Decay Equation

The simplest (ordinary) differential equation of function $y(x)$, with variable x.

最簡單的微分方程式。

$$\frac{dy}{dx} = f(y, x)$$

The first derivative of function $y(x)$ with respect to variable x is a known function of x, y.

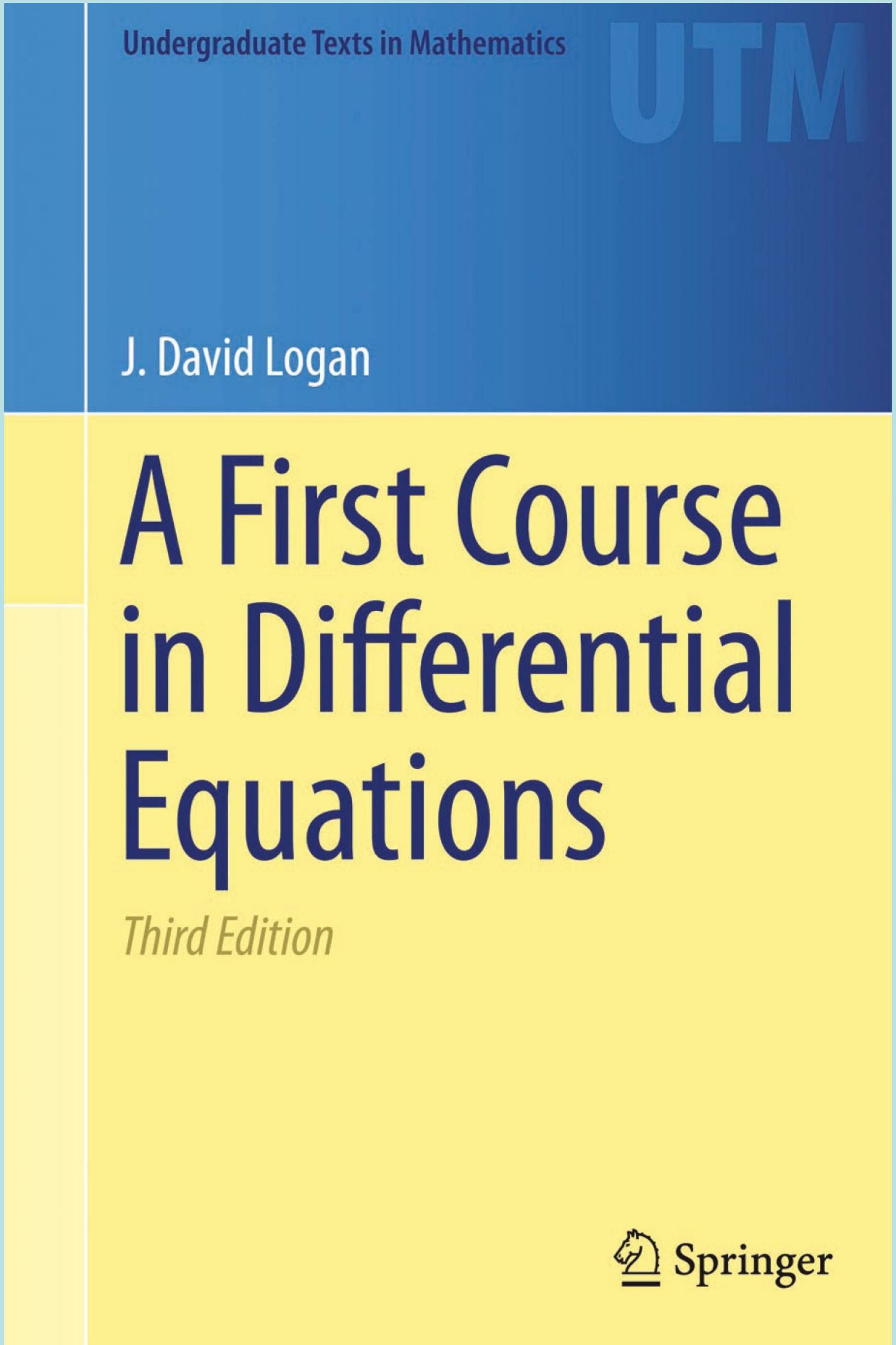
It is called first order Ordinary Differential Equation (ODE) 一次常微分方程式.

Physics is about the change of physical quantities.

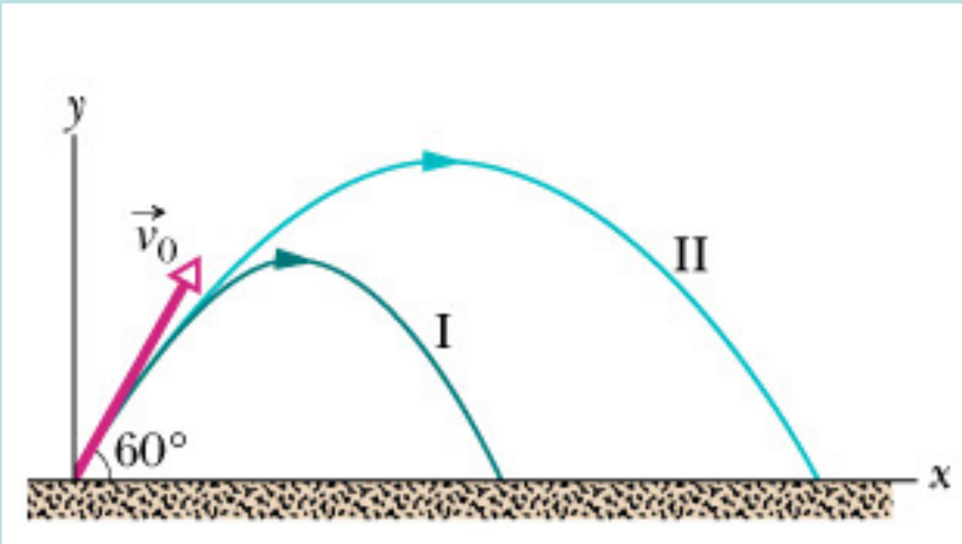
Physical law always concerns the rate of change, ie derivatives.

For physics applications, the variable is usually time t, with the function then $x(t)$ or $y(t)$.

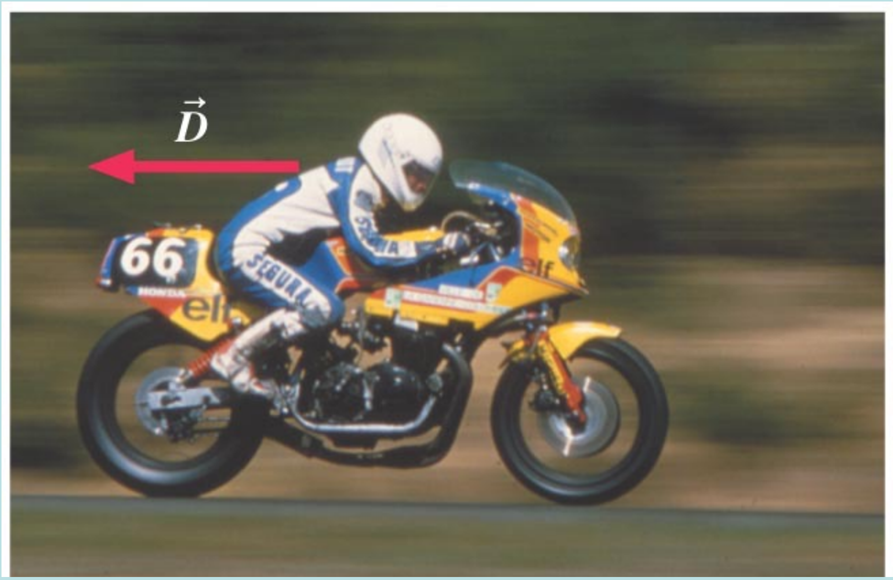
$$\frac{dx}{dt} = f(x, t)$$


Undergraduate Texts in Mathematics
UTM
J. David Logan
A First Course in Differential Equations
Third Edition
Springer

空氣阻力大小與速度成正比時的拋體運動



抛體運動是二維運動，物理量必須以向量表示：



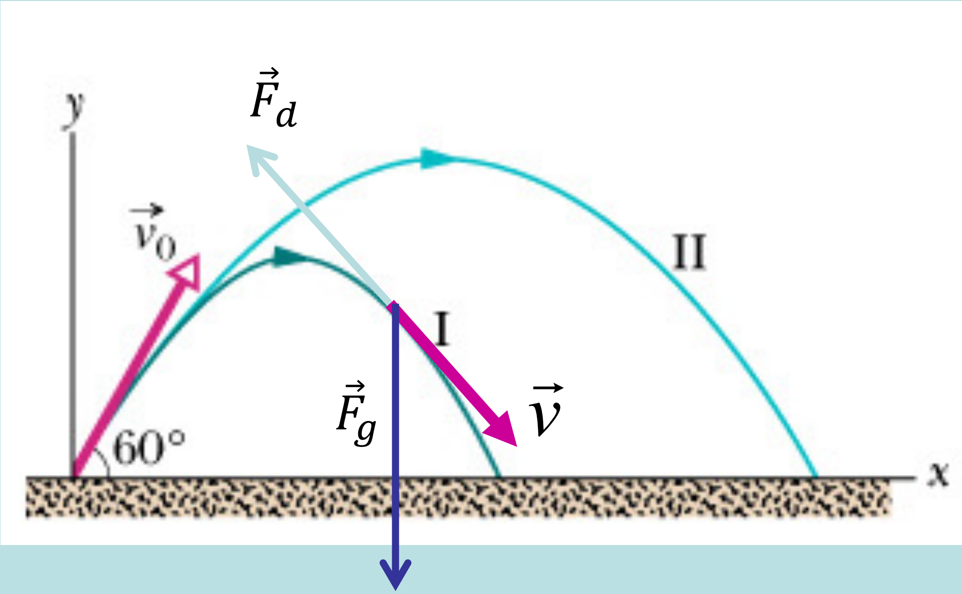
當阻力大小與速率成正比 $F_d = -kv$

力的向量表示式： $\vec{F}_d = -kv\hat{v} = -k\vec{v}$

阻力向量與速度向量成正比！

空氣阻力大小與速度成正比時的拋體運動

$\vec{F}_d = -k\vec{v}$ $\vec{F}_g = -mg\hat{j}$ 運動方程式 $m\vec{a} = \vec{F}_g + \vec{F}_d$



$$\vec{a} = -g\hat{j} - \frac{k}{m}\vec{v}k\vec{v}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -g\hat{j} - \frac{k}{m}\vec{v}$$

用分量表示！

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{k}{m}v_x$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -g - \frac{k}{m}v_y$$

垂直方向的運動方程式與水平分量無關。

小阻力下的拋體，垂直與水平依舊彼此獨立。

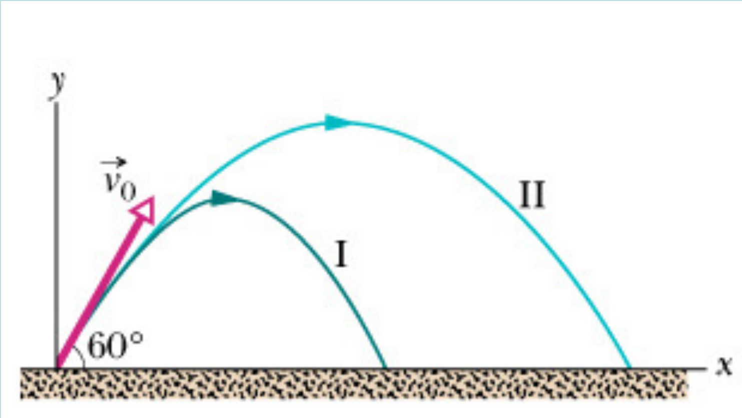
水平速度的速度分量v_x

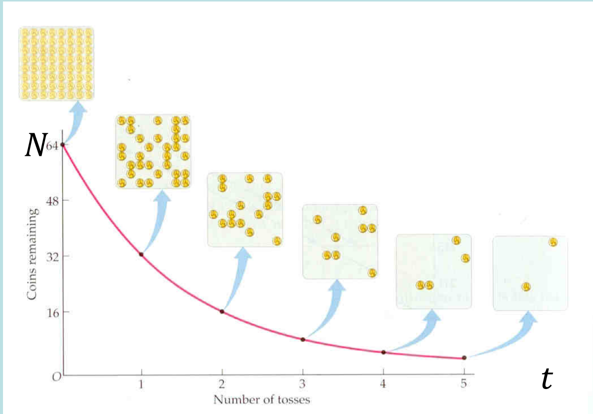
$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{k}{m}v_x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{dt} = f(x,t)$$

v_x的一次微分與v_x成正比！

This is a first order ordinary differential equation of function $v_x(t)$.

這個微分方程式，與放射性原子核數目N的衰變方程式完全一樣！





$$\frac{dv_x}{dt}(t) = -\frac{k}{m}v_x(t)$$

$$\frac{dN}{dt}(t) = -\Gamma N(t)$$

v_x的微分與v_x成正比！

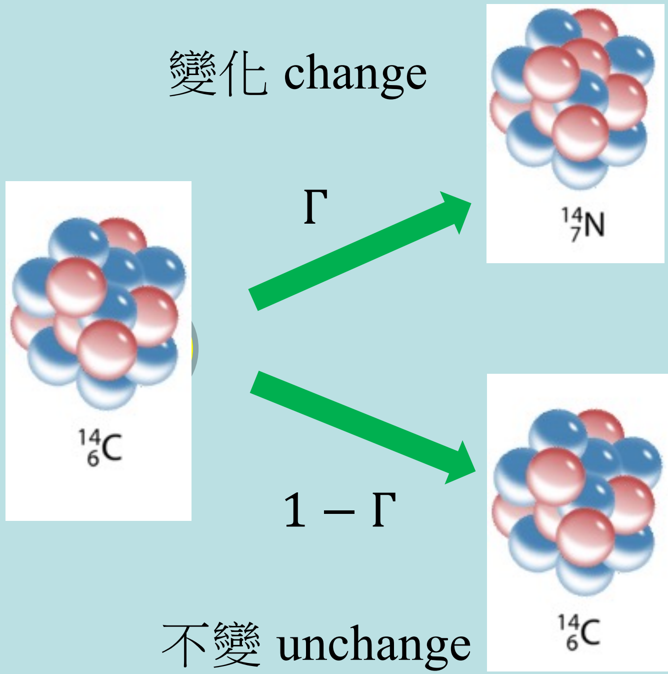
N的微分，與N成正比。

兩者的物理完全無關，但數學方程式完全相同，解就完全一樣！

這是一個適用於宇宙中，很多物理量變化的方程式！

下圖是放射性同位素碳原子核，衰變為氮原子核。 ${}^{14}_{6}\mathrm{C} \rightarrow {}^{14}_{7}\mathrm{N} + e^{-} + \bar{\nu}_{e}$

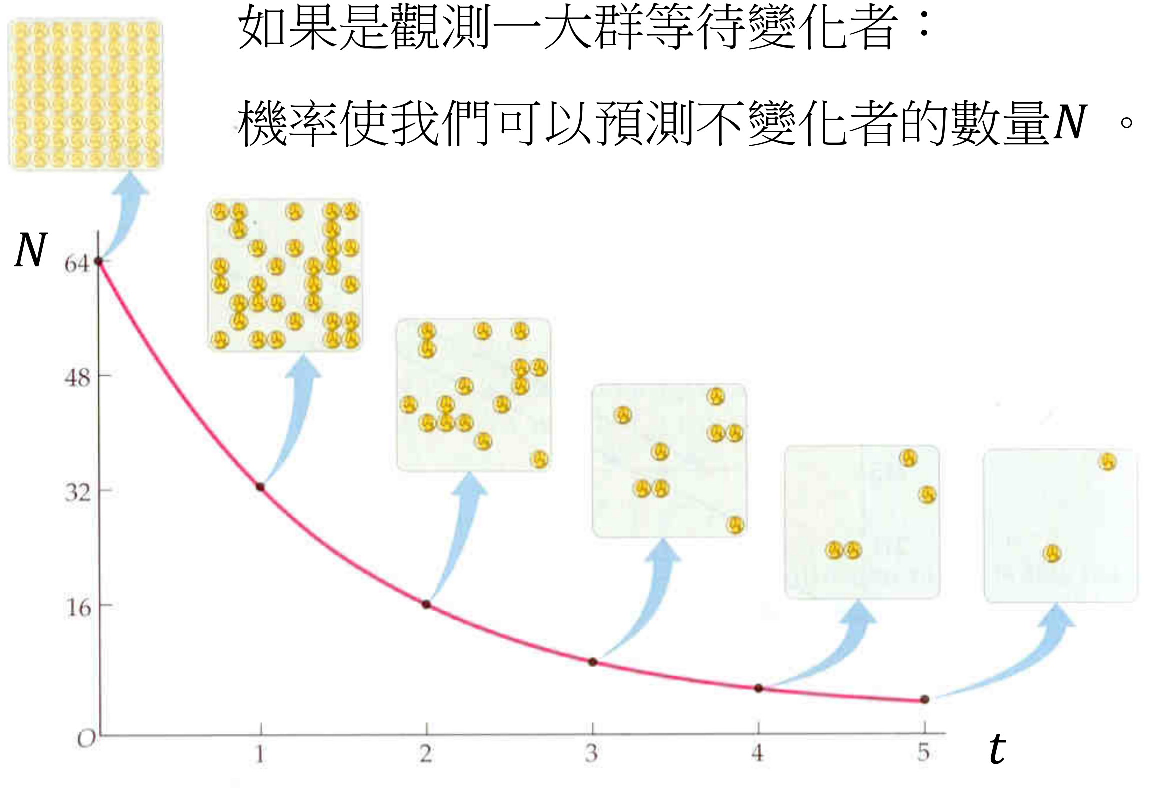
對許多變化，每單位時間發生變化的機率通常是固定的，這裏記為常數Γ。



Γ對每一個相同的等待變化者都相等。

如果是觀測一大群等待變化者：

機率使我們可以預測不變化者的數量N 。



假設 Γ 是一個待變者每秒變化的機率。

ΓN 即是N個等待變化者，每秒發生變化的次數，

每變一個， N數目就減1。$-\Gamma N$ 等於數目變化率$\frac{dN}{dt}$ 。

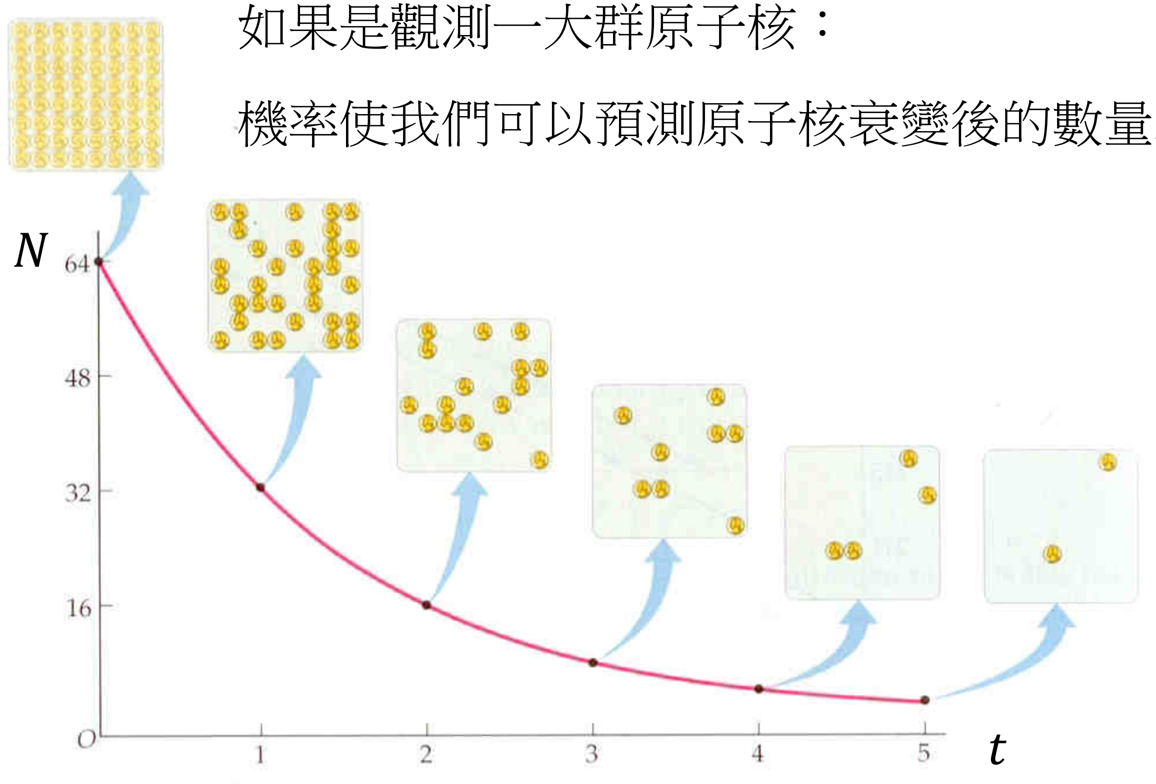
$$\frac{dN}{dt}(t) = -\Gamma N(t)$$

變化率 = 單位時間的變化 = $\frac{\text{一段時間內的變化（位移）}}{\text{這段時間}}$

因此N的微分，與$N(t)$函數成正比。

如果是觀測一大群原子核：

機率使我們可以預測原子核衰變後的數量N 。



假設 Γ 是一個原子核每秒衰變的機率。

ΓN 即是一群N個原子核，每秒衰變發生的次數。

每衰變一次，數目就減1。 $-\Gamma N$ 等於數目變化率$\frac{dN}{dt}$ 。

$$\frac{dN}{dt}(t) = -\Gamma N(t)$$

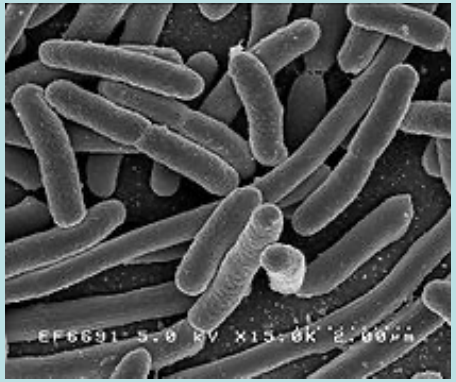
變化率 = 單位時間的變化 = $\frac{\text{一段時間內的變化（位移）}}{\text{這段時間}}$

因此N的微分，與$N(t)$函數成正比。

同樣的推論也適用於使數目增加的變化！

細菌的生長及傳染病傳播也滿足類似的數學關係。

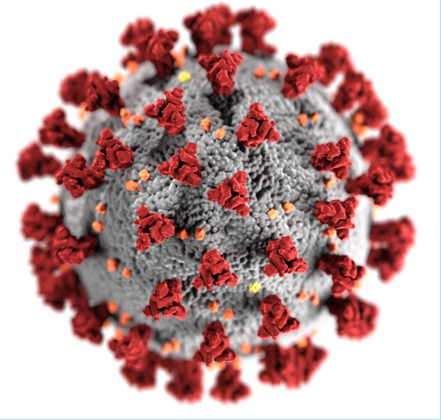
細菌數目的增加速率，與細菌數目成正比！

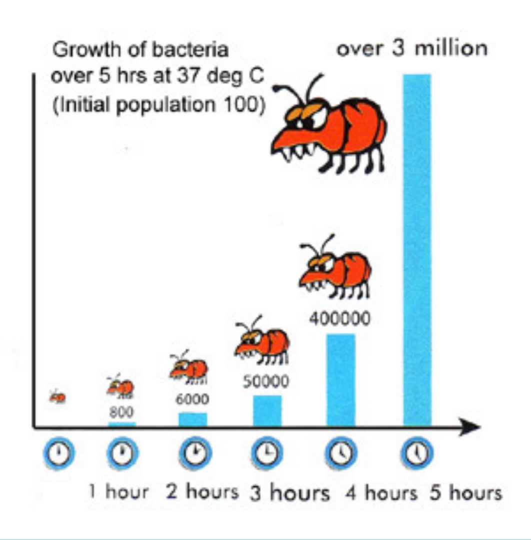


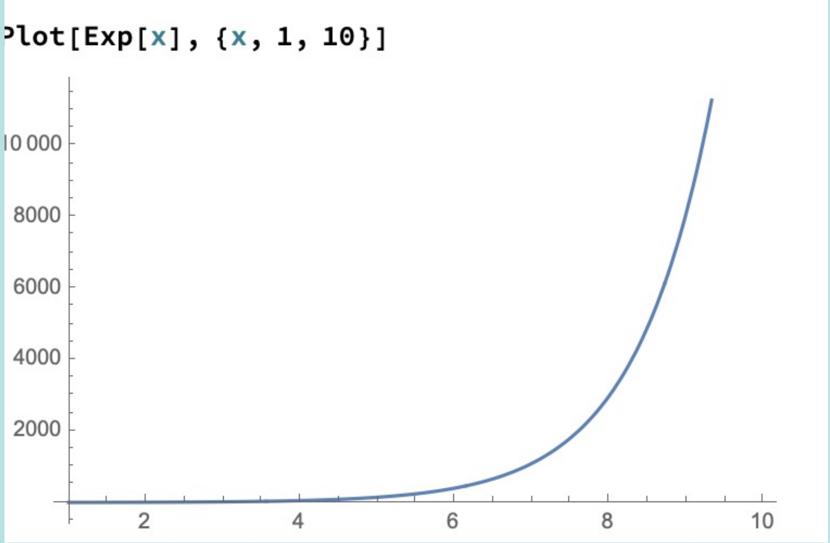
$$\frac{dN}{dt} = +\Gamma N$$ 現在比例常數為正！

Γ是單位時間傳播比例infection rate：一個人會傳給多少人 。

ΓN就是單位時間新增染病人數。

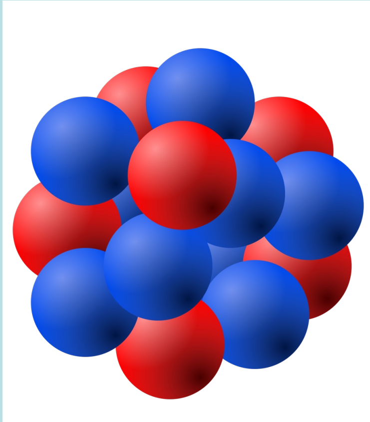




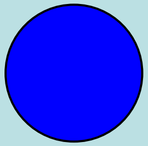


現在來一點技術性的背景介紹，以了解放射性原子核。

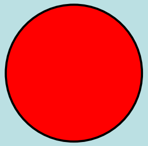
Atomic nucleus 原子核由核子組成。



A nucleon 核子 is either a proton or a neutron.



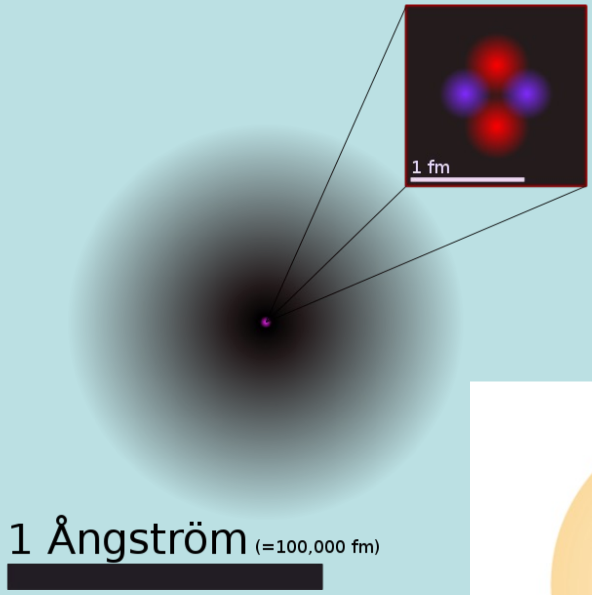
Neutron

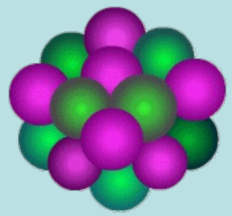


Proton

原子核比電子重非常多。

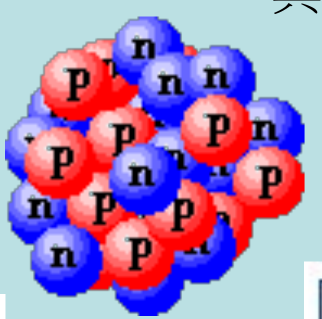
原子內的正電與大部分的質量集中於極小的原子核 Nucleus

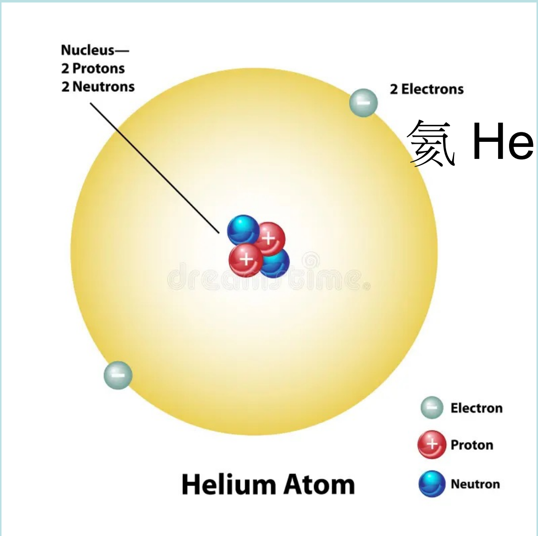


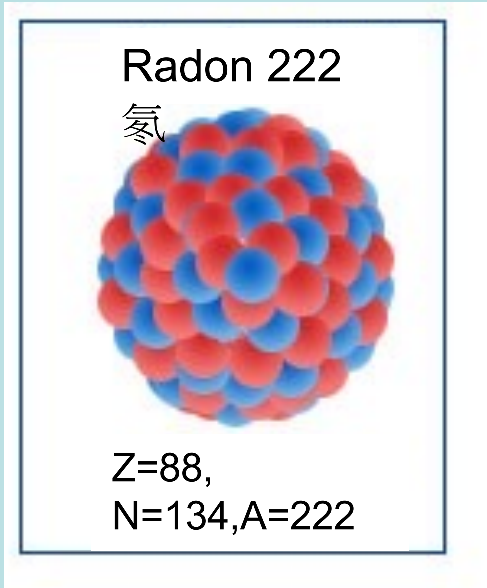


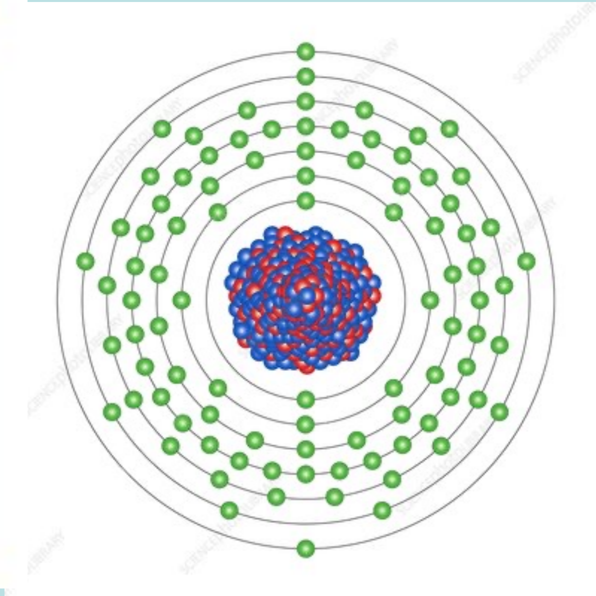
If an atom could be expanded to the size of a football stadium, the nucleus would be the size of a single blueberry. (credit middle: modification of work by “babyknight”/Wikimedia Commons; credit right: modification of work by Paxson Woelber)

與質子等數目的電子圍繞著原子核就形成原子。





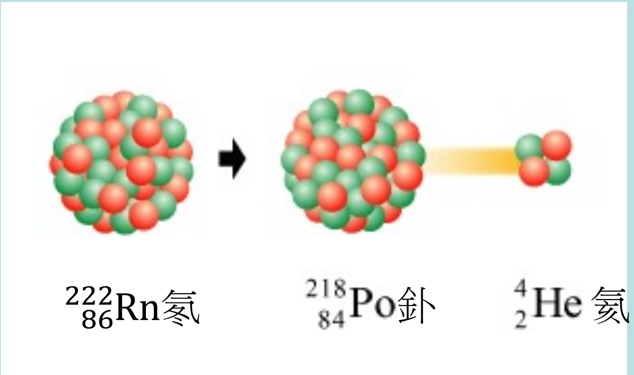


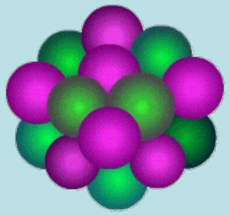


Radioactive decay 放射性原子核衰變

原子核若含大量核子，常會不穩定，會衰變decay(解體?)為較穩定的原子核。

衰變時會放射出高能量的粒子，具有殺傷力，就稱為放射性原子核！





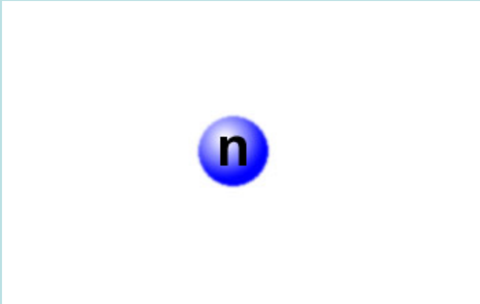
例如放射性的氡(ㄉㄨㄥ)原子核，衰變時分裂為較小的釙(ㄆㄛˋ)原子核、

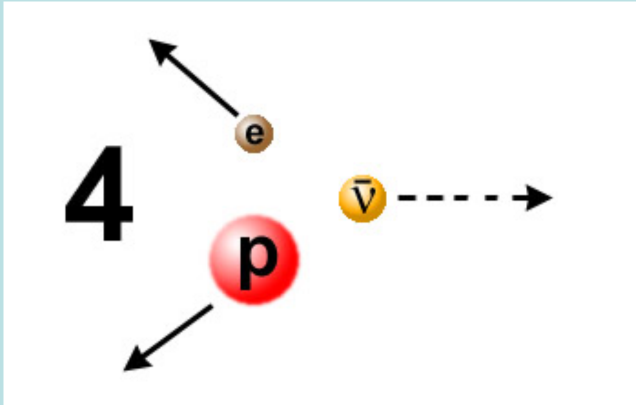
加上更小的氦原子核。質子、中子數量都不變。稱核分裂。

高能量的氦原子核就具有殺傷力。

α衰變

α衰變中，核子的身份不變，只是分裂了。



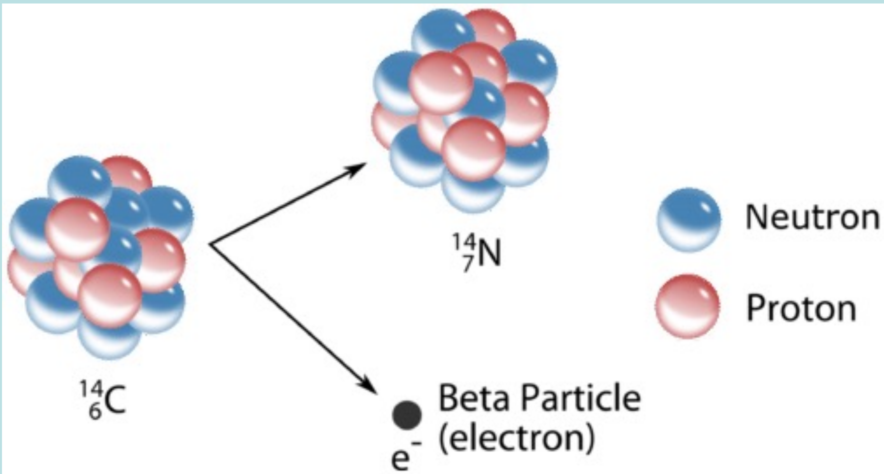


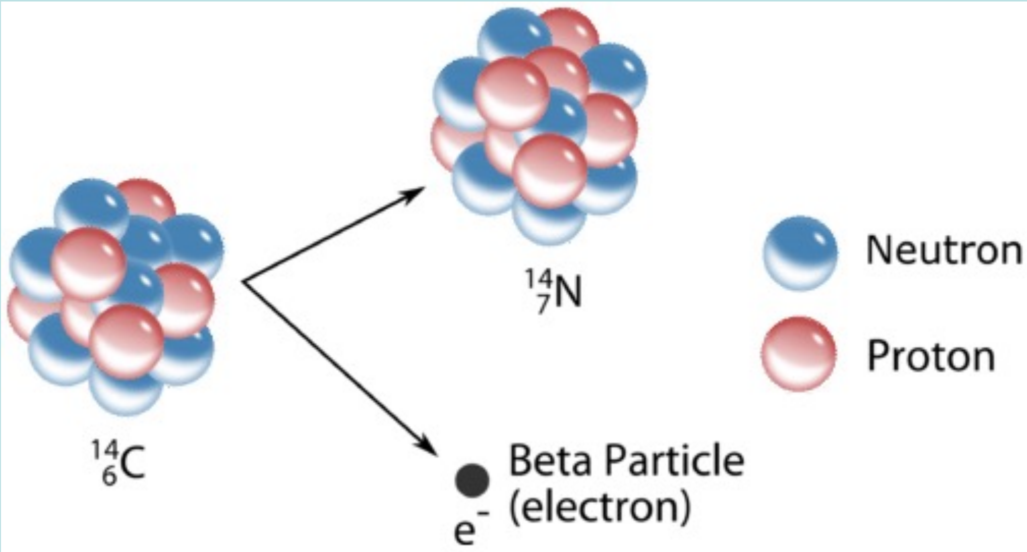
β衰變　　$n^0 \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$

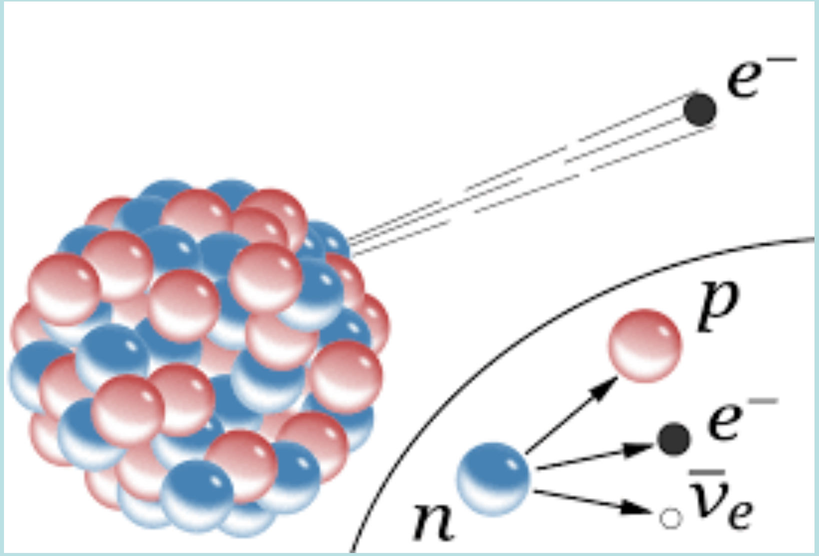
與α衰變不同，在β衰變中，核子的身份改變了，

同時會放出微中子ν！

原子核內的中子可以進行β衰變。







原子核中的質子數目決定原子的化學性質。

$n^0 \to p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$ 原子核中若發生β 衰變，原子核的核種會改變！

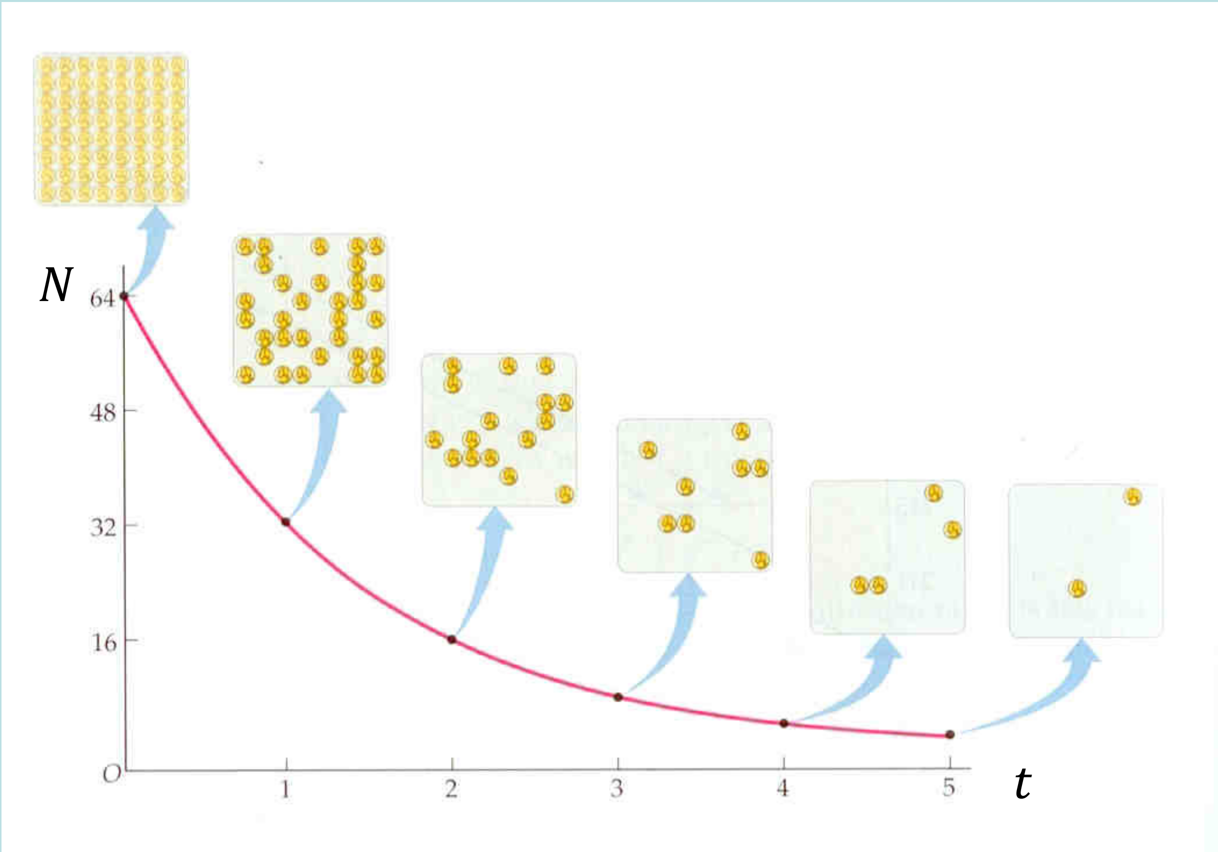
不穩定的放射性原子核，可以透過β 衰變 ，衰變為不同的原子核，

例如：碳同位素原子核衰變為氮原子核！

$$^{14}_{6}\mathrm{C} \to {}^{14}_{7}\mathrm{N} + e^- + \bar{\nu}_e$$

衰變前後原子核的質量會有差異，而有能量釋放。

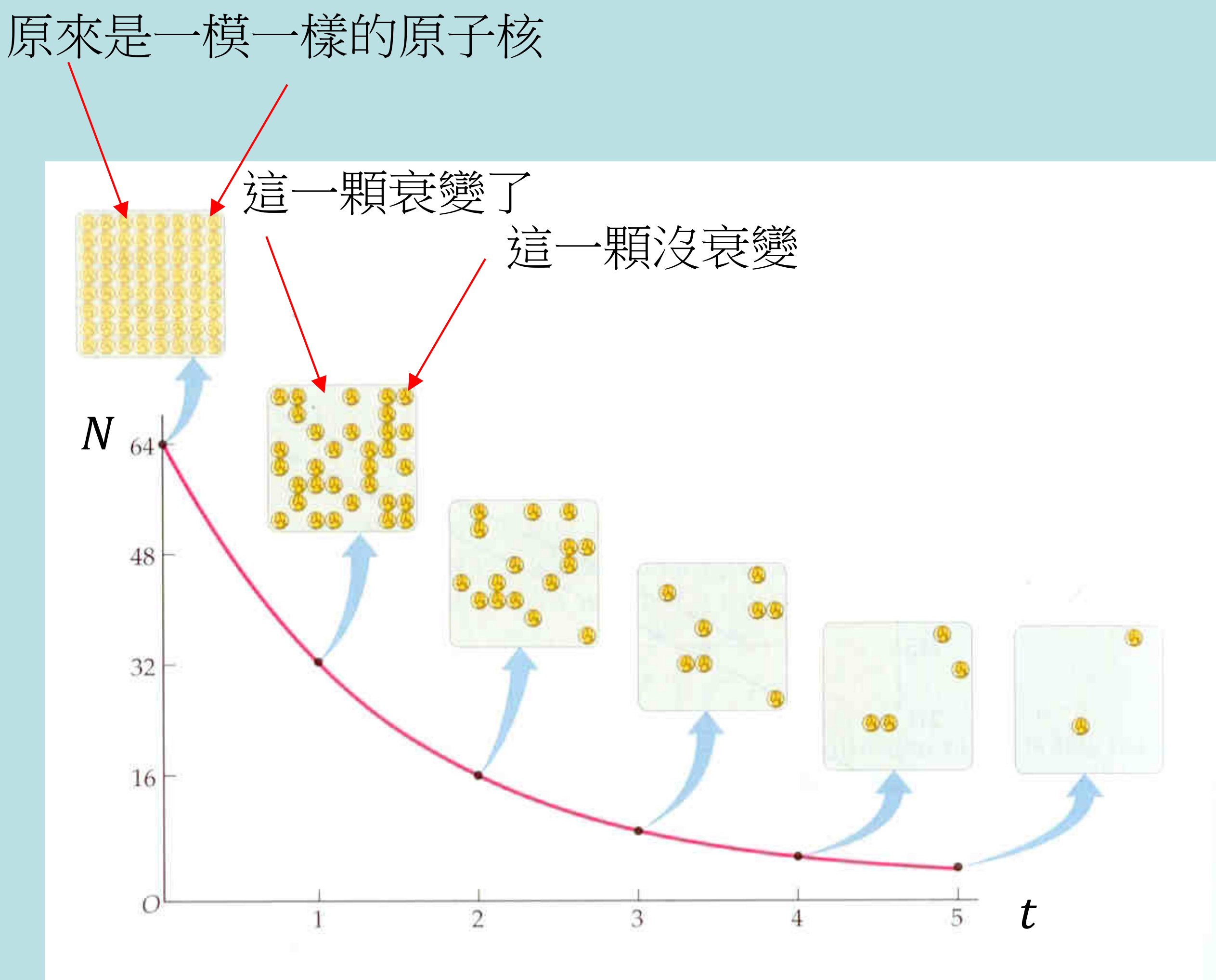
大部分不穩定放射性原子核的放射性，就來自 β 衰變 ！



實驗發現：一大群氡原子核，

經過一段稱為半衰期的時間(四天) ，數量會減半，

意思是有一半的氡原子核衰變成釙，一半的氡原子核沒有衰變。



注意即使完全相同的原子核，它的命運：何時及是否衰變，都不相同。

原子核的衰變是一個微觀的量子現象。

我們無法預測單一一顆原子核何時及是否衰變，只能預測它衰變的機率。

農場的每一株菜都不同，代表一樣品種的菜還是有先天與後天的差異。

但每一個放射性原子核都是一模一樣的，無從分辨，

根據科學的確定原則，照理講應該有一樣的性質與測量結果。

但事實是：完全相同的原子核，它的命運，何時及是否衰變，都不相同。

不確定性開始登陸了！

In Quantum Mechanics, there exists no quantity which in an individual case can determine the result of a collision. I myself is inclined to give up determinism in atomic world.

在量子力學之中，不存在任何量可以讓我們決定單一一次散射的結果。

我個人傾向在原子世界中放棄決定論！

Max Born 1926

古典物理的決定論必須改變為量子物理的不確定論。

物質波的機率解釋 Max Born 1926

一顆粒子在某處的物質波的強度 ≈ 在該處發現此粒子的**機率**

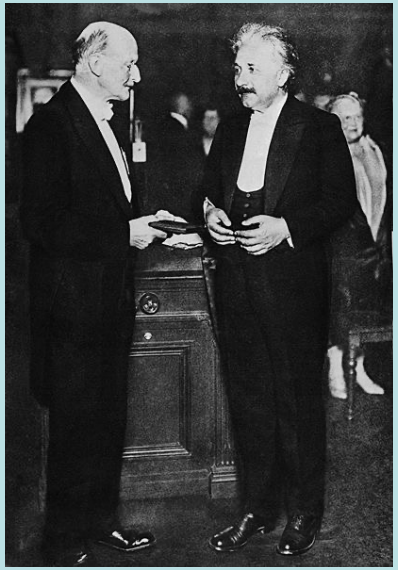
物質波強度是正比於振幅平方，這可以用波函數的絕對值平方$|\Psi|^2$ 來計算。

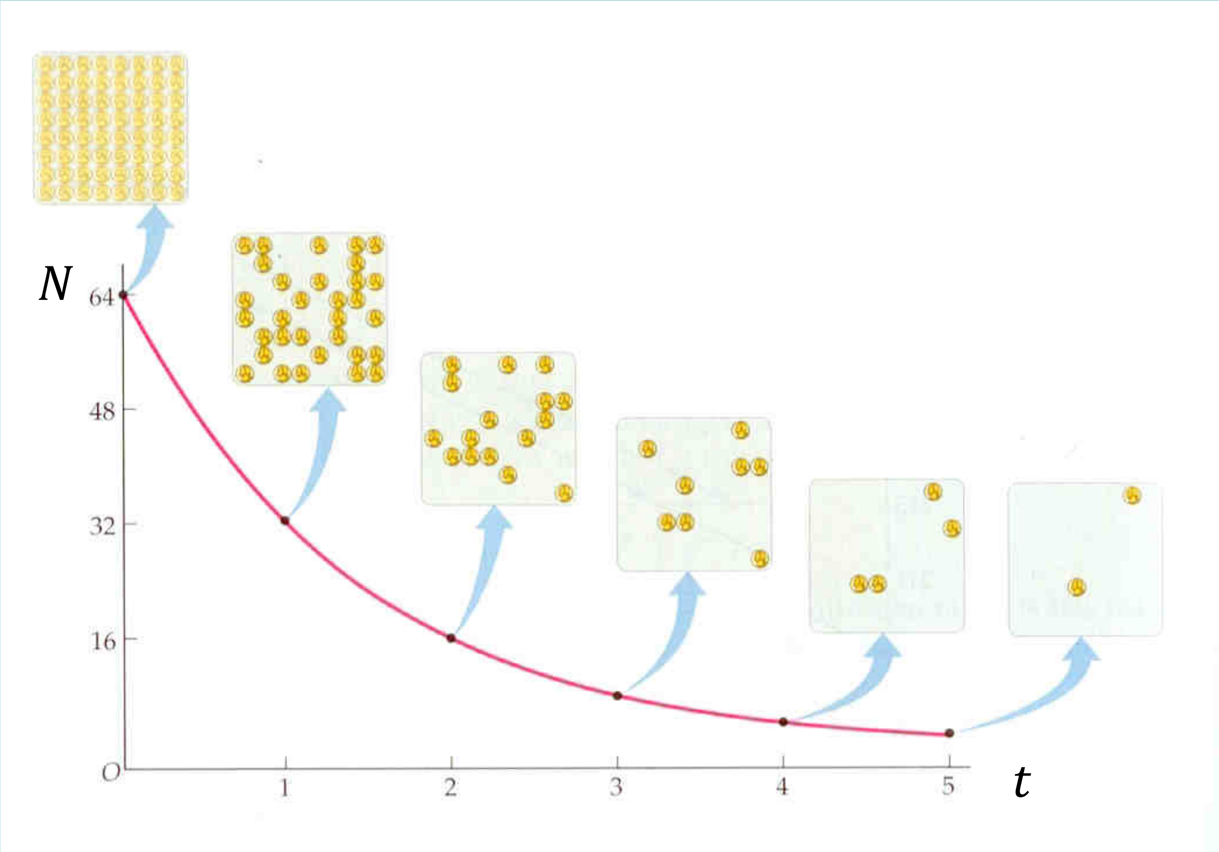
$|\Psi|^2$是實數！

Quantum Mechanics is very imposing. But an inner voice tells me that it is not real thing. The theory delivers a lot but hardly brings us closer to the secrets of the Old One. I for one am convinced that He does not throw dice.

Einstein to Born 1926

量子力學很令人印象深刻，但我內心有一個聲音告訴我，這不是真實的東西。這個理論可以產生很多預測，但並沒有使我們更接近上帝的秘密。我個人深信上帝是不玩骰子的。

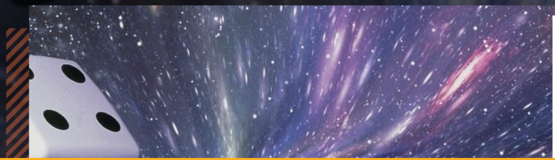




實驗發現：一大群氡原子核，

每經過一段稱為半衰期的時間(四天) ，數量會減半，

這暗示每單位時間氡原子核衰變發生的機率是固定的。



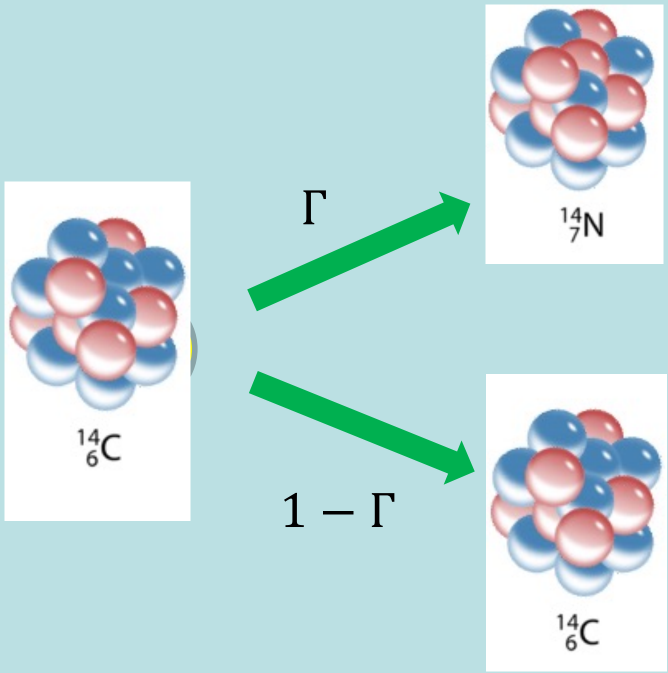
節目 知識好好玩

EP04｜玩骰子的上帝——從放射性原子核談

如此的話，觀察一群一模一樣的氚原子核，等於重複同一個觀察單獨氚的實驗，照理講應該只能有一個結果。但事實就是，一群原子核不會同時衰變，如此就表示，在同樣條件下，單獨一個氚的觀察，結果將不是確定的。這就是物理學家在二十世紀初面對的局面，實驗明白顯示，一樣的因，卻可能得到不一樣的果。

在量子世界中，物理學家能預測的只有機率！

這樣的不確定性使物理喪失了對單一原子核預測未來的能力。但話說回來，我們的確能測量或預測原子核的半衰期，這代表如果是一大群原子核，我們可以很精確預測有多少比例會衰變，有多少比例不會衰變。細心的聽眾一定認出了，這就是我們在賭場賭博時遇到的情況。我們無法預測自己這一局的結果，但是賭場老闆卻可以利用機率預測整個場子的賺賠分布。所以在量子世界中，物理學家能預測的只有機率！愛因斯坦對這個情況，完全無法接受，因此也才說出上帝是不玩骰子這句名言。愛因斯坦認為我們的不確定，只是我們對粒子的研究不夠透徹，一定有隱藏的因子，使粒子其實與上述種子是一樣的。可惜這樣的想法，在1960年，被證實是不正確的。

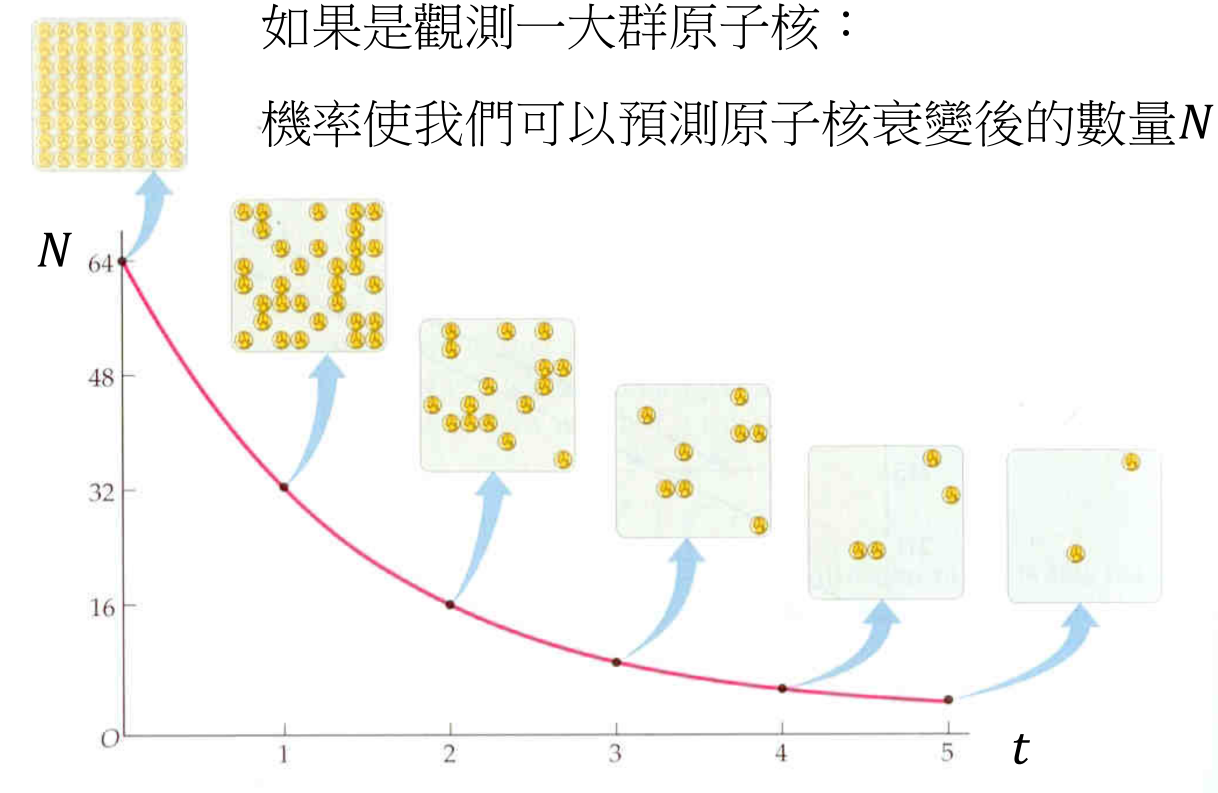


每單位時間衰變發生的機率通常是固定的。

對每一個相同的原子核都相等。

如果是觀測一大群原子核：

機率使我們可以預測原子核衰變後的數量N 。



Γ 是一個原子核每秒衰變的機率。

ΓN 即是一群N個原子核，每秒衰變發生的次數。

每衰變一次，數目就減1。 $-\Gamma N$ 等於數目變化率$\frac{dN}{dt}$ 。

$$\frac{dN}{dt}(t) = -\Gamma N(t)$$

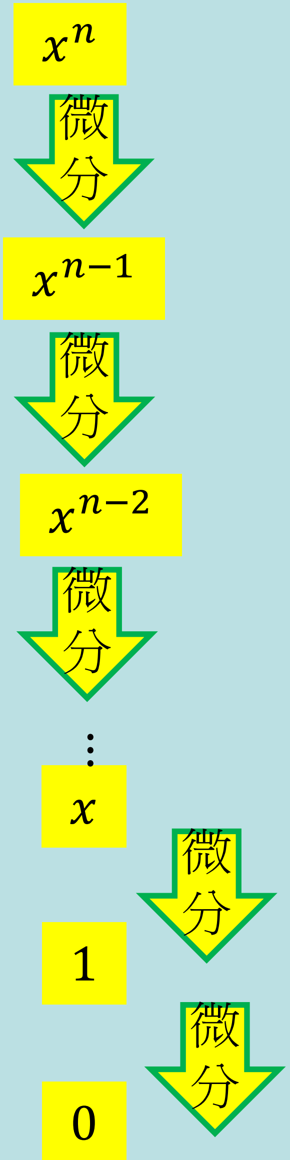
現在我們來求解：

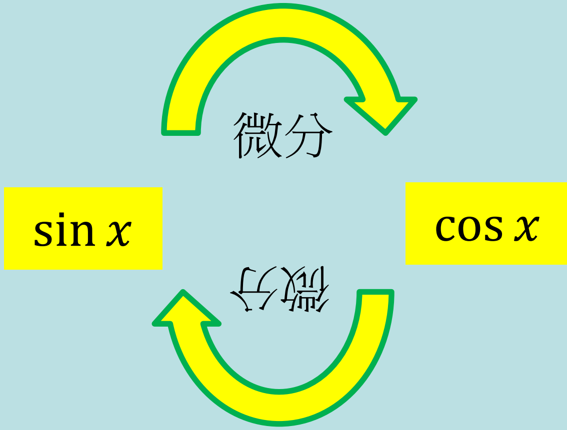
$$\frac{dN}{dt} = -\Gamma N$$

Method 0

函數的微分與自己成正比！

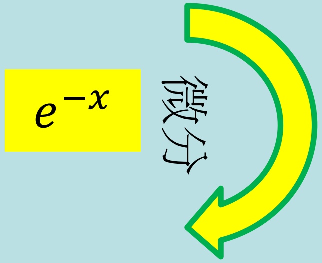
有沒有這樣的函數？不可能是多項式。也不是三角函數。





$$\frac{de^x}{dx} = e^x$$

指數函數的微分依舊是指數函數。



$$\frac{de^x}{dx} = e^x$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}e^{bx} = be^{bx}$$

$$\frac{dN}{dt} = -\Gamma N$$

$$N = e^{-\Gamma t}$$

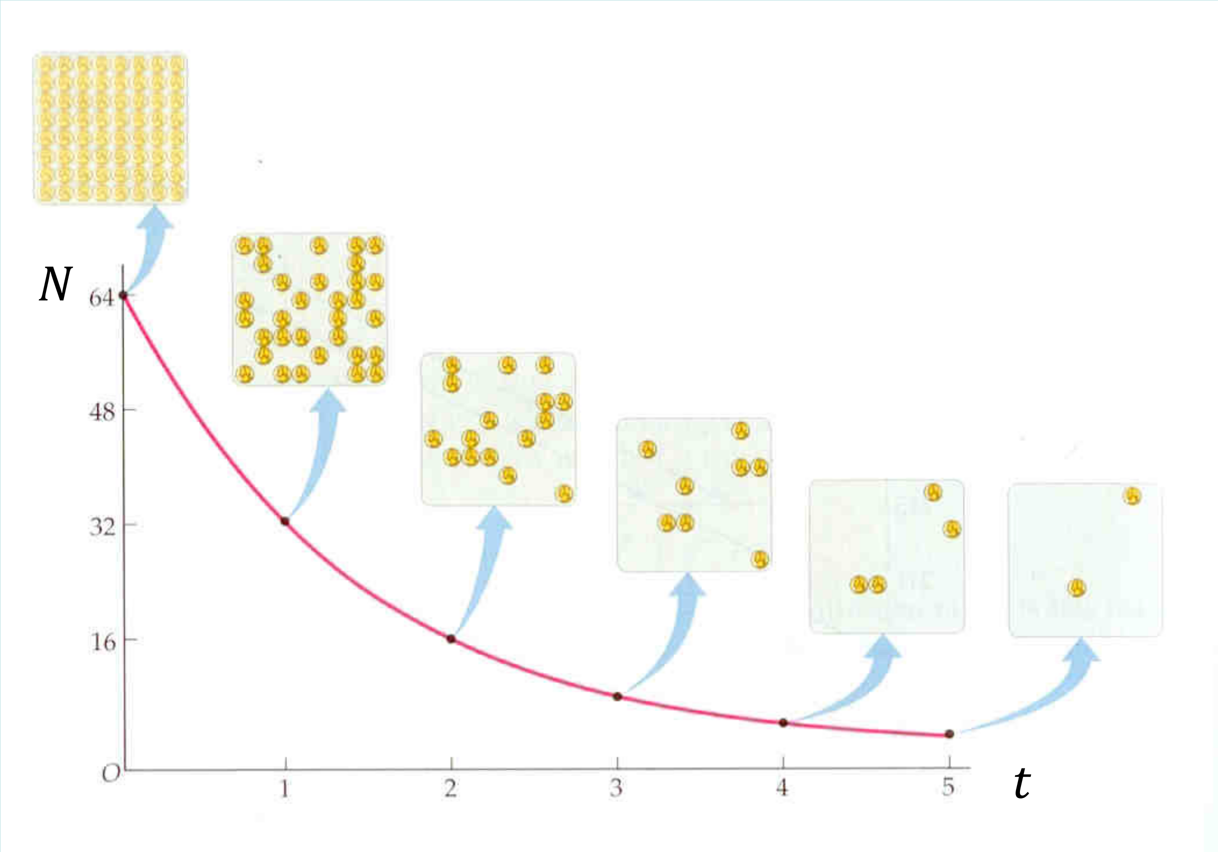
取常數b為$-\Gamma$，即得到解！

但我可以在這個解的前面乘上任一個常數C，解仍成立 $N = Ce^{-\Gamma t}$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dCe^{-\Gamma t}}{dt} = C\frac{de^{-\Gamma t}}{dt} = -C\Gamma e^{-\Gamma t} = -\Gamma N$$

一次微分方程式的解會有一個未確定的常數！

注意常數C可以是任意數，我們似乎得到了無限多組解。



$$\frac{dN}{dt} = -\Gamma N$$

微分方程式只規定變化率與數量正比，
此規定的漏洞是無法禁止等比例增減，也就是將數量乘常數C！

$$N = Ce^{-\Gamma t}$$

但也因有C我們才能引入起始數目N_0，否則起始數量只是1。

事實上$N(0) = C = N_0$

$$N = N_0 e^{-\Gamma t}$$

如果沒有引入起始的條件N_0，微分方程式有無限多個解。

引入適當的起始條件，微分方程式就只有唯一解。

幾何上的意義

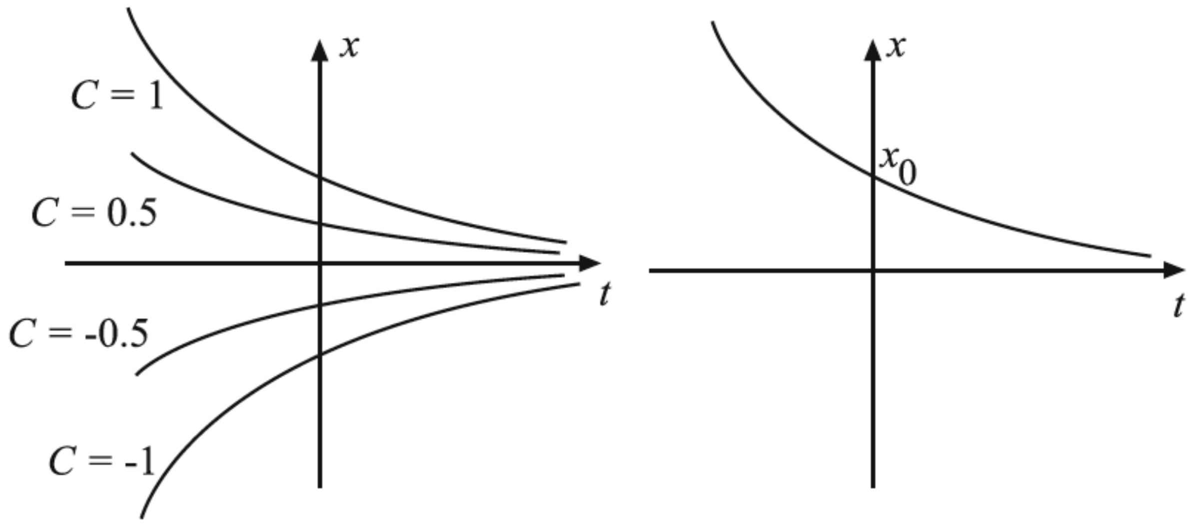


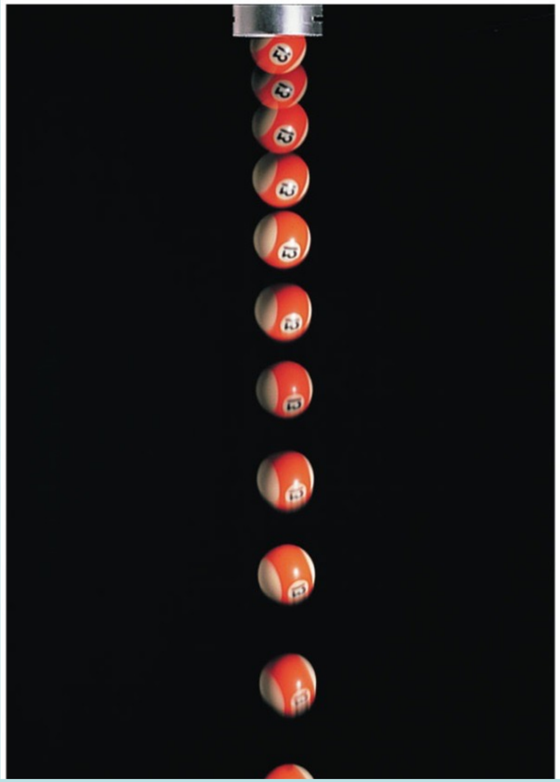
Figure 1.2 (Left) Plots of four integral curves, or solution curves (1.5), of the differential equation (1.4), for four values of C. (Right) A particular solution satisfying the initial condition $x(0) = x_0$.

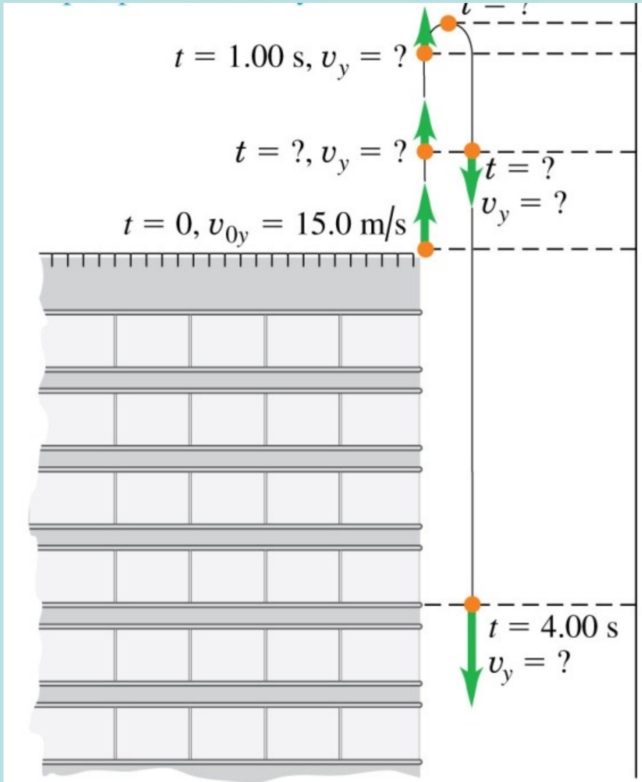
常數C可以是任意數，我們得到了無限多組解，對應無限多組線。。

引入適當的起始條件，只有一條線能滿足，微分方程式就只有唯一解。

這個結果幾乎適用於所有的微分方程式。

地表附近的自由落體或拋體





$$\vec{F} = -mg\hat{j}$$

$$m\vec{a} = -mg\hat{j}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

地表附近自由落體的運動方程式！這是微分方程式！

解微分方程式

$$v=\int_{t_0}^{t} dt'(-g) = -gt + gt_0 = -gt + c_1$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

$$\frac{dy}{dt} = v$$

引入速度，使微分少一次。

$$\frac{dv}{dt} = -g$$

速度的微分是一個多項式，
因此速度也是一個多項式！

多項式的微分冪次會降一次，
因此速度是時間的線性函數。

$$v = -gt + c_1$$

這裡有一個常數，如果沒有這個常數，
起始速度只能為零。

$$\frac{dy}{dt} = -gt + c_1$$

位置的微分是一個多項式，
因此位置也是一個多項式！

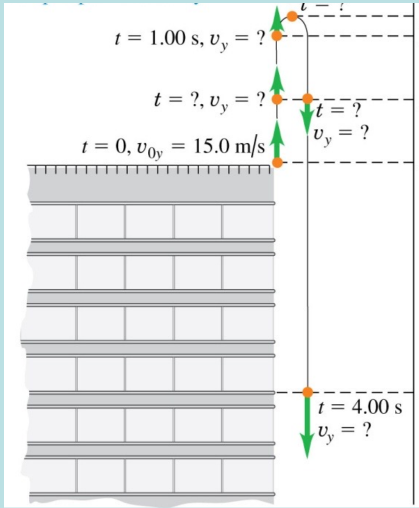
多項式的微分冪次會降一次，
因此位置是時間的二次函數。

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1 t + c_0$$

如果沒有這個常數，
起始位置只能為零。

這裡有兩個未知的常數，顯示單靠微分方程式無法決定唯一解！

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1 t + c_0 \qquad v = -gt + c_1$$



微分方程式無法決定唯一解

但我們還未輸入起始的位置與速度，稱為起始條件！

$$y(0) = y_0 \qquad v(0) = v_0$$

無疑地，起始條件會影響運動的軌跡！

解的表示式中的兩個未定常數c_0, c_1，正好由兩個起始條件來決定：

$$y(0) = c_0 = y_0 \qquad v(0) = c_1 = v_0$$

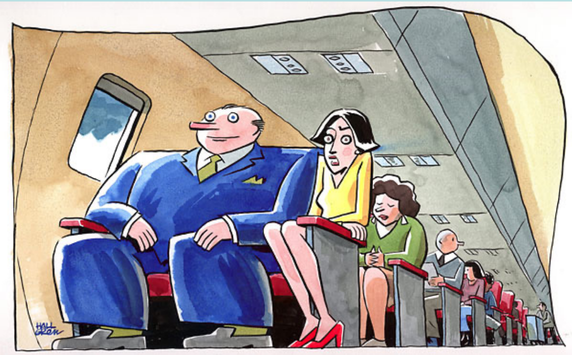
運動方程式加上兩個起始條件就決定唯一的一個解！

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0$$

要求出物體運動路徑，必須加上初位置初速度兩個起始條件

一般代數方程式的解通常是 No wiggle room

$$2x+1=2$$



微分方程式的解需要刻意讓自己挪出足夠的空間與自由度，才能滿足起始條件。

$$\frac{dN}{dt}=-\Gamma N$$

引入適當的起始條件，微分方程式就只有唯一解。

微分方程式的解需要刻意讓自己挪出足夠的空間與自由度，才能滿足起始條件。

因此，微分方程式的解通常會有未能決定的常數Undetermined Constants.

$$\frac{dN}{dt} = -\Gamma N$$

$$N = Ce^{-\Gamma t}$$

引入適當的起始條件，微分方程式就只有唯一解。

Method 1 (Separable Function)　比較可以普遍適用的求解法！

以積分來進行解微分方程式的技巧：

$$\frac{dN}{dt} = -\Gamma N$$

可以把所有N的Factor集中左邊，t集中右邊。

$$\frac{1}{N}dN = -\Gamma dt$$

函數的微小變化dN與變數的微小變化dt的關係。

兩邊都取積分(即是微小變化累加)，注意可以加上一個未決定的常數C'：

$$\int \frac{1}{N}dN = -\Gamma \int dt + C'$$

$$\ln N = -\Gamma t + C'$$

兩邊都取指數：

$$N(t) = Ce^{-\Gamma t}$$

注意常數C可以是任意數，我們似乎得到了無限多組解。

引入適當的起始條件，微分方程式就只有唯一解。

$$N(0) = C = N_0 \qquad N(t) = N_0 e^{-\Gamma t}$$

Method 2 (Linear Equation, Integrating Factor)

$$\frac{dN}{dt} = -\Gamma N$$

$$\frac{dN}{dt} + \Gamma N = 0$$

兩邊都乘上$e^{\Gamma t}$, called integrating factor!

$$e^{\Gamma t}\frac{dN}{dt} + \Gamma e^{\Gamma t} N = 0$$

$$\Gamma e^{\Gamma t} = \frac{d}{dt} e^{\Gamma t}$$

使左手邊可以寫成是一個函數的微分！

$$\frac{d\left(e^{\Gamma t}N\right)}{dt} = 0$$

此函數微分為零，因此等於一個常數。

$$e^{\Gamma t}N = C \qquad N(t) == Ce^{-\Gamma t}$$

Leibniz (1645-1716)

$$N = N_0 e^{-\Gamma t} = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$ $$\tau \equiv \frac{1}{\Gamma}$$

τ稱平均壽命，數量變為$1/e$的時間。

指數遞減函數是一個無窮級數，比所有多項式遞減都快：

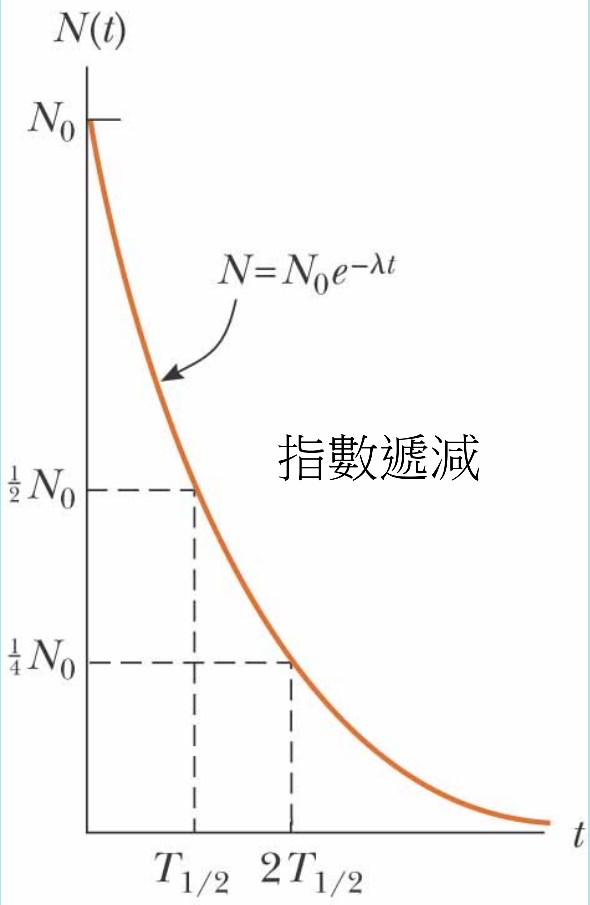
$$e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \cdots$$

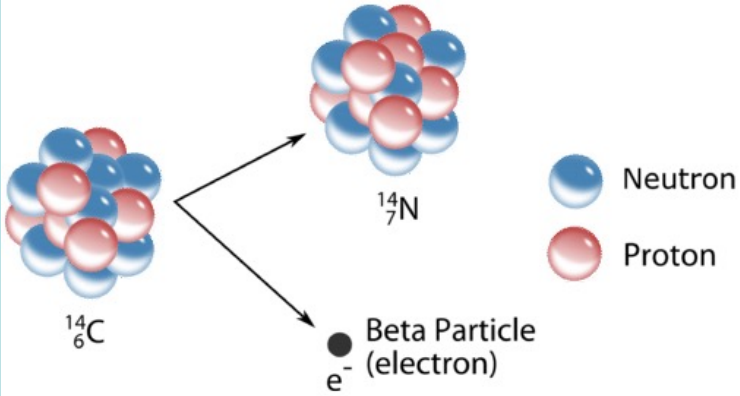
$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{x^{-n}} = \frac{x^n}{e^x} \to 0$$

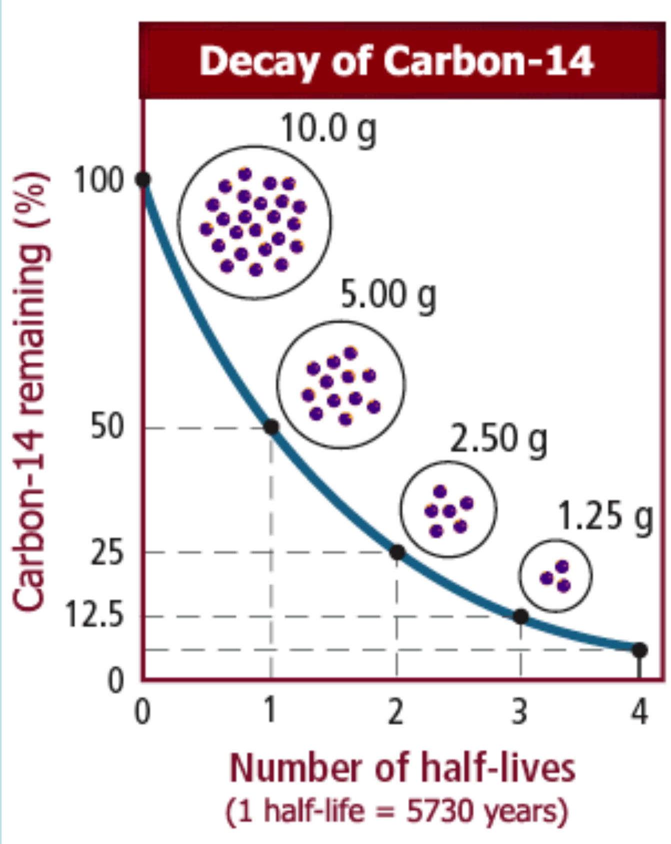
指數遞減函數，減少一半的時間永遠相同。

$$\frac{N(t_2)}{N(t_1)} = \frac{c \cdot e^{-\Gamma t_2}}{c \cdot e^{-\Gamma t_1}} = e^{-\Gamma(t_2 - t_1)} = \frac{1}{2}$$

$$(t_2 - t_1) = \frac{1}{\Gamma} \ln 2 \equiv T_{\frac{1}{2}}$$ 半衰期



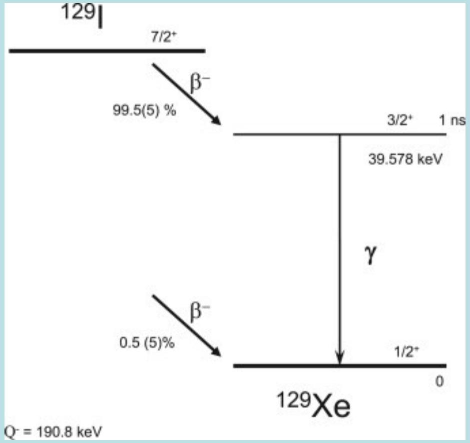




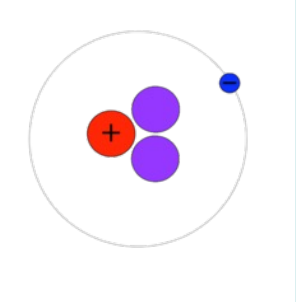
碳14的半衰期是5700 ± 30年。

例如核分裂產物中的放射性碘-129半衰期可以到1600萬年，

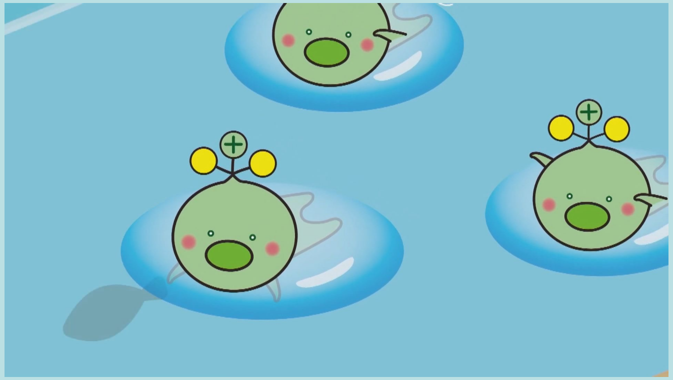
過程中一直有放射性，這就是核廢料難處理的原因。



氚的原子核是氫原子核的同位素，一樣有一個質子，但氚多了兩個中子。因此氚原子核由三個粒子組成，這個字就是氫氣的氫，在部首的氣的下方，以一個三撇的川字取代。因為質子數目一樣，氚原子化學性質與氫原子一樣，所以可以取代氫原子，與氧

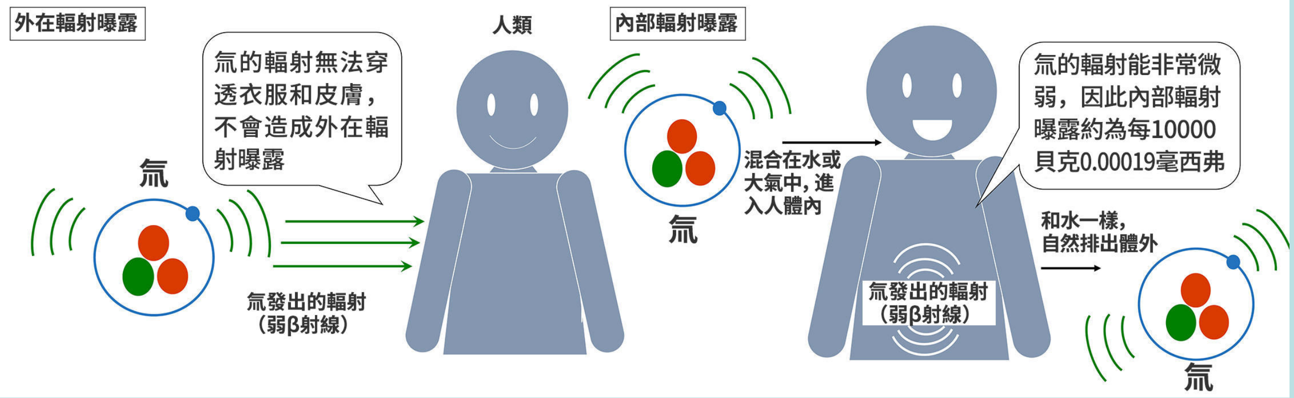


氚Tritium



量少不代表可以放心，氚與氫不同，氚是有放射性的。意思就是氚的原子核並不穩定，它會自動消失， 而同時產生較輕的穩定氦-3 原子核，加上一個電子， 與一個不帶電的微中子。這個過程就稱為衰變。這個詞聽起來，好像食物慢慢腐敗變質，或是生

很危險，可以穿透人的皮膚，造成輻射傷害。但氚原子核的貝他衰變是罕見的例外，因為氚與氦-3 原子核質量差距不大，衰變所放出的電子的能量只有典型衰變能量的百分之一左右，根本無法穿透人的皮膚，因此氚的放射性基本上對人體是不會造成傷害



裡，中子就可以很長壽，例如穩定的原子核幾乎就是長生不老的。放射性原子核半衰期較短，但也有很大個別差異。例如核分裂產物中的放射性碘-129 半衰期可以到 1600 萬年，過程中一直有放射性，這就是核廢料難處理的原因。還好核分裂產物中最危險的碘-131，半衰期只有 8 天。氚原子核的半衰期則是 12 年，所以原則上福島儲存的放射性水，倒入海中，大約經過數十年，就會衰變殆盡，而不再有放射性了。

阻力下拋體的水平速度：

$$v_x = Ce^{-\frac{k}{m}t}$$

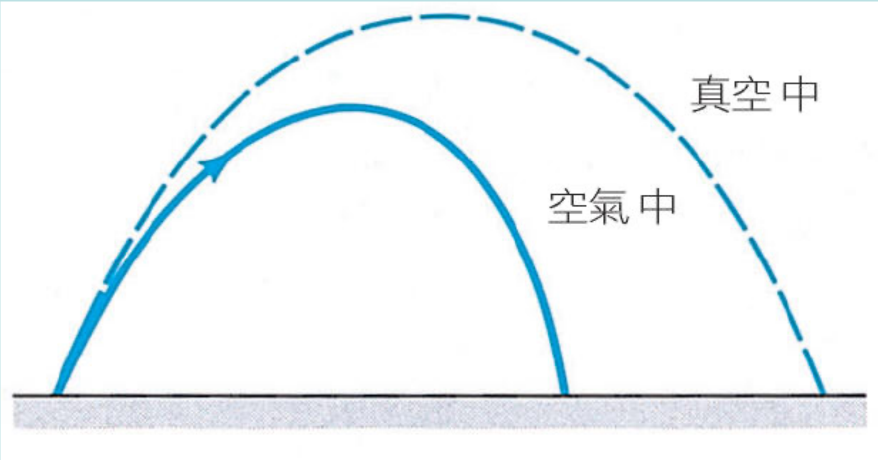
常數 C 是任意數，我們似乎得到無限多組解。

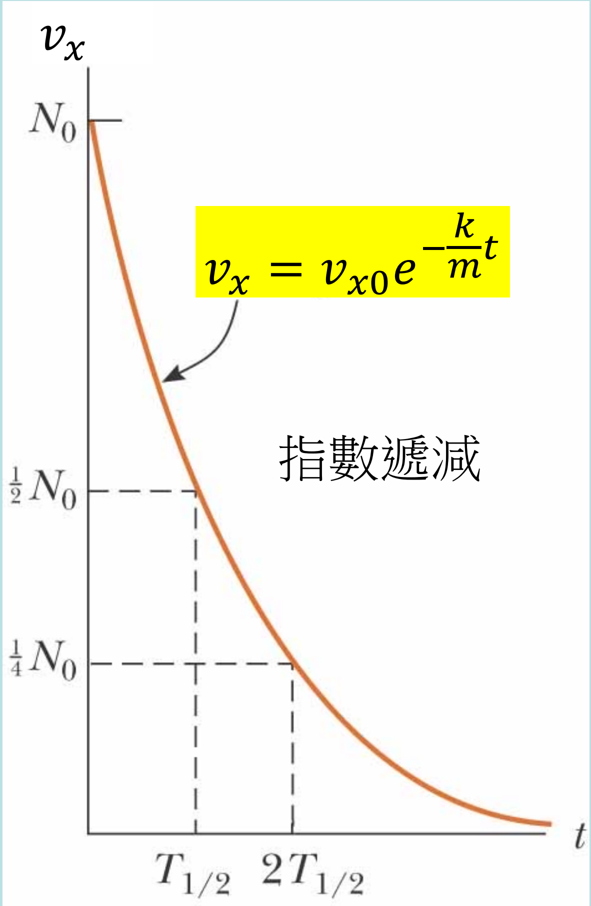
$$v_x(0) = C = v_{x0}$$

$$v_x = v_{x0}e^{-\frac{k}{m}t}$$

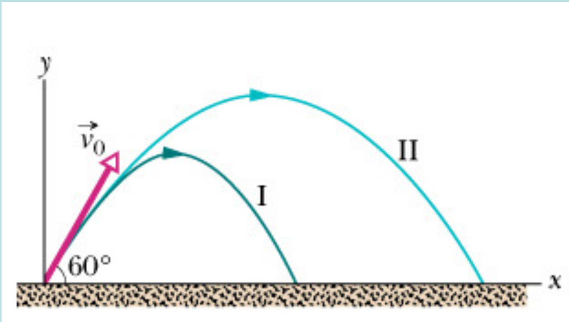
阻力作用下的物體，速度呈指數遞減。

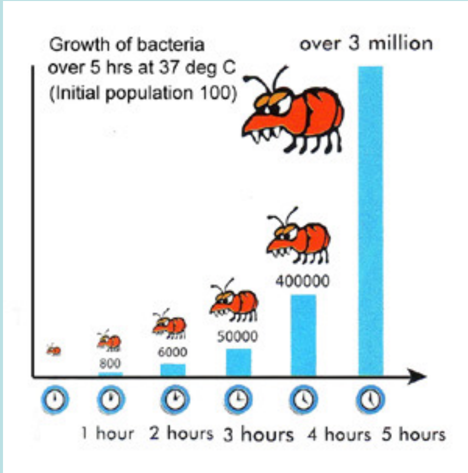
積分後即可得到任何時間的水平距離！

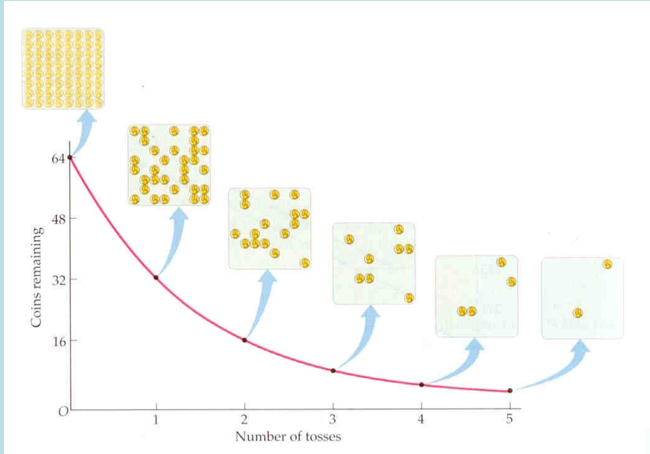




First order Ordinary Differential Equation Arfken 7.2







$$\frac{dV}{dt} = -\frac{k}{m}V$$

$$\frac{dN}{dt} = +\Gamma N$$

$$\frac{dN}{dt} = -\Gamma N$$

如果物理量滿足的方程式完全一樣，解當然就完全一樣。

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = -\frac{P(x)}{Q(y)}$$

$$P(x) = \Gamma, Q(y) = \frac{1}{N}$$

And they are all separable: $f(x,y)$ can be separated into product of x function and y function

抽象數學推導　Separable equation，從method 1衍伸：　

Method 1 $$\frac{dy}{dx} = f(y, x)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x)}{Q(y)}$$

The right-hand side $f(y, x)$ is separable into a function of x and a function of y.

$$\frac{dN}{dt} = -\Gamma N$$

$$Q(y)dy = -P(x)dx$$

$$\frac{1}{N}dN = -\Gamma dt$$

$$\int Q(y)dy = -\int P(x)dx + C$$

$$\int \frac{1}{N}dN = -\Gamma \int dt + C'$$

Solving DE is doing integration, the inverse operation of differentiation.

This gives a relation between $y(x)$ and x and could be solved to get solution $y(x)$.

Again, there is an undetermined constant C in the solution!

To determined the constant C , initial condition $y_0 = y(x_0)$ is needed.

Example 1:

$$\frac{dy}{dx} - p(x)y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x)}{Q(y)}$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int p(x) \cdot dx + C'$$

$$\int Q(y)dy = -\int P(x)dx + C$$

$$\ln y = \int p(x) \cdot dx + C'$$

$$y = Ce^{\int p(x) \cdot dx}$$

等一下有用

Example 2:

絕熱過程 Adiabatic Process

若$Q = 0$，P和V的關係為何？根據第一定律：

$$\Delta E_{\text{int}} + W = Q = 0$$

無限小的絕熱過程：

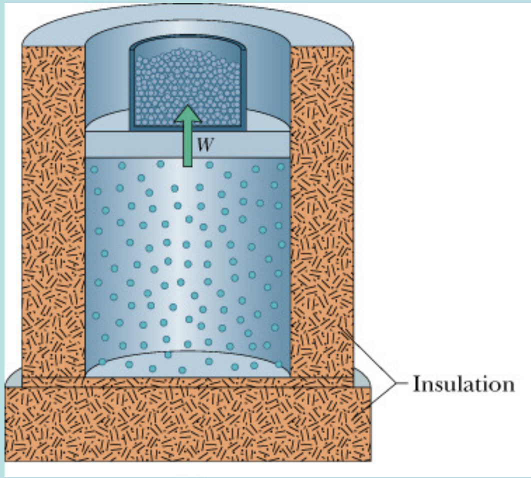
策略：將此條件寫成無限小變化$\Delta P, \Delta V$ 的關係。

$$W = P\Delta V$$

$$\Delta E_{\text{int}} = nc_V \Delta T = \frac{c_V}{R}\Delta(PV) \sim \frac{c_V}{R}(P\Delta V + V\Delta P)$$

$$\Delta(PV) = (P + \Delta P)(V + \Delta V) - PV \sim (P\Delta V + V\Delta P)$$

代入第一定律$\Delta E_{\text{int}} + W = 0$



$$\frac{c_V}{R}(P\Delta V + V\Delta P) + P\Delta V = 0$$

$$\left(\frac{c_V}{R} + 1\right)P\Delta V + \left(\frac{c_V}{R}\right)V\Delta P = 0$$

$$\left(\frac{c_P}{c_V}\right)P\Delta V + V\Delta P = 0$$

得到了$\Delta P, \Delta V$的關係。

$$\frac{dP}{dV} + \left(\frac{c_P}{c_V}\right)\frac{P}{V} \equiv \frac{dP}{dV} + \gamma\frac{P}{V} = 0$$

This is a separable first order ODE of the function $P(V)$.

$$\frac{dP}{dV} = -\gamma \frac{P}{V} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{P(x)}{Q(y)}$$

$$\gamma \int_{V_i}^{V} \frac{1}{V} dV = -\int_{P_i}^{P} \frac{1}{P} dP$$

$P_i = P(V_i)$ is just initial condition.

$$\gamma\, (\ln V)\Big|_{V_i}^{V} = -\,(\ln P)\Big|_{P_i}^{P}$$

$$\gamma(\ln V - \ln V_i) = -(\ln P - \ln P_i)$$

$$\ln\left(\frac{P}{P_i}\right) = \gamma \cdot \ln\left(\frac{V_i}{V}\right)$$

$$\frac{P}{P_i} = \left(\frac{V_i}{V}\right)^{\gamma}$$

$$PV^{\gamma} = P_i V_i^{\gamma}$$

絕熱過程PV^{γ}是一個常數

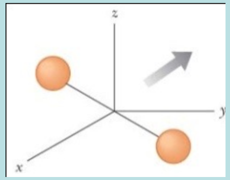
$$c_P = c_V + R$$

單原子分子組成的理想氣體

$$c_V = \frac{3}{2}R \qquad c_P = \frac{5}{2}R \qquad \gamma = \frac{5}{3}$$

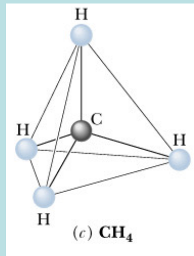
雙原子分子組成的理想氣體

$$c_V = \frac{5}{2}R \qquad c_P = \frac{7}{2}R \qquad \gamma = \frac{7}{5} = 1.4$$



多原子分子組成的理想氣體

$$c_V = 3R \qquad c_P = 4R \qquad \gamma = \frac{4}{3}$$

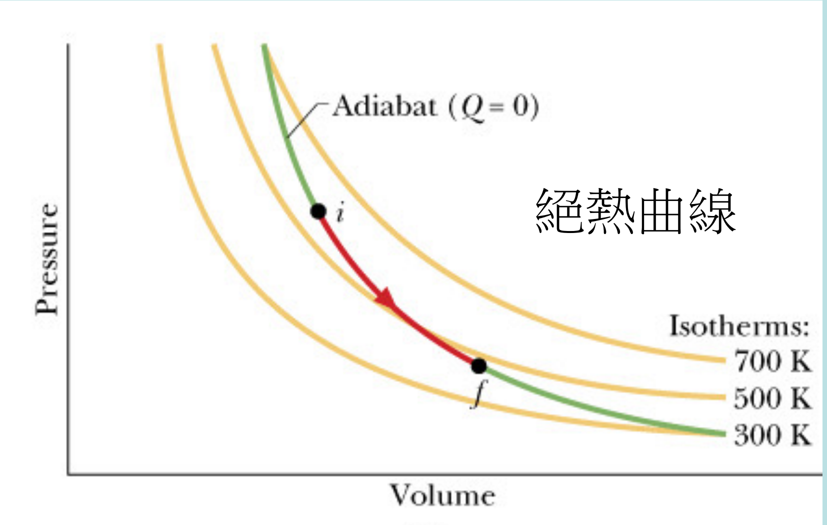


在絕熱過程中：

PV^{γ}是一個常數

若以空氣為例：

$$P \propto V^{-\gamma} \rightarrow \frac{1}{V^{\frac{7}{5}}}$$



當體積增加時，壓力的下降$P \sim \frac{1}{V^{1.4}}$要比定溫過程$P \sim \frac{1}{V}$要來得快！

因此，絕熱膨脹時，溫度下降，(膨脹對外作功，故內能下降)。

絕熱壓縮，溫度上升。

這個關係也可以用公式描述：

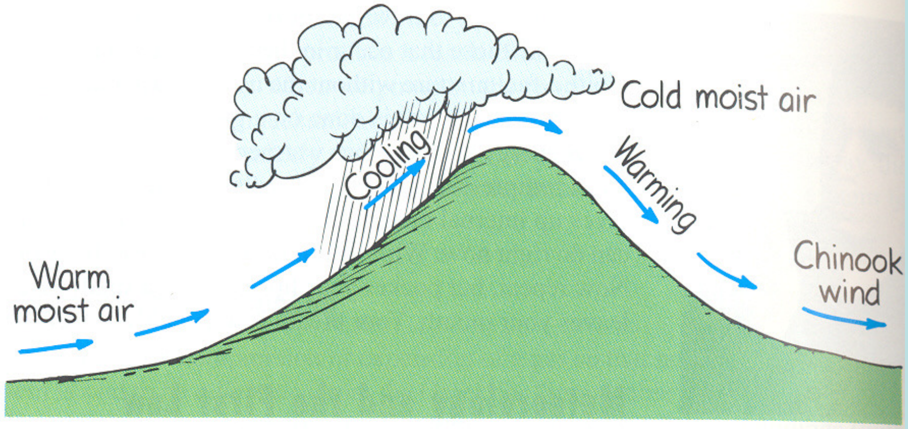
$$P_f V_f \cdot V_f^{\gamma-1} = P_i V_i \cdot V_i^{\gamma-1}$$

$$T_f V_f^{\gamma-1} = T_i V_i^{\gamma-1}$$

若以空氣為例：$\gamma = \frac{7}{5} = 1.4$ ➡ $T_f V_f^{\frac{2}{5}} = T_i V_i^{\frac{2}{5}}$


翡 翠 水 庫
Feitsui Reservoir

FIGURE 17.8 Chinooks, warm dry winds, occur when high-altitude air descends and is adiabatically warmed.



is compressed into a smaller volume and is appreciably warmed (Figure 17.8). ' fect of expansion or compression on gases is quite impressive.*

A rising blob cools as it expands. But the surrounding air is cooler at increa evations also. The blob will continue to rise as long as it is warmer (less dense) tl surrounding air. If it gets cooler (denser) than its surroundings, it will sink. Unde conditions, large blobs of cold air sink and remain at a low level, with the result t air above is warmer. When the upper regions of the atmosphere are warmer tl lower regions, we have a **temperature inversion**. If any rising warm air is less than this upper layer of warm air, it will rise no farther. It is common to see evid this over a cold lake where visible gases and particles, such as smoke, spread out i layer above the lake rather than rise and dissipate higher in the atmospher ure 17.10). Temperature inversions trap smog and other thermal pollutants. The s Los Angeles often is trapped by such an inversion, caused by low-level cold air fr ocean over which is a layer of hot air that moves over the mountains from the

垂直方向的速度分量v_y

$$\frac{dv_y}{dt} = -g - \frac{k}{m}v_y$$

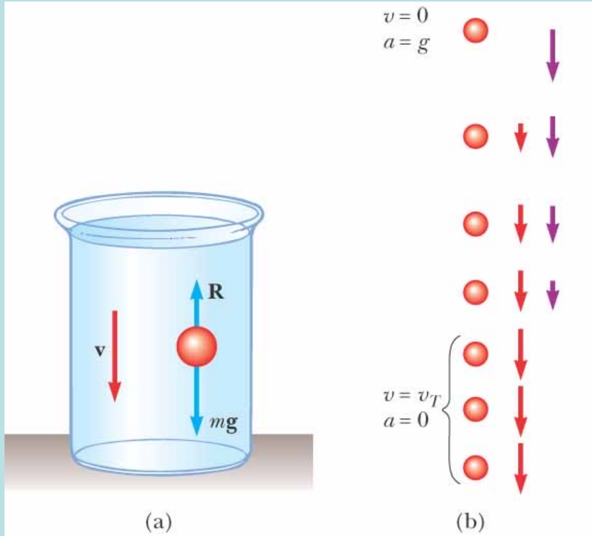
因垂直與水平的獨立性，因此等同於阻力下的自由落體。

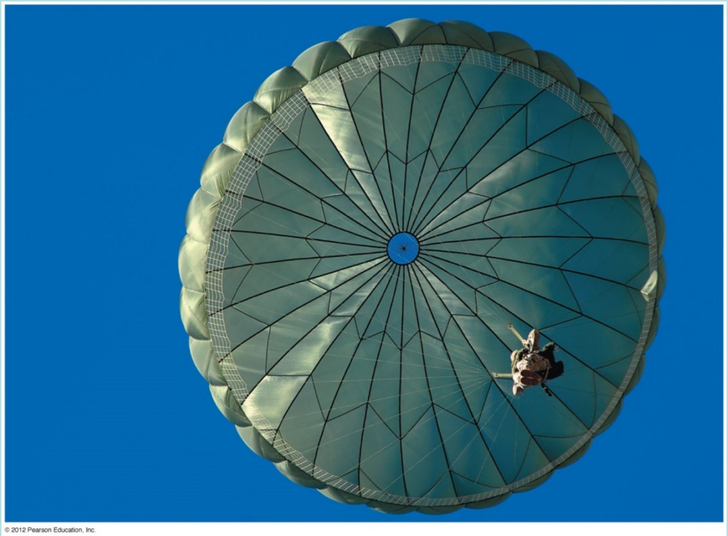
如此簡單的方程式，你立刻可以猜到一個解！

等速解： $$\frac{dv_y}{dt} = 0 = -g - \frac{k}{m}v_y$$ $$v_y = -\frac{mg}{k}$$

這顯然不通，但顯然是正確的一個解one of the solutions。

猜想：我們必須將未確定常數引入。





Method 0

y方向的速度

阻力下的落體

$$\frac{dv_y}{dt} = -g - \frac{k}{m} v_y = -\frac{k}{m}\left(v_y + \frac{mg}{k}\right)$$

將右方的兩項合在一起，定義一個新的函數$V(t)$：

$$V(t) \equiv v_y(t) + \frac{mg}{k}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dv_y}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{k}{m} V$$

V的方程是與之前的水平速度v_x完全一樣。

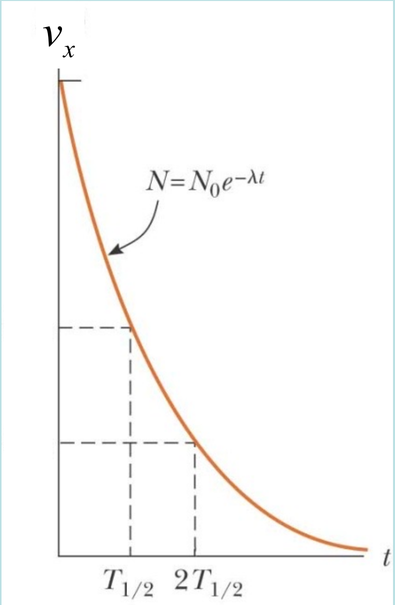
$$\frac{dV}{dt} = -\frac{k}{m}V$$

V的方程是與之前的水平速度v_x完全一樣，解當然就完全一樣。

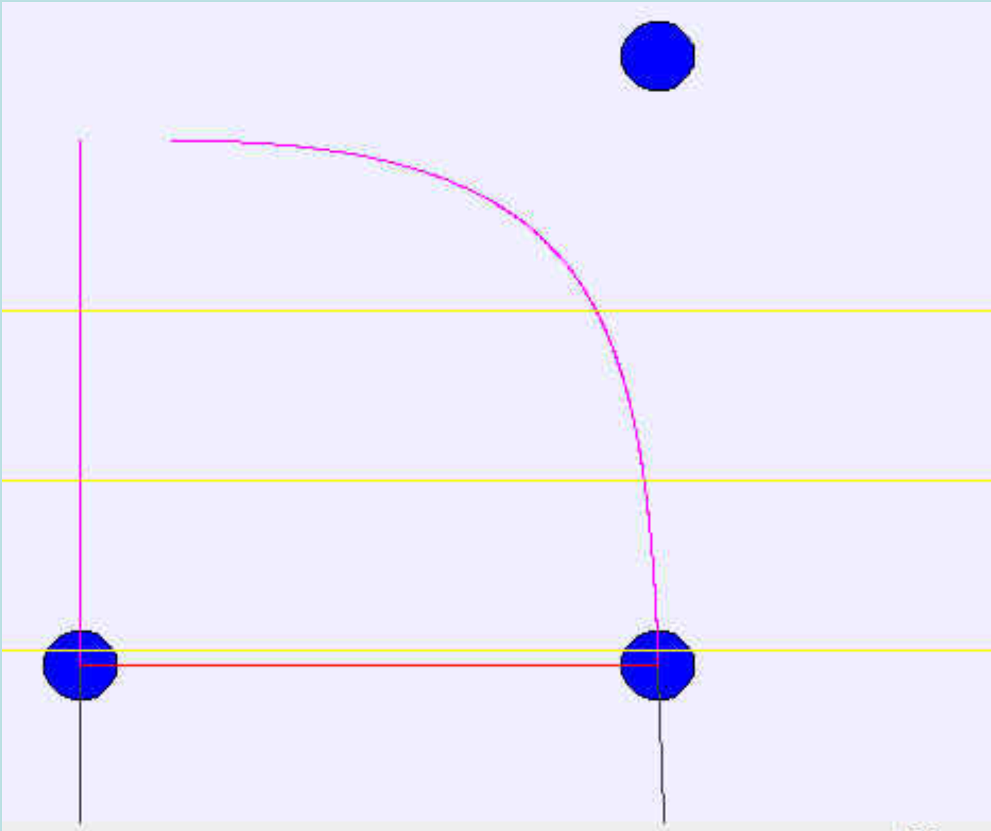
$$V(t) = V_0 e^{-\frac{k}{m}t} = \left(v_{y0} + \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$v_y(t) = \left(v_{y0} + \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}$$

$$= v_{y0} e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}\left(e^{-\frac{k}{m}t} - 1\right)$$

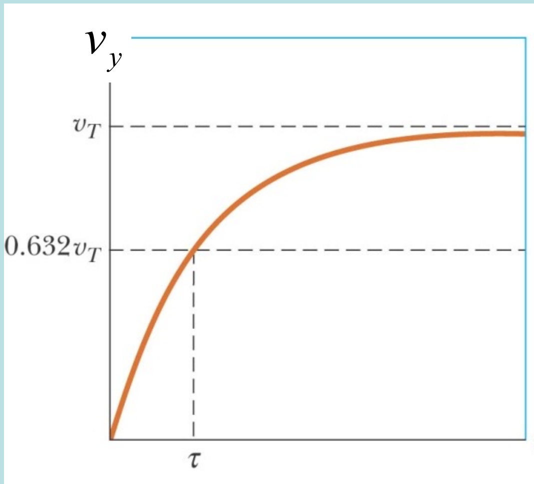


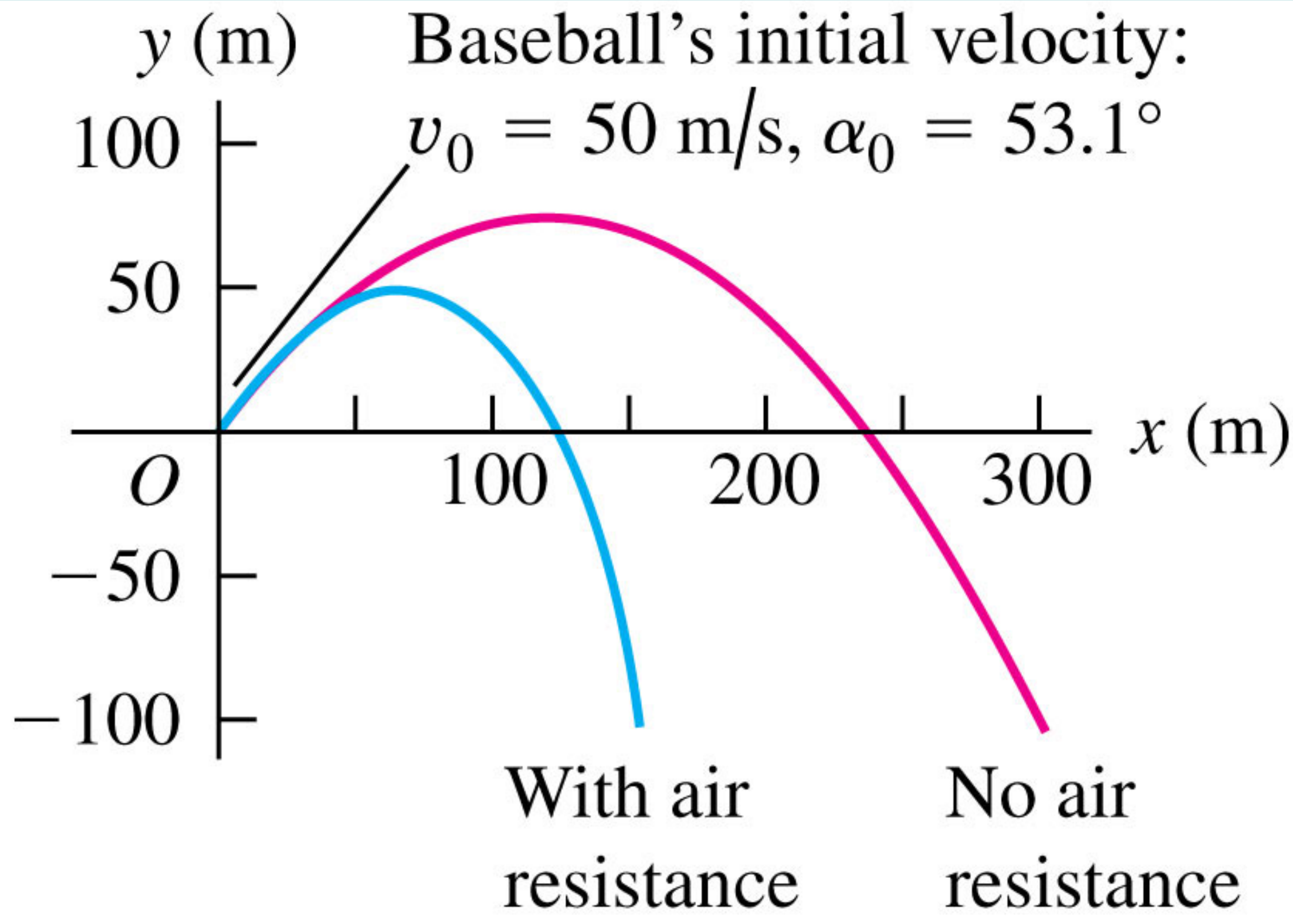
水平速度 $v_x = v_{x0} e^{-\frac{k}{m}t}$



$$v_y = \left(v_{y0} + \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}$$

垂直速度





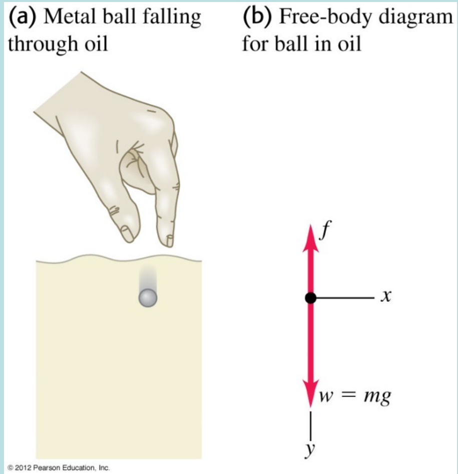
y (m)
Baseball's initial velocity:
$v_0 = 50$ m/s, $\alpha_0 = 53.1°$
100
50
O
−50
−100
100
200
300
x (m)
With air resistance
No air resistance

Method 1

這也是一個Separable Equation

$$\frac{dv_y}{dt} = -g + bv_y$$

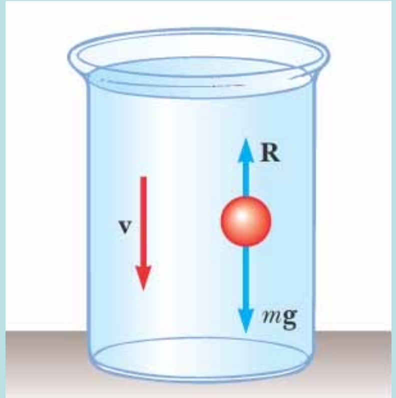
$$\int_{v_y(0)}^{v_y(t)} \frac{1}{g - bv_y} dv_y = -\int_0^t dt$$



但我們要用它介紹另一個方法：integrating factor.

Method 2　　抽象數學推導　　P336

$$\frac{dv_y}{dt} + \frac{k}{m} v_y = -g$$



此方程式是一個 Linear First order ODE

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

特徵是只包含一次方的y一次微分 ，及一次方的y，以及一個已知的x函數$q(x)$。

若無已知x函數$q(x)$（source term），稱爲Homogeneous Equation。

若有則稱Inhomogeneous Equation，它的解與拿掉q所對應的Homogeneous Eq相關.

我們要解的Inhomogeneous Eq：$q(x) = -g$：

$$\frac{dv_y}{dt} + \frac{k}{m} v_y = -g$$

拿掉$q(x)$，對應的Homogeneous Eq，就同已解出的水平速度方程式。

$$\frac{dv_y}{dt} + \frac{k}{m} v_y = 0$$

將以下的方法延伸：Method 2 (Linear Equation, Integrating Factor)

$$\frac{dN}{dt} = -\Gamma N$$

$$\frac{dN}{dt} + \Gamma N = 0$$

兩邊都乘上$e^{\Gamma t}$, called integrating factor!

$$e^{\Gamma t}\frac{dN}{dt} + \Gamma e^{\Gamma t} N = 0$$

$$\Gamma e^{\Gamma t} = \frac{d}{dt} e^{\Gamma t}$$

使左手邊可以寫成是一個函數的微分！

$$\frac{d\left(e^{\Gamma t} N\right)}{dt} = 0$$

此函數微分為零，因此等於一個常數。

$$e^{\Gamma t} N = C \qquad N(t) = Ce^{-\Gamma t}$$

Leibniz (1645-1716)

Leibniz (1645-1716)

積分因子法 Integrating factor，method 2

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

The idea: multiply the left-hand side by an integrating factor $\alpha(x)$:

So that it becomes the derivative of a function $\alpha y(x)$.

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y \Rightarrow \alpha(x)\frac{dy}{dx} + p(x)\alpha \cdot y = \frac{d}{dx}(\alpha y)$$

$$e^{\Gamma t}\frac{dN}{dt} + \Gamma e^{\Gamma t}N = \frac{d\left(e^{\Gamma t}N\right)}{dt}$$

By chain rule, the condition is: $\frac{d\alpha}{dx} - p(x)\alpha = 0$

$$\frac{d}{dt}e^{\Gamma t} = \Gamma e^{\Gamma t}$$

This is a separable ODE which we already know how to solve!

$$\alpha(x) = \exp\left[\int_{x_0}^{x} p(x)dx\right]$$

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$$

This condition is actually the Homogeneous Eq with $-p(x)$.

The integrating factor $\alpha(x)$ equals the inverse of the solution of the Homogeneous Eq.

Example 1:

$$\frac{dy}{dx} - p(x)y = 0$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int p(x) \cdot dx + C'$$

$$\ln y = \int p(x) \cdot dx + C'$$

$$y = Ce^{\int p(x) \cdot dx}$$

等一下有用

Multiply the whole equation by the integrating factor $\alpha(x)$:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

$$\alpha\frac{dy}{dx} + \alpha p y = \alpha q$$

$$\alpha(x) = \exp\left[\int p(x)dx\right]$$

$$\alpha\frac{dy}{dx} + \alpha p y = \frac{d(\alpha y)}{dx}$$

The equation is simplified:

$$\frac{d(\alpha y)}{dx} = \alpha q$$

We can then integrate both sides!

$$\alpha y = \int \alpha q(x)dx + C \quad \Rightarrow \quad y = \frac{C}{\alpha(x)} + \frac{1}{\alpha(x)}\int \alpha(x)q(x)dx$$

Again, there is an undetermined constant C in the solution as expected.

Apply the general solution to the Equation of v_y by comparing:

$$\frac{dv_y}{dt} + \frac{k}{m} v_y = -g \quad \longleftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

$$\alpha(t) = \exp\left[\int \frac{k}{m} dt\right] = e^{\frac{k}{m}t}$$

$$\alpha(x) = \exp\left[\int p(x)dx\right]$$

$$v_y(t) = \frac{C}{\alpha(t)} - \frac{1}{\alpha(t)} \int \alpha(t) g \, dt$$

$$y = \frac{C}{\alpha(x)} + \frac{1}{\alpha(x)} \int \alpha(x) q(x) dx$$

$$= Ce^{-\frac{k}{m}t} - ge^{-\frac{k}{m}t} \cdot \frac{m}{k} e^{\frac{k}{m}t} = Ce^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}$$

The first term $Ce^{-\frac{k}{m}t}$ is the solution of the homogeneous ODE. $\frac{dv_y}{dt} + \frac{k}{m} v_y = 0$

The second term is one of the solutions of the inhomogeneous ODE.

$$\frac{dv_y}{dt} = -g - \frac{k}{m} v_y$$

垂直方向的速度分量v_y

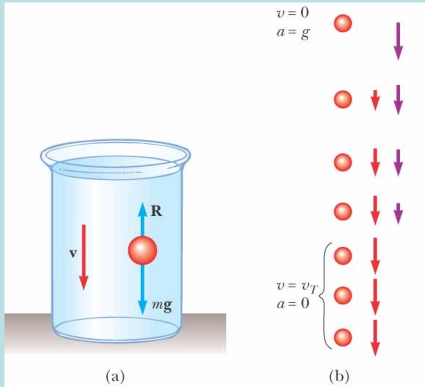
因垂直與水平的獨立性，因此等同於阻力下的自由落體。

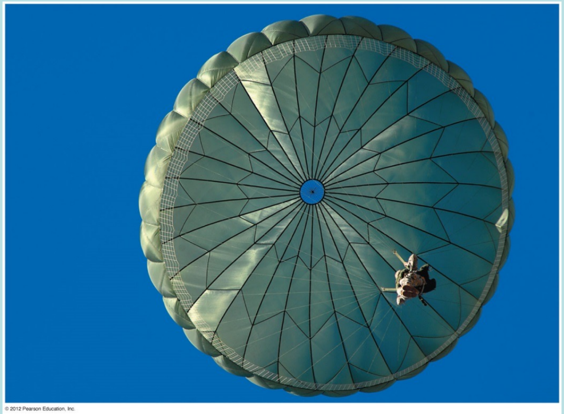
如此簡單的方程式，你立刻可以猜到一個解！

等速解： $$\frac{dv_y}{dt} = 0 = -g - \frac{k}{m} v_y \qquad v_y = -\frac{mg}{k}$$

這顯然不通，但顯然是正確的一個解one of the solutions。

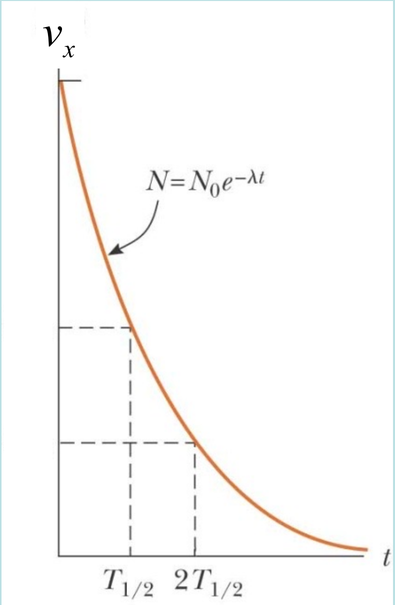
猜想：我們必須將未確定常數引入。



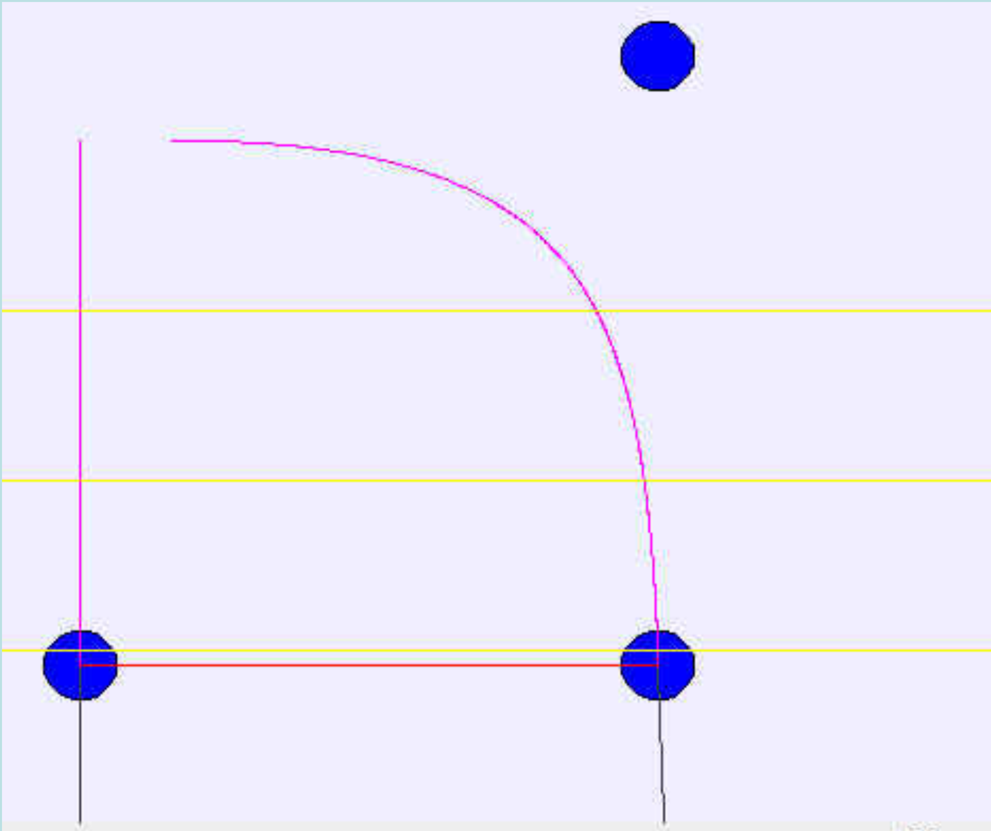


$$v_y = Ce^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}$$

Solutions of Linear inhomogeneous ODE equals one solution of the inhomogeneous ODE plus the solution of the homogeneous ODE.

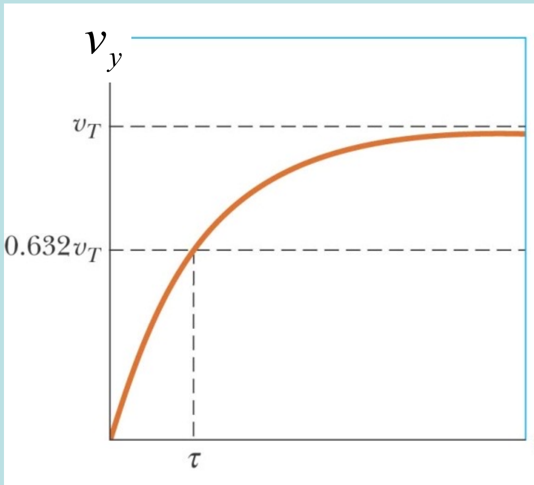


水平速度 $v_x = v_{x0} e^{-\frac{k}{m}t}$



$$v_y = \left(v_{y0} + \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}$$

垂直速度



$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

$$y = \frac{C}{\alpha(x)} + \frac{1}{\alpha(x)} \int \alpha(x) q(x) dx \equiv y_1 + y_2$$

$$\frac{1}{\alpha(x)} = \exp\left[-\int p(x)dx\right]$$

The first term $\frac{C}{\alpha(x)}$ is the solution of the homogeneous ODE.

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$$

The integrating factor $\alpha(x)$ equals the inverse of the solution of the Homogeneous Eq.

The second term is one of the solutions of the inhomogeneous ODE.

This is a general property of all linear ODE's.

Solutions y of Linear inhomogeneous ODE equals one solution y_2 of the inhomogeneous ODE plus the solution y_1 of the homogeneous ODE.

The difference between any two solutions $y - y_2$ of a Linear inhomogeneous ODE equals a solution of the homogeneous ODE.

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \quad - \quad \frac{dy_2}{dx} + p(x)y_2 = q(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d(y - y_2)}{dx} + p(x)(y - y_2) = 0$$

$y - y_2$ equals a solution y_1 of the homogeneous ODE.

$$y = y_1 + y_2$$

微分方程式的解需要刻意讓自己挪出足夠的空間與自由度，才能滿足起始條件。

因此，微分方程式的解通常會有未能決定的常數Undetermined Constants.

對Inhomogeneous Equation，它的未決定常數就來自可以加的Homogeneous Eq的解。

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$$

$$y=\frac{C}{\alpha(x)}+\frac{1}{\alpha(x)}\int\alpha(x)q(x)dx$$

引入適當的起始條件，微分方程式就只有唯一解。

First order Ordinary Differential Equation

$$\frac{dy}{dx} = f(y, x)$$

積分法

Separable

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x)}{Q(y)}$$

there is an undetermined constant C

Linear First order ODE

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

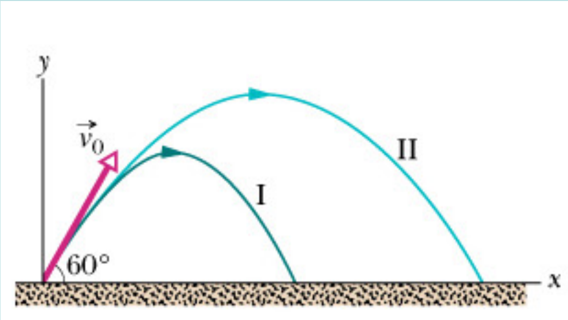
積分因子法 integrating factor

Homogeneous ODE

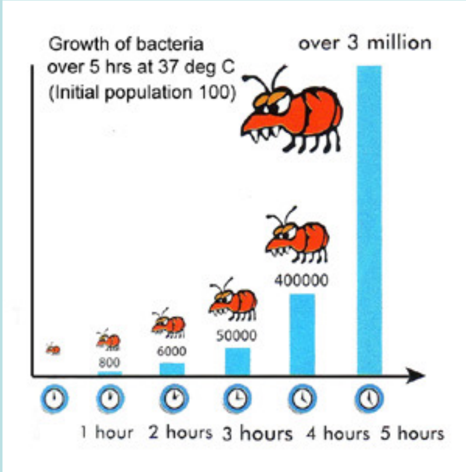
$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$$

Non-Homogeneous ODE

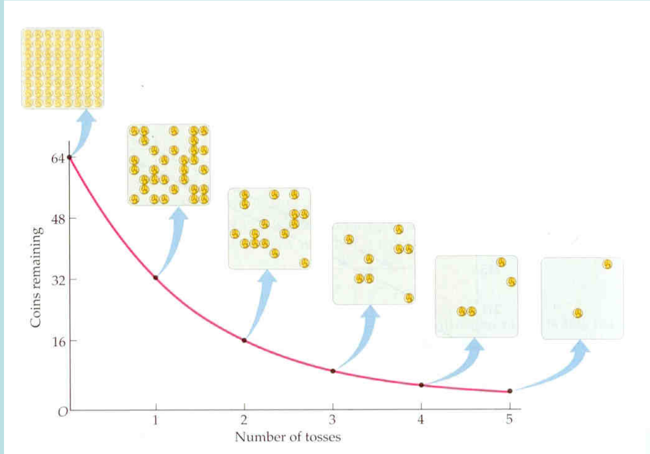
Solutions of Linear inhomogeneous ODE equals one solution y_2 of the inhomogeneous ODE plus the solution of the homogeneous ODE.



$$\frac{dV}{dt} = -\frac{k}{m}V$$



$$\frac{dN}{dt} = +\Gamma N$$



$$\frac{dN}{dt} = -\Gamma N$$

如果物理量滿足的方程式完全一樣，解當然就完全一樣。

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

Linear First Order ODE

引入適當的起始條件，微分方程式通常就只有唯一解。

Linear First Order ODE 只有一個線性獨立解！

1.5.3 Existence of Solutions

We defined an **initial value problem** for a first-order differential equation as the problem

$$\text{(IVP)} \qquad \begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.27}$$

Geometrically, solving an initial value problem means determining a solution that passes through a specified point (t_0, x_0) in the tx plane.

There are many interesting mathematical questions about initial value problems.

1. **(Existence)** Given an initial value problem, is there always a solution? This is the question of existence. Note that there may be a solution even if we cannot find a formula for it.

2. **(Uniqueness)** If there is a solution, is it the only solution? This is the question of uniqueness.

3. **(Interval of existence)** If there is a solution, for which times t does the solution to the initial value problem exist?

Resolution of these theoretical issues is an interesting and worthwhile endeavor, and it is the subject of advanced courses and books on differential equations. In this text we briefly discuss the matters. The next three examples illustrate why these are reasonable questions.

Example 1.36

The initial value problem

$$x' = x\sqrt{t-3}, \quad x(1) = 2,$$

has no solution because the derivative of x is not defined in an interval containing the initial time $t = 1$. There cannot be a solution curve passing through the point $(1, 2)$. $\square$

Example 1.37

Consider the initial value problem

$$x' = 2\sqrt{x}, \quad x(0) = 0.$$

Both $x(t) = 0$ and $x(t) = t^2$ are solutions to this problem on the interval $-\infty < t < \infty$. Thus it does not have a unique solution. $\square$

The following theorem, proved in advanced books, provides partial answers to the questions raised above. The theorem basically states that if the right side $f(t, x)$ of the differential equation is nice enough in a domain in the tx plane containing the point (t_0, x_0), then there is a unique solution that passes through the that point. A. Cauchy, in the 1820s, was the first to prove such an existence theorem.

Theorem 1.38

Assume the function $f(t,x)$ and its partial derivative[3] $f_x(t,x)$ are continuous in a rectangle $a < t < b$, $c < x < d$. Then, for any value t_0 in $a < t < b$ and x_0 in $c < x < d$, the initial value problem

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1.28}$$

has a unique solution valid on some open interval $a < \alpha < t < \beta < b$ containing t_0. $\square$

The theorem tells us nothing about how big the interval (α, β) is. The **interval of existence** is the set of all time values for which the solution to the initial value problem exists. That interval may not extend out to the boundaries of the rectangle. Theorem 1.38 is called a *local* existence theorem because it guarantees a solution only in a neighborhood of the initial time t_0. Notice that t_0 and x_0 have to lie in open intervals and not on the boundary of those intervals (Figure 1.22).

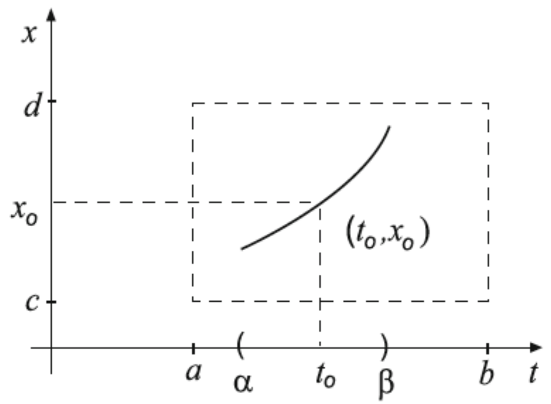


Figure 1.22 Solution to an initial value problem. The fundamental questions are: (a) Is there a solution curve passing through the given point? (b) Is the curve the only one? (c) What is the interval (α, β) on which the solution exists?