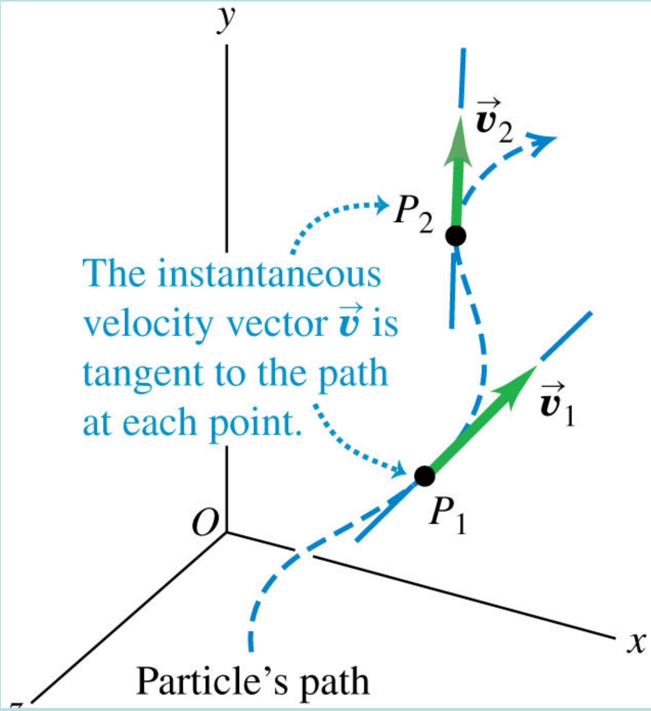


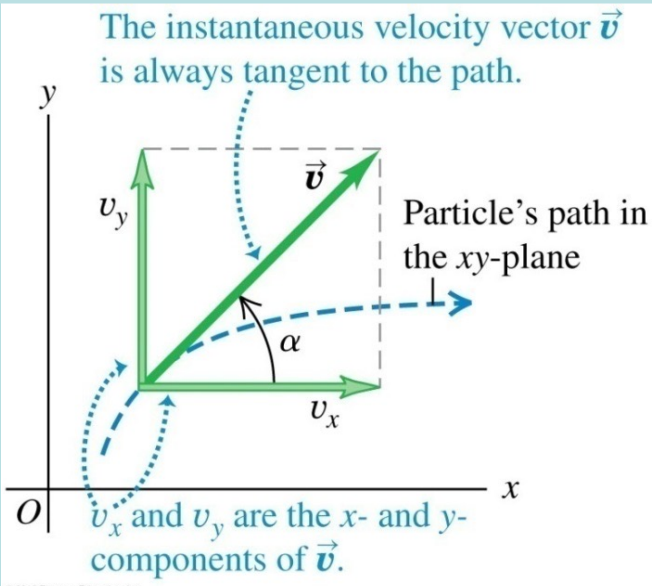
瞬時速度向量Vector，就是位置向量的瞬時變化率。

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t} \right) = \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} \right)$$

$$= \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = (v_x, v_y, v_z)$$

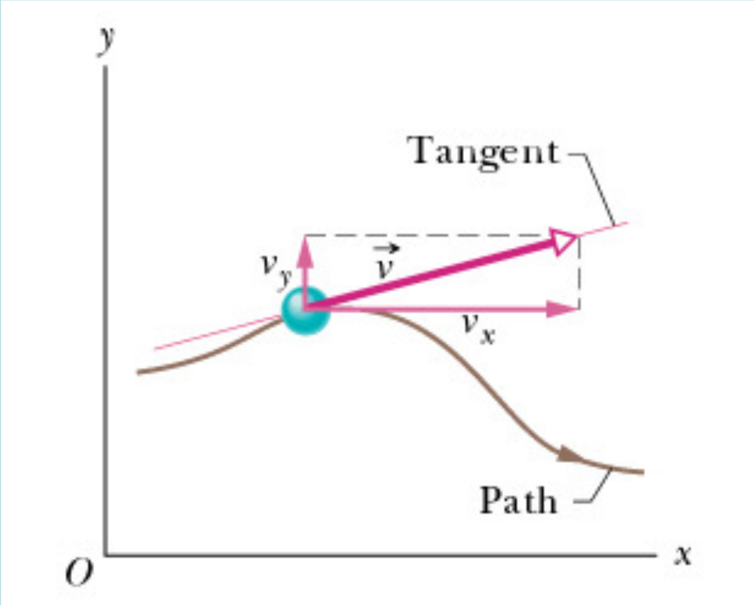
$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt}$$



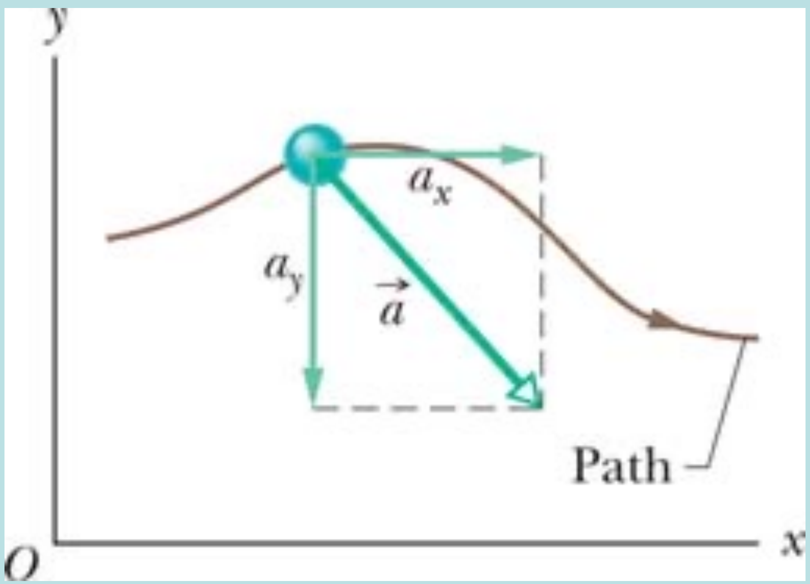
如此定義的速度向量：$\vec{v}$

方向$\hat{v}$是沿著運動的切線方向，

大小v是移動的速率。



$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt}$$

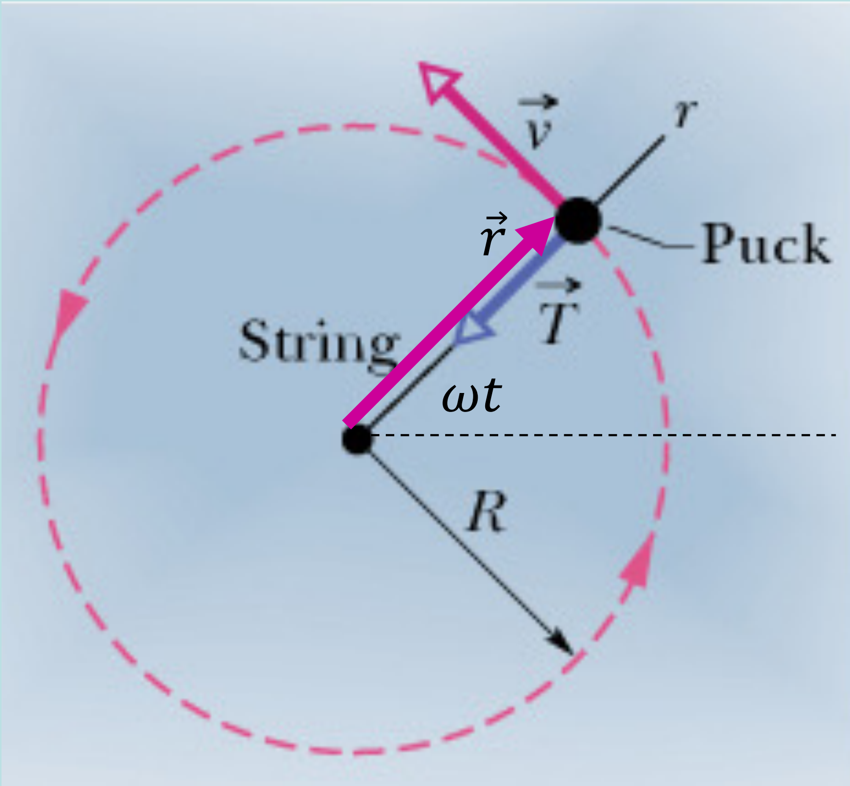


$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} \qquad a_z = \frac{d^2z}{dt^2}$$

3.4 • **CALC** The position of a squirrel running in a park is given by $\vec{r} = [(0.280\ \text{m/s})t + (0.0360\ \text{m/s}^2)t^2]\hat{\imath} + (0.0190\ \text{m/s}^3)t^3\hat{\jmath}$. (a) What are $v_x(t)$ and $v_y(t)$, the x- and y-components of the velocity of the squirrel, as functions of time? (b) At $t = 5.00$ s, how far is the squirrel from its initial position? (c) At $t = 5.00$ s, what are the magnitude and direction of the squirrel's velocity?

3.44 •• **CALC** The position of a dragonfly that is flying parallel to the ground is given as a function of time by $\vec{r} = [2.90\ \text{m} + (0.0900\ \text{m/s}^2)t^2]\hat{\imath} - (0.0150\ \text{m/s}^3)t^3\hat{\jmath}$. (a) At what value of t does the velocity vector of the insect make an angle of 30.0° clockwise from the +x-axis? (b) At the time calculated in part (a), what are the magnitude and direction of the acceleration vector of the insect?

以等速圓周運動的位置向量$\vec{r}$的分量，直接計算向心加速度向量$\vec{a}$：



等速圓周運動夾角是等速增加！

設ω為角度增加的速度，稱角速度。

$$\theta = \omega t$$

$$\vec{r} = (r\cos\omega t\,, r\sin\omega t) = r\cdot\hat{r}$$

$$\hat{r} = (\cos\omega t\,, \sin\omega t)$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = r\frac{d}{dt}(\cos\omega t\,, \sin\omega t)$$

$$= r\left(\frac{d}{dt}\cos\omega t\,, \frac{d}{dt}\sin\omega t\right)$$

需要三角函數的微分！

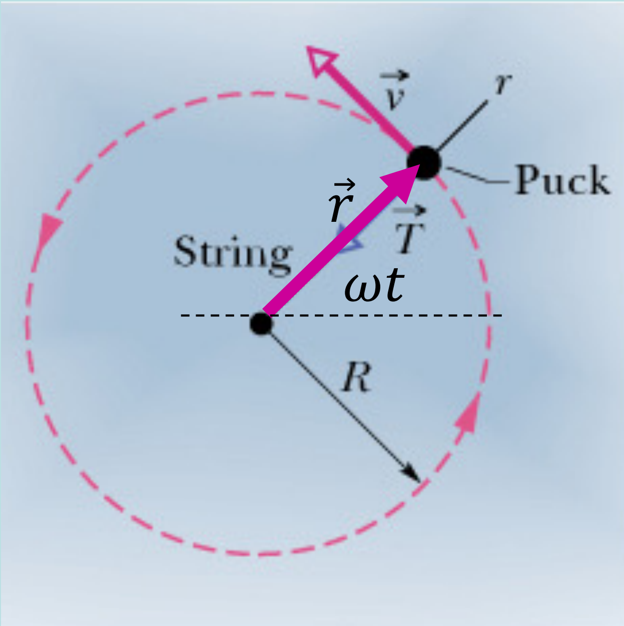
正弦函數的微分是餘弦函數

$$\frac{d}{d\theta}(\sin\theta) = \cos\theta$$

餘弦函數的微分是負的正弦函數

$$\frac{d}{d\theta}(\cos\theta) = -\sin\theta$$

等速圓周運動的加速度



$$\vec{r} = (r\cos\omega t\,, r\sin\omega t) = r\cdot\hat{r}$$

$$\hat{r} = (\cos\omega t\,, \sin\omega t)$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

$\theta = \omega t$ 複合函數的連鎖率

$$= r\frac{d}{dt}(\cos\omega t) = r\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\cos\theta}{\Delta t} = r\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\cos\theta}{\Delta\theta}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$= r\left(\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta\cos\theta}{\Delta\theta}\right)\left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta(\omega t)}{\Delta t}\right) = r\frac{d\cos\theta}{d\theta}\cdot\frac{d(\omega t)}{dt}$$

$$= -r\omega\sin\omega t$$

ω

$$v_y = \frac{dy}{dt} = r\frac{d}{dt}(\sin\omega t) = r\omega\cos\omega t$$

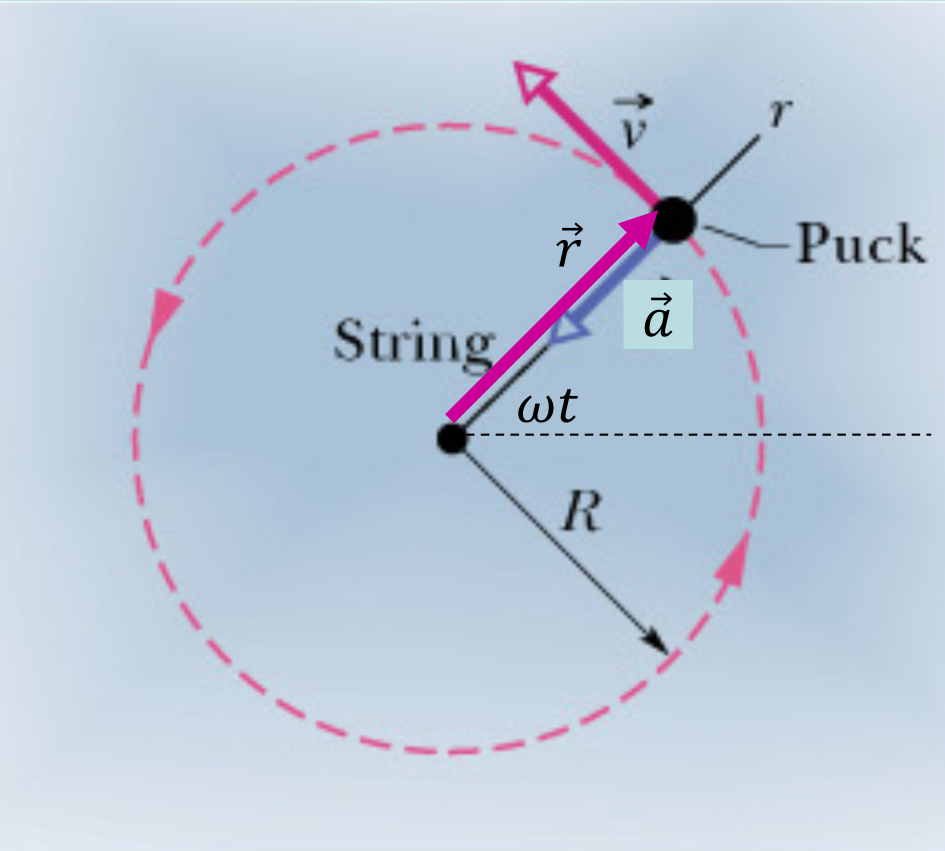
$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = (-r\omega\sin\omega t\,, r\omega\cos\omega t)$$

$$= r\omega(-\sin\omega t\,, \cos\omega t) = r\omega\hat{v}$$

$$v = r\omega$$

$$\hat{r}\cdot\hat{v} = 0$$

等速圓周運動的加速度



$$\vec{v} = (-r\omega \sin \omega t\,, r\omega \cos \omega t)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(-r\omega \frac{d}{dt}(\sin \omega t), r\omega \frac{d}{dt}\cos \omega t\right)$$

$$= \left(-r\omega \frac{d(\omega t)}{dt} \cdot \frac{d \sin \theta}{d\theta}\,, r\omega \frac{d(\omega t)}{dt} \cdot \frac{d \cos \theta}{d\theta}\right)$$

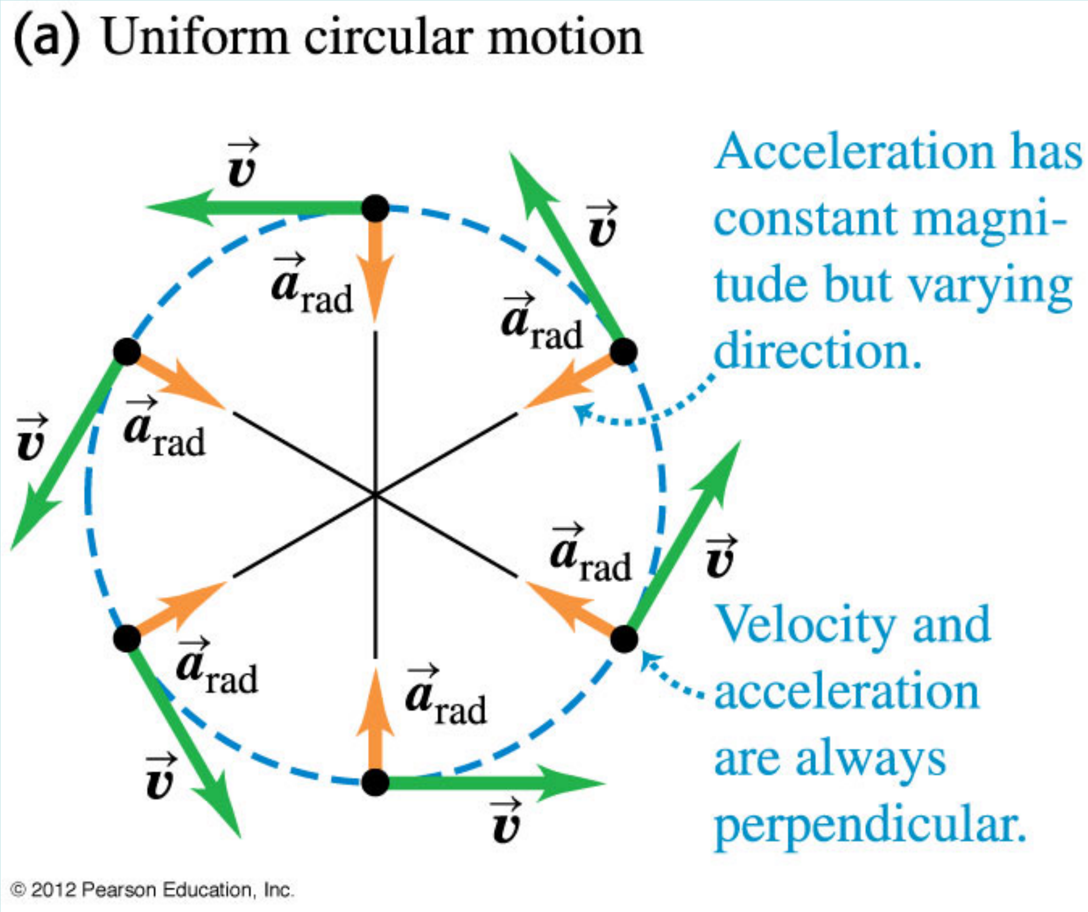
$$= (-r\omega^2 \cos \omega t\,, -r\omega^2 \sin \omega t)$$

$$\vec{a} = -r\omega^2 (\cos \omega t\,, \sin \omega t) = -r\omega^2 \hat{r}$$

$$\hat{r} = (\cos \omega t\,, \sin \omega t)$$

向心加速度指向圓心

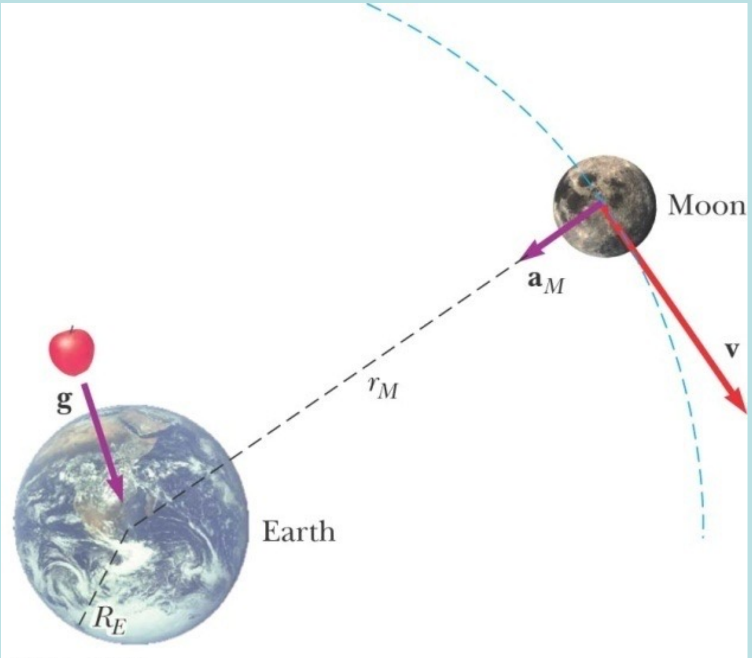
向心加速度大小： $a = r\omega^2 = \dfrac{v^2}{r}$



$$a = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}$$

月球的運動與蘋果的運動都是加速度運動！

兩者的加速度都同樣指向地心！



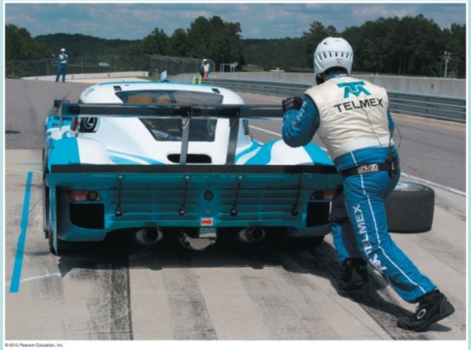
合理猜測：月球與蘋果同樣都在地球影響下運動！地球影響是運動的因！

同樣的因，必然造成同樣的果！

而月球與蘋果的運動軌跡相同之特質就是加速度！因此加速度是果！

因　　　　　　　　果

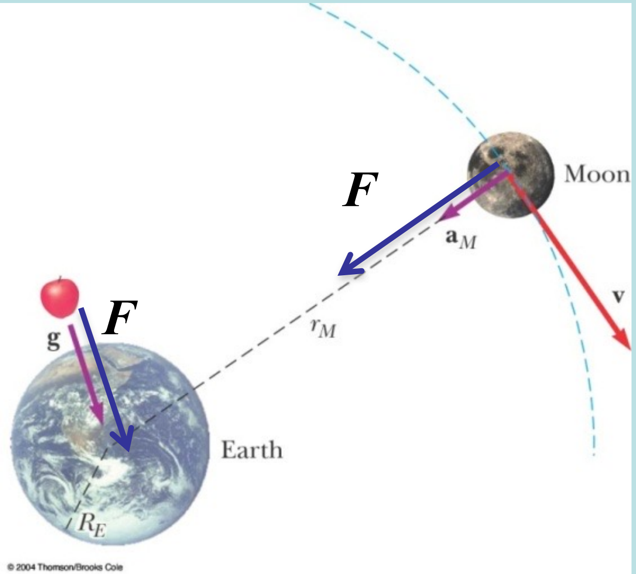
地球影響 ⟷ 蘋果加速度



$F \propto a$　將一物體對另一物體的影響，稱為力 Force。

經驗顯示：質量越大越難推動！需要越大的力。

$F = ma$



加速度是指向地心，因此力與加速度都有方向性。

$\vec{F} = m\vec{a}$

牛頓運動定律

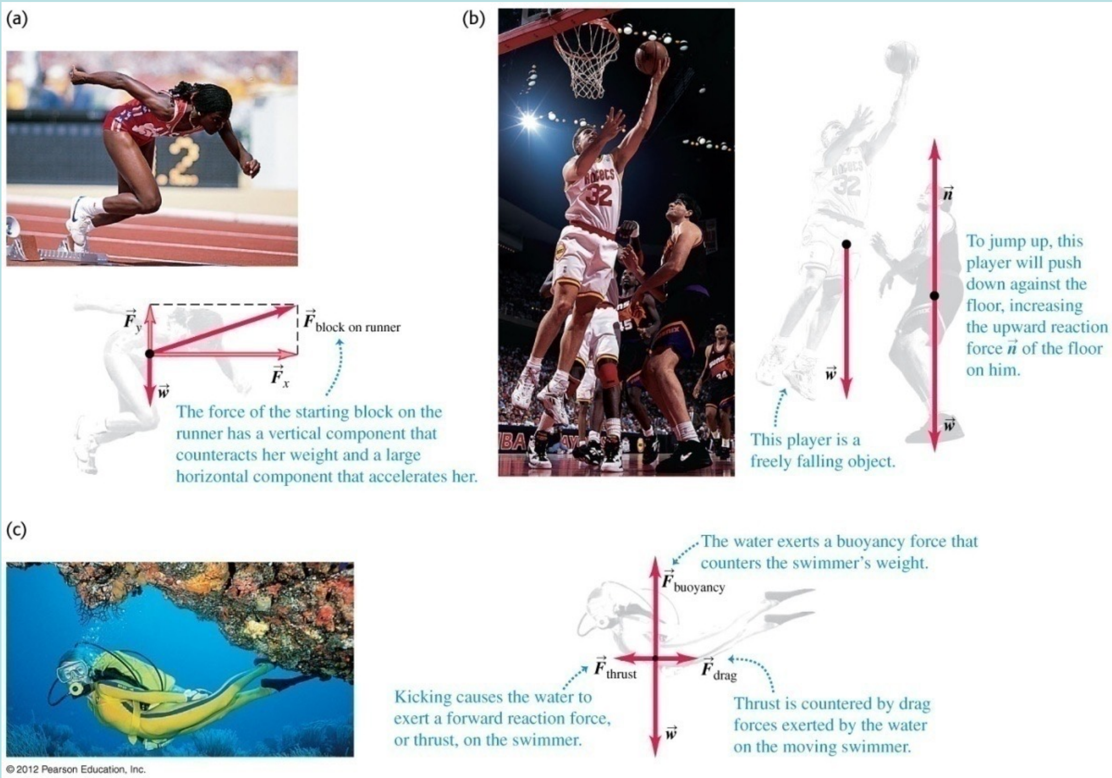
解題訣竅：

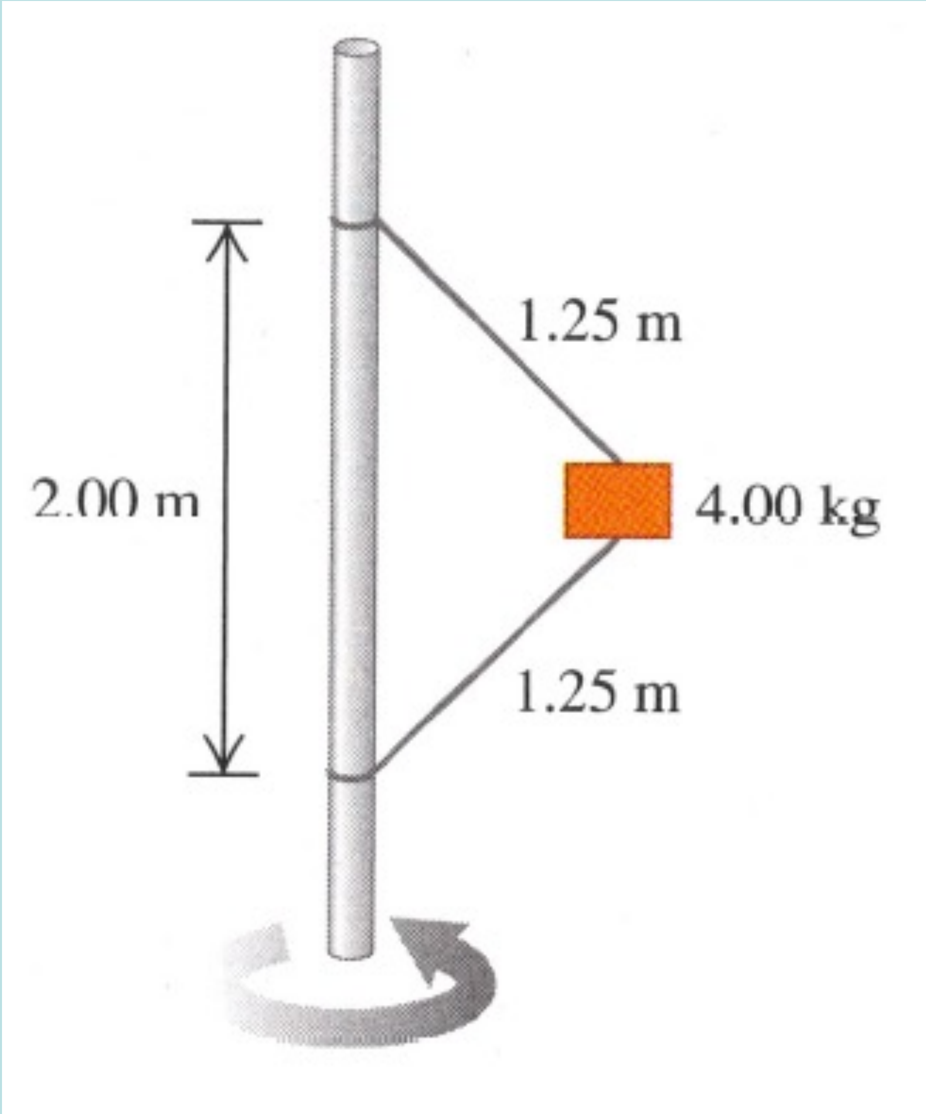
將未知的力與加速度以符號代表。

要求每一個有質量的物體，每一個方向都滿足一個牛頓第二定律！

無質量或質量可以忽略者，要求其所受合力必須為零。

聯立方程式，解出未知量。

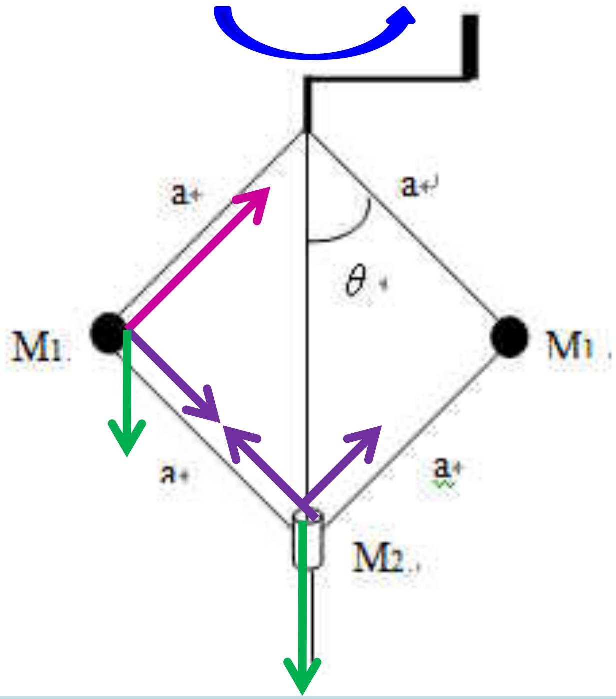




計算旋轉速度！

考慮一轉動裝置(如圖)，裝置啟動時對曲柄施力轉動軸承，再透過支架帶動整個裝置繞 Z 軸旋轉。在裝置內，質點 M_2 只能沿轉動軸上下運動，而質點 M_1 及長度 a 固定的支架，可在垂直平面上移動。假設 $M_2=2M_1$，而支架、曲柄及軸承很輕，質量都可以忽略，同時亦忽略所有軸承的摩擦力。

當旋轉愈來愈快，支架張開的角度θ會愈來愈大，當θ=45°時，我們讓轉動速度維持不再增加，使θ維持在 45°，請問此時裝置中 M_1 的旋轉速度為何。



考慮兩個質點的受力，請注意因支架可在垂直平面移動，支架對質點的施力只能沿支架的方向。M_2 沒有加速度，故其總受力必需為零，在垂直方向總力為零：

$$2\frac{1}{\sqrt{2}}F_1 - M_2 g = 0$$

對質點 M_1 的受力作分析，在垂直方向 M_1 沒有加速度：

$$M_1 g + \frac{1}{\sqrt{2}}F_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}F_2 = 0$$

作用於質點 M_1 水平方向總力必須等於 M_1 的向心加速度乘上 M_1，

$$\frac{1}{\sqrt{2}}F_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}F_2 = M_1\frac{a}{\sqrt{2}}\omega^2$$

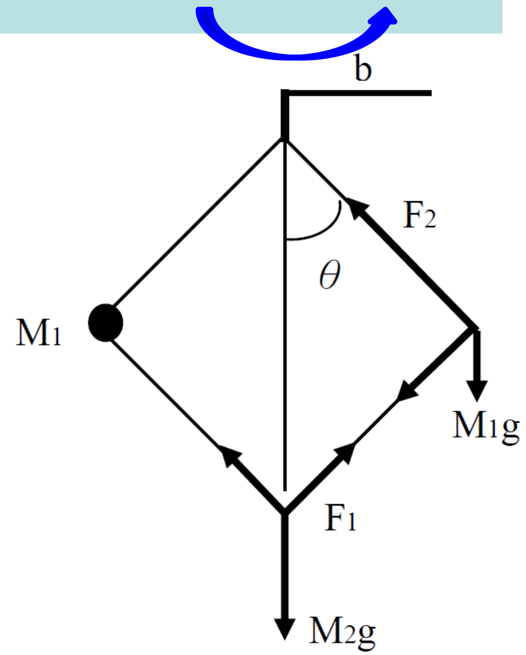
三個未知數正好有三個方程式，因此可以全部解出：

$$F_1 = \sqrt{2}M_1 g$$

$$F_2 = 2\sqrt{2}M_1 g$$

$$M_1\frac{a}{\sqrt{2}}\omega^2 = 3M_1 g$$

$$\omega^2 = 3\sqrt{2}\frac{g}{a}$$



支架張力與重力的合力等於質量乘向心加速度！

合力提供了質量作等速圓周運動所需的向心力！

3. 有A,B兩個方塊，方塊A質量為M_A（尚未知），方塊B質量為$M_B = 1.0\text{kg}$。O點固定於垂直的z軸上，而方塊A以一支架連接於O點，方塊B又以一同樣支架連接於方塊A（如圖所示）。支架與方塊及O點的連接無摩擦，所以支架可以自由改變方向，但兩支架的長度 l（尚未知）相等且保持固定，質量可以忽略。使A,B兩方塊及支架以相同角速度繞 z 軸旋轉，週期為0.5π秒，即角速度$\omega = 4.0\ \text{s}^{-1}$。旋轉時O,A,B三點及支架一直保持在通過$z$軸的鉛直平面上。此時觀察到OA間支架與垂直線的夾角為$\theta = 30°$，AB間支架與垂直線的夾角為$\phi = 45°$。向心加速度公式為：$a = r\omega^2$。

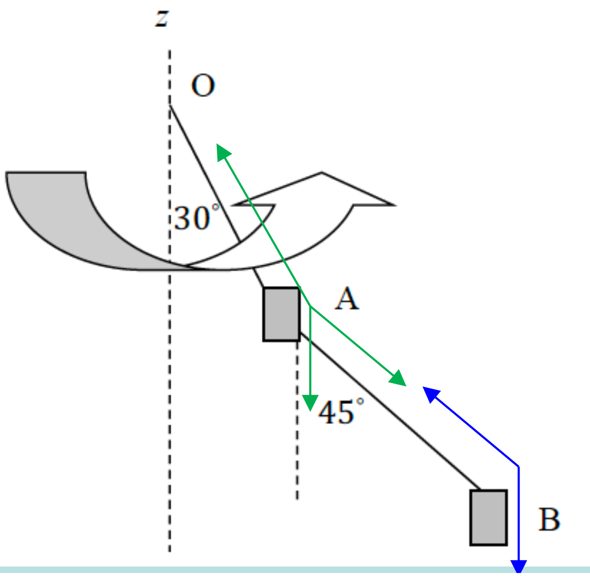
A. 分析方塊B的受力，求支架AB對方塊B的張力T是多少N。(8)

B. 由方塊B向心加速度，計算支架的長度l是多少m。

提示：別忘了支架OA對旋轉半徑的貢獻。 (7)

C. 設OA支架對A的施力為S，分析方塊A的受力，求M_A是多少kg。(10)

$\sqrt{3}\sim1.7, \sqrt{2}\sim1.4$。



解答：

A. 拉力T在垂直方向的投影必須正好抵消B所受的重力：$T\frac{\sqrt{2}}{2}=M_B g$，$T=\sqrt{2}M_B g=$ 13.9 N。

B. 重力無水平分量，因此拉力T在水平方向的分量，必須等於向心加速度乘上質量，

$$T\frac{\sqrt{2}}{2}=M_B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\right)l\omega^2=19.36l$$

$$l=0.5\text{ m}$$

A. 設OA支架對A的施力為S，A垂直方向的總受力為零：

$$S\frac{\sqrt{3}}{2}=M_A g+T\frac{\sqrt{2}}{2}=M_A g+M_B g$$

水平方向的總受力必須正好等於向心加速度乘上質量：

$$S\frac{1}{2}-T\frac{\sqrt{2}}{2}=M_A\frac{l}{2}\omega^2$$

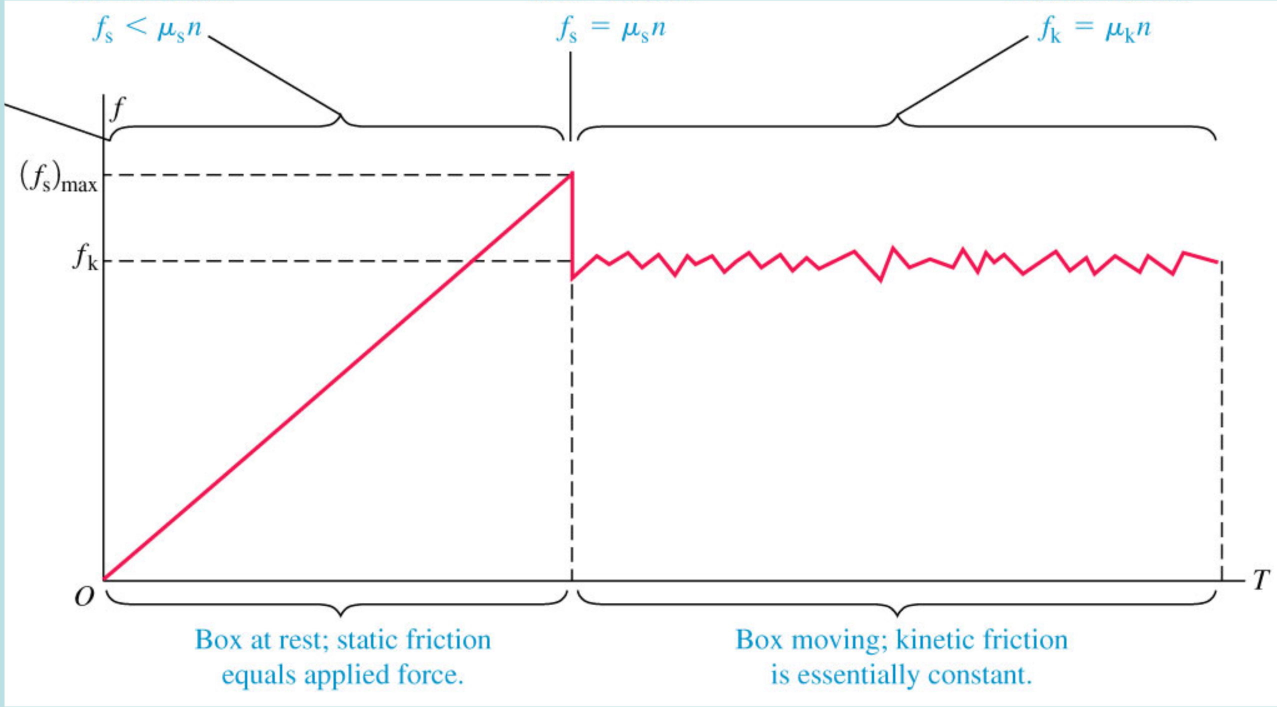
$$S\frac{1}{2}=M_A\frac{l}{2}\omega^2+M_B g$$

由此二式削去S可得：

$$M_A g+M_B g=M_A\frac{l\sqrt{3}}{2}\omega^2+\sqrt{3}M_B g$$

$$9.8M_A+9.8=6.9M_A+17.0$$

$$M_A=2.5\text{ kg}$$



靜摩擦力大小由物體維持靜止這個條件來決定，

但最大值經測量發現一般都與垂直的正向力成正比。

$f_s < n\mu_s$

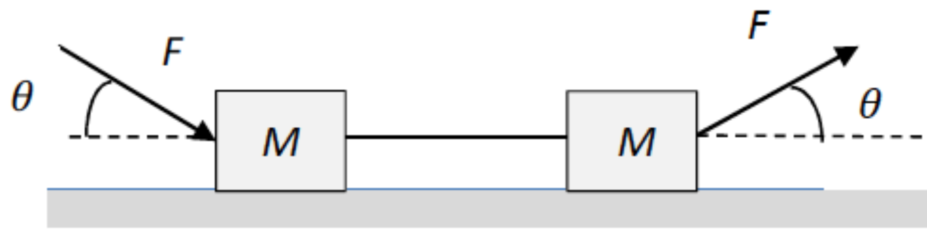
μ_s:最大靜摩擦係數

同時，動摩擦力一般來說是一定值，與垂直的正向力成正比：

$f_k = n\mu_k$

μ_k:動摩擦係數

在一個桌面上有兩個質量相等的方塊，中間以很輕的繩連接，繩的質量可以忽略。方塊的質量 M 為 3.0 kg，如圖所示。對下圖中左方方塊施以一個斜向下方的推力，此力的方向與水平線的夾角為 $\theta = 30°$，同時對右方方塊亦施以一個斜向上方的拉力，此力的方向與水平線的夾角亦為 $\theta = 30°$，使整個系統在桌面上開始向右運動，兩個力的大小都為 10N。已知在運動時繩是張緊的，因此兩個方塊是一起運動的。兩個方塊與地面之間的動摩擦係數都是 $\mu_k \approx 0.25$。問連接兩方塊的繩上的張力大小是多少 N?(20)



解答：設繩的張力大小為 T。左方方塊滿足的第二運動定律：

$F \times \cos 30° - (F \times \sin 30° + Mg) \times \mu_k + T = Ma$。

右方方塊滿足的第二運動定律：

$$F \times \cos 30° - (-F \times \sin 30° + Mg) \times \mu_k - T = Ma$$

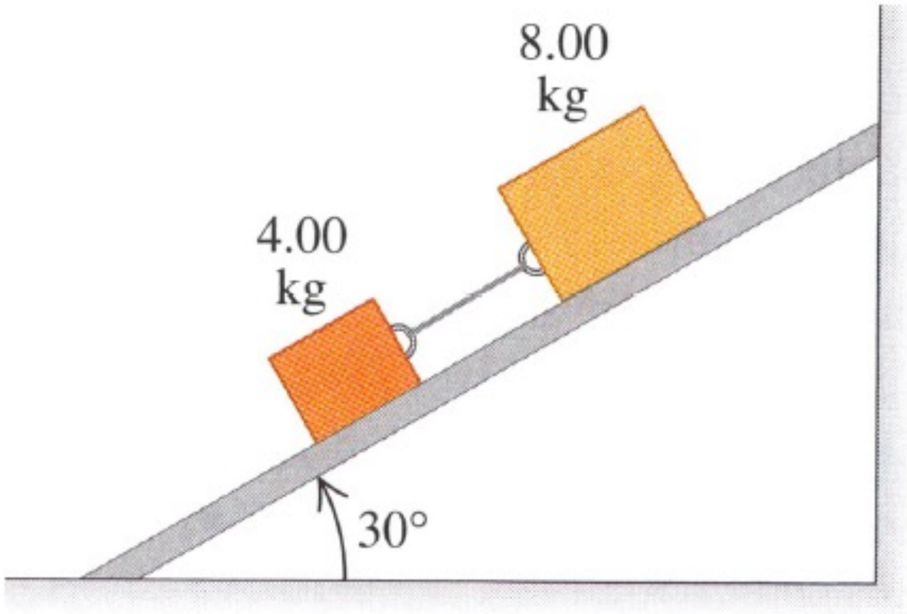
兩式相減即消去未知的加速度：

$$(2 \times F \times \sin 30°) \times \mu_k = 2T$$

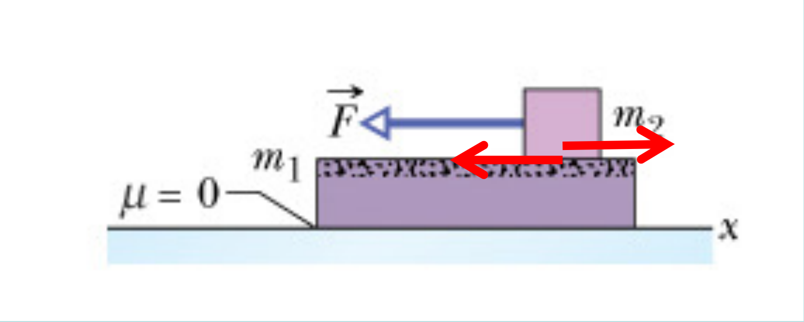
$T = F \times \sin 30° \times \mu_k = 1.25\text{N}$。

behavior of the block?

5.98 ••• Two blocks with masses 4.00 kg and 8.00 kg are connected by a string and slide down a 30.0° inclined plane (Fig. P5.98). The coefficient of kinetic friction between the



4.00-kg block and the plane is 0.25; that between the 8.00-kg block and the plane is 0.35. (a) Calculate the acceleration of each block. (b) Calculate the tension in the string. (c) What happens if the positions of the blocks are reversed, so the 4.00-kg block is above the 8.00-kg block?

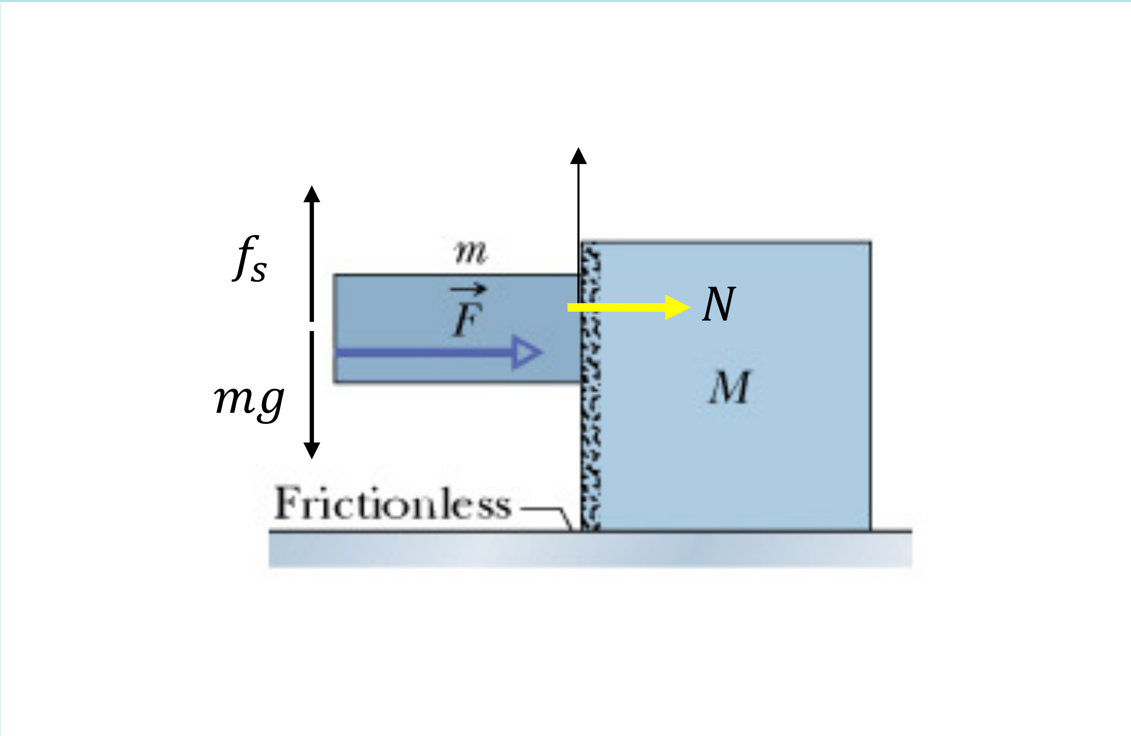


上方小方塊在下方方塊上滑行

$$m_1 a_1 = m_2 g \cdot \mu_k$$

$$m_2 a_2 = F - m_2 g \cdot \mu_k$$

施力$\vec{F}$使方塊組向右移動，在何條件下，左方的方塊會維持不向下滑動？



$$a = \frac{F}{M+m}$$

$$N = Ma = \frac{FM}{M+m}$$

左方的方塊會維持不向下滑動

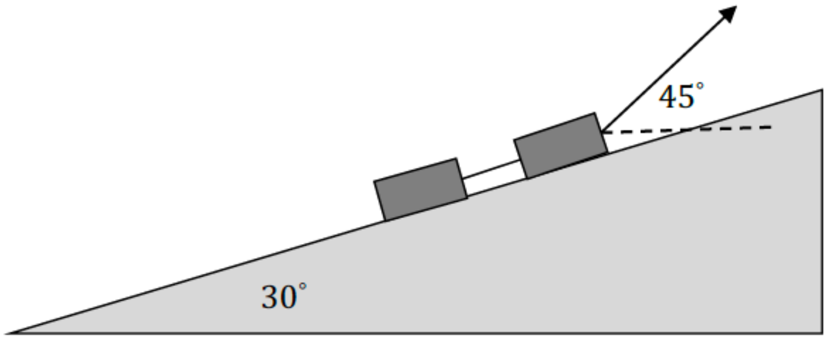
$$f_s = mg$$

最大靜摩擦力：$N\mu_s$

不滑動條件 $f_s < N\mu_s$

$$mg < \frac{FM}{M+m}\mu_s$$

3. 有一固定斜面，斜角為30°，在斜面上有兩個相同的方塊，質量各為1.0kg，中間以一無質量的弦連接，對上方的方塊施以一向上的力，該力方向與水平方向間的夾角為60°，大小為30N。方塊與斜面間的動摩擦係數為$\mu_k = 0.3$。已知方塊組會沿斜面向上移動，且方塊不會翻滾或旋轉，計算方塊間弦上的張力，以及方塊的加速度。$\sin 15° \sim 0.26, \cos 15° \sim 0.97$。



解答：以沿斜面方向及垂直斜面方向的分量來討論，垂直斜面方向方塊都沒有運動，因此合力為零。下方方塊的正向力為$mg\cos 30° = 8.49\text{N}$，動摩擦力為$mg\cos 30°\,\mu_k = 2.55$，上方方塊的正向力為$mg\cos 30° - F\sin 15° = 0.1\text{N}$，動摩擦力為$(mg\cos 30° - F\sin 15°)\mu_k = 0.03$。下方方塊沿斜面方向：

$$T - mg\sin 30° - mg\cos 30°\,\mu_k = ma\text{，}$$

$$T - 4.9 - 2.55 = ma$$

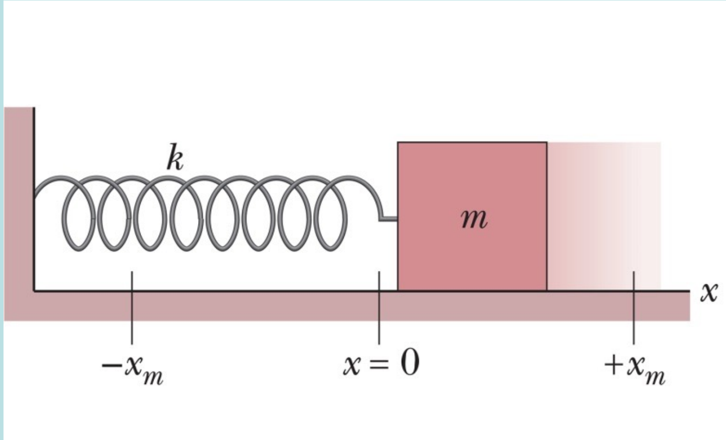
上方方塊沿斜面方向：

$$F\cos 15° - mg\sin 30° - (mg\cos 30° - F\sin 15°)\mu_k - T = ma$$

$$29.0 - 4.9 - 0.03 - T = ma$$

$T = 15.8\text{N}$，$a = 8.3\text{m/s}^2$

簡諧運動的運動方程式

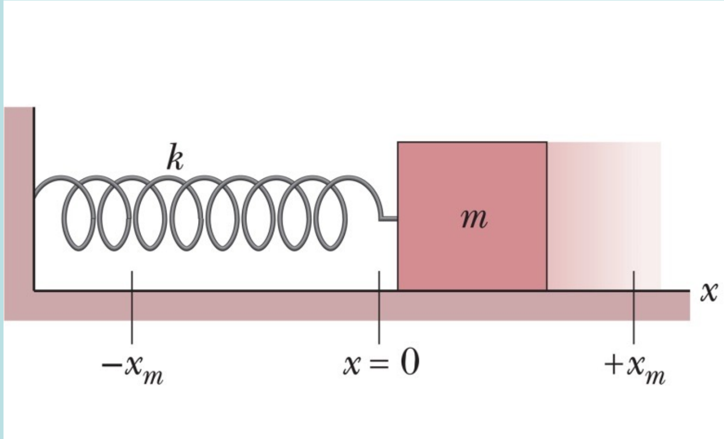


$$F = -kx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x = -\omega^2 x$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

一個簡諧運動，只由一個特徵常數 ω（角頻率）決定！



簡諧運動的解

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

正弦函數與餘弦函數的兩次微分都和負的自己成正比！

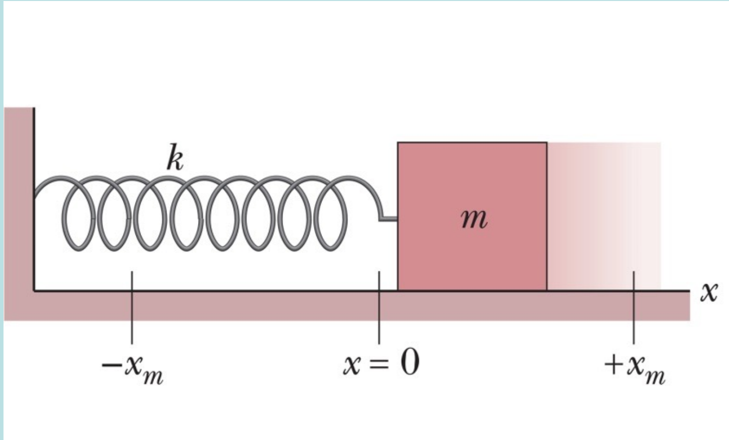
因此很容易就找到兩個解 $x_1 = \sin \omega t$ $x_2 = \cos \omega t$

那麼任一線性組合 $x = a \cos \omega t + b \sin \omega t$ 也是解！

我們得到無限多個解！

微分方程式的解需要讓自己挪出足夠的空間，才能滿足起始條件。

$$x = a\cos\omega t + b\sin\omega t$$



$$v = -\omega a\sin\omega t + \omega b\cos\omega t$$

a, b由起始條件決定

$$x(0) = a = x_0$$

$$v(0) = \omega b = v_0$$

$$b = \frac{v_0}{\omega}$$

$$x = x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$$

這個函數同時滿足運動方程式以及兩個起始條件，因此是唯一的解！

不用再找了！

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

這個式子較適合運動方程式求解。

較容易明瞭其物理意義的表示式是：

$$x = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

這兩個數學式是一樣的，因為：

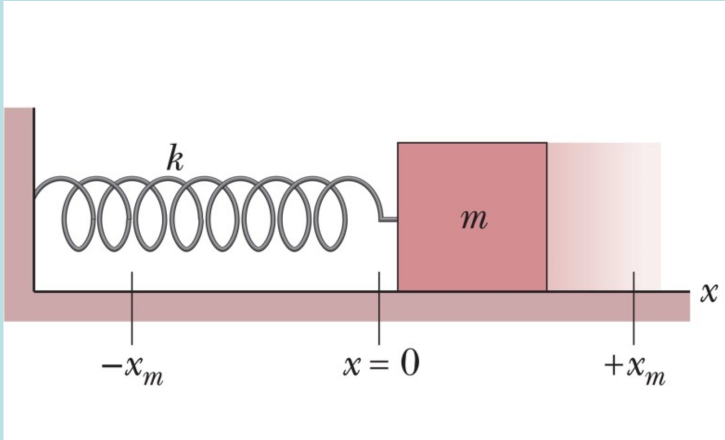
$$x = x_m \cos(\omega t + \phi) = x_m \cos \phi \cos \omega t - x_m \sin \phi \sin \omega t$$

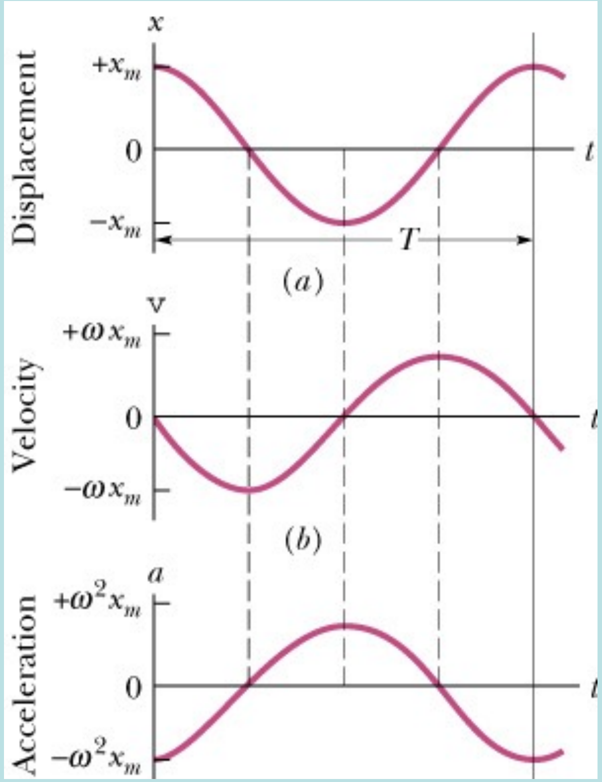
兩組常數之間的關係：

$$x_0 = x_m \cos \phi \,, \frac{v_0}{\omega} = -x_m \sin \phi$$

$$x_m = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$

$$\tan \phi = -\frac{v_0}{\omega x_0}$$





$$x = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi)$$

x_m 及 ϕ 兩個常數是由起始條件決定：

對個別的運動，所取的值不同。

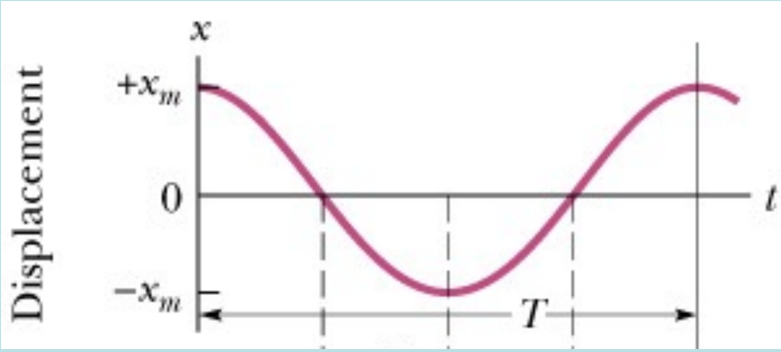
$$x_m = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$

ω是由簡諧振盪子的性質決定：

同一個彈簧組，只有一個值。

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$x = x_m \cos(\omega t + \phi)$ 三角函數是一個週期函數。 ω 決定了振盪的週期 T。



$x(t) = x(t + T)$ $\rightarrow \cos(\omega t + \phi) = \cos(\omega t + \omega T + \phi)$

三角函數一個週期後，角度增加2π。 $\omega T = 2\pi$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ω稱為角頻率 Angular Frequency。

簡諧運動的週期 T 等於

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

頻率Frequency: $f = 1/T$ 每秒進行了幾個周期。單位 s^{-1} = Hz。

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

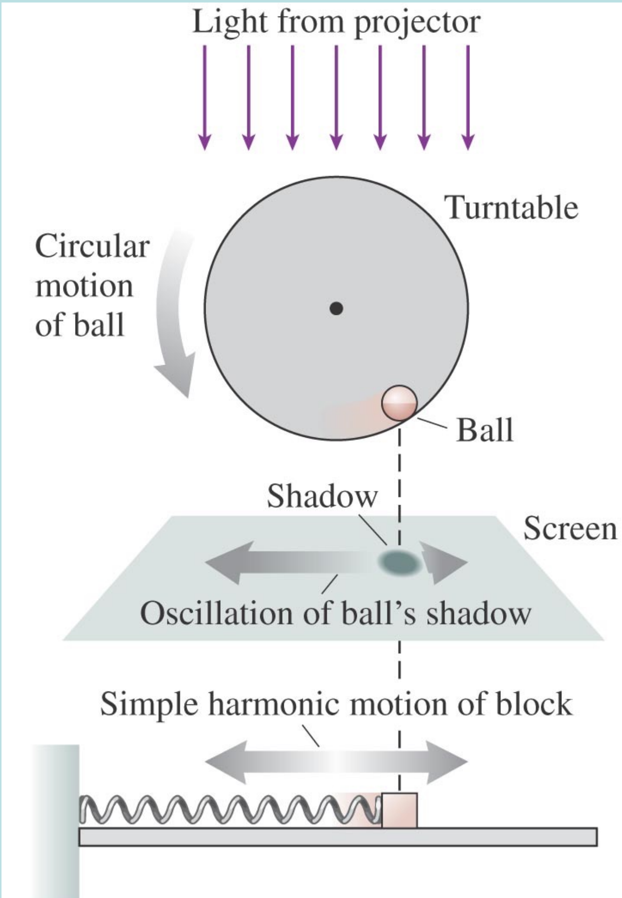
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

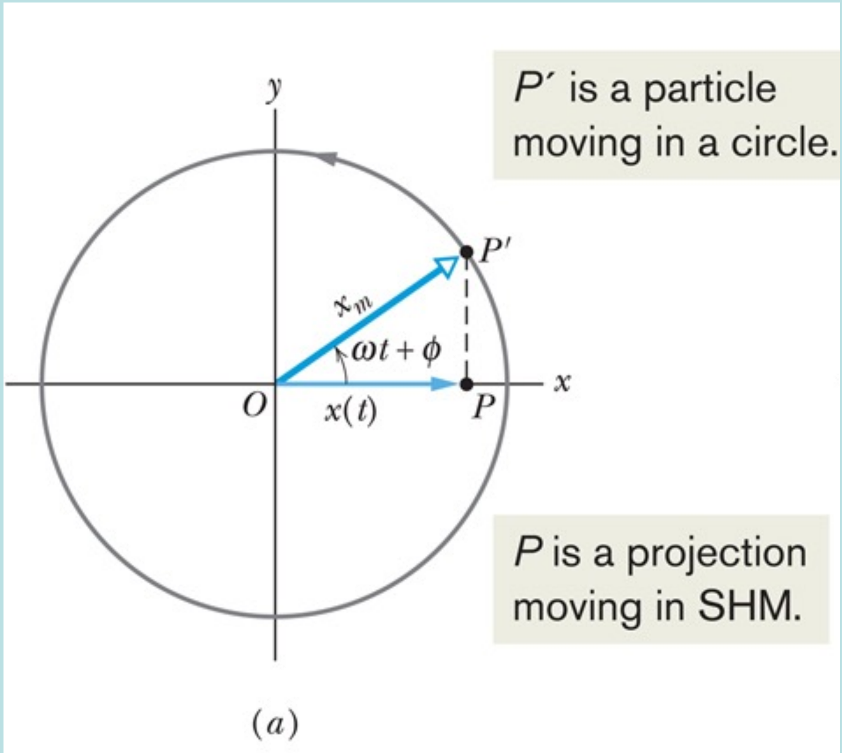
$$x = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

正好是一個半徑為x_m的等速圓周運動的水平分量。

此等速圓周運動的速度與加速度的水平分量也好與簡諧運動相等。

一個等速圓周運動位置的水平投影就等於一個簡諧運動。





假想圓是一個很好的工具，但不是真的有一個圓！

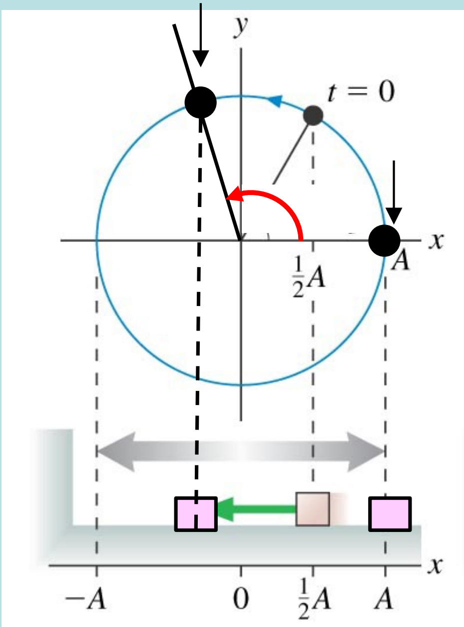
14.66 ••• An object is undergoing SHM with period 0.300 s and amplitude 6.00 cm. At $t = 0$ the object is instantaneously at rest at $x = 6.00$ cm. Calculate the time it takes the object to go from $x = 6.00$ cm to $x = -1.50$ cm.

SET UP: $x = A$ at $t = 0$, so $\phi = 0$. $A = 6.00$ cm. $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.300\text{ s}} = 20.9$ rad/s, so

$x(t) = (6.00\text{ cm})\cos)([20.9\text{ rad/s}]t)$.

EXECUTE: $t = 0$ at $x = 6.00$ cm. $x = -1.50$ cm when $-1.50\text{ cm} = (6.00\text{ cm})\cos((20.9\text{ rad/s})t)$.

$$t = \left(\frac{1}{20.9\text{ rad/s}}\right)\cos^{-1}\left(-\frac{1.5}{6.0}\right) = 0.0872\text{ s}.$$ It takes 0.0872 s.



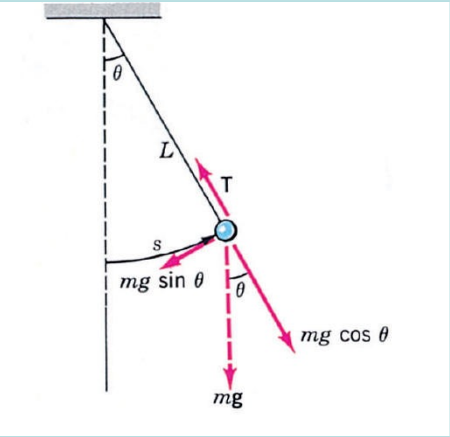
相角差等於：$\Delta\phi = \frac{\pi}{2} + \cos^{-1}\frac{1.5}{6.0}$

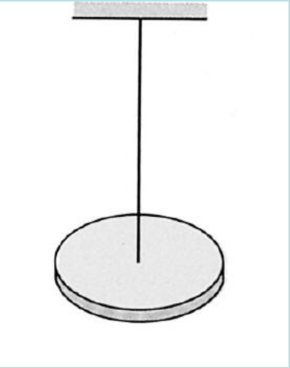
or $\cos^{-1}\left(-\frac{1.5}{6.0}\right)$

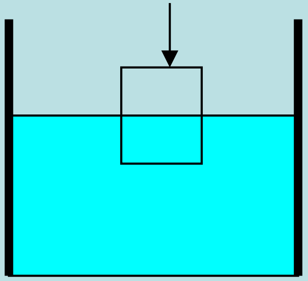
需要時間：$\frac{\Delta\phi}{\omega}$

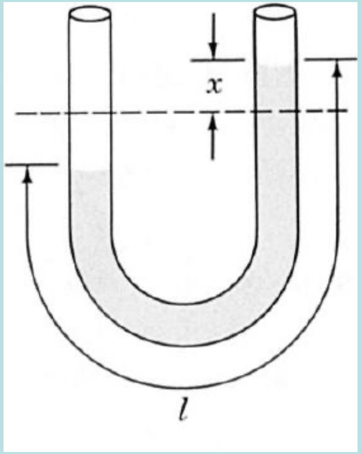
一個粒子在平衡點附近的小規模運動都是簡諧運動！

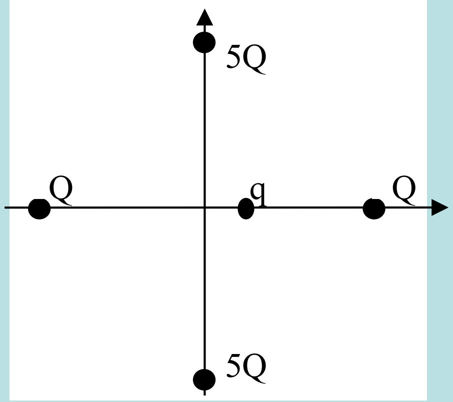
對彈簧的討論結果可以適用所有在平衡點附近的小規模運動。

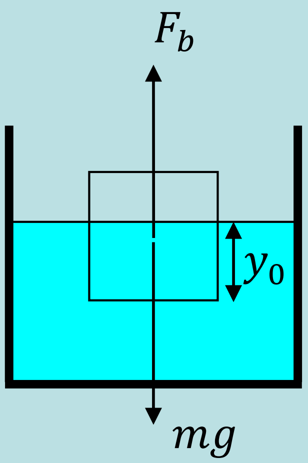


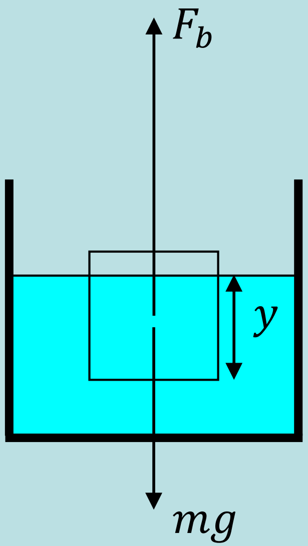












$$\rho A y_0 g = mg$$

$$F = -\rho A y g + mg = -\rho A g(y - y_0)$$

$$F = -\rho A g \cdot \Delta y = -k \cdot \Delta y$$

$$k = \rho A g$$

力與距平衡點的位移成正比，即簡諧運動！

對彈簧的討論結果就可以直接適用。

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\rho A g}}$$

$$y = y_0 + y_m \cos\left(\sqrt{\frac{\rho A g}{m}}\, t\right)$$