

1. 考慮一個質量為 0.34kg 的粒子在二維 $x - y$ 平面上運動，已知它的 x, y 座標與時間的關係分別可以寫成： $x(t) = -15.0 + 2.0t + 4.0t^3$ ， $y(t) = 25.0 + 7.0t - 9.0t^2$ ，式中長度單位為 m ，時間為 s 。在時間為 $t = 0.7\text{s}$ 時該粒子所受的力，大小是多少 N ？(20)

解答：Differentiating $x(t) = -15.0 + 2.0t + 4.0t^3$ twice with respect to t , we get

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = 2.00 + 12.0t^2, \quad a_x(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = 24.0t$$

Similarly, differentiating $y(t) = 25.0 + 7.0t - 9.0t^2$ twice with respect to t yields

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = 7.00 - 18.0t, \quad a_y(t) = \frac{d^2y}{dt^2} = -18.0$$

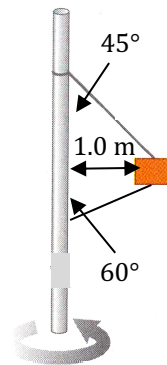
The acceleration is

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} = \frac{d^2x}{dt^2} \hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \hat{j} = (24.0t) \hat{i} + (-18.0) \hat{j}.$$

At $t = 0.7\text{s}$, we have $\vec{a} = (16.8) \hat{i} + (-18.0) \hat{j}$.

$$\vec{F} = m\vec{a} = 0.34 \cdot ((16.8) \hat{i} + (-18.0) \hat{j}) = (5.71) \hat{i} + (-6.12) \hat{j}. \quad F = 8.37\text{N}.$$

2. 一質量為 1.0 kg 的小方塊，以兩條不等長的弦，連結於一垂直的鐵棒上，如圖所示。使弦與方塊一起繞鐵棒以 1.0s 的週期旋轉，假設旋轉過程中，弦與方塊保持在一旋轉的垂直平面上，且弦一直維持張緊狀態。觀察得到此時方塊與鐵棒的垂直距離為 1.0m ，上方弦與鐵棒的夾角為 45° ，下方弦與鐵棒的夾角為 60° 。計算下方的弦的張力。(20)



解答： Assume the tension of the upper string is T_1

and the tension of the lower string is T_2

The Newton's law in vertical direction: $T_1 \cos 45^\circ - T_2 \cos 60^\circ = mg$

$$T_1 \frac{1}{\sqrt{2}} - T_2 \frac{1}{2} = 9.8$$

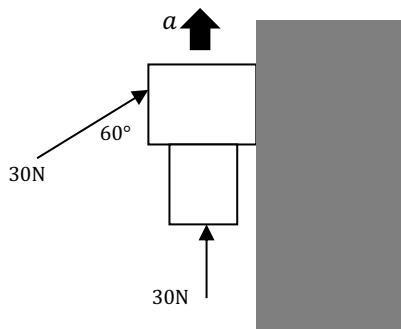
The Newton's law in horizontal direction: $T_1 \sin 45^\circ - T_2 \sin 60^\circ = m \frac{v^2}{r}$

$$T_1 \frac{1}{\sqrt{2}} + T_2 \frac{\sqrt{3}}{2} = m \frac{\left(\frac{2\pi \cdot 1.0}{1}\right)^2}{1.0} = 39.4$$

兩式相減：

$$T_2 \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2} \right) = 29.6, \quad T_2 = 21.7\text{N}$$

3. 考慮一垂直牆面及兩個方塊，上方方塊質量為 2.0kg ，貼著牆面，下方方塊質量為 1.0kg ，頂著上方方塊，但未接觸牆面。由下方方塊下方，對此方塊沿鉛直向上的方向施力 30N ，對上方方塊側面亦施一力，大小為 30N ，方向與鉛直方向夾角為 60° ，如圖所示。方塊與牆面之間的動摩擦係數為 $\mu_k = 0.5$ 。已知方塊向上加速移動，一直維持圖中的組合樣態，並未旋轉或翻覆。計算方塊的加速度 a ，以及上方方塊對下方方塊的施力 T 。(20)



解答：假設上方方塊對下方方塊的施力為 T ，下方方塊滿足以下牛頓定律：

$$30 - T - 1.0g = 1.0a$$

$$20.2 - T = 1.0a$$

對上方方塊側面所施力的水平方向投影，等於方塊對牆面的正向力： $30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，因此上方

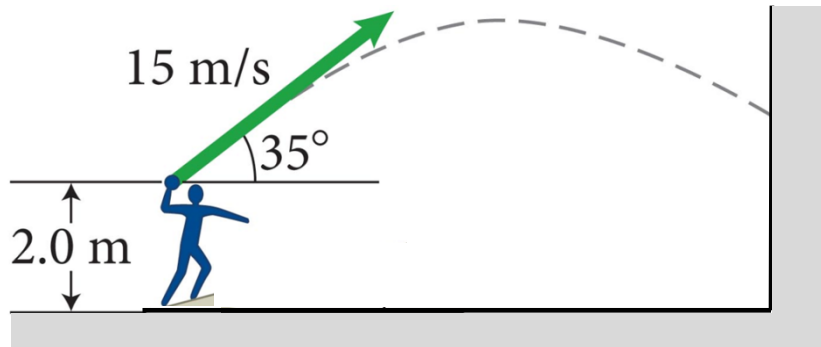
方塊會有一向下的動摩擦力： $30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \mu_k = 13.0\text{N}$ ，下方方塊滿足以下牛頓定律：

$$T + 30 \cdot 0.5 - 2.0g - 13.0 = 2.0a$$

$$T - 17.6 = 2.0a$$

兩式相加可得： $a = 0.87\text{m/s}^2$ 。 $N = 19.3\text{N}$ 。

4. 考慮在地表以初速 15m/s ，與水平夾角 35° ，拋出一球，拋出時球的高度為 2.0m 。不考慮阻力，距離出發點水平距離 20m 處有一垂直牆面。當球撞擊牆面時，計算離地高度是多少 m ，此時速率大小是多少？ $\cos 35^\circ \sim 0.8, \sin 35^\circ \sim 0.6$ 。(20)



解答：水平與垂直的初速分別為： $v_{x0} = 15 \cos 35^\circ \sim 12\text{m/s}$ ， $v_{y0} = 15 \sin 35^\circ \sim 9.0\text{m/s}$ ，因為水平方向為等速運動，當球撞擊牆面時，時間為 $t = \frac{20}{12} \sim 1.67\text{s}$ ，因此高度為： $h = 2.0 + 9.0 \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \sim 3.4\text{m}$ 。此時水平與垂直的速度分量分別為： $v_x = 12\text{m/s}$ ， $v_y = 9.0\text{m/s} - gt = -7.4\text{m/s}$ ， $v \sim 14.1\text{m/s}$ 。

5. 一質點質量為 m ，在一維的 x 軸上運動，它所受的力只是位置 x 的函數，假設此力可以用以下的位能描述： $U(x) = -\frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{4}bx^4$ ， a, b 是適當單位的正數。
- 求出此位能所對應的力的函數 $F(x)$ 。(5)
 - 找出此位能除了原點之外，在 $+x$ 方向另外一個平衡點（Equilibrium Point）的位置。(5)
 - 將質點置於原點，向 $+x$ 方向輕推（起始速度可以忽略），問它運動到達 $+x$ 方向的平衡點處的速度是多少？運動最遠會到達離原點多少距離？(10)

解答：

A. $F = -\frac{dU}{dx} = ax - bx^3$ 。

B. 平衡點在 $F(x_0) = 0$ 處，除了原點，還有 $x_0 = \pm\sqrt{\frac{a}{b}}$.

C. $U(0) = 0$ ，到達的最遠處 x_f ，速度亦為零，因此 $U(x_f) = 0$ ，因此 $x_f = \sqrt{\frac{2a}{b}}$.