

習題一

1. 考慮一個質量為 0.34kg 的粒子在二維 $x - y$ 平面上運動，已知它的 x, y 座標與時間的關係分別可以寫成： $x(t) = -15.0 + 2.0t + 4.0t^3$ ， $y(t) = 25.0 + 7.0t - 9.0t^2$ ，式中長度單位為 m ，時間為 s 。在時間為 $t = 0.7\text{s}$ 時該粒子所受的力，大小是多少 N ？(20)

解答：Differentiating $x(t) = -15.0 + 2.0t + 4.0t^3$ twice with respect to t , we get

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = 2.00 + 12.0t^2, \quad a_x(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = 24.0t$$

Similarly, differentiating $y(t) = 25.0 + 7.0t - 9.0t^2$ twice with respect to t yields

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = 7.00 - 18.0t, \quad a_y(t) = \frac{d^2y}{dt^2} = -18.0$$

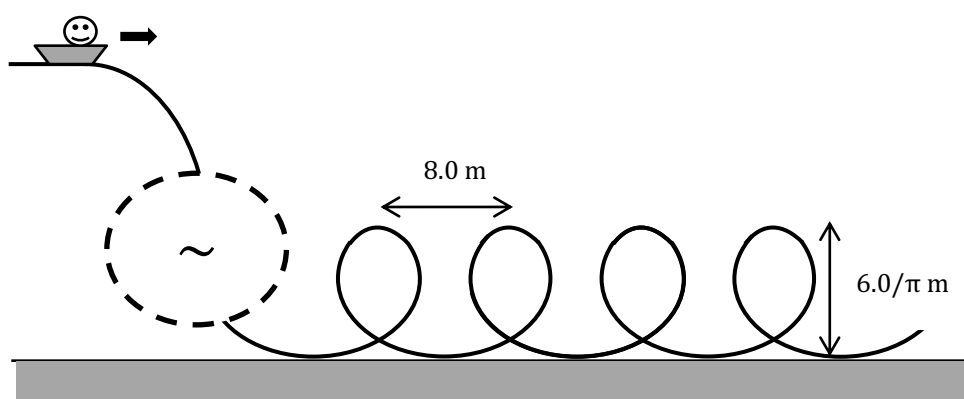
The acceleration is

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} = \frac{d^2x}{dt^2} \hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \hat{j} = (24.0t) \hat{i} + (-18.0) \hat{j}.$$

At $t = 0.7\text{s}$, we have $\vec{a} = (16.8) \hat{i} + (-18.0) \hat{j}$.

$$\vec{F} = m\vec{a} = 0.34 \cdot ((16.8) \hat{i} + (-18.0) \hat{j}) = (5.71) \hat{i} + (-6.12) \hat{j}. \quad F = 8.37\text{N}.$$

2. 考慮一雲霄飛車，列車由高處下滑，進入一段螺旋型的軌道。在此段，軌道繞水平軸旋轉，因速度很快，旋轉可以近似視為等速，每一圈旋轉時間為 1.0 s ，同時軌道水平前進 8.0 m 。螺旋軌道的最低點就接近地面，最高點的高度為 $6.0/\pi\text{ m}$ 。與軌道相比車廂極小，可視為一質點。重力加速度： $g \sim 10\text{ m/s}^2$ 。
- A. 當某乘客的車廂到達螺旋軌道的一頂點時，她的項鍊突然斷裂，於是墜子與項鍊分離。計算墜子離開後，多久會落到地面。假設墜子落地前，並沒有其他撞擊。
- 提示：拋體運動，水平與垂直方向運動是互相獨立。
- B. 承上題，計算項鍊突然斷裂時車廂的速率大小。
- 提示：先算平行旋轉軸、及垂直旋轉軸的速度分量。
- C. 承上題，計算墜子落地處，與該頂點（也就是墜子脫離項鍊處）之間的水平距離。



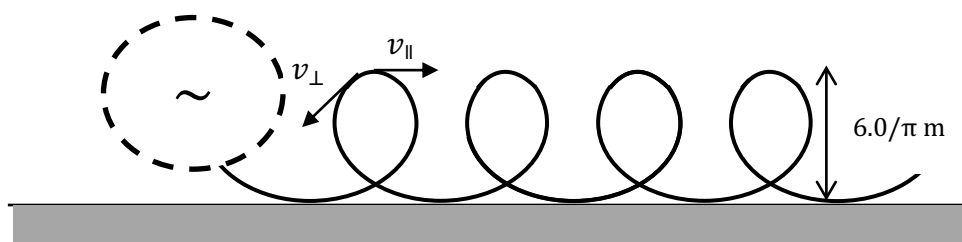
解答

A. 當一個乘客的列車車廂到達螺旋軌道的一個最高點時，速度沿水平方向，因此墜子在鉛直方向等於一初速為零的自由落體，落地時間等於： $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0.62 \text{ s}$ 。

在鉛直方向等於一初速為零的自由落體，落地時間等於： $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0.62 \text{ s}$ 。

B. 沿旋轉軸的速度分量， $v_{\parallel} = \frac{8.0}{1.0} = 8.0 \text{ m/s}$ 。垂直旋轉軸的速度分量： $v_{\perp} = \frac{2\pi \cdot 3/\pi}{1.0} =$

$\frac{2\pi \cdot R}{1.0} = 6.0 \text{ m/s}$ 。因此速率為 $v = 10.0 \text{ m/s}$



C. 投影在水平平面上，此墜子作等速運動。其初速度即沿軌道方向，速率為 $v =$

10.0 m/s ，墜子落地處，與該最高點之間的水平距離等於： $vt = 6.2 \text{ m}$ 。

3. 有A,B兩個方塊，方塊A質量為 M_A （尚未知），方塊B質量為 $M_B = 1.0 \text{ kg}$ 。O點固定於垂直的z軸上，而方塊A以一支架連接於O點，方塊B又以一同樣支架連接於方塊A（如圖所示）。支架與方塊及O點的連接無摩擦，所以支架可以自由改變方向，但兩支架的長度 l （尚未知）相等且保持固定，質量可以忽略。使A,B兩方塊及支架以相同角速度繞z軸旋轉，週期為 0.5π 秒，即角速度 $\omega = 4.0 \text{ s}^{-1}$ 。旋轉時O,A,B三點及支架一直保持在通過z

軸的鉛直平面上。此時觀察到OA間支架與垂直線的夾角為 $\theta = 30^\circ$ ，AB間支架與垂直線的夾角為 $\phi = 45^\circ$ 。向心加速度公式為： $a = r\omega^2$ 。

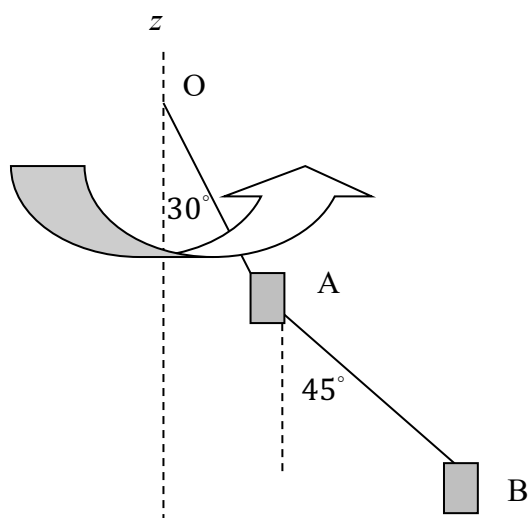
A. 分析方塊B的受力，求支架AB對方塊B的張力 T 是多少N。(8)

B. 由方塊B向心加速度，計算支架的長度 l 是多少m。

提示：別忘了支架OA對旋轉半徑的貢獻。(7)

C. 設OA支架對A的施力為 S ，分析方塊A的受力，求 M_A 是多少kg。(10)

$\sqrt{3} \sim 1.7, \sqrt{2} \sim 1.4$ 。



解答：

A. 拉力 T 在垂直方向的投影必須正好抵消B所受的重力： $T \frac{\sqrt{2}}{2} = M_B g$ ， $T = \sqrt{2} M_B g = 13.9 \text{ N}$ 。

B. 重力無水平分量，因此拉力 T 在水平方向的分量，必須等於向心加速度乘上質量，

$$T \frac{\sqrt{2}}{2} = M_B \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \right) l \omega^2 = 19.36l$$

$$l = 0.5 \text{ m}$$

A. 設OA支架對A的施力為 S ，A垂直方向的總受力為零：

$$S \frac{\sqrt{3}}{2} = M_A g + T \frac{\sqrt{2}}{2} = M_A g + M_B g$$

水平方向的總受力必須正好等於向心加速度乘上質量：

$$S \frac{1}{2} - T \frac{\sqrt{2}}{2} = M_A \frac{l}{2} \omega^2$$

$$S \frac{1}{2} = M_A \frac{l}{2} \omega^2 + M_B g$$

由此二式削去S可得：

$$M_A g + M_B g = M_A \frac{l\sqrt{3}}{2} \omega^2 + \sqrt{3} M_B g$$

$$9.8M_A + 9.8 = 6.9M_A + 17.0$$

$$M_A = 2.5 \text{ kg}$$