

水平速度的速度分量 v_x

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{k}{m} v_x$$

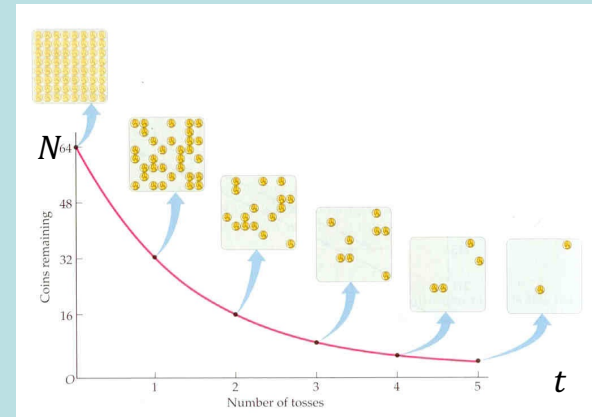
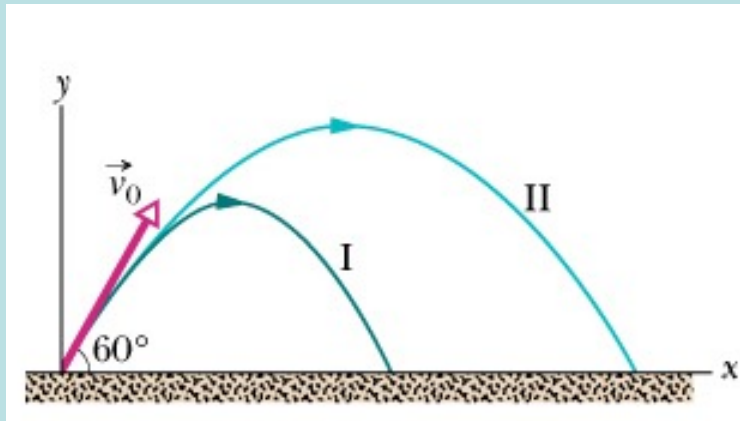


$$\frac{dx}{dt} = f(x, t)$$

v_x 的一次微分與 v_x 成正比！

This is a **first order ordinary differential equation** of function $v_x(t)$.

這個微分方程式，與放射性原子核數目 N 的衰變方程式完全一樣！



$$\frac{dv_x}{dt}(t) = -\frac{k}{m} v_x(t)$$

v_x 的微分與 v_x 成正比！

$$\frac{dN}{dt}(t) = -\Gamma N(t)$$

N 的微分，與 N 成正比。

兩者的物理完全無關，但數學方程式完全相同，解就完全一樣！

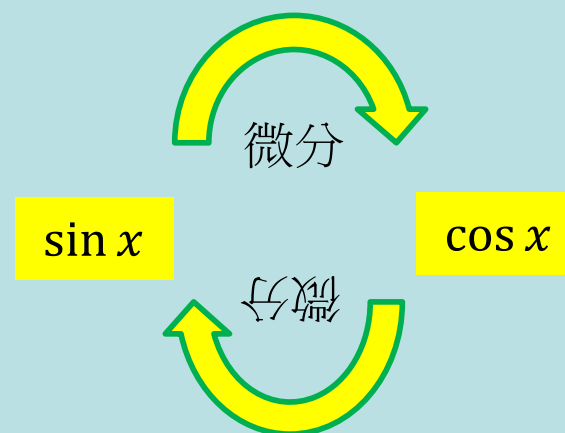
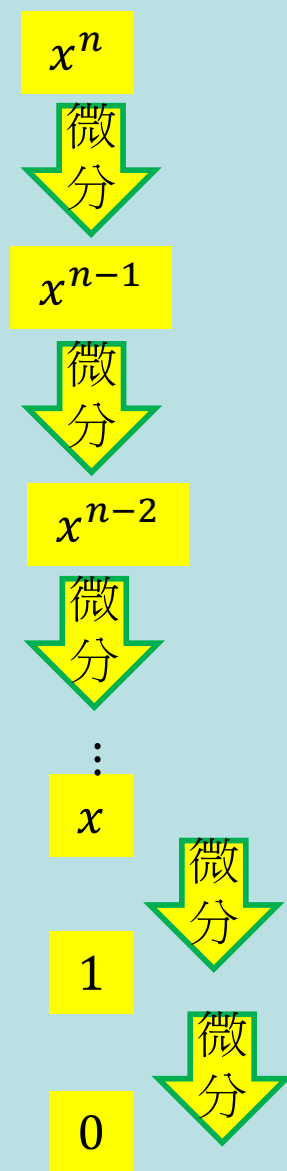
現在我們來求解：

$$\frac{dN}{dt} = -\Gamma N$$

Method 0

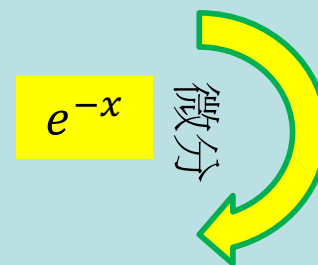
函數的微分與自己成正比！

有沒有這樣的函數？不可能是多項式。也不是三角函數。



$$\frac{de^x}{dx} = e^x$$

指數函數的微分依舊是指數函數。



$$\frac{de^x}{dx} = e^x$$



$$\frac{d}{dx} e^{bx} = b e^{bx}$$

$$\frac{dN}{dt} = -\Gamma N$$

$$N = e^{-\Gamma t}$$

取常數 b 為 $-\Gamma$ ，即得到解！

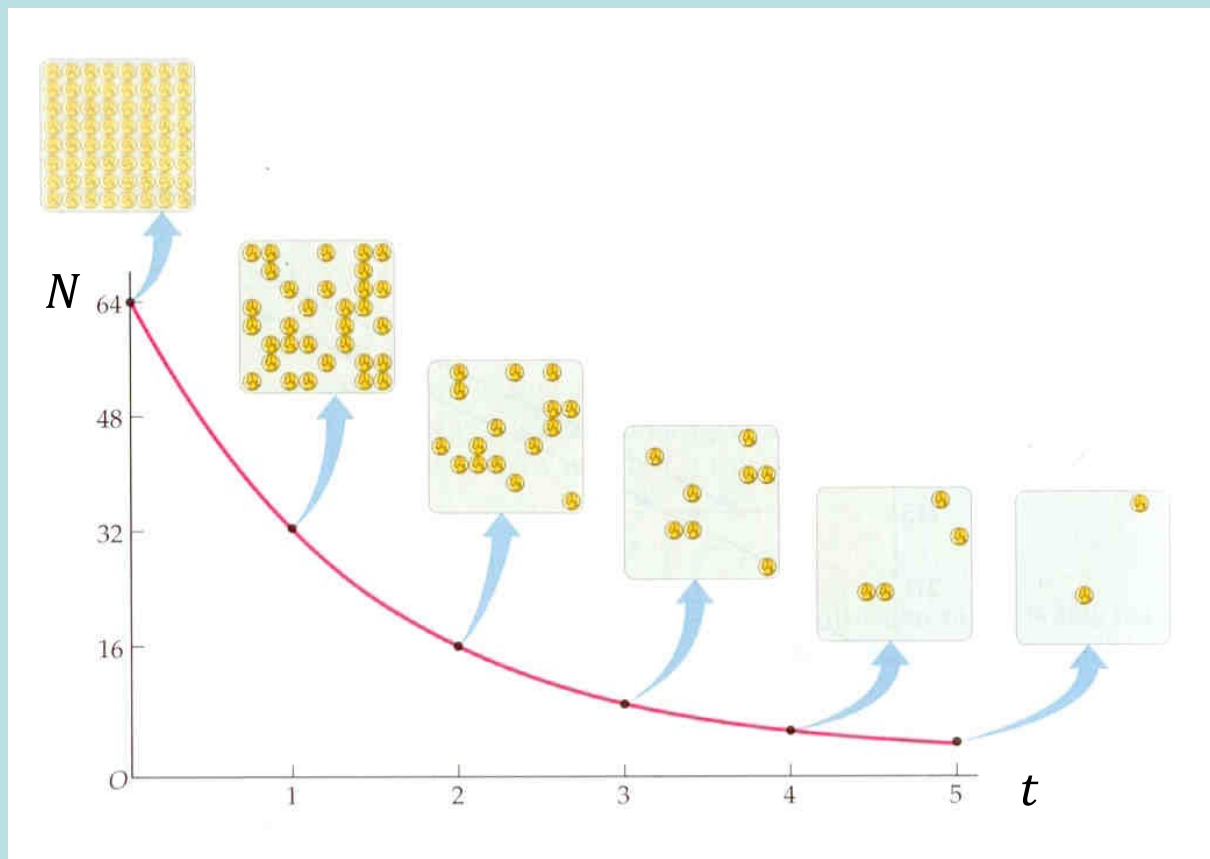
但我可以在這個解的前面乘上任一個常數 C ，解仍成立

$$N = C e^{-\Gamma t}$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dC e^{-\Gamma t}}{dt} = C \frac{de^{-\Gamma t}}{dt} = -C \Gamma e^{-\Gamma t} = -\Gamma N$$

一次微分方程式的解會有一個未確定的常數！

注意常數 C 可以是任意數，我們似乎得到了無限多組解。



$$\frac{dN}{dt} = -\Gamma N$$

微分方程式只規定變化率與數量正比，
此規定的漏洞是無法禁止等比例增減，也就是將數量乘常數 C ！

$$N = Ce^{-\Gamma t}$$

但也因有 C 我們才能引入起始數目 N_0 ，否則起始數量只是1。

事實上 $N(0) = C = N_0$

$$N = N_0 e^{-\Gamma t}$$

如果沒有引入起始的條件 N_0 ，微分方程式有無限多個解。

引入適當的起始條件，微分方程式就只有唯一解。

幾何上的意義

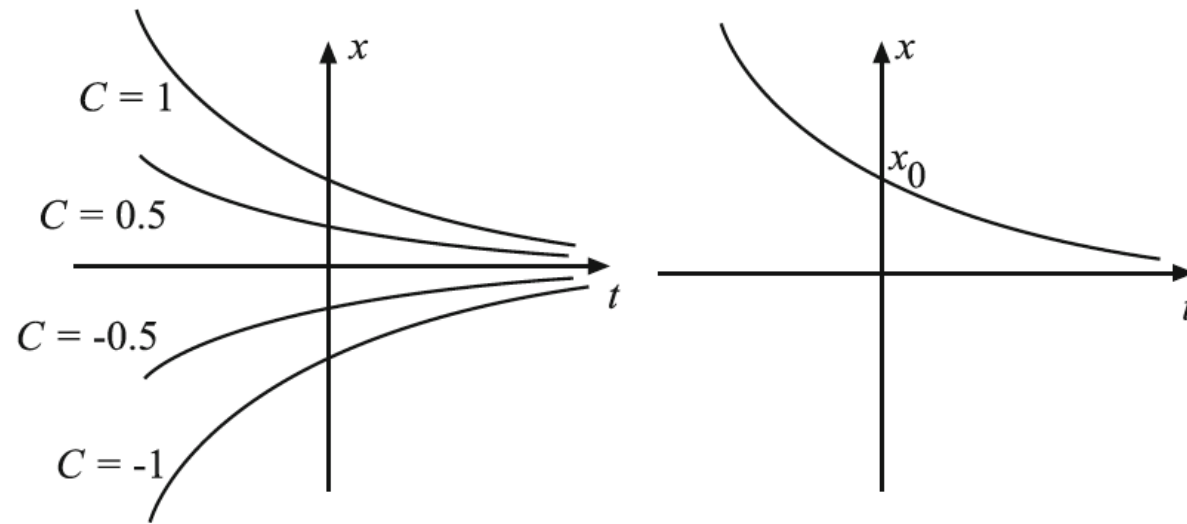


Figure 1.2 (Left) Plots of four integral curves, or solution curves (1.5), of the differential equation (1.4), for four values of C . (Right) A particular solution satisfying the initial condition $x(0) = x_0$.

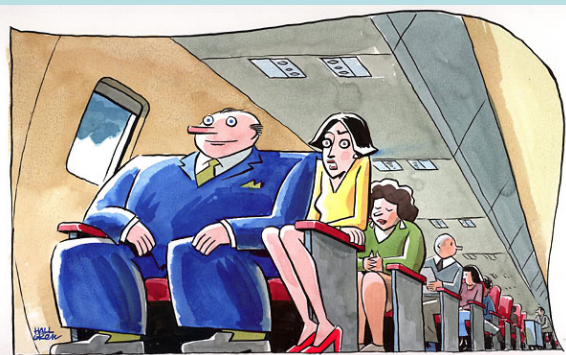
常數 C 可以是任意數，我們得到了無限多組解，對應無限多組線。。

引入適當的起始條件，只有一條線能滿足，微分方程式就只有唯一解。

這個結果幾乎適用於所有的微分方程式。

一般代數方程式的解通常是 No wiggle room

$$2x + 1 = 2$$



微分方程式的解需要刻意讓自己挪出足夠的空間與自由度，才能滿足起始條件。



$$\frac{dN}{dt} = -\Gamma N$$

引入適當的起始條件，微分方程式就只有唯一解。

$$N = N_0 e^{-\Gamma t} = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\tau \equiv \frac{1}{\Gamma}$$

τ 稱平均壽命，數量變為 $1/e$ 的時間。

指數遞減函數是一個無窮級數，比所有多項式遞減都快：

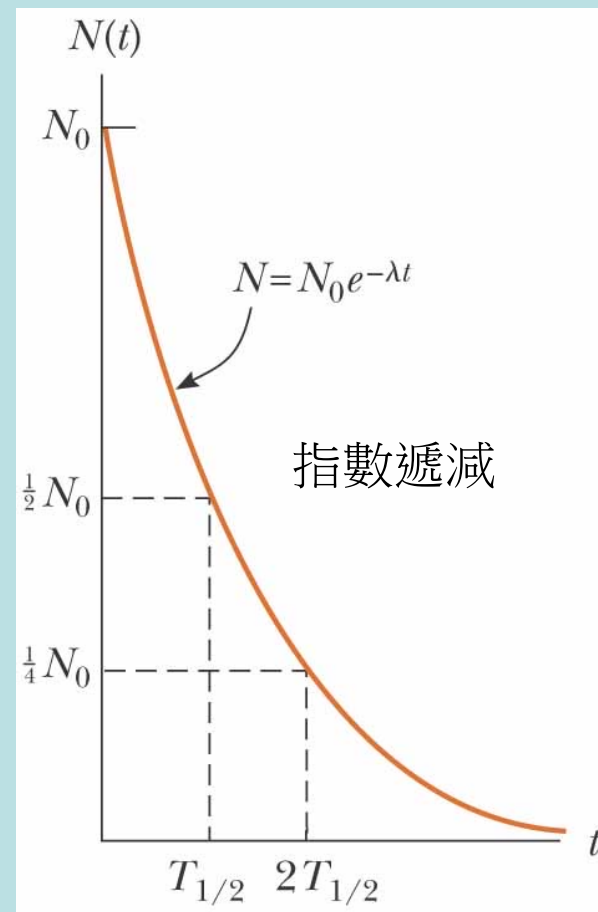
$$e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}}{x^{-n}} = \frac{x^n}{e^x} \rightarrow 0$$

指數遞減函數，減少一半的時間永遠相同。

$$\frac{N(t_2)}{N(t_1)} = \frac{c \cdot e^{-\Gamma t_2}}{c \cdot e^{-\Gamma t_1}} = e^{-\Gamma(t_2 - t_1)} = \frac{1}{2}$$

$$(t_2 - t_1) = \frac{1}{\Gamma} \ln 2 \equiv T_{1/2} \quad \text{半衰期}$$



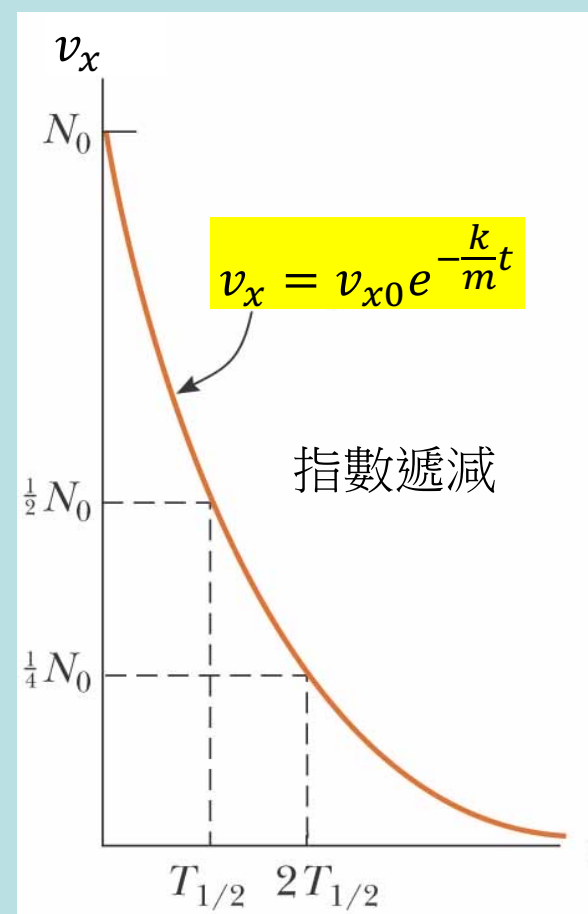
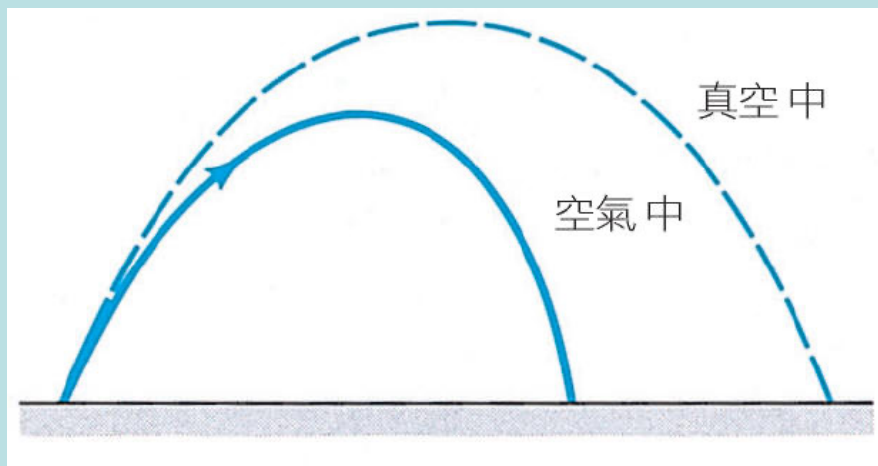
阻力下拋體的水平速度：

$v_x = C e^{-\frac{k}{m}t}$ 常數 C 是任意數，我們似乎得到無限多組解。

$$v_x(0) = C = v_{x0}$$

$$v_x = v_{x0} e^{-\frac{k}{m}t}$$

阻力作用下的物體，速度呈指數遞減。
積分後即可得到任何時間的水平距離！



Method 1 (**Separable Function**) 比較可以普遍適用的求解法！

以積分來進行解微分方程式的技巧：

$$\frac{dN}{dt} = -\Gamma N \quad \text{可以把所有} N \text{的Factor集中左邊，} t \text{集中右邊。}$$



$$\frac{1}{N} dN = -\Gamma dt \quad \text{函數的微小變化} dN \text{與變數的微小變化} dt \text{的關係。}$$

兩邊都取積分(即是微小變化累加)，注意可以加上一個未決定的常數 C' ：

$$\int \frac{1}{N} dN = -\Gamma \int dt + C'$$

$$\ln N = -\Gamma t + C'$$

兩邊都取指數：

$$N(t) = C e^{-\Gamma t}$$

注意常數 C 可以是任意數，我們似乎得到了無限多組解。

引入適當的起始條件，微分方程式就只有唯一解。

$$N(0) = C = N_0$$

$$N(t) = N_0 e^{-\Gamma t}$$

Method 1

$$\frac{dy}{dx} = f(y, x)$$



$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x)}{Q(y)}$$

The right-hand side $f(y, x)$ is **separable** into a function of x and a function of y .

$$\frac{dN}{dt} = -\Gamma N$$



$$Q(y)dy = -P(x)dx$$

$$\frac{1}{N} dN = -\Gamma dt$$

$$\int Q(y)dy = -\int P(x)dx + C$$

$$\int \frac{1}{N} dN = -\Gamma \int dt + C'$$

Solving DE is doing integration, the inverse operation of differentiation.

This gives a relation between $y(x)$ and x and could be solved to get solution $y(x)$.

Again, there is an undetermined constant C in the solution!

To **determined the constant C** , initial condition $y_0 = y(x_0)$ is needed.

Example 1:

$$\frac{dy}{dx} - p(x)y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x)}{Q(y)}$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int p(x) \cdot dx + C'$$

$$\int Q(y) dy = -\int P(x) dx + C$$

$$\ln y = \int p(x) \cdot dx + C'$$

$$y = Ce^{\int p(x) \cdot dx}$$

等一下有用

垂直方向的速度分量 v_y

$$\frac{dv_y}{dt} = -g - \frac{k}{m} v_y$$

因垂直與水平的獨立性，因此等同於阻力下的自由落體。

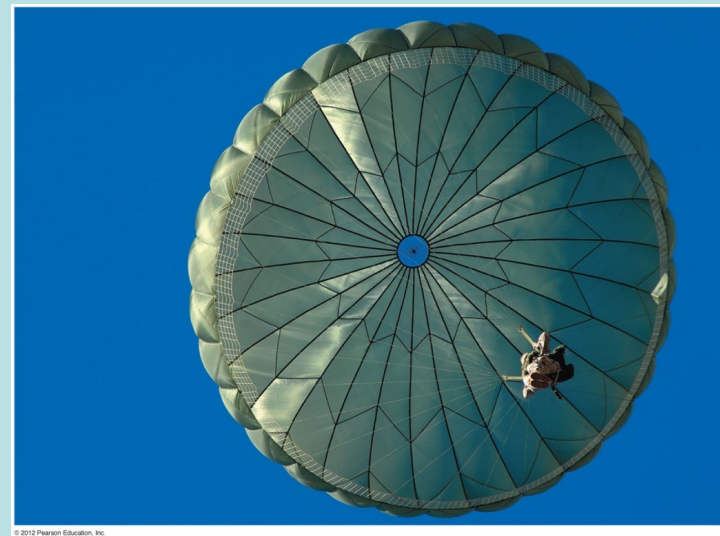
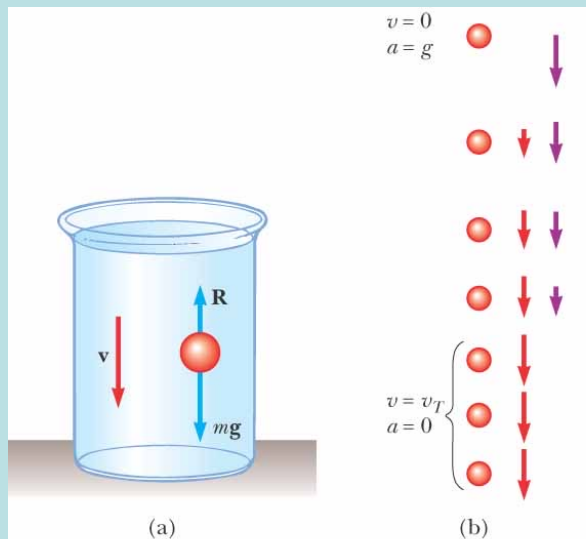
如此簡單的方程式，你立刻可以猜到一個解！

等速解：

$$\frac{dv_y}{dt} = 0 = -g - \frac{k}{m} v_y \quad v_y = -\frac{mg}{k}$$

這顯然不通，但顯然是正確的一個解 one of the solutions。

猜想：我們必須將未確定常數引入。

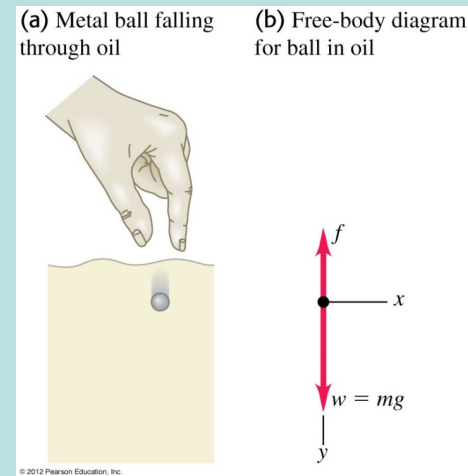


Method 1

這也是一個Separable Equation

$$\frac{dv_y}{dt} = -g + bv_y$$

$$\int_{v_y(0)}^{v_y(t)} \frac{1}{g - bv_y} dv_y = - \int_0^t dt$$



但我們要用它介紹另一個方法：integrating factor.

$$\frac{dv_y}{dt} + \frac{k}{m} v_y = -g$$

此方程式是一個 **Linear** First order ODE

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

特徵是只包含一次方的 y 一次微分，及一次方的 y ，以及一個已知的 x 函數 $q(x)$ 。

若無已知 x 函數 $q(x)$ （source term），稱為**Homogeneous Equation**。

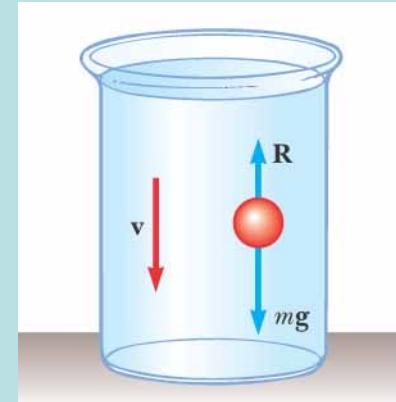
若有則稱**Inhomogeneous Equation**，它的解與拿掉 q 所對應的Homogeneous Eq相關。

我們要解的Inhomogeneous Eq： $q(x) = -g$ ：

$$\frac{dv_y}{dt} + \frac{k}{m} v_y = -g$$

拿掉 $q(x)$ ，對應的Homogeneous Eq，就同已解出的水平速度方程式。 ↓

$$\frac{dv_y}{dt} + \frac{k}{m} v_y = 0$$



將以下的方法延伸：Method 2 (Linear Equation, Integrating Factor)

$$\frac{dN}{dt} = -\Gamma N$$



$$\frac{dN}{dt} + \Gamma N = 0$$

兩邊都乘上 $e^{\Gamma t}$, called integrating factor!

$$e^{\Gamma t} \frac{dN}{dt} + \Gamma e^{\Gamma t} N = 0$$

$$\Gamma e^{\Gamma t} = \frac{d}{dt} e^{\Gamma t}$$

使左手邊可以寫成是一個函數的微分！

$$\frac{d(e^{\Gamma t} N)}{dt} = 0$$

此函數微分為零，因此等於一個常數。

$$e^{\Gamma t} N = C$$

$$N(t) = C e^{-\Gamma t}$$



Leibniz (1645-1716)

積分因子法 Integrating factor , method 2

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

The idea: multiply the left-hand side by an integrating factor $\alpha(x)$:
So that it becomes the derivative of a function $\alpha y(x)$.



Leibniz (1645-1716)

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y \quad \longrightarrow \quad \alpha(x) \frac{dy}{dx} + p(x)\alpha \cdot y = \frac{d}{dx}(\alpha y)$$

$$e^{\Gamma t} \frac{dN}{dt} + \Gamma e^{\Gamma t} N = \frac{d(e^{\Gamma t} N)}{dt}$$

By chain rule, the condition is: $\frac{d\alpha}{dx} - p(x)\alpha = 0$

$$\frac{d}{dt} e^{\Gamma t} = \Gamma e^{\Gamma t}$$

This is a **separable ODE** which we already know how to solve!

$$\alpha(x) = \exp \left[\int p(x) dx \right]$$

We don't care about an additional constant.
Any solution could work as an integrating factor.

This condition is actually the Homogeneous Eq with $-p(x)$.

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$$

The integrating factor $\alpha(x)$ equals the inverse of the solution of the Homogeneous Eq.

Example 1:

$$\frac{dy}{dx} - p(x)y = 0$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int p(x) \cdot dx + C'$$

$$\ln y = \int p(x) \cdot dx + C'$$

$$y = Ce^{\int p(x) \cdot dx}$$

等一下有用

Multiply the whole equation by the integrating factor $\alpha(x)$:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$



$$\alpha \frac{dy}{dx} + \alpha p y = \alpha q$$

$$\alpha(x) = \exp \left[\int p(x) dx \right]$$

$$\alpha \frac{dy}{dx} + \alpha p y = \frac{d(\alpha y)}{dx}$$

The equation is simplified:



$$\frac{d(\alpha y)}{dx} = \alpha q$$

We can then integrate both sides!

$$\alpha y = \int \alpha q(x) dx + C$$



$$y = \frac{C}{\alpha(x)} + \frac{1}{\alpha(x)} \int \alpha(x) q(x) dx$$

Again, there is an undetermined constant C in the solution as expected.

Apply the general solution to the Equation of v_y by comparing:

$$\frac{dv_y}{dt} + \frac{k}{m}v_y = -g$$



$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

$$\alpha(t) = \exp\left[\int \frac{k}{m} dt\right] = e^{\frac{k}{m}t}$$

$$\alpha(x) = \exp\left[\int p(x)dx\right]$$

$$v_y(t) = \frac{C}{\alpha(t)} - \frac{1}{\alpha(t)} \int \alpha(t)g dt$$

$$y = \frac{C}{\alpha(x)} + \frac{1}{\alpha(x)} \int \alpha(x)q(x)dx$$

$$= Ce^{-\frac{k}{m}t} - ge^{-\frac{k}{m}t} \cdot \frac{m}{k} e^{\frac{k}{m}t} = Ce^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}$$

The first term $Ce^{-\frac{k}{m}t}$ is **the** solution of the homogeneous ODE. $\frac{dv_y}{dt} + \frac{k}{m}v_y = 0$

The second term is **one of the** solutions of the inhomogeneous ODE.

$$\frac{dv_y}{dt} = -g - \frac{k}{m} v_y$$

垂直方向的速度分量 v_y

因垂直與水平的獨立性，因此等同於阻力下的自由落體。

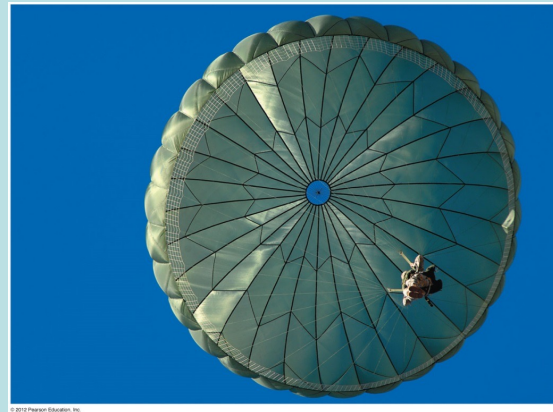
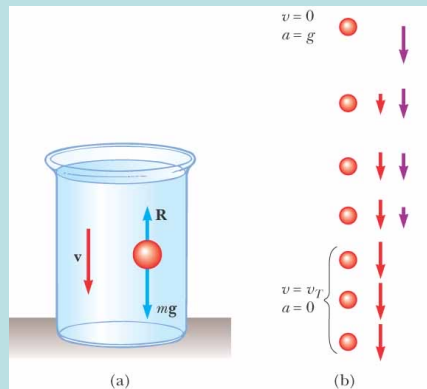
如此簡單的方程式，你立刻可以猜到一個解！

等速解：

$$\frac{dv_y}{dt} = 0 = -g - \frac{k}{m} v_y \quad v_y = -\frac{mg}{k}$$

這顯然不通，但顯然是正確的一個解 one of the solutions。

猜想：我們必須將未確定常數引入。



$$v_y = C e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}$$

Solutions of Linear inhomogeneous ODE equals one solution of the inhomogeneous ODE plus the solution of the homogeneous ODE.

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

$$y = \frac{C}{\alpha(x)} + \frac{1}{\alpha(x)} \int \alpha(x)q(x)dx \equiv y_1 + y_2$$

$$\frac{1}{\alpha(x)} = \exp \left[- \int p(x)dx \right]$$

The first term $\frac{C}{\alpha(x)}$ is **the** solution of the homogeneous ODE.

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$$

The integrating factor $\alpha(x)$ equals the inverse of the solution of the Homogeneous Eq.

The second term is **one of the** solutions of the inhomogeneous ODE.

This is a general property of all linear ODE's.

Solutions y of **Linear** inhomogeneous ODE equals **one** solution y_2 of the inhomogeneous ODE plus **the** solution y_1 of the homogeneous ODE.

The difference between any two solutions $y - y_2$ of a **Linear** inhomogeneous ODE equals **a** solution of the homogeneous ODE.

$$\begin{array}{ccc} \frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) & - & \frac{dy_2}{dx} + p(x)y_2 = q(x) \\ \downarrow & & \\ \frac{d(y - y_2)}{dx} + p(x)(y - y_2) = 0 \end{array}$$

$y - y_2$ equals **a** solution y_1 of the homogeneous ODE.

$$y = y_1 + y_2$$

微分方程式的解需要刻意讓自己挪出足夠的空間與自由度，才能滿足起始條件。

因此，微分方程式的解通常會有未能決定的常數Undetermined Constants.

對Inhomogeneous Equation，它的未決定常數就來自可以加的Homogeneous Eq的解。



$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

$$y = \frac{C}{\alpha(x)} + \frac{1}{\alpha(x)} \int \alpha(x)q(x)dx$$

引入適當的起始條件，微分方程式就只有唯一解。

First order Ordinary Differential Equation

$$\frac{dy}{dx} = f(y, x)$$

積分法

Separable

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x)}{Q(y)}$$

there is an undetermined constant C

Linear First order ODE

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

積分因子法 integrating factor

Homogeneous ODE

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$$

Non-Homogeneous ODE

Solutions of **Linear** inhomogeneous ODE equals **one** solution y_2 of the inhomogeneous ODE plus **the** solution of the homogeneous ODE.



Linear second order ODE 解法

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

Variation of parameters
Wronskian

級數法

複變函數法

Linear ODE

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

If we find **one** solution of the homogeneous ODE, we can calculate the general solution.

Linear ODE with constant coefficients

$$y'' + a_1y' + a_0y = f(x)$$

We can find general solutions using complex number exponential function $e^{\alpha t}$.

Linear second order ODE

Inhomogeneous ODE

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$



Homogeneous ODE

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

Inhomogeneous Equation的解與拿掉 q 所對應的Homogeneous Eq相關.

Let's first start with **Homogeneous Linear ODE** : $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$

It is called **linear** because of this 定理 :

如果已找到兩個函數 $y_1(x), y_2(x)$ 都滿足方程式 : $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$

那麼任一線性組合 **linear combination** $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 也滿足該方程式 !

$$C_1 \quad y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 = 0 \quad + \quad C_2 \quad y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2 = 0$$

$$(C_1y_1 + C_2y_2)'' + P(x)(C_1y_1 + C_2y_2)' + Q(x)(C_1y_1 + C_2y_2) = 0$$

得證

如果已找到兩個函數 $y_1(x), y_2(x)$ 都滿足方程式，我們就得到無限多個解！

微分方程式的解需要讓自己挪出足夠的空間，這樣才能滿足起始條件。

可以證明：

一定可以找到兩個函數 $y_1(x), y_2(x)$ 都滿足方程式： $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$

而且 $y_1(x), y_2(x)$ 不是彼此的倍數，稱為彼此線性獨立。

所有的解都可以寫成： $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$

C_1, C_2 可以由起始條件 $y'(0), y(0)$ 唯一決定。

因此，加上起始條件後， $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ 只有唯一解。

There is a powerful theorem:

Arfken p362

如果已找到一個函數 $y_1(x)$ 滿足方程式：

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

我們可以計算出另一個線性獨立的函數 $y_2(x)$ ，也滿足此方程式。

關鍵是一個稱為Wronskian的函數 $W(x)$ ，

$$W(x) \equiv y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$$

它滿足很簡單的1st order ODE，以致我們即使不知道解都可以把它計算出來。

$$\frac{dW}{dx} = y_1(x)y_2''(x) + y_1'(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1''(x) - y_2'(x)y_1'(x)$$

$$= y_1(x)y_2''(x) - y_2(x)y_1''(x)$$

$y_1 \times$

$$y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2 = 0$$

−

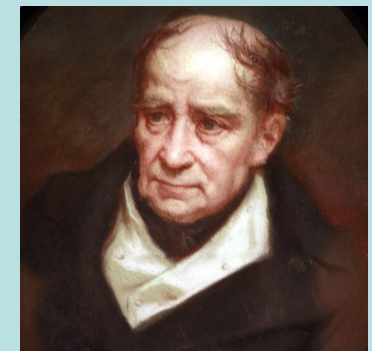
$y_2 \times$

$$y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 = 0$$

$$\frac{dW}{dx} + P(x)y_1y_2' - P(x)y_2y_1' = \frac{dW}{dx} + P(x)W = 0$$

$$\frac{dW}{dx} + P(x)W = 0$$

$$W = W(0)\exp\left(-\int_0^x P(x') \cdot dx'\right)$$



Józef Maria Hoene-Wroński

$$\frac{dW}{dx} + P(x)W = 0$$

$$\int \frac{1}{W} dy = - \int P(x) \cdot dx + C'$$

$$\ln W = - \int P(x) \cdot dx + C'$$

$$W = C \exp \left(- \int_0^x P(x') \cdot dx' \right)$$

There is one more formula:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y_2}{y_1} \right) = \frac{y_1 y_2' - y_2 y_1'}{y_1^2} = \frac{W}{y_1^2}$$

If Wronskian $W(x)$ and y_1 is known, $\frac{y_2}{y_1}$ could be obtained!

$$\frac{y_2}{y_1} = C + \int dx \frac{W}{y_1^2}$$

$$y_2 = C y_1 + W(0) y_1 \int dx \frac{\exp(-\int_0^x P(x') \cdot dx')}{y_1^2}$$

$$y_2 \sim y_1 \int dx \frac{\exp(-\int_0^x P(x') \cdot dx')}{y_1^2}$$

由 y_1 我們計算出另一個線性獨立的函數 $y_2(x)$ ，也滿足此方程式。

如果可以一個函數 $y_1(x)$ 滿足方程式： $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$

由 y_1 我們計算出另一個線性獨立的函數 $y_2(x)$ ，也滿足此方程式。

所有的解都可以寫成： $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$

C_1, C_2 可以由起始條件 $y'(0), y(0)$ 唯一決定。

因此，加上起始條件後， $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ 只有唯一解。

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

我們猜測，inhomogeneous 有一個解可以寫成： $y(x) = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x)$

$$v_1' = -\frac{y_2 f}{W}$$

$$v_2' = \frac{y_1 f}{W}$$

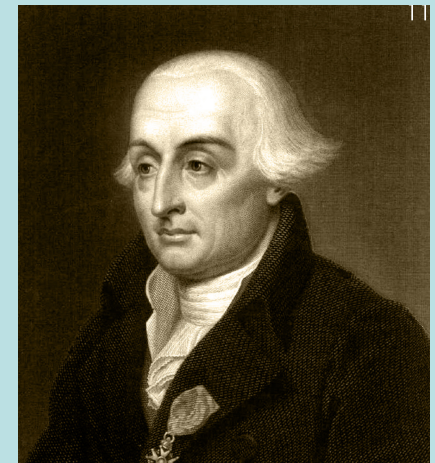
$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

簡單積分：

$$v_1 = -\int dx \frac{y_2 f}{W}$$

$$v_2 = \int dx \frac{y_1 f}{W}$$

If we find one solution of the homogeneous ODE, we can calculate the general solution of the inhomogeneous ODE.



Joseph-Louis Lagrange 1736-1813

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

The difference $y - y_2$ between any two solutions of a **Linear inhomogeneous** ODE equals **a** solution of the **homogeneous** ODE.

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \quad - \quad y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2 = f(x)$$



$$(y - y_2)'' + P(x)(y - y_2)' + Q(x)(y - y_2) = 0 \quad \text{homogeneous ODE}$$

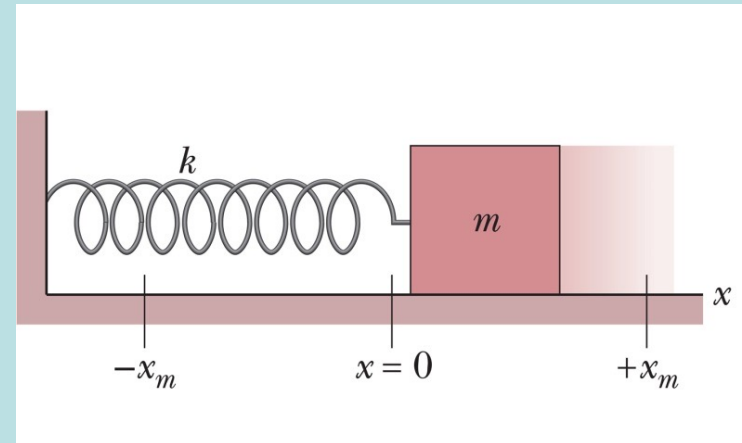
$y - y_2$ equals a solution y_1 of the homogeneous ODE. Hence:

$$y = y_1 + y_2$$

Any solutions y of **Linear inhomogeneous** ODE equals **one** solution y_2 of the inhomogeneous ODE plus **the** solution y_1 of the homogeneous ODE.

簡諧運動的解

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$



正弦函數與餘弦函數的兩次微分都和負的自己成正比！

因此很容易就找到兩個解 $x_1 = \sin \omega t$ $x_2 = \cos \omega t$

那麼任一線性組合 $x = a \cos \omega t + b \sin \omega t$ 也是解！

我們得到無限多個解！

微分方程式的解需要讓自己挪出足夠的空間，這樣才能滿足起始條件。

$$x = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

$$v = -\omega a \sin \omega t + \omega b \cos \omega t$$

a, b 由起始條件決定

$$x(0) = a = x_0$$

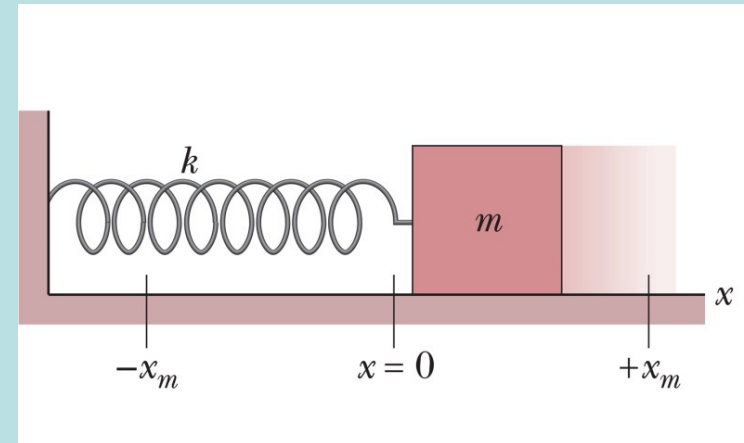
$$v(0) = \omega b = v_0$$

$$b = \frac{v_0}{\omega}$$

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

這個函數同時滿足運動方程式以及兩個起始條件，因此是唯一的解！

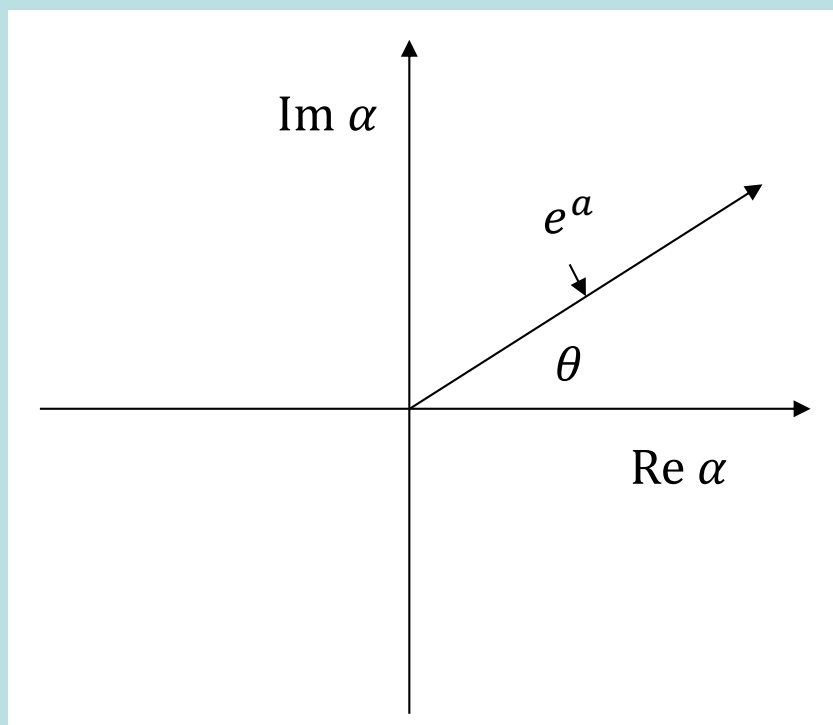
不用再找了！



我們可以更進一步定義複數 $\alpha = a + i\theta$ 的指數函數：

$$e^\alpha = e^{a+i\theta} = e^a e^{i\theta} = e^a (\cos \theta + i \sin \theta)$$

e^α 在複數平面上表示， e^a 就是絕對值， θ 就是幅角



可以證明：

$$\frac{d^n}{dx^n} e^{\alpha x} = (\alpha)^n \cdot e^{\alpha x}$$

所以，複數的指數函數，所有的微分都與自己成正比！

$$|e^{i\theta}| = 1$$

$$|e^{a+i\theta}| = e^a$$

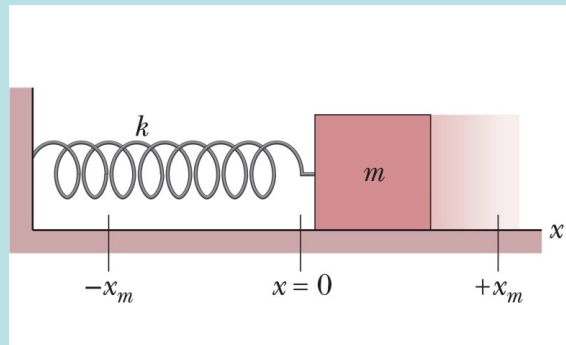
$$|mn| = |m| \cdot |n|$$

$$\frac{d}{dx} e^{\alpha x} = \frac{d}{dx} (e^{ax} e^{i\theta x})$$

$$= (ae^{ax})e^{i\theta x} + e^{ax}(i\theta e^{i\theta x})$$

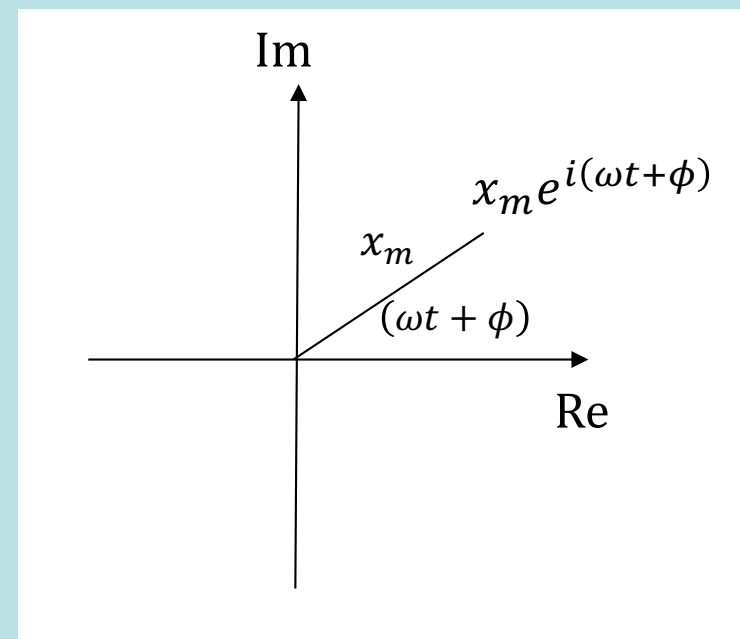
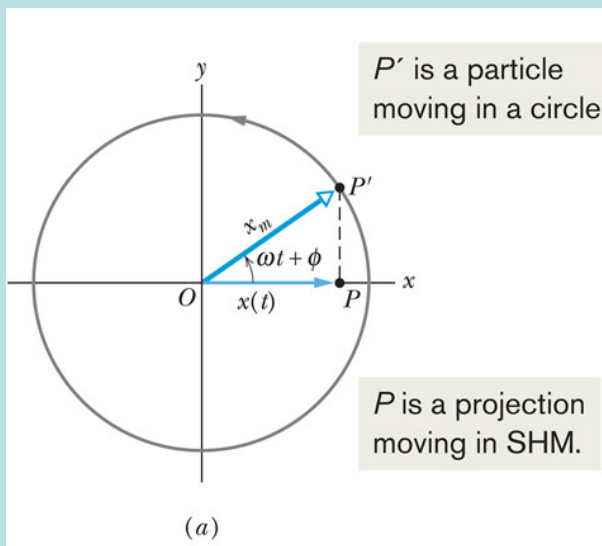
$$= (a + i\theta)e^{a+i\theta} = \alpha e^{\alpha x}$$

$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ 如此，三角函數可以寫成虛數指數函數的實數部。



$$x_m \cos(\omega t + \phi) = \text{Re}[x_m e^{i(\omega t + \phi)}]$$

如此簡諧運動，就是虛數指數函數的實數部！



假想圓就是 $x_m e^{i(\omega t + \phi)}$ 在其複數平面上的表現！

但自然界的振盪很少一直持續，能量總是會漸漸消耗掉。

這是來自振盪器內的阻力。

阻力通常與振動的速度成正相關。

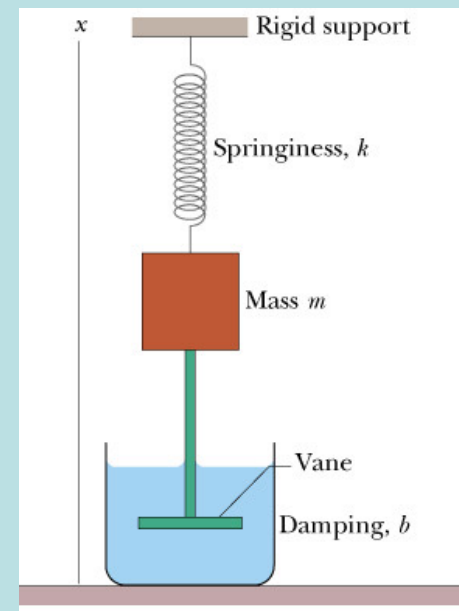
近似引進一個與速率成正比的阻力：

$$f_d = -bv$$

運動方程式會多一個項：

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -b \frac{dx}{dt} - kx$$

稱為Damped Oscillation 阻尼振盪。



有阻力的簡諧振盪器，以複數方法求解：

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

首先將這個式子裡的 x 推廣為一個複數 z 。

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dz}{dt} + \omega^2 z = 0$$

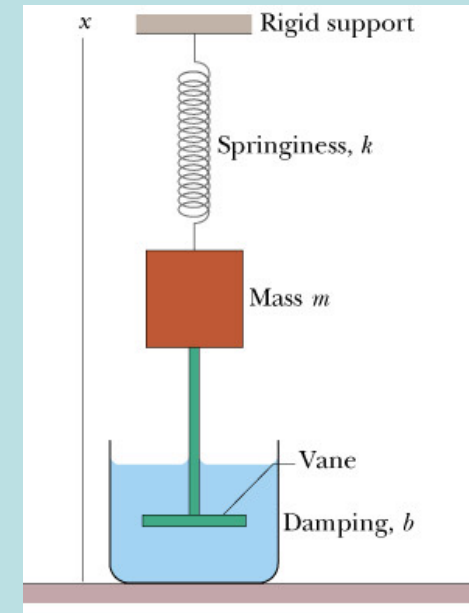
注意複數 z 包含實數部 $\text{Re } z$ 與虛數部 $\text{Im } z$ 。

$$\frac{d^2 (\text{Re } z + i \text{Im } z)}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{d(\text{Re } z + i \text{Im } z)}{dt} + \omega^2 (\text{Re } z + i \text{Im } z) = 0 + i0$$

因為方程式是線性的， z 的實數部與虛數部也同時滿足原來 x 滿足的方程式！
如果能解出複數 z ，再取其實數部或虛數部，即可得到原方程式的實數解 x 。

$$\frac{d^2 (\text{Re } z)}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{d(\text{Re } z)}{dt} + \omega^2 (\text{Re } z) = 0$$

看起來似乎比較複雜的複數微分方程，原來反而比較容易解！



$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dz}{dt} + \omega^2 z = 0$$

如果我們大膽地猜，解正比於一個複數指數函數：

$$z = z_0 e^{\alpha t}$$

上式所有項都正比於 z ：
微分的次數對應 α 的冪次。

$$\frac{d^n}{dt^n} z = \alpha^n z$$



$$\alpha^2 z + \frac{b}{m} \alpha z + \omega^2 z = 0$$



$$\alpha^2 + \frac{b}{m} \alpha + \omega^2 = 0$$

This is called **Characteristic Equation**.

原來的微分方程式現在一項對一項地轉化為未知的 α 滿足之代數方程式。

α 可被解出：

$$\alpha_{\pm} = -\frac{b}{2m} \pm i \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

These are called **Eigenvalues** of the SHO.

若阻力不大 $\omega > \frac{b}{2m}$ 通常我們得到兩個複數解

$$\alpha_{\pm} = -\frac{b}{2m} \pm i\omega'$$

$$\omega' \equiv \sqrt{\omega^2 - \frac{b^2}{4m^2}}$$

$$z_{\pm} \equiv e^{\alpha_{\pm}t} = e^{-\frac{b}{2m}t} \cdot e^{\pm i\omega't} = e^{-\frac{b}{2m}t} \cdot [\cos \omega't \pm i \sin \omega't]$$

取複數解 $z_{\pm}$ 的實數部或虛數部，即可得到原方程式的實數解 x 。

z_+ 的實數部與虛數部分別是：

$$e^{-\frac{b}{2m}t} \cdot \cos \omega't$$

$$e^{-\frac{b}{2m}t} \cdot \sin \omega't$$

我們得到了原來實數微分方程式的兩個實數解！

注意： z_- 的實數部與虛數部，與 z_+ 是一樣的函數！

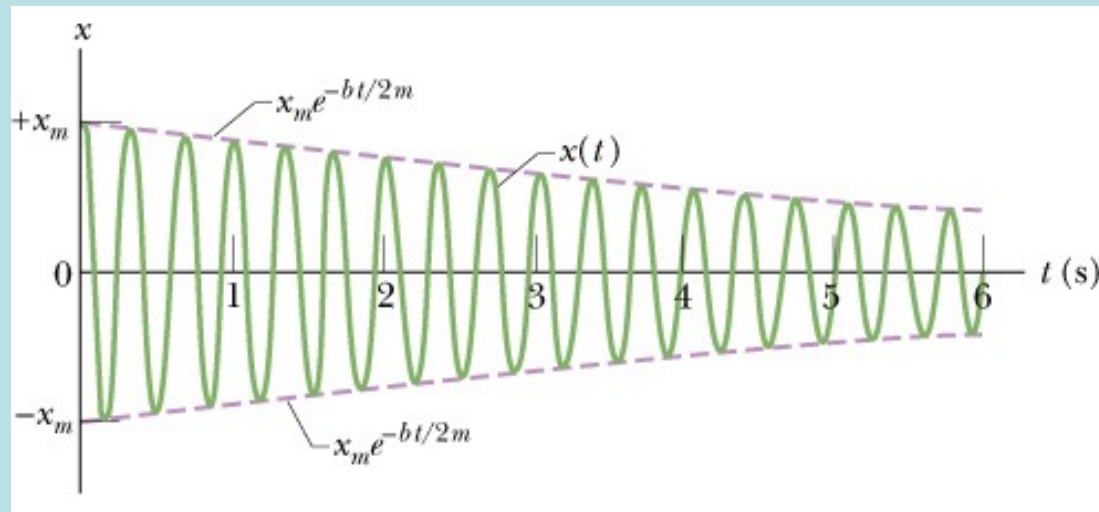
有了這兩個解，就可以以線性組合得出一般解。

$$x = e^{-\frac{b}{2m}t} \cdot (a \cos \omega't + b \sin \omega't) = x_m \cdot e^{-\frac{b}{2m}t} [\cos(\omega't + \phi)]$$

此一般解有兩個尚未決定的常數： a, b 。而我們正好有兩個起始條件決定 a, b ，
所得到就是方程式的唯一解。

$$x = x_m \cdot e^{-\frac{b}{2m}t} [\cos(\omega' t + \phi)]$$

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - \frac{b^2}{4m^2}}$$



振幅呈現指數衰減！

振動頻率減小！

若阻力很大 $\omega < \frac{b}{2m}$ α 得到兩個實數解：

$$\alpha_{\pm} = -\frac{b}{2m} \pm i \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

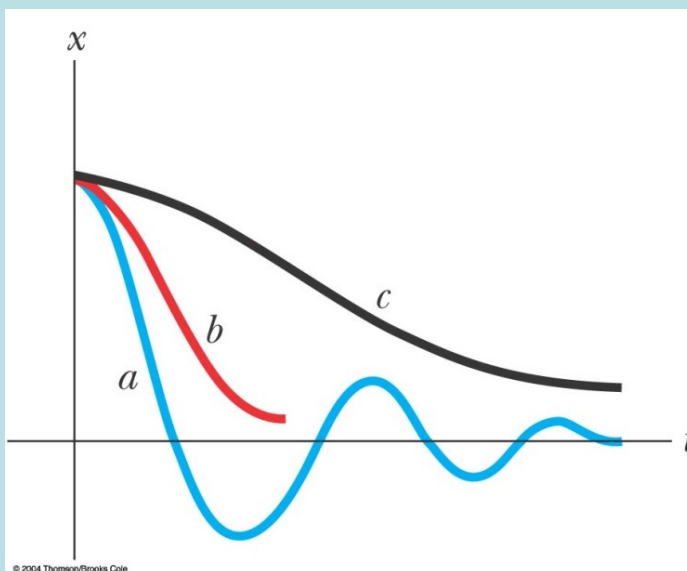


$$\alpha_{\pm} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \omega^2}$$

$\alpha_{\pm}$ 都是負的，兩個解都是隨時間指數遞減，而沒有振盪！

$$z_1 \equiv e^{-\left[\frac{b}{2m} - \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \omega^2}\right]t}$$

$$z_2 \equiv e^{-\left[\frac{b}{2m} + \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \omega^2}\right]t}$$



如果 $\frac{b}{2m}$ 大於 ω ，那就根本沒有振動了！阻尼可以大到連一次震盪都未完成！

若阻力恰好 $\omega = \frac{b}{2m}$ α 得到兩個相同實數解：

$$\alpha_{\pm} = -\frac{b}{2m}$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dz}{dt} + \omega^2 z = 0$$

我們只得到一組解：

$$z_1 = e^{-\frac{b}{2m}t}$$

由 y_1 我們計算出另一個線性獨立的函數 $y_2(x)$ ，也滿足此方程式。

$$y_2 \sim y_1 \int dx \frac{\exp\left(-\int_0^x P(x') \cdot dx'\right)}{y_1^2}$$

$$z_2 \sim e^{-\frac{b}{2m}t} \int dt \frac{\exp\left(-\int \frac{b}{m} \cdot dt\right)}{e^{-\frac{b}{m}t}} = e^{-\frac{b}{2m}t} \int dt \frac{e^{-\frac{b}{m}t}}{e^{-\frac{b}{m}t}} = te^{-\frac{b}{2m}t}$$

$$z_1 = e^{-\frac{b}{2m}t}$$

$$z_2 = te^{-\frac{b}{2m}t}$$

你可以代入確認。

以上的解法很容易地就可以推廣到任意的齊次微分方程式

$$\sum_{n=0}^N a_n \cdot \frac{d^n x}{dt^n} = 0$$

先推廣為複數

$$\sum_{n=0}^N a_n \cdot \frac{d^n z}{dt^n} = 0$$

猜解並代入 $z = z_0 e^{\alpha t}$

$$\sum_{n=0}^N a_n \cdot \alpha^n z = 0$$



$$\sum_{n=0}^N a_n \cdot \alpha^n = 0$$

微分方程式被轉化為未知數 α 的代數方程式：

代數方程式中的有 N 個解 $\alpha_{1,2,3\dots N}$ ：

$$z = c_1 e^{\alpha_1 t} + c_2 e^{\alpha_2 t} + \dots c_N e^{\alpha_N t}$$

最後取實數部即可得實數解 $x = \text{Re } z$

有 N 個解就有 N 個未知數，因此就需要 N 個起始條件，

一般就是起始值及起始 N 次以下微分。

Second Order Linear Ordinary Differential Equation

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

每一項只包含一次方的 y 函數，及一次方的一次或二次微分，以及一個已知 x 函數。

We don't have general solution for these ODE, but if we restrict $P(x), Q(x)$ to constants:

$$y'' + a_1y' + a_0y = 0$$

we do have a procedure using complex number to write down the solutions.

Second Order Homogeneous Linear ODE with constant coefficients

This systemic method can be extended to Homogeneous Linear ODE with constant coefficients of any finite order.

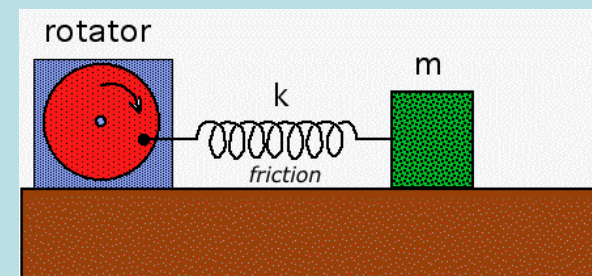
$$\sum_n a_n \cdot \frac{d^n y}{dx^n} = 0$$

Method 0

外力下的震盪 Forced Oscillation

假設所施的外力可以寫成： $F_0 \cos \omega_D t$ 。

運動方程式又多了一個項：



彈簧內在的角頻率

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -b \frac{dx}{dt} - kx + F_0 \cos \omega_D t$$

週期外力的角頻率

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega_D t$$

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

This is an **Inhomogeneous 2nd order Linear ODE with constant coefficients.**

外力下的振盪由兩個頻率來決定：

為簡單起見而專注於此二頻率的影響，先忽略阻尼：

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x + \frac{F_0}{m} \cos \omega_D t$$



周期外力下，有阻力的簡諧振盪器，也可以複數方法求解。

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega_D t \quad \text{非齊次微分方程式}$$

將它先推廣為複數的微分方程式，注意右手邊的技巧：

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dz}{dt} + \omega^2 z = \frac{F_0}{m} e^{i\omega_D t}$$

$$e^{i\omega_D t} = \cos \omega_D t + i \sin \omega_D t$$

取此複數的微分方程式的實數部，果然 $\text{Re}(z)$ 滿足原來的方程式：

$$\frac{d^2 \text{Re}(z)}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{d \text{Re}(z)}{dt} + \omega^2 \text{Re}(z) = \frac{F_0}{m} \text{Re}(e^{i\omega_D t}) = \frac{F_0}{m} \cos \omega_D t$$

$$x = \text{Re}(z)$$



$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dz}{dt} + \omega^2 z = \frac{F_0}{m} e^{i\omega_D t}$$

我們可以依舊猜解為 $z = z_0 e^{\alpha t}$ 代入上式

$$\left(\alpha^2 + \frac{b}{m} \alpha + \omega^2 \right) z_0 e^{\alpha t} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega_D t}$$

未知數 α 只有一種可能 $\alpha = i\omega_D$ 此解與外力以同樣頻率震盪！

z_0 也只有一種可能

$$\left(-\omega_D^2 + \frac{ib}{m} \omega_D + \omega^2 \right) z_0 e^{-i\omega_D t} = \frac{F_0}{m} e^{-i\omega_D t}$$

$$z_0 = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\left(\omega^2 - \omega_D^2 + \frac{ib}{m} \omega_D \right)}$$

於是我得到一個特別解。

以絕對值及幅角表示 z_0 最為方便:

$$z_0 = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\left(\omega^2 - \omega_D^2 + \frac{ib}{m}\omega_D\right)} \equiv Ae^{i\phi}$$

$$A = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_D^2)^2 + \left(\frac{b\omega_D}{m}\right)^2}}$$

$$\tan \phi = -\frac{\frac{b\omega_D}{m}}{(\omega^2 - \omega_D^2)}$$

$$z = z_0 e^{-i\omega_D t} = Ae^{-i(\omega_D t + \phi)}$$

其實數部即原方程式實數解

$$\text{Re } z = \text{Re } Ae^{-i(\omega_D t + \phi)} = A \cos(\omega_D t + \phi) \equiv x_r$$

這個就稱為共振解，並沒有任何自由度可以附合起始條件。

對於非齊次方程式，當我們猜到一個解之後，可以在其上加上對應的齊次方程式的解，而仍然滿足一樣的非齊次方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega_D t$$



$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

$$x_s = x_m \cdot e^{-\frac{b}{2m}t} [\cos(\omega' t + \phi)]$$

$$x = x_r + x_s$$

$$x_r = A \cos(\omega_D t + \phi)$$

$$x_s = x_m \cdot e^{-\frac{b}{2m}t} [\cos(\omega' t + \phi)]$$

有兩個未知常數可以附合起始條件

這個解滿足微分方程式，而且可以滿足起始條件，
根據微分方程式基本定理，它必然是唯一的解。

非共振解會逐漸減小，而共振解則不會，因此過了一段時間，非共振解即可忽略，起始條件的影響會消失，只有共振解的效應必須考慮。

$$x = x_r + x_s \rightarrow x_r$$

$$x \rightarrow A \cos(\omega_D t + \phi)$$



單體的運動方程式

Ordinary Differential Equation



多體且彼此耦合的運動方程式

System of ODE

Matrix and Linear Algebra

Eigenvalue problem of Matrix

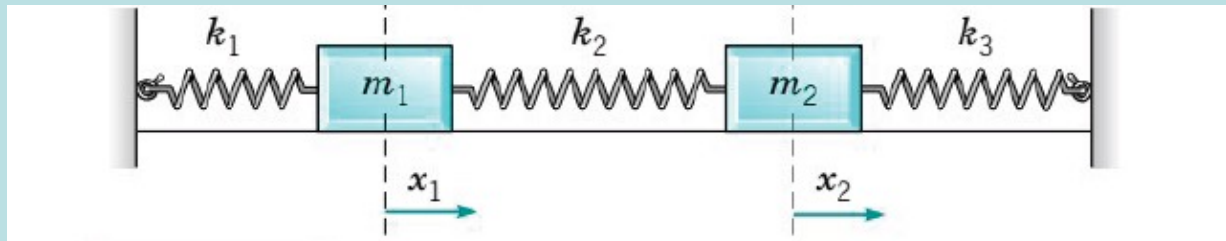


連續及大量極限

連續介質的波方程式

Partial Differential Equation

耦合振盪 coupled oscillation



$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = k_2(x_2 - x_1) - k_1 x_1 = -(k_1 + k_2)x_1 + k_2 x_2$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k_2(x_2 - x_1) - k_3 x_2 = k_2 x_1 - (k_2 + k_3)x_2$$

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\frac{k_1 + k_2}{m_1} x_1 + \frac{k_2}{m_1} x_2$$

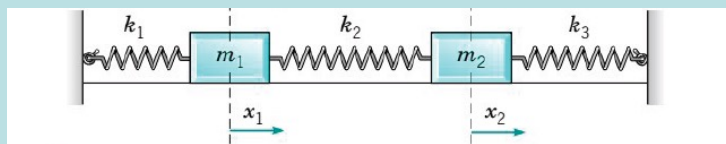
$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = \frac{k_2}{m_2} x_1 - \frac{k_2 + k_3}{m_2} x_2$$

兩個粒子的受力，是兩個粒子座標的兩個線性組合，稱為線性系統。

線性系統的運動方程式可以以矩陣與行向量的語言來描述。

運動方程式的解可以寫成矩陣的本徵值問題。

線性系統可簡化為模式廣義座標的簡諧運動。



線性方程式組的右手邊可以以矩陣及行向量的乘積來簡化符號！

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\frac{2k}{m}x_1 + \frac{k}{m}x_2$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = \frac{k}{m}x_1 - \frac{2k}{m}x_2$$



$$\begin{pmatrix} \frac{d^2 x_1}{dt^2} \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{2k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{2k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

矩陣

$$\mathbf{A} \equiv \begin{pmatrix} \frac{2k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{2k}{m} \end{pmatrix}$$

行向量

$$\mathbf{x} \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$



$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{d^2 x_1}{dt^2} \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{F}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \equiv \begin{pmatrix} 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x} = -\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$$

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = -2\omega_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_2 \quad \frac{d^2 x_2}{dt^2} = \omega_0^2 x_1 - 2\omega_0^2 x_2$$

先設 $x_{1,2}$ 為複數，猜想其解如簡諧運動也可以寫成虛數的指數函數：

$$x_1 = a_1 \cdot e^{i\omega t}$$

$$x_2 = a_2 \cdot e^{i\omega t}$$

$$\mathbf{x} \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$$

注意此猜想中， $x_{1,2}$ 是以同樣的方式一起隨時間振盪： $e^{i\omega t}$ 。

可以想見此解要成立， ω 須是特定的值， $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ 必須是特定的行向量。

要找到它們，就要將解代入方程式：

$$\omega^2 e^{i\omega t} a_1 = 2\omega_0^2 e^{i\omega t} a_1 - \omega_0^2 e^{i\omega t} a_2$$

$$2\omega_0^2 a_1 - \omega_0^2 a_2 = \omega^2 a_1$$

$$\omega^2 e^{i\omega t} a_2 = -\omega_0^2 e^{i\omega t} a_1 + 2\omega_0^2 e^{i\omega t} a_2$$

$$-\omega_0^2 a_1 + 2\omega_0^2 a_2 = \omega^2 a_2$$

微分方程組被轉化為 a_1, a_2 的一次代數方程組以及一個未知數 ω 。

這個 a_1, a_2 的一次代數方程組也可以以矩陣及行向量表示：

以矩陣及行向量的語言來寫：

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = \omega^2 \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} \equiv \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

這稱為矩陣 $\mathbf{A}$ 的本徵值 ω 問題， $\mathbf{a}$ 稱為本徵向量。

$$2\omega_0^2 a_1 - \omega_0^2 a_2 = \omega^2 a_1$$

$$-\omega_0^2 a_1 + 2\omega_0^2 a_2 = \omega^2 a_2$$

這稱為矩陣**A**的本徵值 ω 問題，**a**稱為本徵向量。

$$(2\omega_0^2 - \omega^2)a_1 - \omega_0^2 a_2 = 0$$

$$-\omega_0^2 a_1 + (2\omega_0^2 - \omega^2)a_2 = 0$$

因為右式為零，此方程組只有在行列式為零時才有解：

$$\begin{vmatrix} 2\omega_0^2 - \omega^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (\omega^2 - 2\omega_0^2)^2 - (\omega_0^2)^2 = 0$$

未知數 ω^2 應該只有兩個解！

$$\omega^2 = \omega_0^2, 3\omega_0^2$$

$$\omega_1 \equiv \omega_0$$

$$\omega_2 \equiv \sqrt{3}\omega_0$$

對特定的 ω ，我們可以解出對應的 a_1, a_2 ，

$$\omega_1 = \omega_0$$

$$(2\omega_0^2 - \omega_0^2)a_1 - \omega_0^2 a_2 = 0$$

$$-\omega_0^2 a_1 + (2\omega_0^2 - \omega_0^2)a_2 = 0$$



$$\omega_0^2 a_1 - \omega_0^2 a_2 = 0$$

$$-\omega_0^2 a_1 + \omega_0^2 a_2 = 0$$

$$a_1 = a_2 \equiv C_1 = A_1 e^{i\phi_1}$$

The solution is:

$$x_1 = C_1 \cdot e^{i\omega_0 t} = A_1 e^{i(\omega_0 t + \phi_1)}$$

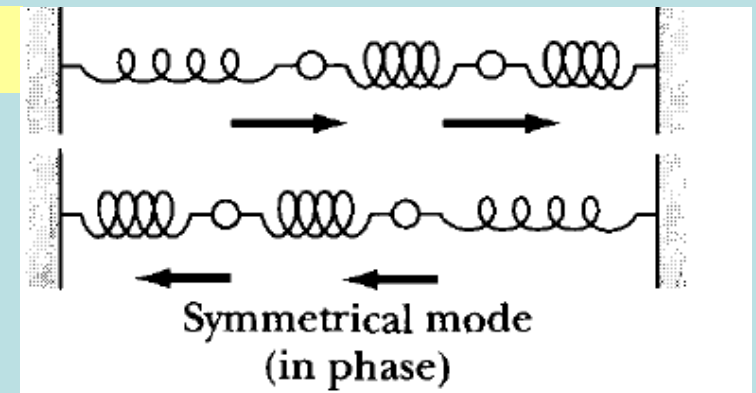
$$x_2 = C_1 \cdot e^{i\omega_0 t} = A_1 e^{i(\omega_0 t + \phi_1)}$$

Now taking the real part would give us the solution.

$$x_1 = x_2 = \text{Re } A_1 e^{i(\omega_0 t + \phi_1)} = A_1 \cos(\omega_0 t + \phi_1)$$

The two move together!

$$x'_1 = x'_2 = -\omega_0 A_1 \sin(\omega_0 t + \phi_1)$$



例如起始條件 $x_1(0) = x_2(0) = a_m$, $x'_1(0) = x'_2(0) = 0$ ，此對稱運動模式就會進行。

$$\omega_2 = \sqrt{3}\omega_0$$

$$(2\omega_0^2 - 3\omega_0^2)a_1 - \omega_0^2 a_2 = 0$$

$$-\omega_0^2 a_1 + (2\omega_0^2 - 3\omega_0^2)a_2 = 0$$



$$-\omega_0^2 a_1 - \omega_0^2 a_2 = 0$$

$$-\omega_0^2 a_1 - \omega_0^2 a_2 = 0$$

$$a_1 = -a_2 \equiv C_2 = A_2 e^{i\phi_2}$$

The solution is:

$$x_1 = C_2 \cdot e^{i\sqrt{3}\omega_0 t} = A_2 e^{i(\sqrt{3}\omega_0 t + \phi_2)}$$

$$x_2 = -C_2 \cdot e^{i\sqrt{3}\omega_0 t} = A_2 e^{i(\sqrt{3}\omega_0 t + \phi_2)}$$

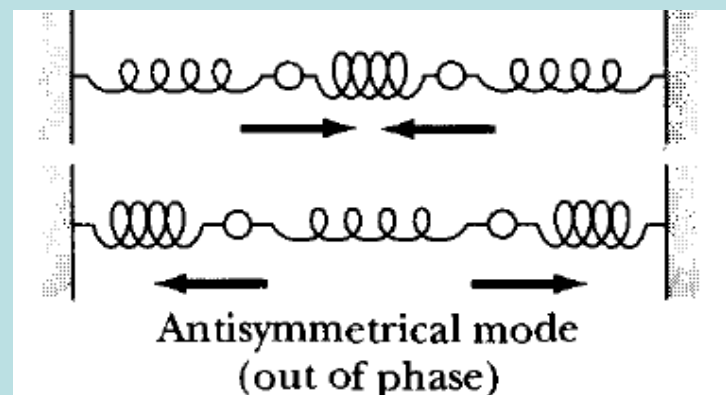
Now taking the real part would give us the solution.

$$x_1 = \text{Re } A_2 e^{i(\sqrt{3}\omega_0 t + \phi_2)} = A_2 \cos(\sqrt{3}\omega_0 t + \phi_2)$$

$$x_2 = -x_1 = -A_2 \cos(\sqrt{3}\omega_0 t + \phi_2)$$

$$x'_1 = -x'_2 = \sqrt{3}\omega_0 A_2 \sin(\sqrt{3}\omega_0 t + \phi_1)$$

The two move opposite!



起始條件為 $x_1(0) = -x_2(0) = a_m$, $x'_1(0) = x'_2(0) = 0$ ，此反對稱運動模式就會進行

Method I

$$-A \cdot x = \frac{d^2}{dt^2} x \quad x \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a e^{i\omega t} \quad a \equiv \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

This is the eigenvalue problem of Matrix **A**.

微分方程組被轉化為矩陣**A**的本徵值 ω 問題，**a**稱為本徵向量。

$$A \cdot a = \omega^2 a \quad A \equiv \begin{pmatrix} 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 \end{pmatrix}$$

本徵值 ω^2 有兩個，各自對應一本徵向量**a**。

$$\omega_1 \equiv \omega_0 \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\omega_2 \equiv \sqrt{3}\omega_0 \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos \omega_0 t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos \sqrt{3}\omega_0 t$$

There is another way to look at this solution.

Method 2

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \phi_1) + A_2 \cos(\sqrt{3}\omega_0 t + \phi_2)$$

$$x_2 = A_1 \cos(\omega_0 t + \phi_1) - A_2 \cos(\sqrt{3}\omega_0 t + \phi_2)$$

$$x_+ \equiv x_1 + x_2 = 2A_1 \cos(\omega_0 t + \phi_1)$$

Generalized Coordinates 廣義座標

$$x_- \equiv x_1 - x_2 = 2A_2 \cos(\sqrt{3}\omega_0 t + \phi_2)$$

廣義座標可以完全決定真實座標！

x_+, x_- are pure simple harmonic oscillators with respective angular frequencies.

從廣義座標 x_+, x_- 滿足的運動方程式的角度來看：

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = -2\omega_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_2 \quad + \quad \frac{d^2 x_2}{dt^2} = \omega_0^2 x_1 - 2\omega_0^2 x_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 (x_1 + x_2)}{dt^2} = -\omega_0^2 x_1 - \omega_0^2 x_2$$

$$\frac{d^2 x_+}{dt^2} = -\omega_0^2 x_+$$

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = -2\omega_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_2 \quad - \quad \frac{d^2 x_2}{dt^2} = \omega_0^2 x_1 - 2\omega_0^2 x_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 x_-}{dt^2} = -3\omega_0^2 x_-$$

x_+, x_- are called Normal Coordinates. 模式座標

$$\mathbf{x} \equiv \begin{pmatrix} x_+ \\ x_- \end{pmatrix}$$

$$-\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x}$$

$$\mathbf{A} \equiv \begin{pmatrix} \omega_0^2 & 0 \\ 0 & 3\omega_0^2 \end{pmatrix}$$

For normal coordinates, $\mathbf{A}$ is now diagonal. Off-diagonal elements means coupling.

x_+, x_- are uncoupled, independent SHM.

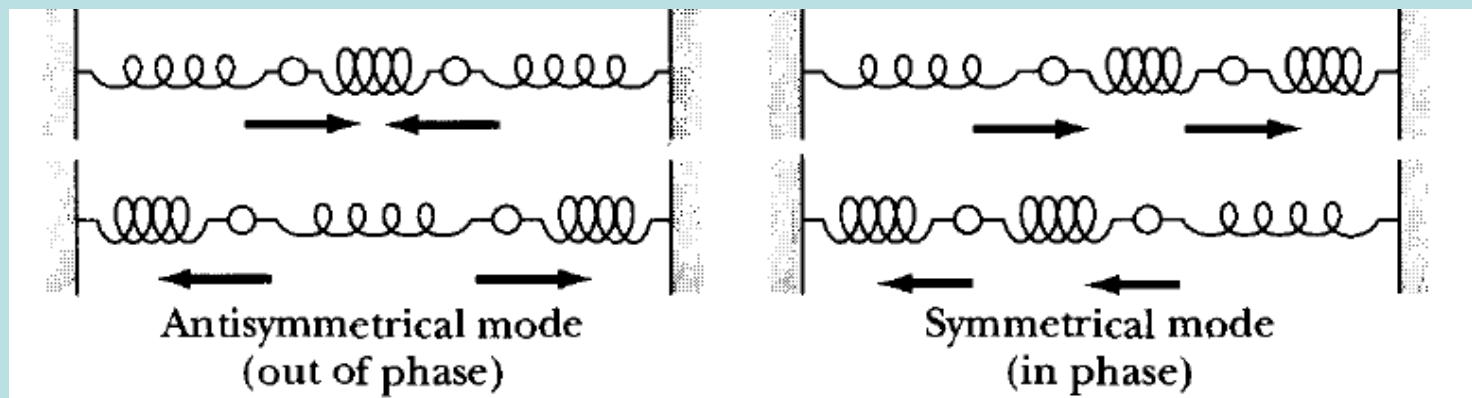
在這兩個模式，廣義座標非常簡單。

$$x_1 = -x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \phi_1)$$

$$x_1 = x_2 = A_1 \cos(\omega_0 t + \phi_1)$$

$$x_+ = 0, x_- = 2A_2 \cos(\sqrt{3}\omega_0 t + \phi_2)$$

$$x_+ = A_1 \cos(\omega_0 t + \phi_1), x_- = 0$$



可以說這兩個模式座標就是來標定這兩個模式的。

System of 2nd order Linear ODE with constant coefficients

$$-\frac{d^2 \mathbf{X}}{dt^2} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$$
 Matrix $\mathbf{A}$ is what determines the evolution of the system.

例如耦合振盪 $\mathbf{A} \equiv \frac{k}{m} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$



複變函數法 $\mathbf{X} = \mathbf{a}e^{i\omega t}$

$$\frac{d^2 \mathbf{a}e^{i\omega t}}{dt^2} = \omega^2 \mathbf{a}e^{i\omega t} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}e^{i\omega t}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = \omega^2 \mathbf{a}$$

這是矩陣的本徵問題：線性代數Linear Algebra的中心問題。



行向量與矩陣的本徵值問題

以下將以數學的角度來討論，都是規則與定理。

以下或許抽象，但因此任何物理，只要能表示為行向量與矩陣，以下定理都適用。

Chapter 6

Eigenvalues and Eigenvectors

- 6.1 Introduction to Eigenvalues : $Ax = \lambda x$**
- 6.2 Diagonalizing a Matrix**
- 6.3 Symmetric Positive Definite Matrices**
- 6.4 Complex Numbers and Vectors and Matrices**
- 6.5 Solving Linear Differential Equations**

向量或行向量 **vector or column vector**

$$\mathbf{a} \equiv \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

兩個數($\rightarrow N$ 個數，實數或複數)： $a_i, i = 1, 2$ ，組成的一組數學量。

空間向量就是例子，但行向量不一定是空間向量，可以是彈簧組的位移。

可以是電子自旋的狀態！

But like 3D vectors, Vectors can be multiplied by a number, and two vectors can add up.

Linear combinations of vectors are still vectors. Vector space is also called linear space.

$$\mathbf{v} = c_1 \mathbf{a} + c_2 \mathbf{b} \quad \text{線性組合或線性疊加}$$

$$\mathbf{a} \equiv \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} \equiv \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix} + 2.0 \cdot \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

If the components of two vectors are proportional, we say they are in the **same direction**.

$$\mathbf{a} = c \mathbf{b}$$

$\begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{bmatrix}$ and $\begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.1 \end{bmatrix}$ are in the same direction.

向量vector可以定義長度： $\mathbf{a} \equiv \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ $\mathbf{b} \equiv \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

從此延伸，可以定義兩個向量的內積inner product：

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 \quad |\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$$

行向量的transpose(轉置)稱為列row向量： $\mathbf{a}^T \equiv \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}^T = (a_1 \quad a_2)$

內積可以用行向量與列向量的矩陣乘積來寫：

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = (a_1 \quad a_2) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \mathbf{a}^T \mathbf{b}$$

兩個向量的內積為零，這兩個向量就彼此正交perpendicular：

$$\mathbf{a}^T \mathbf{b} = 0$$

2×2 Matrix矩陣是兩組行向量(4個實數或複數)： $a_{ij}, i, j = 1, 2$ ，組成的數學量。

$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}$ 也可以看成是兩組列向量。兩種看法都有用。

矩陣乘行向量得一行向量：

$$(\mathbf{S}\mathbf{a})_i = \sum_{j=1}^2 S_{ij}a_j = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11}a_1 + S_{12}a_2 \\ S_{21}a_1 + S_{22}a_2 \end{pmatrix}$$

此規則保證此乘積是線性的 $\mathbf{S}(c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2) = c_1\mathbf{S}\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{S}\mathbf{a}_2$

列向量乘矩陣得一系列向量：

$$(\mathbf{a}^T\mathbf{S})_j = \sum_{i=1}^2 a_i S_{ij} = (a_1 \ a_2) \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} = (a_1 S_{11} + a_2 S_{21} \ a_1 S_{12} + a_2 S_{22})$$

矩陣乘矩陣還是矩陣：

$$(\mathbf{S}\mathbf{A})_{mn} = \sum_{j=1}^2 S_{mj}A_{jn} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11}A_{11} + S_{12}A_{21} & S_{11}A_{12} + S_{12}A_{22} \\ S_{21}A_{11} + S_{22}A_{21} & S_{21}A_{12} + S_{22}A_{22} \end{pmatrix}$$

列向量乘矩陣乘行向量，等於列向量乘行向量，得到一個數：

$$\mathbf{b}^T\mathbf{S}\mathbf{a} = \sum_{i,j=1}^2 b_i S_{ij} a_j$$

Arfken p96-99

A times the eigenvector will produce a vector in the same direction.

Solving eigenvalue problem of matrix

$$A \cdot a = \lambda a$$

$$(A - \lambda I) \cdot a = 0$$

$$S^{-1} = \frac{1}{\det S} \begin{pmatrix} S_{22} & -S_{12} \\ -S_{21} & S_{11} \end{pmatrix}$$

$A - \lambda I$ is also a matrix. If it has an inverse, the vector a can only be zero:

$$a = (A - \lambda I)^{-1} \cdot 0 = 0$$

For λ to be an eigenvalue, the condition is $A - \lambda I$ has no inverse and hence the determinant of $A - \lambda I$ is zero.

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 0.8 - \lambda & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2} = (\lambda - 1) \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) = 0$$

$$\lambda = \lambda_1 = 1 \text{ or } \lambda_2 = \frac{1}{2} \text{ are eigenvalues of } \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}.$$

對特定的 λ ，我們可以解出對應的 a_1, a_2

$$\lambda = \lambda_1 = 1 \quad \mathbf{a}_1 \equiv \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \cdot \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 0.8 - 1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.2 & 0.3 \\ 0.2 & -0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = 0$$

$$0.2a_{11} = 0.3a_{21}$$

Eigenvector has one undetermined constant.

$$\mathbf{a}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix}$$

同理：

$$\lambda = \lambda_2 = \frac{1}{2}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \cdot \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0.8 - 0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 - 0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = 0$$

$$0.3a_{12} = -0.3a_{22}$$

$$\mathbf{a}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

A times the eigenvector will produce a vector in the same direction.

$$A \cdot a_1 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot a_2 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

For the two special eigenvectors, matrix multiplication is just a number product.

Summary To solve the eigenvalue problem for an n by n matrix, follow these steps :

1. **Compute the determinant of $A - \lambda I$.** With λ subtracted along the diagonal, this determinant starts with λ^n or $-\lambda^n$. It is a polynomial in λ of degree n .
2. **Find the roots of this polynomial**, by solving $\det(A - \lambda I) = 0$. The n roots are the n eigenvalues of A . They make $A - \lambda I$ singular.
3. For each eigenvalue λ , **solve $(A - \lambda I)x = 0$ to find an eigenvector x .**

Theorem: The eigenvectors $\mathbf{a}$ of $\mathbf{A}$ are also eigenvectors of $\mathbf{A}^n$ with the eigenvalue λ^n .

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a}$$



$$\mathbf{A}^n \cdot \mathbf{a} = \lambda^n \mathbf{a}$$

Theorem: All vectors can be written as the linear combination of $\mathbf{a}_1$ and $\mathbf{a}_2$.

$$\mathbf{X} = c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2$$

Then the action of $\mathbf{A}$ and $\mathbf{A}^n$ on any vector can be easily written down:

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{A}(c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2) = c_1 \mathbf{A}\mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{A}\mathbf{a}_2 = c_1 \lambda_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \lambda_2 \mathbf{a}_2$$

The information in the eigenvectors **alone** of a specific matrix can represent the matrix!

一個矩陣的本徵值與本徵向量就足夠能代表該矩陣。

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0.1 \\ -0.1 \end{pmatrix} \quad \text{一行向量可以寫成本徵向量的線性組合}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix} + 2\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 0.1 \\ -0.1 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0.1 \\ -0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.3 \end{pmatrix}$$

更厲害的是：

$$A^n X = c_1 A^n a_1 + c_2 A^n a_2 = c_1 \lambda_1^n a_1 + c_2 \lambda_2^n a_2$$

$$X = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0.1 \\ -0.1 \end{pmatrix}$$

$$A^{100} X = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}^{100} \cdot \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{pmatrix} = A^{100} \cdot \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix} + 2A^{100} \cdot \begin{pmatrix} 0.1 \\ -0.1 \end{pmatrix}$$

$$= 1^{100} \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{100} \begin{pmatrix} 0.1 \\ -0.1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix}$$

This matrix is called a Markov matrix, with an eigenvalue = 1, the other < 1.

The repeated action of a Markov matrix will push **any vector** into the eigenvector with $\lambda = 1$.

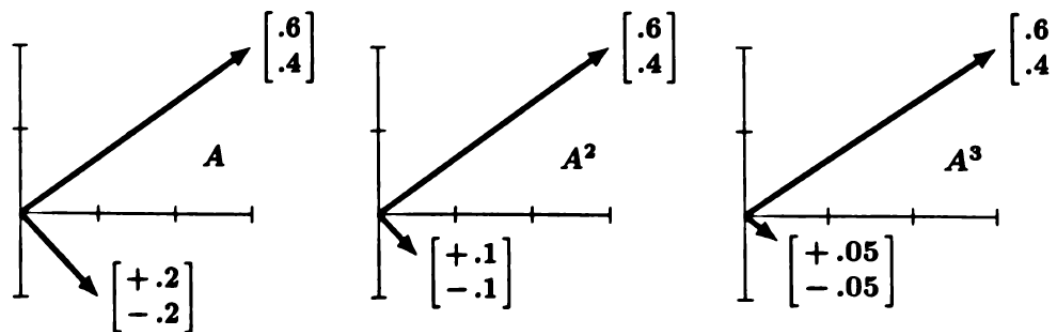


Figure 6.1: The first columns of A, A^2, A^3 are $\begin{bmatrix} .8 \\ .2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} .7 \\ .3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} .65 \\ .35 \end{bmatrix}$ approaching $\begin{bmatrix} .6 \\ .4 \end{bmatrix}$.

System of 2nd order Linear ODE with constant coefficients

$$-\frac{d^2 \mathbf{X}}{dt^2} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$$

Matrix $\mathbf{A}$ is what determines the evolution of the system.

例如耦合振盪

$$\mathbf{A} \equiv \frac{k}{m} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

複變函數法 $\mathbf{X} = \mathbf{a}e^{i\omega t}$

$$\frac{d^2 \mathbf{a}e^{i\omega t}}{dt^2} = \omega^2 \mathbf{a}e^{i\omega t} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}e^{i\omega t}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = \omega^2 \mathbf{a}$$

這是矩陣的本徵值問題：線性代數Linear Algebra的中心問題。

利用本徵向量，線性微分方程組很容易求解：

With the eigenvectors and eigenvalues, we can solve the ODE system.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = \omega^2 \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a}$$

$$\omega_i^2 = \lambda_i \quad \mathbf{a}_i \text{ 是對應的本徵向量。}$$

例如：

$$\mathbf{X} = \text{Re } C_1 \mathbf{a}_1 e^{i\sqrt{\lambda_1}t} = c_1 \mathbf{a}_1 \cos(\sqrt{\lambda_1}t + \phi_1)$$

加上另一解：

$$\mathbf{X} = c_1 \mathbf{a}_1 \cos(\sqrt{\lambda_1}t + \phi_1) + c_2 \mathbf{a}_2 \cos(\sqrt{\lambda_2}t + \phi_2)$$

The four initial conditions $\mathbf{X}(0), \mathbf{X}'(0)$ will determine four constants $c_{1,2}, \phi_{1,2}$.

Diagonalizing a matrix 對角化

$$A \cdot \mathbf{a}_1 = \lambda_1 \mathbf{a}_1 \quad A \cdot \mathbf{a}_2 = \lambda_2 \mathbf{a}_2$$

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ are column vectors and we can use them to form a matrix.

$$U \equiv (\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2) = \left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$AU = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \right) = \left(A \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \quad A \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_2 a_{12} \\ \lambda_1 a_{21} & \lambda_2 a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = U \cdot \Lambda$$

$AU = U\Lambda$ 兩邊乘 U 的反矩陣 U^{-1} :

$$U^{-1} \cdot A \cdot U = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ is diagonal with eigenvalues as diagonal elements.}$$

$U^{-1}AU$ 是一個對角矩陣，矩陣元素就是本徵值！

$$A = U\Lambda U^{-1} = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} U^{-1}$$

Any Matrix can be decomposed into 3 factors,
involving just eigenvalues and eigenvectors.

Info. of eigenvalues

Info. of eigenvectors

$$\begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 1 \\ 0.4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.4 & -0.6 \end{bmatrix}$$

一個矩陣的本徵值與本徵向量就足夠能代表該矩陣。

$A = U\Lambda U^{-1}$ This formula is useful for the following calculation!

$$A^k = U\Lambda U^{-1} \cdot U\Lambda U^{-1} \cdot \dots \cdot U\Lambda U^{-1} = U\Lambda^k U^{-1} = U \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} U^{-1}$$

矩陣的指數函數很容易定義與計算。

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

$$e^A = I + U\Lambda U^{-1} + \frac{U\Lambda^2 U^{-1}}{2!} + \frac{U\Lambda^3 U^{-1}}{3!} + \dots = U \left(I + \Lambda + \frac{\Lambda^2}{2!} + \frac{\Lambda^3}{3!} + \dots \right) U^{-1}$$

$$= U e^{\Lambda} U^{-1} = U \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix} U^{-1}$$

$$e^A = U \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix} U^{-1}$$

利用對角化後的矩陣，線性微分方程組很容易求解：

$$-\frac{d^2 \mathbf{X}}{dt^2} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$$



$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^{-1}$$

$$-\frac{d^2 \mathbf{X}}{dt^2} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{X}$$

兩邊乘 $\mathbf{U}^{-1}$

$$-\frac{d^2 \mathbf{U}^{-1} \mathbf{X}}{dt^2} = \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{U}^{-1} \mathbf{X}$$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

選擇Generalized Coordinates 廣義座標 y_1, y_2

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{X}$$

他們滿足的微分方程非常簡單：

$$\frac{d^2 \mathbf{Y}}{dt^2} = \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \mathbf{Y}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} = \lambda_1 y_1$$

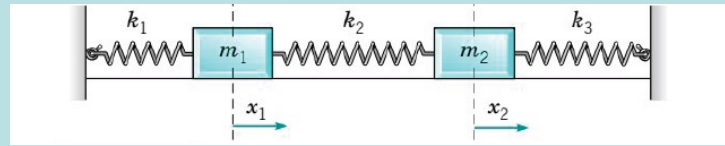
$$\frac{d^2 y_2}{dt^2} = \lambda_2 y_2$$

負責廣義座標的時間演化的矩陣是對角，因此無耦合，此廣義座標彼此獨立。

這樣的廣義座標 y_1, y_2 稱為Normal Coordinates，獨立作簡諧運動！

$$y_1 = c_1 \cos(\sqrt{\lambda_1} t + \phi_1)$$

$$y_2 = c_2 \cos(\sqrt{\lambda_2} t + \phi_2)$$



以耦合振盪為例：

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x} = -\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$$

$$\mathbf{A} \equiv \frac{k}{m} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = \omega^2 \mathbf{a}$$

本徵值有兩個，各自對應一本徵向量。

$$\omega_1 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\omega_2 \equiv \sqrt{3} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

代入前面的解：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos \omega_1 t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos \omega_2 t$$