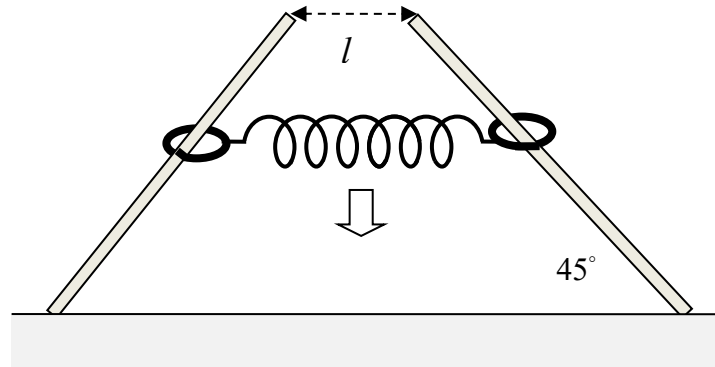


習題四

1. 考慮如圖之兩根不變型鋼條，固定於桌面之上，與水平的夾角固定為 45° ，兩鋼條在同一鉛直平面上。在兩鋼條上各套一個相同鐵環，兩鐵環質量和為 m 。兩鐵環中間繫以一條水平彈簧（彈力常數為 k ，質量可以忽略），兩鋼條頂端處的距離正好是彈簧的自然長度 l 。兩鐵環由鋼條的頂端處，自靜止狀態放手，使鐵環下滑。假設鐵環與鋼條間的摩擦可以忽略。鐵環下滑後，會在某處向上反彈，問反彈處距離頂點的垂直高度差是多少？(10)答案可以 m, k, g 表示。(20)

提示：下滑的垂直高度差恰為彈簧的伸長量的一半。



解答：因為左右對稱，所以可以認定兩鐵環在下滑過程會是等高的，將下滑的高度設為 $-y$ ，彈簧的伸長量即為 $2y$ 。以能量來討論較為容易：鐵環系統的重力位能為 mgy ，彈簧的彈力位能為 $\frac{1}{2}k(2y)^2 = 2ky^2$ 。總位能即： $U = 2ky^2 - mgy$ 。起始處的總位能為零，動能為零，故總能量為零，因此反彈點即在位能為零 $U = 0$

處： $y = \frac{mg}{2k}$ 。這個位置就是我們提到的折返點，許多同學找到彈簧彈力與重力抵消的平衡點作答，這是不一樣的。在平衡點鐵環的受力為零，但因為還有向下速度，還會持續下墜，直到折返點為止，而折返點需以能量討論才比較清楚。

2.

3. 一質點質量為 m ，在一維的 x 軸上運動，它所受的力只是位置 x 的函數，假設此力可以用

以下的位能描述： $U(x) = -\frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{4}bx^4$ ， a, b 是適當單位的正數。

A. 求出此位能所對應的力的函數 $F(x)$ 。(5)

B. 找出此位能除了原點之外，在 $+x$ 方向另外一個平衡點（Equilibrium Point）的位置。(5)

C. 將質點置於原點，向 $+x$ 方向輕推（起始速度可以忽略），問它運動到達 $+x$ 方向的平衡點處的速度是多少？運動最遠會到達離原點多少距離？(10)

解答：

A. $F = -\frac{dU}{dx} = ax - bx^3$ 。

B. 平衡點在 $F(x_0) = 0$ 處，除了原點，還有 $x_0 = \pm\sqrt{\frac{a}{b}}$ 。

C. $U(0) = 0$ ，到達的最遠處 x_f ，速度亦為零，因此 $U(x_f) = 0$ ，因此 $x_f = \sqrt{\frac{2a}{b}}$ 。