習題一

1. 考慮一個質量為$0.34kg$的粒子在二維$x-y$平面上運動，已知它的$x,y$座標與時間的關係分別可以寫成：$x\left(t\right)=-15.0+2.0t+4.0t^{3}$，$y\left(t\right)=25.0+7.0t-9.0t^{2}$，式中長度單位為m，時間為s。在時間為$t=0.7s$時該粒子所受的力，大小是多少N？(20)

解答：Differentiating $x\left(t\right)=-15.0+2.0t+4.0t^{3}$ twice with respect to *t*, we get



Similarly, differentiating $y\left(t\right)=25.0+7.0t-9.0t^{2}$ twice with respect to *t* yields



The acceleration is

 

At $t=0.7s$, we have . . $F=8.37$N.

1. 考慮一雲霄飛車，列車由高處下滑，進入一段螺旋型的軌道。在此段，軌道繞水平軸旋轉，因速度很快，旋轉可以近似視為等速，每一圈旋轉時間為$1.0 s$，同時軌道水平前進$8.0 m$。螺旋軌道的最低點就接近地面，最高點的高度為$6.0/π m$。與軌道相比車廂極小，可視為一質點。重力加速度：$g\~10 m/s^{2}。$
2. 當某乘客的車廂到達螺旋軌道的一頂點時，她的項鍊突然斷裂，於是墜子與項鍊分離。計算墜子離開後，多久會落到地面。假設墜子落地前，並沒有其他撞擊。

提示：拋體運動，水平與垂直方向運動是互相獨立。

1. 承上題，計算項鍊突然斷裂時車廂的速率大小。

提示：先算平行旋轉軸、及垂直旋轉軸的速度分量。

1. 承上題，計算墜子落地處，與該頂點（也就是墜子脫離項鍊處）之間的水平距離。

$$8.0 m$$

$$6.0/π m$$

解答

1. 當一個乘客的列車車廂到達螺旋軌道的一個最高點時，速度沿水平方向，因此墜子在鉛質方向等於一初速為零的自由落體，落地時間等於：$t=\sqrt{\frac{2h}{g}}=0.62 s$。
2. 沿旋轉軸的速度分量，$v\_{∥}=\frac{8.0}{1.0}=8.0 m/s$。垂直旋轉軸的速度分量：$v\_{⊥}=\frac{2π∙3/π}{1.0}=\frac{2π∙R}{1.0}=6.0 m/s$。因此速率為$v=10.0 m/s$

$$v\_{∥}$$

$$6.0/π m$$

$$v\_{⊥}$$

1. 投影在水平平面上，此墜子作等速運動。其初速度即沿軌道方向，速率為$v=10.0 m/s$，墜子落地處，與該最高點之間的水平距離等於：$vt=6.2 m$。
2. 有$A,B$兩個方塊，方塊$A$質量為$M\_{A}$（尚未知），方塊$B$質量為$M\_{B} = 1.0kg$。$O$點固定於垂直的$z$軸上，而方塊$A$以一支架連接於$O$點，方塊$B$又以一同樣支架連接於方塊$A$（如圖所示）。支架與方塊及$O$點的連接無摩擦，所以支架可以自由改變方向，但兩支架的長度*l*（尚未知）相等且保持固定，質量可以忽略。使$A,B$兩方塊及支架以相同角速度繞*z*軸旋轉，週期為$0.5π$秒，即角速度$ω＝4.0 s^{-1}$。旋轉時$O,A,B$三點及支架一直保持在通過$z$軸的鉛直平面上。此時觀察到$OA$間支架與垂直線的夾角為$θ = 30°$，$AB$間支架與垂直線的夾角為$ϕ = 45°。$向心加速度公式為：$a=rω^{2}$。
3. 分析方塊$B$的受力，求支架$AB$對方塊$B$的張力$T$是多少$N$。(8)
4. 由方塊$B$向心加速度，計算支架的長度$l$是多少$m$。

提示：別忘了支架$OA$對旋轉半徑的貢獻。 (7)

1. 設$OA$支架對$A$的施力為$S$，分析方塊$A$的受力，求$M\_{A}$是多少$kg$。(10) $\sqrt{3}\~1.7,\sqrt{2}\~1.4$。

O

$$45°$$

$$30°$$

B

A

*z*

 解答：

A. 拉力$T$在垂直方向的投影必須正好抵消$B$所受的重力：$T\frac{\sqrt{2}}{2}=M\_{B}g$，$T=\sqrt{2}M\_{B}g=13.9 N$。

B. 重力無水平分量，因此拉力$T$在水平方向的分量，必須等於向心加速度乘上質量，

$$T\frac{\sqrt{2}}{2}=M\_{B}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\right)lω^{2}=19.36l$$

$$l=0.5 m$$

1. 設$OA$支架對$A$的施力為$S$，$A$垂直方向的總受力為零：

$$S\frac{\sqrt{3}}{2}=M\_{A}g+T\frac{\sqrt{2}}{2}=M\_{A}g+M\_{B}g$$

水平方向的總受力必須正好等於向心加速度乘上質量：

$$S\frac{1}{2}-T\frac{\sqrt{2}}{2}=M\_{A}\frac{l}{2}ω^{2}$$

$$S\frac{1}{2}=M\_{A}\frac{l}{2}ω^{2}+M\_{B}g$$

由此二式削去$S$可得：$$M\_{A}g+M\_{B}g=M\_{A}\frac{l\sqrt{3}}{2}ω^{2}+\sqrt{3}M\_{B}g$$

$$9.8M\_{A}+9.8=6.9M\_{A}+17.0$$

$$M\_{A}=2.5 kg$$