法從根本上瞭解量子力學的隨機性，我們就無法了解量子重力(Quantum Gravity)的本質。另一個難題是量子重力無法重整化，也就是說隨著重力場的增強，量子效應隨之增大而變得不可控制，從而使得理論失去可預測性。這一點與可重整化的量子電動力學的可預測性大相逕庭。換句話說，如同電子一樣，重力子(graviton)(或時空)的點集特性造成無窮大自能，但是不同的是重力子的無窮大自能無法藉由重整化消去。這樣的結果暗示著時空幾何的點集特性與量子效應是相衝突的。

由於這些難題，物理學家逐漸放棄這種簡約式的量子化重力的辦法，轉而開始找尋更徹底的解決之道，其中最成功的就是弦論(string theory)。弦論放棄了時空的點集特性，因此避開了無法重整化自能的困擾。另一方面，弦論在低能量的狀況下可以逼近廣義相對論，所以是一個自治的理論[1]。某個意義上，弦論成功的結合了量子效應與重力，然而實際上它僅僅提供了一個銜接兩者的框架，對於強重力場的特性與本質的瞭解仍付之闕如。

二、 黑洞的曙光

對於強重力場的特性與本質必須從黑洞開始說起。不同於天文學家著眼於研究實際的黑洞所造成其周遭複雜的流體現象，理論學家所研究的想像實驗(gedanken experiment)中黑洞是所知最簡單也最神秘的物理系統。這是因為黑洞的時空中存在著隔絕內部與外部通訊的視界面(horizon)，所以無論黑洞內部的組成成分如何不同，外部的觀察者都無法透過任何實驗手段來分辨任何兩個有相同質量、電荷與角動量的黑洞，這就是所謂的黑洞的光頭定理(no-hair theorem)。但在一般的情況底下很難理解光頭定理，譬如我們可以透過一些測試來分辨兩個長得一模一樣的雙胞胎，或者兩個有相同巨觀參數但不同微觀組成的熱力學系統，但是對黑洞卻不行。不過也因為光頭定理讓人可

以無視於黑洞內部的組成成分，因而黑洞是一個僅有幾個動力學參數的簡單系統。這樣一來我們就可以透過黑洞這樣一個簡單系統來探究強重力物理的本質。

1970年代初，當時還是研究生的貝肯斯坦(Bekenstein)發現如果把黑洞視界面上的表面重力(surface gravity)想成黑洞的溫度，把黑洞視界面的面積大小想成黑洞的熵，那麼便可以將黑洞的力學定律重新解釋成熱力學第一定律。這樣一來便可以將黑洞想成一個有溫度的黑體，於是預期有黑體輻射(black body radiation)由黑洞發出。但是這一預期與黑洞視界面有進無出的特性相違背。為了解決這個矛盾，霍金(Hawking)引進了彎曲時空中的量子場論(Quantum Field Theory in curved space)，他發現黑洞視界面附近的強重力場可以將量子效應所造成的真空極化(vacuum polarization)變成黑體輻射。也就是真空中的虛擬粒子對(virtual particle pair)因為強重力場的影響而無法互相湮滅(annihilation)，於是形成真實可觀測的霍金輻射(Hawking radiation)。

霍金輻射這一道黑洞的曙光驗證了貝肯斯坦的黑洞熱力學猜想，但如同打開了潘朵拉盒子一樣，也帶來新的挑戰。主要有兩個新難題。第一個難題是因為霍金輻射是不具任何特性的熱輻射，所以並不能反映出黑洞內部組成的具體性質。因此想像一個完全由百科全書所形成的黑洞，那麼這些存在於百科全書理的有用資訊將會在黑洞完全輻射之後而消失殆盡。這暗示著黑洞的演化過程是無法保持資訊守恆(non-unitary)，這就是有名的黑洞資訊弔詭(Information Paradox)。這個弔詭已經困擾了物理學家 30 年了，至今仍然沒有具體的進展。

另一個難題則啟發了全像原理(Holographic Principle)。貝肯斯坦的黑洞熱力學定律要求黑洞的熵與黑洞的面積而不是體積成正比，這與一般的熱力學系統的熵很不一樣，倒是與量子糾纏(Quantum Entanglement)所得到的熵的面積律(area law)相一致。不過量子糾纏所造成的熵的面積律並不需要強重力場的

存在，所以無法提供對構成黑洞熵微觀態的(microstates)的任何理解。所以如何理解黑洞的微觀態與面積律的關係便成為一個重要議題。90年代初，台夫特('t Hooft)與沙世金(Susskind)不約而同提出了一個深具革命性的觀點，那就是強重力場下的量子重力的本質基本上得遵守面積律，也就是應當是全像式的(holographic)，這就是所謂的全像原理。換句話說，量子重力的本質基本上是非局域的(non-local)，這似乎很難理解，因為愛因斯坦的廣義相對論看起來是一個局域的理论。不過另一方面，由於等效原理(Equivalence Principle)所要求的廣義座標協變性(General Covariance)，廣義相對論基本上有一個無窮大的規範對稱(gauge symmetry)，大到使得這個理論中不存在任何規範不變的局域物理觀測量(gauge-invariant local physical observables)，所以在這個意義上，量子重力必須是一個非局域理論。儘管如此，全像原理僅僅提供了一個理論框架，卻沒有任何的具體內容可供深究。這樣的局面要一直等到弦論中引進 D 膜後才有所突破。

三、媒人：弦論與D膜

90年代中弦論進入了翻天覆地的二次革命[2]，其中最主要的進展就是波爾欽斯基(Polchinski)發現了 D 膜(D-brane)。D 膜是 Dirichlet-brane 的簡寫，顧名思義膜是指時空中的超曲面，Dirichlet 則是指開弦(open string)在垂直於 D 膜的方向上遵守 Dirichlet 的邊界條件，也就是開弦只能依附在 D 膜上運動，而不能離開 D 膜。重要的是這些 D 膜上的開弦在低能量時的有效理論(effective theory)是一個量子規範場論(Quantum Gauge Field Theory)。從另外一個觀點來看，D 膜是弦激發態所形成的一個巨觀的孤立子(soliton)，也就是它有質量會產生重力效應，而且質量夠大時會彎曲周圍的時空。

所以 D 膜是個有趣的物件，因為它同時攜帶量子場論與重力兩種訊息，而且分別可以用非常精確又漂亮

的理論來描述，在這之前並不存在這樣簡單又完美的物理系統。如此一來就可研究由 D 膜所構成的黑洞。想像我們可以調控弦論的耦合常數(coupling constant)，當弱耦合(weak coupling)時，我們可以用量子場論來數算 D 膜上的微觀態，由此可以算出熵，當我們逐漸調大耦合常數，量子場的微擾論失效而無法數算微觀態。當耦合強到某個程度，D 膜就形成類似黑洞的物體，那就可以用黑洞的面積律來計算系統的熵。雖然黑洞是由 D 膜所形成，但由場論與面積律所得到的熵是在不同的耦合強度時算出的。一般而言，這兩個熵的值並不會相同，除非在一些特殊的情況下。

1996年，史強姆明格(Strominger)與法法(Vafa)發現了這樣一種具有超對稱的 D 膜黑洞，由於超對稱保護了膜的激發譜(excitation spectrum)免於量子效應的修正，所以預期系統的熵值與耦合常數無關。他們的計算驗證了分別由場論與面積律算出來的熵值是相等的。這是第一次人們瞭解到如何數算黑洞的微觀態而得到熵的面積律，同時也暗示在熱力學層次上量子場論與重力理論可以是等價的，至於動力學上的等價性則有待進一步的釐清。

除此之外，本質上場論與廣義相對論是兩種非常不一樣的理論，前者描述粒子動力學，後者描述時空動力學。因此必須突破某種出於對理論本質的執著，才有可能看出它們之間的等價關係。對此，在弦論二次革命中另一個扮演重要角色的核心概念「對偶性」(duality)適時地產生了推波助瀾的作用。對偶性就是指兩個看起來非常不同的理論可以是等價的。譬如如果兩個理論能譜中的基本粒子(elementary particle)與孤立子解成一對應，而且作用量(action)在耦合常數強變弱，弱變強的自對偶(self-dual)變換下不變，則該理論的強作用下的物理將等價於弱作用下的物理，又稱為 S 對偶或強弱對偶(strong/weak duality)。另外，有所謂的 T 對偶性支持弦論在不同時空下的等價性。利用這些對偶性，人們發現所有的弦理論都是等價的，而且應該統一在一個更大的理論架構下，也就是 M 理論。

而更重要的是，人們已經開始可以對不同理論間的對偶性見怪不怪了。

四、世紀婚禮

1997 年底，馬達希納(Maldacena)提出了一個驚人的猜想[3]:他說 10 維時空的第二型的超對稱重力理論緊緻化(compactify)在 5 維球上所得到的 5 維反-底希特(anti-de Sitter, AdS) 空間的重力理論等價於 4 維有最大超對稱與無窮大規範對稱的楊-彌爾斯(Yang-Mills)場論。而且這個場論具有共形對稱(conformal symmetry)(也就是在廣義的尺度變換下不變)，所以是一個共形場論(conformal field theory, CFT)[4]，因此這個對應被稱為 AdS/CFT 對偶，這是一個強弱對偶。

AdS 空間是一個有負曲率的最大對稱空間(maximally symmetric space)，負曲率是由負的宇宙學常數(negative cosmological constant)所造成。所以某個意義上，AdS 空間是一個有重力位能井(gravitational potential well)的大箱子，箱子的大小大約是 AdS 空間的曲率半徑。此外，AdS 空間的邊界是類時的(time-like)，而且由於重力位能井的作用，光由中心到邊界所需的時間是有限的，這與有類光(light-like)邊界的平空間(flat space)不同[5]。由於邊界是類時的，所以可把所對應的 CFT 想像成是住在 AdS 空間的邊界，至於 AdS 空間的徑向方向則對應到 CFT 中重整化群(Renormalization Group, RG)的能量標度(energy scale)。如果馬達希納的猜想是對的話，這就意味著我們可以用一個住在邊界的量子場論來描述 AdS 重力，與黑洞熵的面積律有異曲同工之妙。因此可以說，AdS/CFT 對偶性是全像原理在弦論裡的一個具體實現的例子。而這樣的對偶性大大超出了一般人對如何統一量子場論與重力的想像，也可以說是理論物理的一個世紀性的大突破。

馬達希納所以能提出這樣的猜想是因為他發現在某些特殊的極限底下，D 膜的開弦與閉弦之間的耦合可以忽略，也就是用來描述 D 膜的量子場論與重力理

論可以互不相干，所以可以是互補或等價的描述。而這個特殊極限下所得到的 D 膜時空幾何便是 AdS 空間，而相對應的開弦理論便是有共形不變的楊-彌爾斯場論。然而這並不保證這兩個理論是等價的。馬達希納更進一步發現兩個理論的運動學(kinematic)對稱性是相同的，所以保證它們有相同的粒子能譜。更精確的講，5 維 AdS 空間的座標變換對稱性(isometry)是 $SO(4,2)$ ，這對應到 4 維 CFT 的對稱性。特別注意的是 4 維量子場論對稱性是勞倫茲群(Lorentz group)，也就是 $SO(3,1)$ ，因為額外的共形對稱使得對稱性增加到 $SO(4,2)$ 。此外，原本用來緊緻化 10 維重力的 5 維球的座標變換對稱性 $SO(6)$ 則對應到 CFT 中用來轉置超對稱的 R 對稱性。依據這種對應，可以發現 AdS 重力理論中的基本場(elementary field)會對應到 CFT 中複雜的規範不變算子(gauge-invariant operators)，這些算子在強作用底下是自然的物理觀測量。這也暗示著 AdS 重力中基本場的弱作用維擾論會對應到 CFT 中的與規範不變算子有關的強作用現象。

然而僅僅有運動學對稱性的對應是不夠的，還需要有力學的對應才能支持馬達希納的猜想，而這些在他的文章中卻付之闕如。不過幾個月以後，普林斯頓大學與高等研究院的兩組人馬就找到了動力學證據。他們主要是提出如何由 AdS 空間中基本場的微擾論來算出 CFT 中算子的關聯函數(correlation function)。而其中基本的想法是 AdS 基本場的在殼作用量(on-shell action)就是對偶 CFT 的配分函數(partition function)，而基本場在邊界的值對應到 CFT 中耦合到對應算子的源(source)。如此一來，我們就可以透過解一個古典場在 AdS 空間的運動方程式來求得一個強耦合 CFT 的關聯函數。這樣的突破大大的提升了人們對 AdS/CFT 對偶性的信心，因此接著就考慮了在有限溫度的情況下的全像對偶關係，而這個對應牽涉到黑洞。由於黑洞有熱力學，所以很自然的想法便是 AdS 空間中的黑洞熱力學應該會對偶到 CFT 的熱力學，尤其黑洞熵的面積律恰好對應到 CFT 熵的體積律，而這確實如此。另外，AdS 空間中的黑洞有正的比熱，所以可以形成一個穩

定的熱力學系統，這與有負的比熱因而不穩定的平空間黑洞大不相同。

五、他們世俗的孩子們

在經過數年中無數的計算與測試，人們逐漸確認了馬達希納的猜想。尤其在某些特殊情況底下，強作用的 CFT 可以化約為可積系統(Integrable Systems)，因此可以直接測試非常複雜的關聯函數，而所得的結果皆與猜想吻合。由於有了非常顯著的證據，物理學家們開始好奇 AdS/CFT 式的全像原理有沒有可能運用在非 AdS 或非 CFT 的情況。如此一來，也許可以解決許多原來無解的強作用或強關聯(strongly correlated)系統，譬如量子色動力學(Quantum Chromodynamics, QCD)或高溫超導(High Temperature Superconductor, High T_c)。限於篇幅的緣故，在此簡短的提出兩個有趣的推廣與應用。

首先，是將 AdS 空間換成漸進 AdS 空間(Asymptotically AdS space)，即不需保持全域的(global) $SO(4,2)$ 對稱，如此一來可以考慮對偶 CFT 在非平衡態時的物理，譬如傳輸現象與流體力學。在長波長的極限底下，我們可以利用線性響應原理(linear response theory)從全像關聯函數得到 CFT 在強耦合時的傳輸係數(transport coefficients)。對於強耦合的非平衡態系統，除了全像計算，幾乎沒有其他辦法可以研究他們的動態傳輸現象，這包括第一原理計算(first principle calculation)。透過這些計算，人們發現剪黏滯係數(shear viscosity)與熵密度的比值必須大於一個普世值(universal value)，這是之前無法預期到的[6]。而且這個普世值與 AdS 黑洞的散射截面有關，這樣的聯繫暗示 AdS 黑洞物理應等價於對偶 CFT 的流體力學。的確，當我們對全像理論進行系統性的長波長展開(derivative expansion)，便可以發現 AdS 空間下的愛因斯坦方程式等價於對偶 CFT 中用來描述相對論性共形流體力學的納維爾-斯托克斯方程式(Navier-Stokes equation)。兩組方程式都是非線性地，而且後者是藉由全像原理第一次被完整且正確地推導出來。

另外，大部分的物理系統都不是共形不變的，所以如要用全像原理來研究這些系統在強作用時的物理，就必須考慮徑向變形的 AdS 空間(warped AdS space)的對偶，其中度規(metric)的徑向變形效應對偶到場論中重整化群流(Renormalization Group Flow)。其中最有趣的強作用或強關聯系統是高能物理的 QCD 理論與凝聚態物理中的超導現象。而在討論 QCD 的全像對偶模型中最成功的是酒井-杉本模型(Sakai-Sugimoto model)[7]，這個模型可以圖像式的解釋手徵對稱破缺(chiral symmetry breaking)，並得出與實驗觀測相近的介子譜(meson spectrum)與低能量的有效手徵擾論(effective chiral perturbation theory)。

至於一般超導現象是與自發性對稱破缺有關，也就是有效場論的純量場在小於臨界溫度時會產生凝聚(condensation)，而形成不為零的序參數(order parameter)。從全像的觀點來看，與序參數算子對偶的基本場必須是可歸一化的(normalizable)，也就是不需要無窮大的能量就可以使基本場在邊界有值，從而引進除了質量、電荷與角動量之外新的黑洞參數，這就意味著違反黑洞的光頭定理。與平空間中的黑洞不同，(warped) AdS 空間中的黑洞處在一個重力位能井中，所以基本場在溫度夠低時無法逃脫位能井而在視界面上產生凝聚。這又是全像原理再一次展示新物理。

六、從此過著幸福快樂的生活？

儘管全像原理帶給我們對於量子重力的新看法與應用，但並不意味著我們已經完全瞭解量子重力，從此可以過著幸福快樂的生活。目前全像原理的適用性僅限於 AdS 空間，對於平空間的史瓦茲薛爾德黑洞(Schwarzschild black hole)所展現的全像現象如面積律與微觀態的理解仍非常有限。另外，大部分的全像原理應用是從重力來理解強作用系統，而很少有從弱作用的場論來研究對偶的強重力現象，譬如黑洞奇點在

量子效應下是否會平整化？此外，在凝聚態物理的應用方面，與全像 QCD 的情況相比，我們仍然缺乏更微觀的對應關係。希望這些問題在不久的將來都可以得到滿意的解答。

註釋

[1] 詳細內容請參見本期陳江梅教授的文章。

[2] 詳細內容請參見本期賀培銘教授與詹傳宗教授的文章。

[3] 他還提出另外兩個維度不同的 AdS/CFT 對偶的例子，在此我們將只集中討論 5 維 AdS 的例子。

[4] 共形變換比較精確的翻譯應為保角變換，因為它為通常會改變形狀，卻不會改變夾角。不過兩者在中文術語上皆通用。

[5] AdS 空間的示意圖可參考本期溫文鈺博士文章中的圖二。

[6] 較詳細的討論可參考本期溫文鈺博士的文章。

[7] 同上。

