在上一節，我們從耦合的N個粒子系統的運動方程式組，取了連續極限$N \to \infty, d \to 0$後，發現可以以波函數 Wave Function 來取代N行向量，運動方程組就變化為連續介質的波方程式 Wave Equation

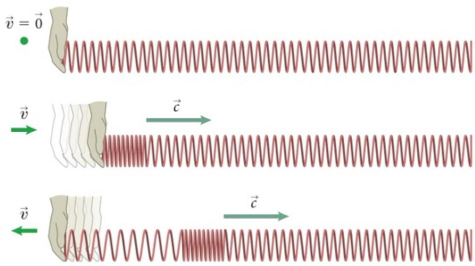
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

你可以發現原來繁複的$N \times N$矩陣，現在趨近於簡單的偏微分的運算，於是連續介質的數學反而簡單許多。但倒過來，波函數是比較抽象的概念，而波方程式與耦合粒子系統運動方程組的關係，顯示兩者的概念是有對應的，這提供我們在處理波方程式的數學求解時，清晰的概念與路徑。你永遠只要回到連續極限前的對應，就知道概念原始的意涵為何。

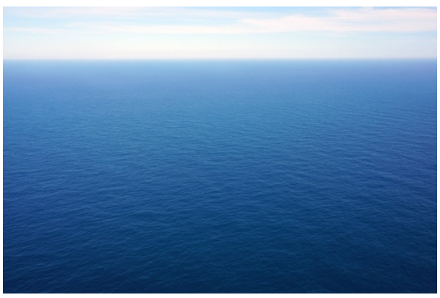
例如運動方程式需要起始條件，波方程式也需要類似的起始條件，Initial Condition：起始的弦位移$\phi(x,0)$，起始的弦垂直方向速度$\frac{\partial \phi}{\partial t}(x,0)$。我們相信同時滿足波方程式加起始條件的解只會有一個。

但對波而言，是不是要考慮介質的邊界就差別很大了！若不需考慮邊界、亦或是離開邊界很遠，介質中會有行進波的傳播，這可以由上一節已經得出的 d'Alembert solution 來描述：

$$\phi(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

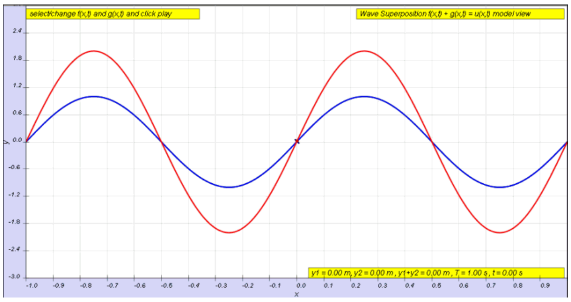


但若介質大小有限，連續介質就如耦合的粒子系統，會有一系列振動模式。這就如同魚缸中的水，與一望無際的海洋中水的對比。



這在數學上是由邊界條件執行：Boundary Condition 最簡單的邊界條件是固定端，例如

$$\phi(0,t) = \phi(L,t) = 0$$



在三度空間的波，邊界就可能有形狀，如球、圓柱。解會非常不同。波導則是在三度空間，有二維的邊界。

對照表

$$\frac{d^2\boldsymbol{X}}{dt^2} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$$

存在一系列振盪模式解， $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{a}^{(i)}e^{i\omega_i t}$

普遍解即是模式解的線性組合！

存在一系列振盪模式解，

特徵是x, t兩變數的函數可以分離。

$$\phi(x,t) = \tilde{\phi}^{(i)}(x)e^{i\omega_i t}$$

普遍解即是模式解的線性組合！

變數分離法

波方程式的標準解法，這個方法將來也會用在薛丁格電子波方程式的求解。

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$$

首先尋找、波函數時間部分與空間部分，可以分離為x,t兩變數個別的函數，這樣的模式解：

$$\phi(x,t)=X(x)\cdot T(t)$$

波方程式是線性方程式，一系列這樣的模式解，作線性組合，就得到一般解。要得到線性組合的配方係數，將起始條件分解為$X(x)$的線性組合(這可以證明永遠可以作到)。讓組合中的$X(x)$各自作時間演化$T(t)$(應該是簡諧振盪)後，到要求的時間t再組合！

$$\phi(x,t)=\sum_i c_iX_i(x)\cdot T_i(t)$$

這樣的波函數既滿足波方程式，又滿足起始條件，就是唯一解。

這樣的步驟，關鍵就是尋找時間部分與空間部分可以分離的模式解，然後將起始條件對模式解作分解。首先分離為x,t兩變數個別的函數的方法稱為變數分離法 Separation of Variables：

$$\phi(x,t)=X(x)\cdot T(t)$$

將此式代入波方程式$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$：

$$X\frac{\partial^2T}{\partial t^2}\ =Tv^2\frac{\partial^2X}{\partial x^2}$$

一般會把v^2移到左邊，同時左右邊都除以$X(x)\cdot T(t)$。偏微分可以寫成常微分，：

$$\frac{1}{v^2}\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2}=\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}$$

現在左邊只與x有關，右邊只與t有關，但兩者是獨立變數！相等並不可能。唯一的例外：左右兩式都與各自的變數無關，是一常數。設此常數為λ。我們就得到空間部分X與時間部分T各自需要滿足的常微分方程式：

$$\frac{1}{v^2}\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2} = \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} \equiv \lambda$$

將偏微分方程式分解 Reduce 為常微分方程式，這是常見的作法。

若是在三度空間，波函數可以分離為$\vec{r}, t$個別的函數的模式解：$\phi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) \cdot T(t)$

代入三度空間的波方程式：

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \nabla^2\phi$$

運用類似的方法，我們可以得到：

$$\frac{1}{v^2}\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2} = \frac{1}{\psi}\nabla^2\psi \equiv \lambda$$

於是空間部分函數現在滿足：

$$\nabla^2\psi = \lambda \cdot \psi$$

稱為 Helmholtz Equation，這個方程式描述有特別形狀、例如球、圓柱的邊界下的三度空間波，非常有用。

我們先從空間部分$X(x)$開始求解，$X(x)$滿足標準的二次常微分方程式：

$$\frac{d^2X}{dx^2} = \lambda X$$

它的解與λ是正或負有關：

$$X(x) = \begin{cases} Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x} & \lambda > 0 \\ A' \cos\sqrt{-\lambda}x + B'^{\sin\sqrt{-\lambda}x} & \lambda < 0 \\ A''x + B'' & \lambda = 0 \end{cases}$$

λ若是正值，$X(x)$是指數函數，λ若是負值，$X(x)$則是三角函數。如果考慮邊界條件，只能選$\lambda < 0, A' = 0$。一般會定義角波數：$k \equiv \sqrt{-\lambda}$：

$$X(x) = \sin kx$$

就自動滿足原點固定邊界條件$\phi(0, t) = 0$。另一端邊界條件就對k、也就是λ有限制：

$$X(L,0) \sim \sin(kL) = 0$$

$$k_n = \frac{n\pi}{L} = \sqrt{-\lambda_n} \quad n = 1,2,\cdots\infty$$

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

這是一系列模式(駐波)，以n標定。離散分布，但有無限多個。對一模式，λ_n及k_n有特定值，就被稱為本徵值 Eigenvalues。我們就稱$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \lambda X$為微分算子 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ 的本徵值方程式，三度空間的對應$\nabla^2\psi = \lambda \cdot \psi$為微分算子 ∇^2 的本徵值方程式，加了邊界條件後，方程式的解就是離散分布，以$n = 1 \cdots \infty$標定 ：$\frac{d^2 X_n}{dx^2} = \lambda_n X_n$。$X_n$稱為算子 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ 解出來的本徵函數。

我們從矩陣的例子就已經可以猜測$X_n(x)$的重要性質：不同本徵值的本徵函數彼此正交，所有滿足邊界條件的函數都可分解為$X_n(x)$的線性組合！第二點就被稱為這些本徵函數具有 Completeness 完備性。

有了λ_n及k_n，時間部分T也能解出：

$$\frac{1}{v^2}\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2} = \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} \equiv \lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

$$\frac{d^2T}{dt^2} = v^2\lambda_n T \equiv -\omega_n^2 T$$

$T(t)$就是以為$\omega_n = v\sqrt{\lambda} = vk$為角頻率的簡諧運動！

$$T(t) = a_m \cos(\omega_n t + \phi) \sim f\cos(\omega_n t) + g\sin(\omega_n t)$$

這個模式的解，命名為$u^{(n)}$，現在可以完整寫出：

$$u^{(n)}(x,t) = X(x) \cdot T(t) = \sin(k_n x)(A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t)$$

這個解中的時間部分是角頻率為ω_n的振盪函數，空間部分是角波數為k_n的週期函數。

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \qquad \omega_n = vk_n = \frac{n\pi}{L}v$$

這就是一個典型的駐波！之前駐波被視為向左正弦波與向右正弦波的疊加。現在駐波是振盪弦的模式之波函數。稱為模式 Normal Modes。在一模式下，所有粒子是一起以同一個時間函數($A_n\cos\omega_n t + B_n\sin\omega_n t$)振盪的。任兩個位置的波函數比例固定與時間無關。

$$\frac{u(x_1,t)}{u(x_2,t)} = \frac{\sin(kx_1)}{\sin(kx_2)}$$

波函數若一開始就與某一$\sin(k_n x)$成正比，接下來波函數就會維持此比例關係。若與之前對 coupled mass system 模式的描述比較：位移行向量若一開始就與一本徵向量成正比，接下來位移就會維持此比例關係，我們可以推論可分解的波函數就對應模式的位移行向量， $\sin(k_n x)$就對應本徵向量！

$X(x)$所滿足標準的二次常微分方程式：

$$\frac{d^2X}{dx^2} = \lambda X$$

$X(x)$就稱為微分算子 Differential Operator $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ 的本徵函數！上式就稱為算子 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ 的本徵值方程式！加了邊界條件後，本徵函數與本徵值就是離散分布。$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$就是解出來的算子 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ 的本徵函數，$\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$就是解出來的算子 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ 的本徵值。

對照表

$\frac{d^2\boldsymbol{X}}{dt^2} = -\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}$	$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$ 右手邊稱為算子operator
$-\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}$	$v^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$
$\boldsymbol{A}$	$\frac{\partial^2}{\partial x^2}$
$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{a}e^{i\omega t}$	$\phi(x,t) = X(x)\, e^{i\omega t}$
$a_j \sim e^{-ipj}$or 虛數部 $\sin pj$	$X(x)\sim e^{-ikx}$ or 虛數部 $\sin kx$
$-\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a}$	$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \lambda X$
矩陣的本徵值方程式！	算子 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ 的本徵值方程式！

在波的現象中的算子operator，根源事實上是矩陣matrix。
算子operator的本徵值，與矩陣matrix的本徵值一樣將扮演重要角色。

起始條件

接下來我們必須引進起始條件。我們已經得到一系列可分離的解，這些解隨時間以簡諧運動的方式變化。但一般解會是這些模式解的線性組合：

$$\phi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n x)(A_n\cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t)$$

係數由起始條件給定，我們還要將起始條件$u(x,0), \frac{\partial}{\partial t}u(x,0)$分解為$X(x)$的線性組合。

起始條件：

$$u(x,0) = u_0(x), \frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = v_0(x)$$

代入：

$$u_0(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(k_nx)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$v_0(x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{n\pi}{L}v\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

可見時間正弦函數的係數A_n是由起始波函數決定，時間餘弦函數的係數B_n是由起始波函數時間微分(介質粒子速率)決定。這就是 Fourier Series！起始條件永遠可以分解為$X(x)=\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$的線性組合。

$$A_n=\frac{2}{L}\int_0^L dx\ \ u_0(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

在之前的三個粒子彈簧組的 coupled masses 例子，任一起始條件的行向量$\begin{pmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\\x_3(0)\end{pmatrix}$，都可以展開成三個本徵向量$\boldsymbol{a}^{(n)}$的線性組合，關鍵是：根據對稱矩陣本徵向量的定理，三個本徵向量彼此正交：$\boldsymbol{a}^{(m)T}\boldsymbol{a}^{(n)}=\delta_{mn}$。我們可以合理猜測如同矩陣的本徵向量，算子的本徵函數彼此也正交！$\sum_{j=1}^{\infty}X_m(dj)X_n(dj)\to\int_0^L dx\ \ X_m(x)X_n(x)=\delta_{mn}$，這個公式可以稱為函數的推廣的內積。

為了確認正交性質，我們可以直接計算推廣的內積：若$m\neq n$

$$\int_0^L dx\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)=\frac{1}{2}\int_0^L dx\left[\cos\frac{\pi}{L}(m-n)x-\cos\frac{\pi}{L}(m+n)x\right]$$

$$=\frac{L}{2\pi}\left[\frac{1}{m-n}\sin\frac{\pi}{L}(m-n)x+\frac{1}{m+n}\sin\frac{\pi}{L}(m+n)x\right]\Bigg|_0^L=0$$

正弦函數是週期函數，上式為零，因此得到算子不同本徵值的本徵函數彼此正交！

$$\int_0^L dx\ \ X_m(x)X_n(x)=0$$

若$m=n$，

$$\int_0^L dx \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \frac{1}{2}\int_0^L dx\left[1-\cos\frac{2n\pi}{L}x\right]$$

$$= \frac{L}{2} + \frac{2n\pi}{L}\left[\sin\frac{2n\pi}{L}x\right]\Big|_0^L = \frac{L}{2}$$

我們可以重新定義本徵函數，使它的推廣內積為1：$\int_0^L dx\ X_n^2 = 1$。

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

綜合以上兩個結果：我們可以寫下：

$$\int_0^L dx\ X_m(x)X_n(x) = \delta_{mn}$$

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$$

稱為 Kronecker δ Function。算子的本徵函數為正交歸一 Orthonormal 的一系列函數。

我們還可以用一個比較抽象、但未來可以推廣當其他例子的方法，來推導出正交性：

已知$\frac{d^2X_n}{dx^2} = \lambda_n X_n$，乘上$X_m$後，兩邊作積分

$$\int_0^L dx\, X_m \frac{d^2X_n}{dx^2} = \int_0^L dx\ \lambda_n X_m X_n = \int_0^L dx \frac{dX_m}{dx}\frac{dX_n}{dx} + \int_0^L dx\ \frac{d}{dx}\left(X_m\frac{dX_n}{dx}\right)$$

$$= \int_0^L dx \frac{dX_m}{dx}\frac{dX_n}{dx} + \left(X_m\frac{dX_n}{dx}\right)\Big|_0^L = \int_0^L dx \frac{dX_m}{dx}\frac{dX_n}{dx}$$

$$\lambda_n \int_0^L dx\ X_m X_n = \int_0^L dx \frac{dX_m}{dx}\frac{dX_n}{dx}$$

將n, m互換，等式依舊成立。

$$\lambda_m \int_0^L dx\ X_m X_n = \int_0^L dx \frac{dX_n}{dx}\frac{dX_m}{dx}$$

兩式相減，右邊抵消。

$$(\lambda_n - \lambda_m)\int_0^L dx\ X_m X_n = 0,\quad \int_0^L dx\ X_m X_n = 0$$

算子的本徵函數的確為正交歸一的一系列函數。

從之前的例子知道：若有正交歸一 Orthonormal 的一系列函數，任一函數很容易分解為此系列的線性組合，而且係數可以用內積計算出來$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{u}^{(1)} + c_2\boldsymbol{u}^{(2)}$，$\boldsymbol{u}^{(i)T}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}^{(i)}\cdot\boldsymbol{v} = c_i$。所以如果這是將起始條件$u_0(x)$分解為本徵函數$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$的線性組合成立：$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$，取函數$u_0$與本徵函數$X_n$的推廣內積就能得到分解的係數：

$$\sqrt{\frac{2}{L}}\int_0^L dx\, u_0(x)\, sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \frac{2}{L}\int_0^L dx\ \left[\sum_{m=1}^{\infty} A_m \cdot sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\right] sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$= \frac{2}{L}\sum_{m=1}^{\infty}\left[A_m \int_0^L dx\, sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right] = \sum_{m=1}^{\infty}[A_m\delta_{mn}] = A_n$$

$$A_n = \sqrt{\frac{2}{L}}\int_0^L dx\ \ u_0(x) sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

於是$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$就是傅立葉級數 Fourier Series。

以上的結果也可以直接由本徵函數正交歸一的特性直接導出：

$$\int_0^L dx\, u_0(x)\, X_n(x) = \frac{2}{L}\int_0^L dx\ \left[\sum_{m=1}^{\infty} A_m \cdot X_m(x)\right] sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\left[A_m \int_0^L dx\, X_m(x) X_n(x)\right] = \sum_{m=1}^{\infty}[A_m\delta_{mn}] = A_n$$

完備性

若是本徵函數的分解是正確的，我們可計算任一滿足邊界條件的函數的分解係數。但這樣的分解真的是正確的嗎？分解所得的級數真的與被分解的函數相等嗎？物理的直覺是：合理的起始條件下，波方程式應該都有解，因此這樣的分解一定是可行的。

數學上相等與否的判準一般是：這些係數組成的$X_n(x)$的線性組合，會趨近被分解的函數。具體說，兩者差距的平方和(積分)$N \to \infty$時，趨近於零。

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^L dx \left[u_0(x) - \sum_{n=1}^{N} A_n \cdot X_n(x) \right]^2 = 0$$

這稱為$X_n(x)$具有完備性 Completeness。在波方程式的例子中，起始條件的展開就是傅立葉級數的一部分，我們相信三角函數是 Complete 完備的，傅立葉級數可以趨近任一週期函數！我們將說明X_n的展開的確就是傅立葉級數，因此這一系列的X_n也是完備的。下學期再說明適當的算子的本徵函數也都是完備的。

傅立葉級數

數學家傅立葉發現一件非常驚人的事實：任一週期函數可以分解成一系列正弦函數與餘弦函數的級數和：

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \sin nx + b_n \cdot \cos nx]$$

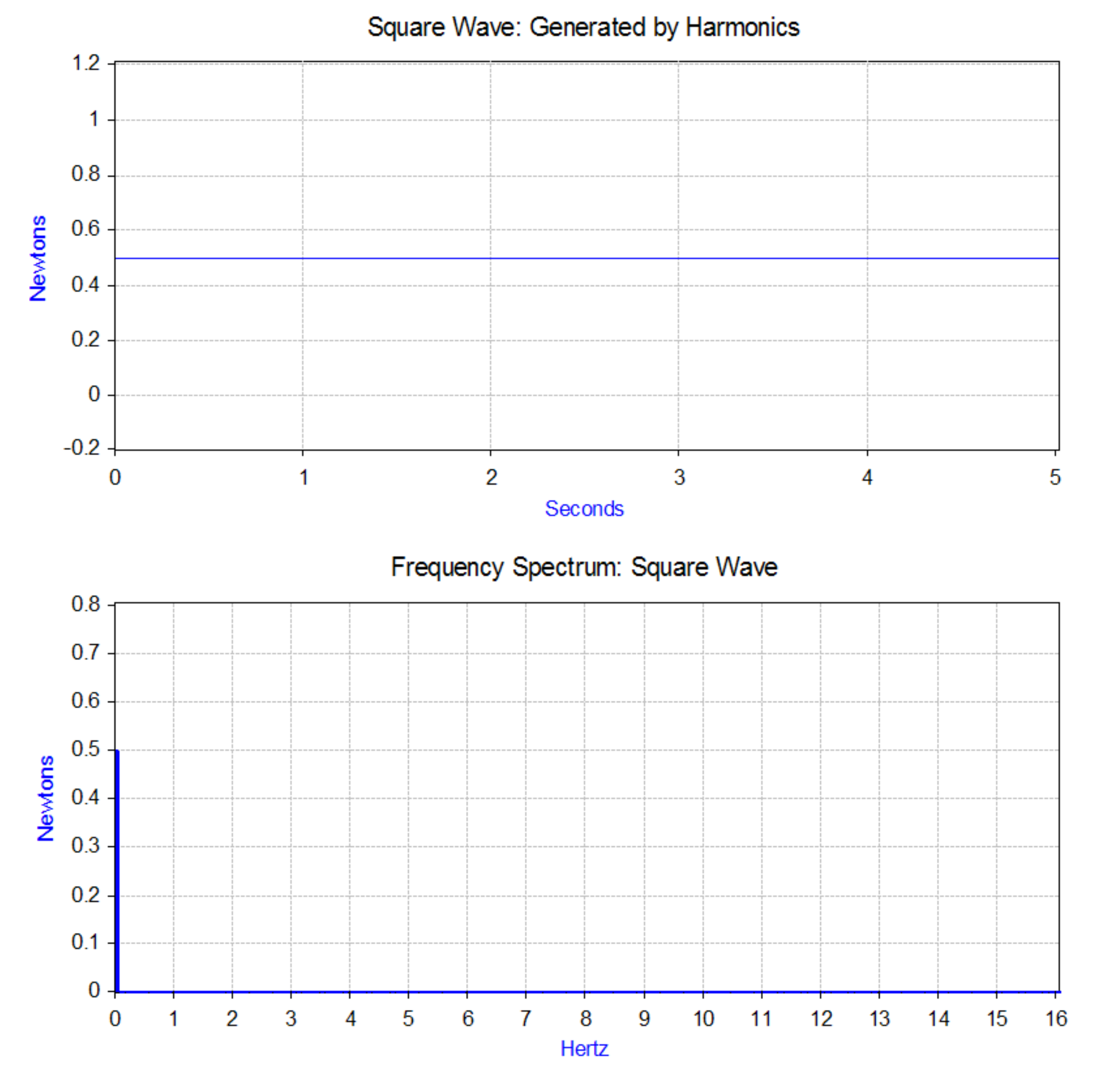
以上的函數$f(x)$週期是2π，定義於$-\pi < x < \pi$。週期若如絃段為$2L$的週期函數，上式可以改為：

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \sin \frac{n\pi}{L} x + b_n \cdot \cos \frac{n\pi}{L} x \right]$$

如果運用於時間的函數，例如訊號或聲音：任一週期為T的週期函數(訊號)可以分解為：

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos \omega_n t + b_n \cdot \sin \omega_n t]$$

各成分的頻率f_n是訊號函數頻率f的整數倍！$\omega_n = n\omega = n\frac{2\pi}{T}, T_n = \frac{T}{n}$。$a_n, b_n$即是各個成分的強度。研究三角函數就等於研究所有週期函數。



我們只要對$f(x)$成三角函數後積分即可得到係數。

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x)\cos nx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x)\sin nx$$

已可證明三角函數是完備的：

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} dx \left[f(x) - a_0 + \sum_{n=1}^{N}[a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx]\right]^2 = 0$$

首先三角函數形成正交可歸一的一系列函數：

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$$

若$m \neq n$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{m+n}\sin(m+n)x + \frac{1}{m+n}\sin(m-n)x\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

正弦函數是週期函數，上式為零。

若$m = n$，

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx[\cos(m+n)x + 1] = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx = \pi$$

綜合兩式可以表示為：

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos mx \cos nx = \pi\delta_{mn}$$

同理：

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \sin mx \sin nx = \pi\delta_{mn}$$

而正弦函數與餘弦函數一律正交：

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos mx \sin nx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{m+n}\cos(m+n)x + \frac{1}{m+n}\cos(m-n)x\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0,\ \ m \neq n$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{m+n}\cos(2m)x\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad m = n$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos mx \sin nx = 0$$

仿照行向量，將被分解函數對三角函數作推廣內積：

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x)\cos nx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, \left[a_0 + \sum_{m=1}^{\infty}[a_m \cdot \cos mx + b_m \cdot \sin mx]\right]\cos nx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, \left[a_0 + \sum_{m=1}^{\infty}[a_m \cdot \cos mx + b_n \cdot \sin mx]\right]\cos nx = \sum_{m=1}^{\infty}[a_m \delta_{mn}] = a_n$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x)\sin nx = b_n$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x) = a_0$$