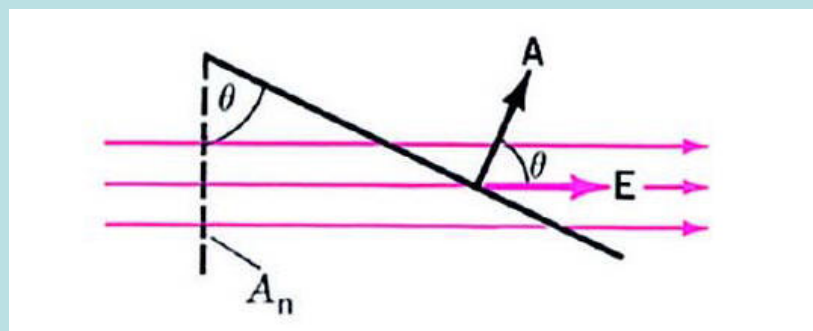
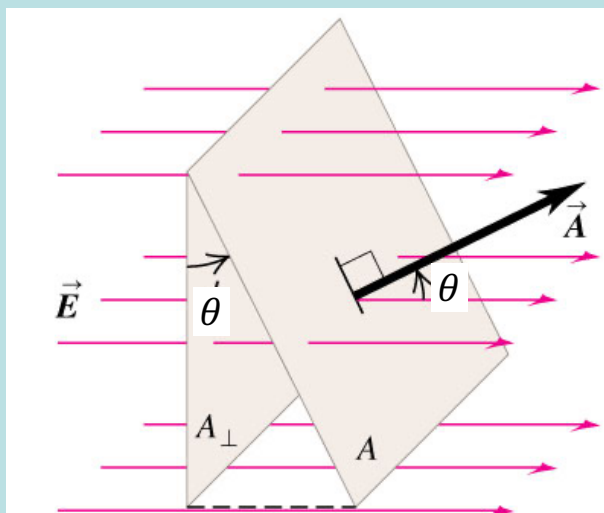


若小平面與電場不垂直：
計算電力線的數目也不難。

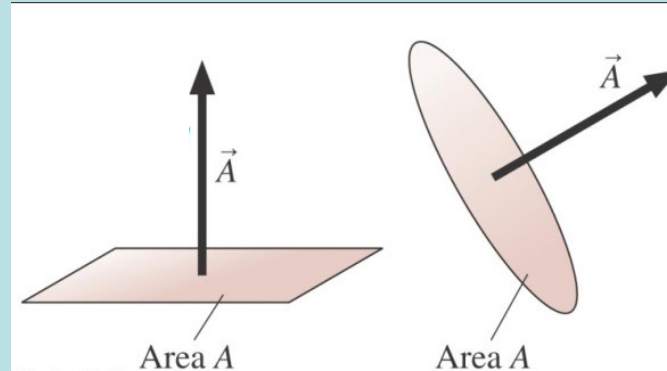
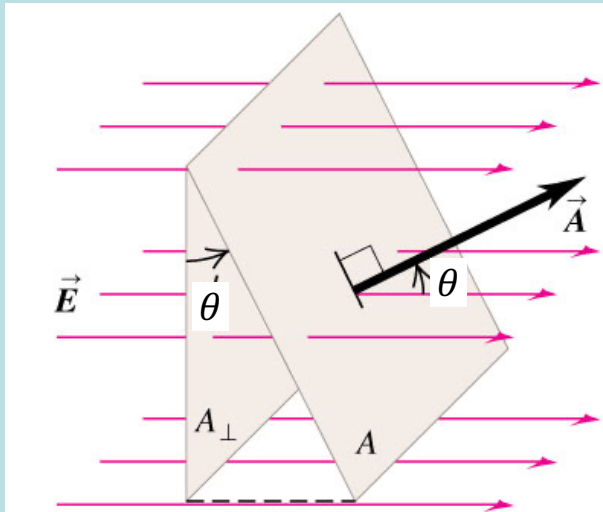


可以將小平面 A 投影於電場的垂直方向：

通過小平面 A 的電力線必通過其投影平面 A_{\perp}

而通過此 A_{\perp} 的電力線數目就可以用前一頁的辦法算：

$$N = E \cdot A_{\perp} = E \cdot A \cos \theta \quad \text{此值也就是通過該小平面 } A \text{ 的電力線數目。}$$



$$N = E \cdot A \cos \theta$$

這個結果可以更聰明地以向量表示！

定義面積向量 \vec{A} ：大小就是此平面的面積，方向是垂直於平面的方向。

如此定義後，角度 θ 就是向量 \vec{A} 與電場 \vec{E} 之間的夾角。

$$N = E \cdot A \cos \theta = \vec{E} \cdot \vec{A} \equiv \Phi_E$$

Φ_E 電通量 Electric Flux，順著 \vec{A} 的方向通過平面的電力線數目。

現在將上述的計算方法推廣到一般的曲面。

一般曲面，可視為由許多無限小的平面組成。以足標 i 為小平面 $\delta\vec{A}_i$ 編號！

通過曲面的電力線數，等於這些小平面的電通量的和：

$$\Phi_E = \sum_i \vec{E}_i \cdot \delta\vec{A}_i$$

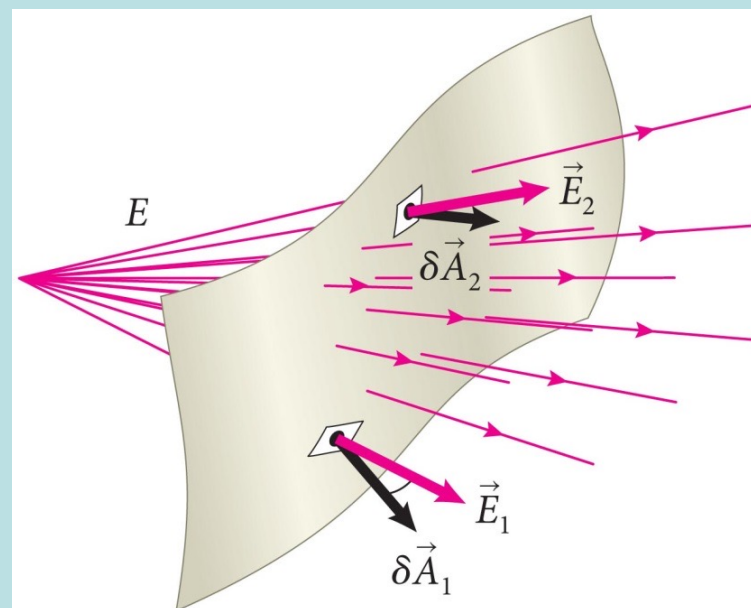
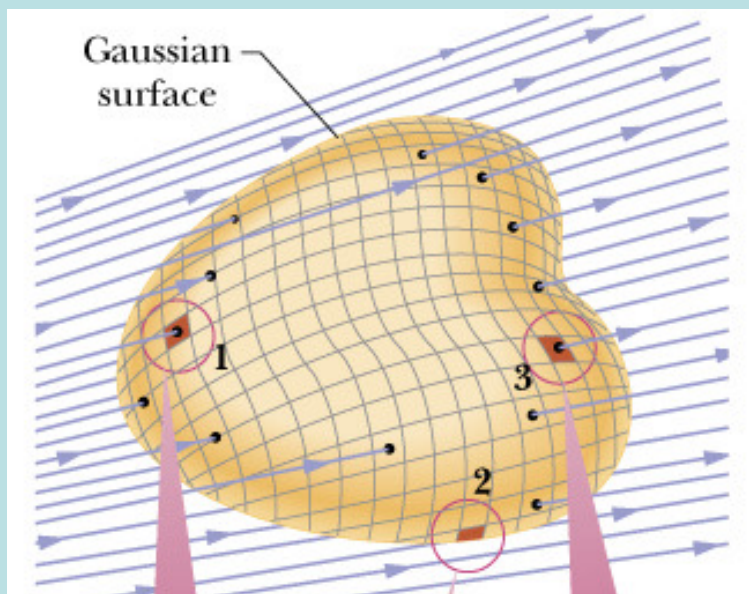
注意：在一個曲面上各個位置 $\delta\vec{A}_i$ ，電場 \vec{E}_i 可能不同。

當小平面趨近無限小，總和就變為一個積分！稱為面積分。

$$\Phi_E = \sum_i \vec{E}_i \cdot \delta\vec{A}_i \xrightarrow[\substack{\delta A \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}]{\text{surface}} \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

定義為通過此曲面的電通量Electric Flux！

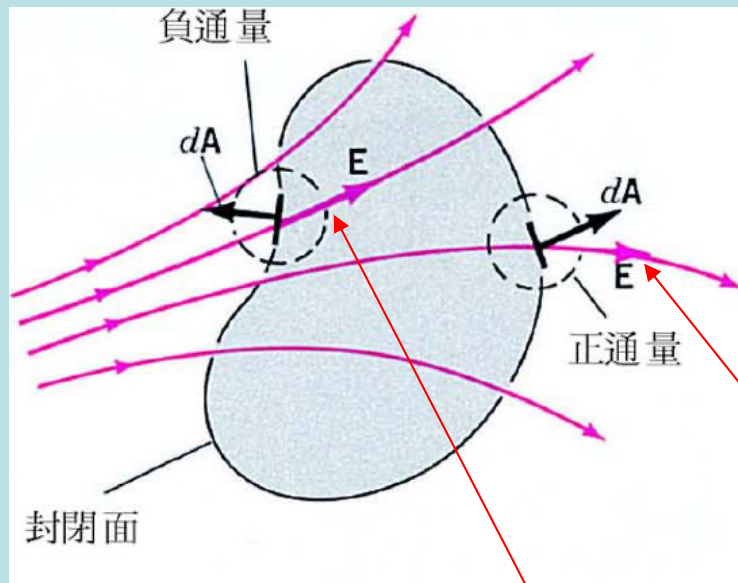
注意 \vec{E} 是 $\delta\vec{A}$ 當地的電場！



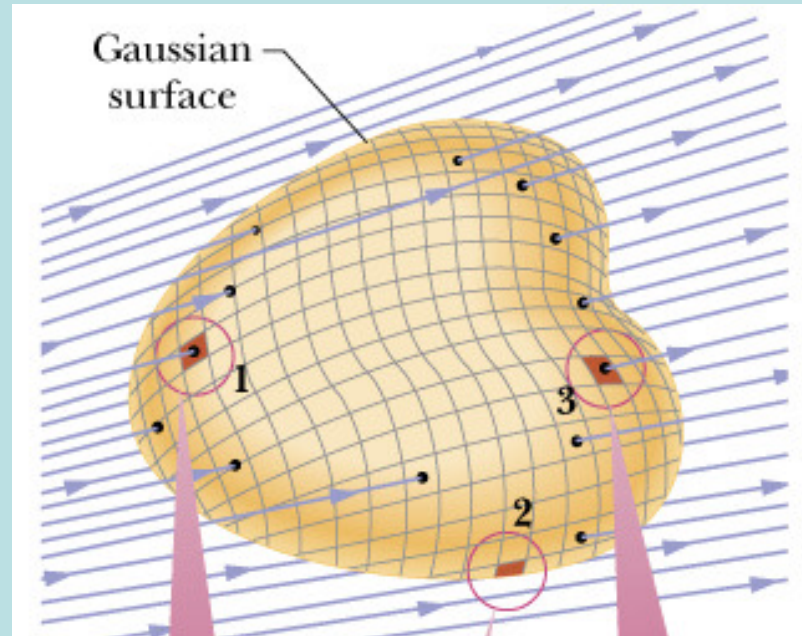
如果曲面是封閉曲面（這是高斯定律的主角，就稱高斯面）：

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \lim_{\substack{\delta A \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \sum_i \vec{E}_i \cdot \delta \vec{A}_i$$

如果是封閉曲面，空間會被分成內外兩部分，
可以定義 $d\vec{A}$ 的方向一律是**由內指向外**：



$\vec{E}_i \cdot \delta \vec{A}_i$ 為正時，電力線為離開曲面
為負時，電力線為進入曲面



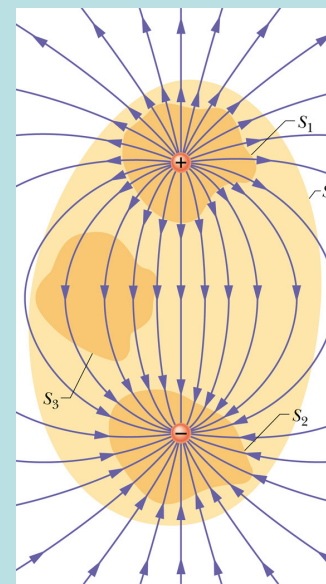
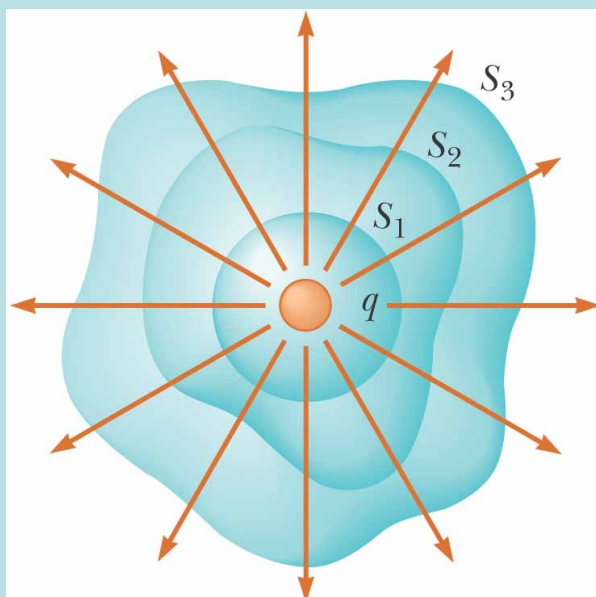
通過一封閉曲面的電通量就有一個很簡單的物理意義；

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \text{離開曲面的電力線數目} - \text{進入曲面的電力線數目}$$

若電力線數目守恆，進入封閉曲面的電場線數目必等於離開的電場線數目！

電力線數目守恆 \longleftrightarrow $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$ 封閉曲面的電場通量為零！

若封閉曲面內有一點電荷，電力線由正電荷發出（由負電荷吸收）：



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \text{離開曲面的電力線數目} - \text{進入曲面的電力線數目} \neq 0$$

包圍一個電荷的高斯面的電通量，等於正(負)電荷所產生(消滅)的電力線數目。

因電力線產生後不中途消失，

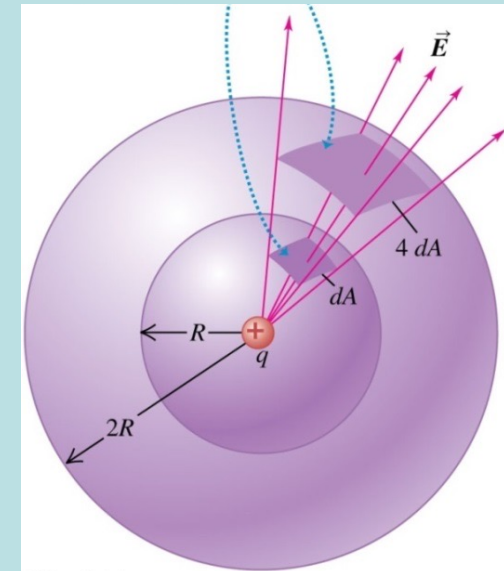
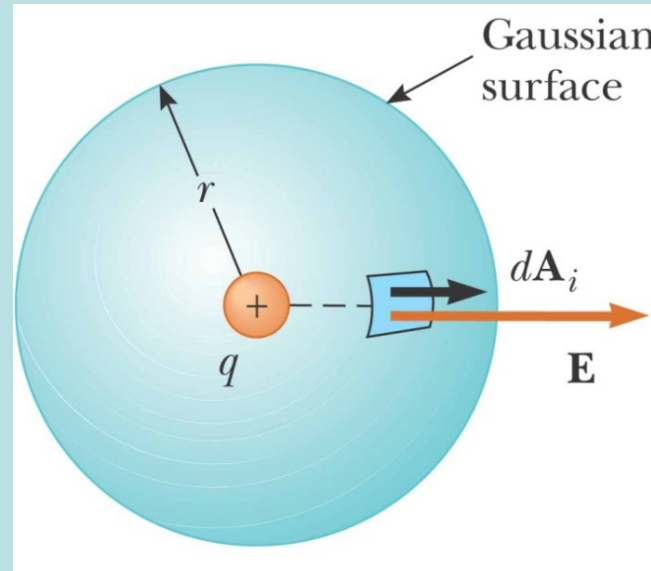
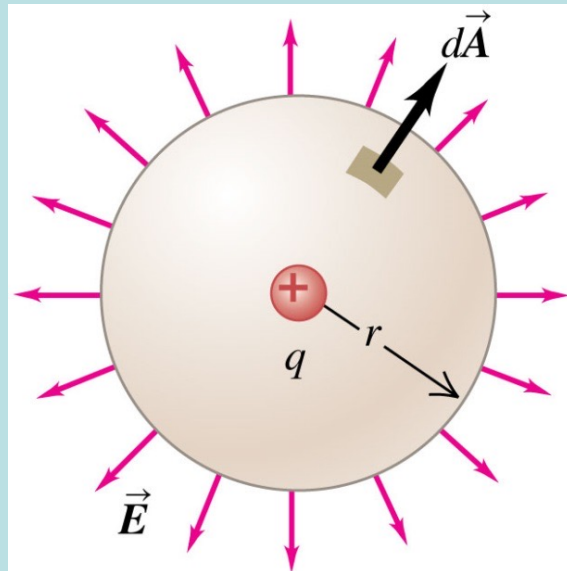
我們立刻可以得到：包圍點電荷 q 的任一高斯面 $S_{1,2,3}$ ，電通量都相等！

通過包圍點電荷的高斯面的電力線數與其形狀、位置、大小都無關！

一個點電荷會產生多少電力線？包圍點電荷的高斯面的電通量是多少？

包圍點電荷 q 的所有高斯面電通量都一樣！選一個最簡單的來算即可！

選一個封閉球面來計算電通量：



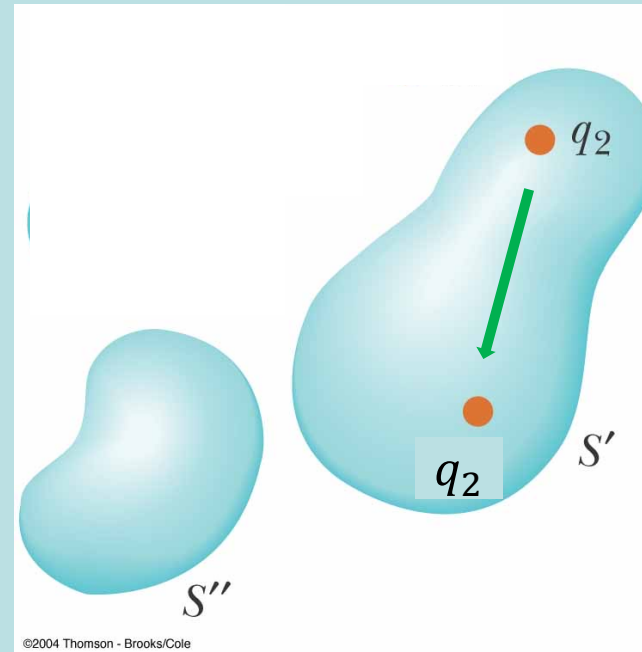
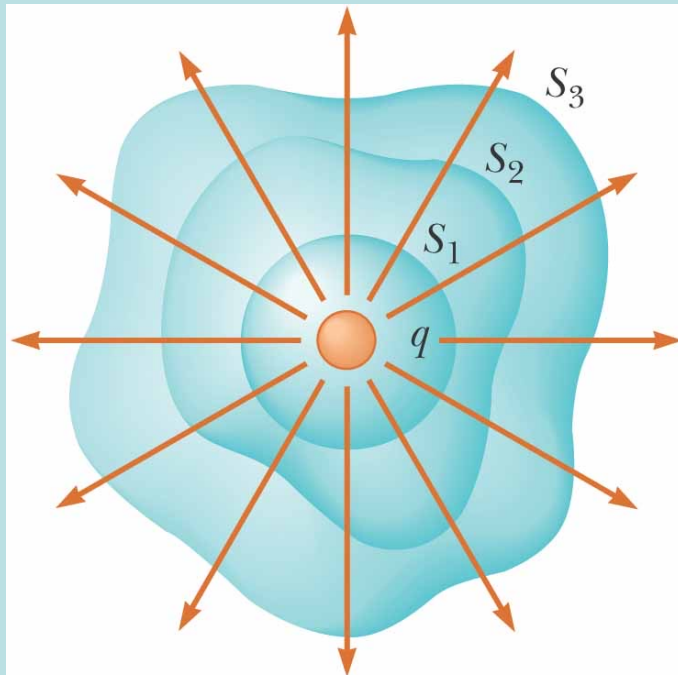
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E \cdot dA = E \cdot \oint dA = EA = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

電場 \vec{E} 與 $d\vec{A}$ 同向，在球面上，電場大小 E 是一個常數！

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

由一個點電荷發出的電力線總數與球半徑無關！

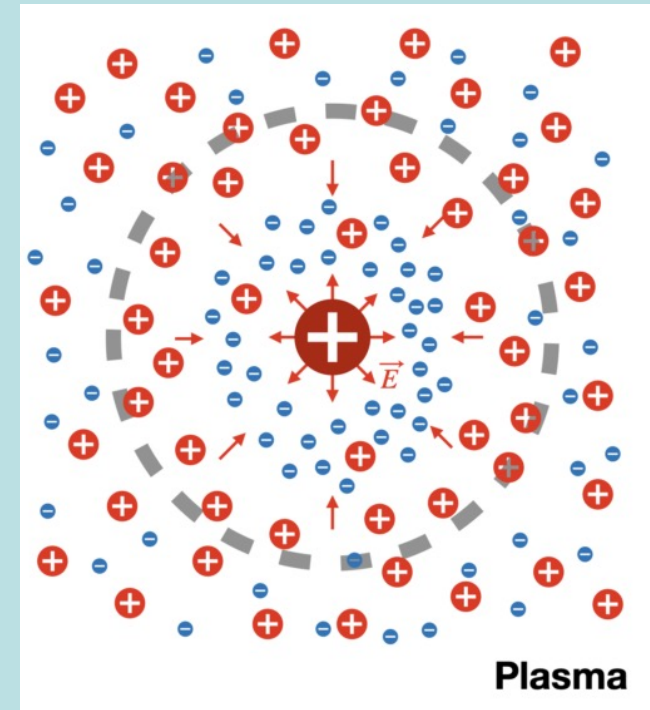
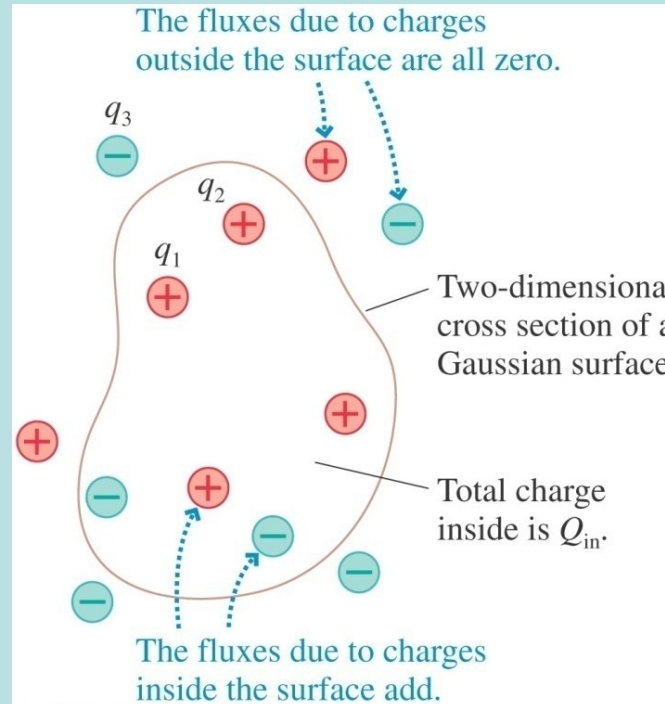
正(負)電荷產生(消滅)的電力線數目與電荷量成正比。



任何包圍 q 的高斯面的電通量，與球高斯面的電通量相等！

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \text{電通量正比於電荷量！}$$

反過來，電荷對電通量的貢獻，只和它是否位於曲面內有關，與具體位置無關。



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

高斯定律

一個封閉曲面的電場通量，正比於曲面所包圍的總淨電荷量。

我們雖從電場線守恆推出高斯定律，高斯定律比電場線的概念更加基本！

對連續的帶電流體，如電漿，此式也成立。

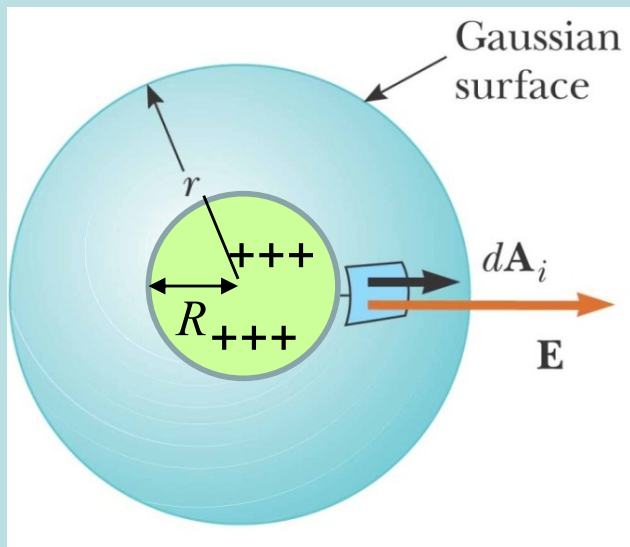
雖由庫侖定律推導得到，但庫侖定律不適用於動電，而高斯定律依舊成立！

這是電磁學的一個基本定律。

均勻的帶電球

均勻的帶電球（球對稱，半徑為 R ）周圍距球心為 r 處的電場：

選擇同球心半徑為 r 的球高斯面：



在電荷分布以外： $r > R$

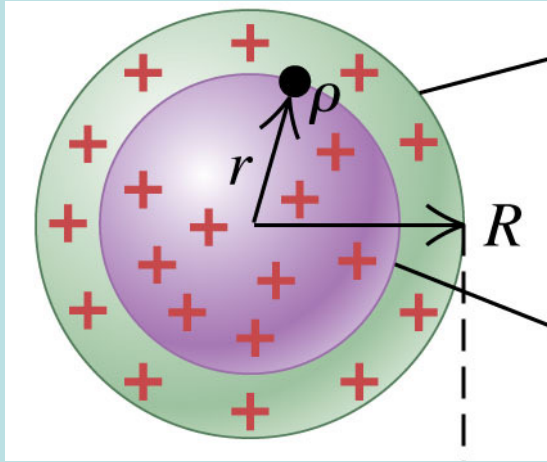
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int E \cdot dA = E \int dA = EA = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

電場如同所有電荷集中在球心的點電荷。

注意：庫侖定律平方反比是高斯定律在三度空間的性質。

在電荷分布以內： $r < R$

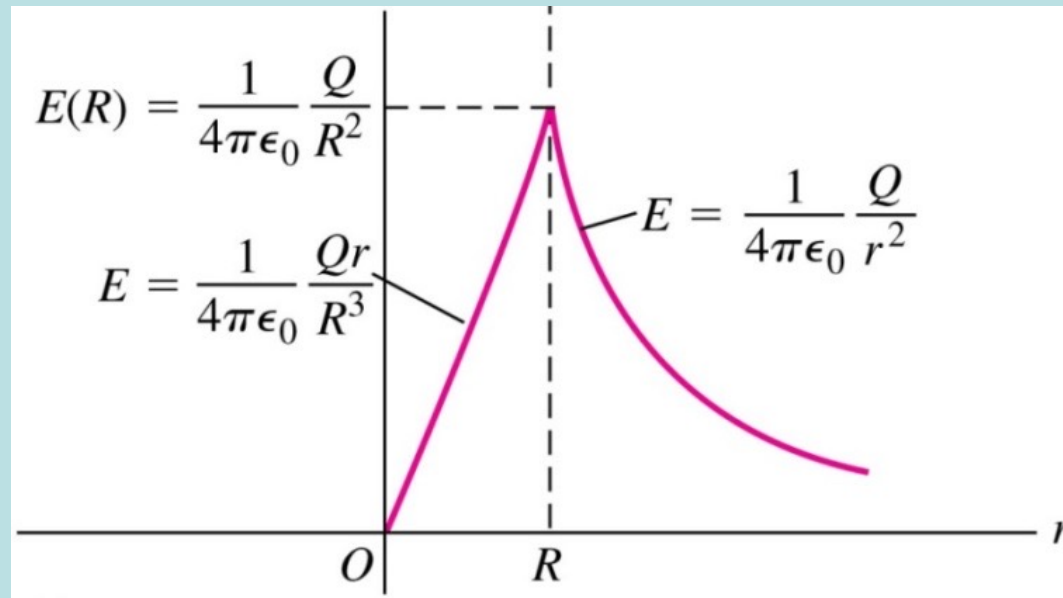


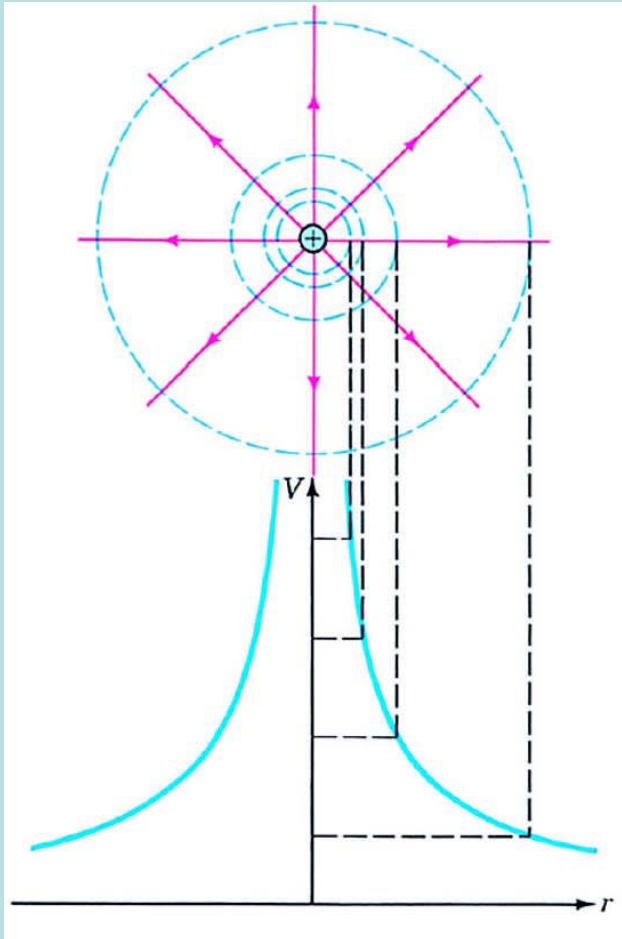
$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0}$$

設球內體電荷密度為 $\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ 。

$$q = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} r$$





讓 $r_A \rightarrow \infty$ ，就是起點是無限遠處：

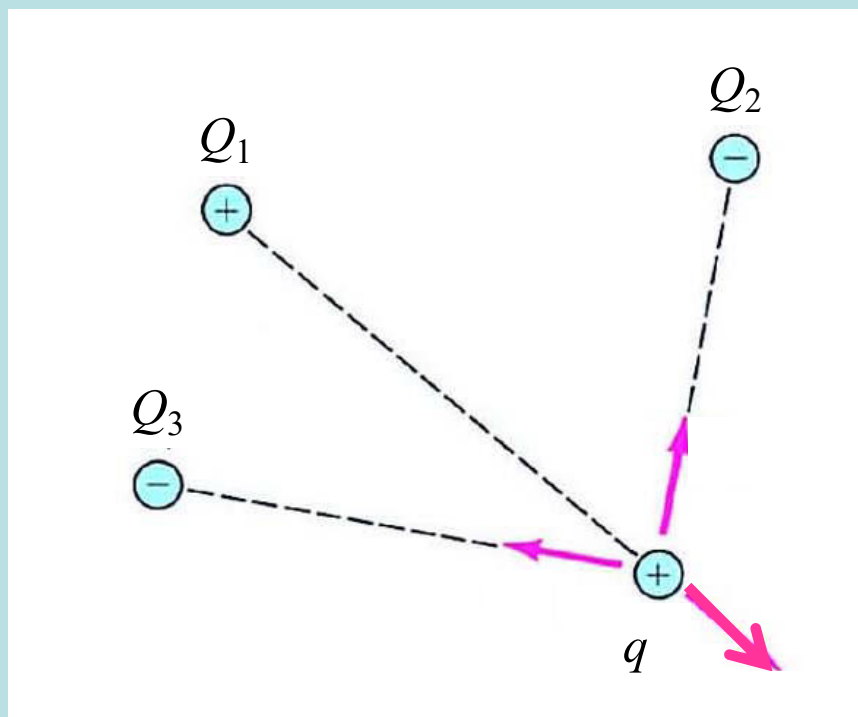
$$W = -\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \equiv -\Delta U = -U(r_B) + U(r_A)$$

選擇 $U(\infty) = 0, r_B \equiv r$

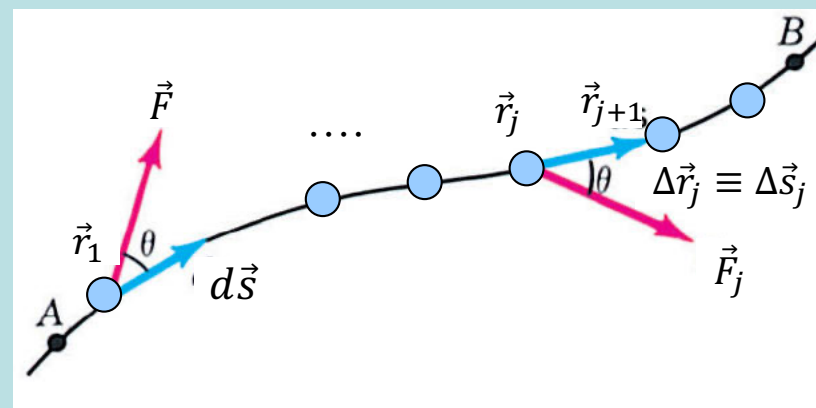
$$U(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r}$$

固定電荷 Q 旁可移動的小電荷 q 的電位能。

若有一個以上的固定電荷 Q ，電位能可以以一個點電荷的電位能疊加：



$$U = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i q}{r_i}$$



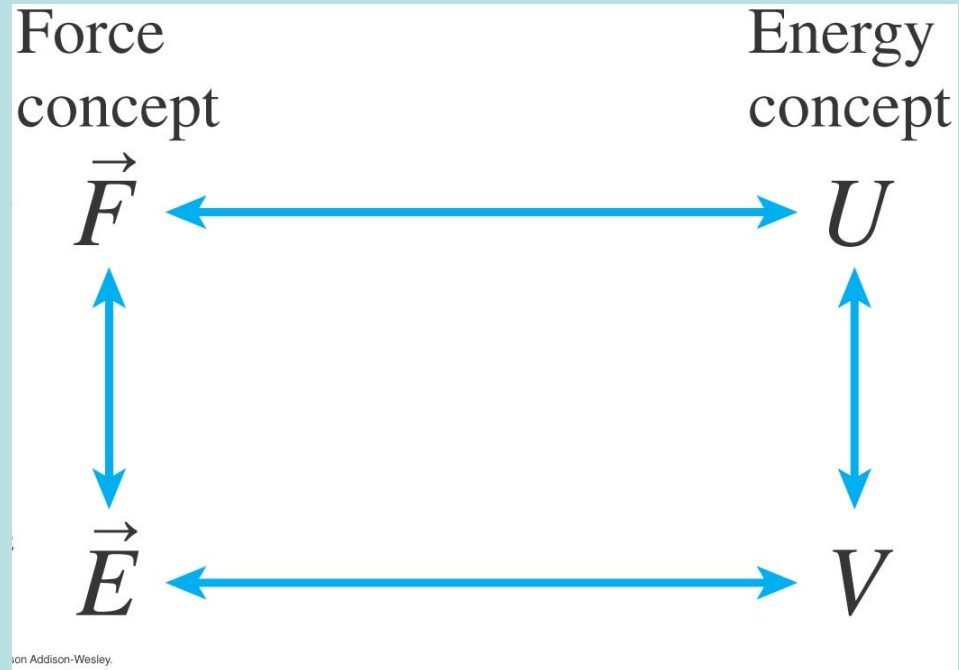
空間中兩點的電位能差，等於負的靜電力所作的功。

$$-\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \Delta U = U(B) - U(A)$$

$$\Delta U = - \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$U = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i q}{r_i}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

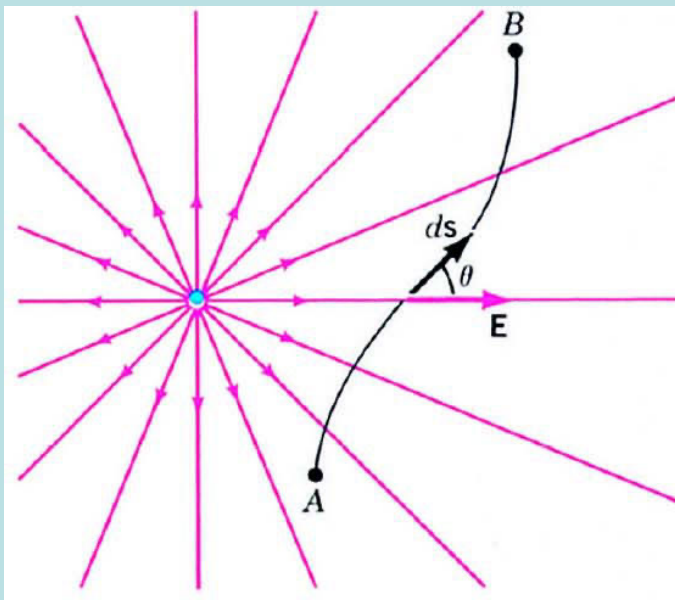


$$V = \frac{U}{q}$$

$$\Delta V = - \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$V = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i}$$

有時用電荷算電位十分繁雜，若已知電場，電位也可以以場的線積分來計算。



$$\Delta U = - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

位能差等於力的線積分的負號。

$$V = \frac{U}{q}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

$$\Delta V = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

兩點之間的電位差，等於沿任一連接兩點的曲線，負電場的線積分！

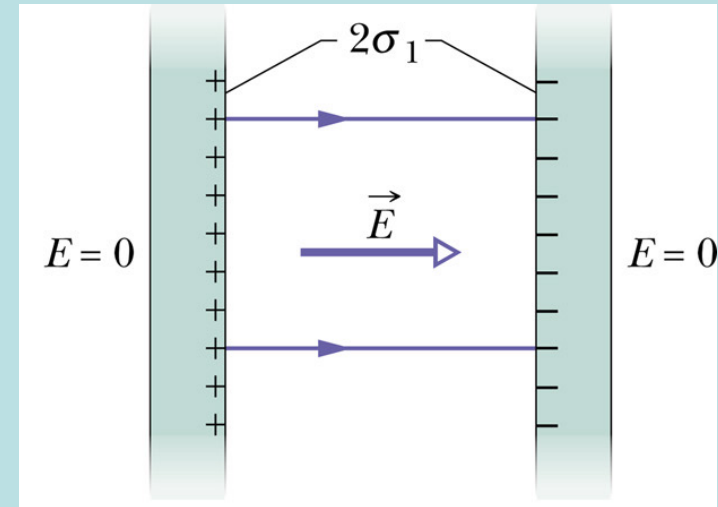
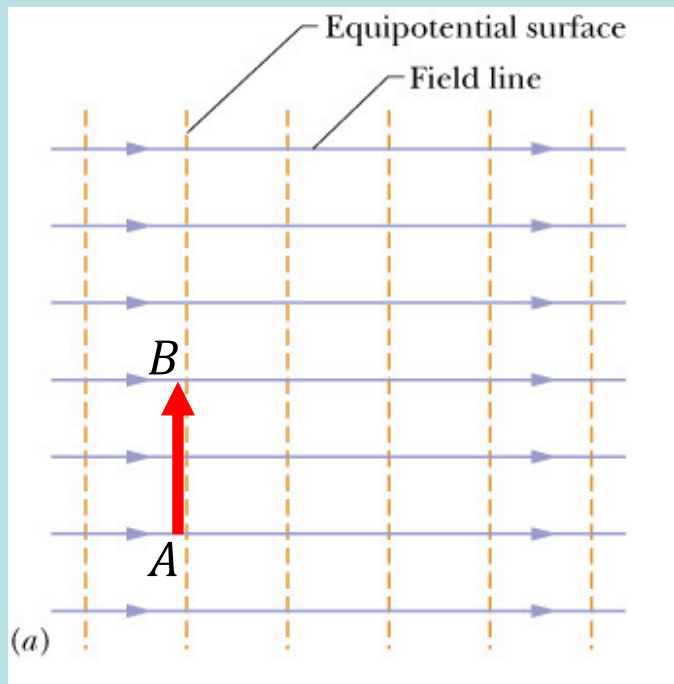
注意電場只給定了電位差！因此可以在電位上全數加一個常數，

或是找任一位置作為電位為零的參考點，不影響結果。

考慮兩片帶大小相等正負電的無限大電板，電板間的電場是均勻的。

先看沿著垂直於電場方向的電位差：

$$\Delta V = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$



沿著垂直於電場的方向，電位不變！

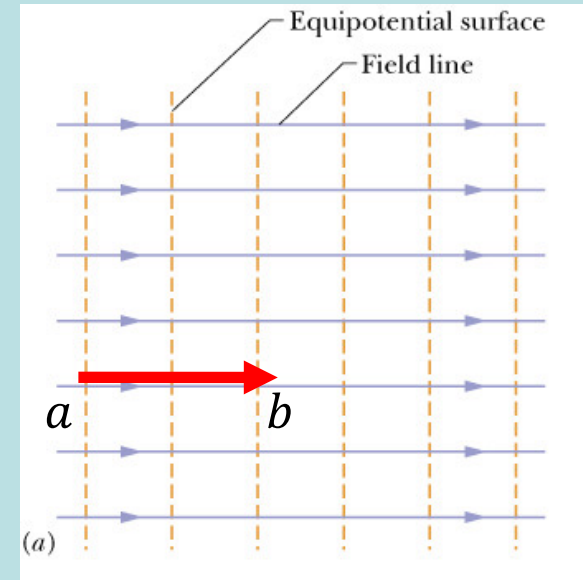
等位面與電場垂直。

沿著平行於電場方向的電位差，設此方向為 x ：

$$\Delta V = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_a^b E(x) \cdot dx$$

電位差即是電場大小的積分。

注意：電場是指向電位下降的方向。



高電位

低電位

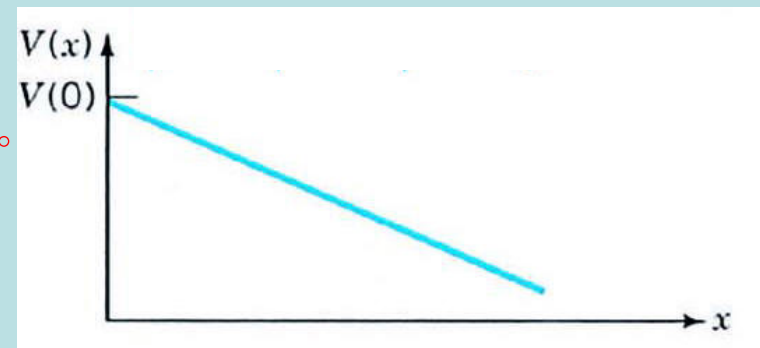
若電場是均勻的：

$$\Delta V = -E \int_a^b dx = -Ed$$

電場是指向電位下降的方向。

$$E = -\frac{\Delta V}{d}$$

電位降得越快，電場越大。

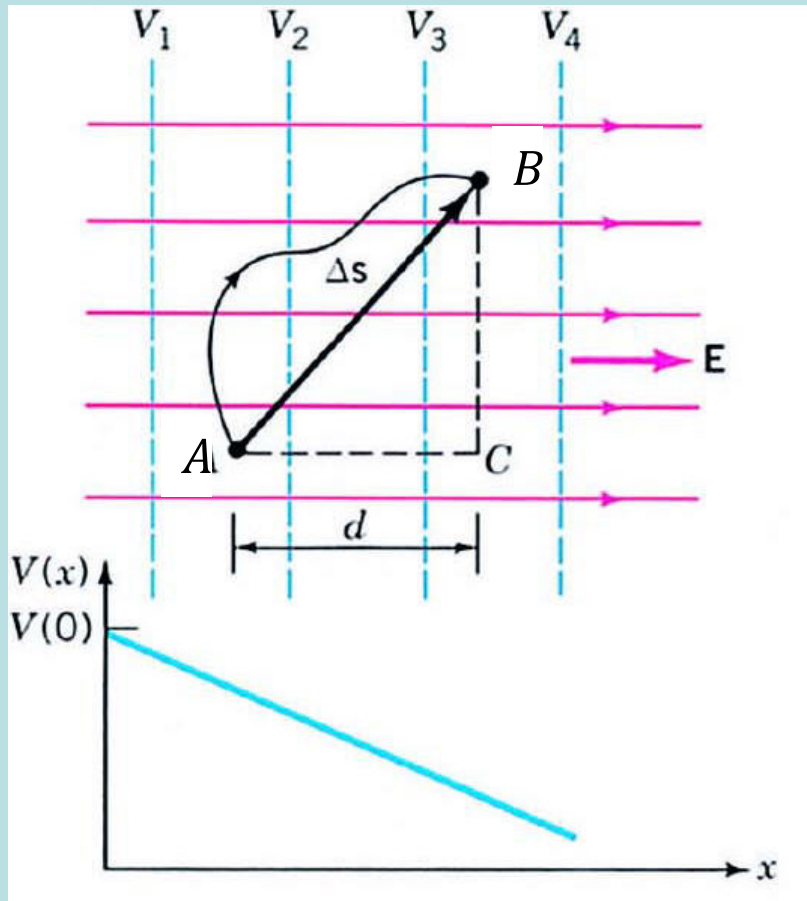


將這兩個結果綜合起來：

沿著垂直於電場的方向移動，電位不變！

均勻電場中任意兩點的電位差只要考慮沿電場方向的位移即可。

$$\Delta V = -Ed \quad d \text{ 是沿電場方向的位移。}$$



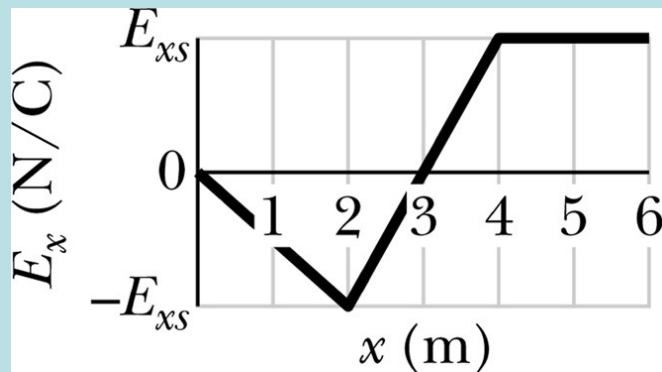
$$E = -\frac{\Delta V}{d}$$

電場的方向是電位下降的方向

若電場是定向但不均勻，取方向為 x ：

$$\Delta V = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_a^b E_x(x) \cdot dx$$

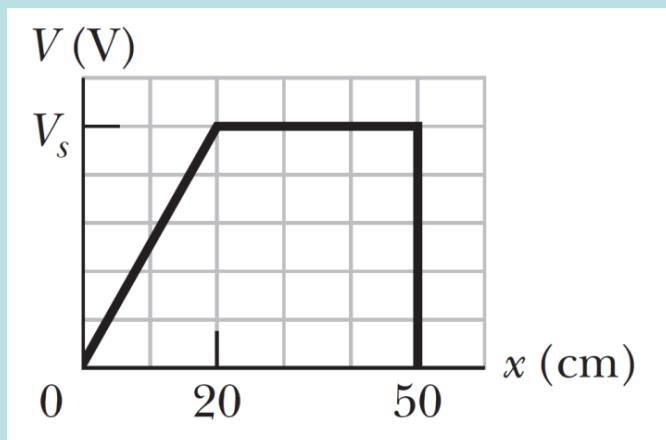
兩位置之間的電位差即是負電場的積分，即在兩點之間電場函數下的面積。



x 軸下的面積要算是負電位差。

因此電場是電位的微分乘負號：

$$E_x = - \frac{dV}{dx}$$



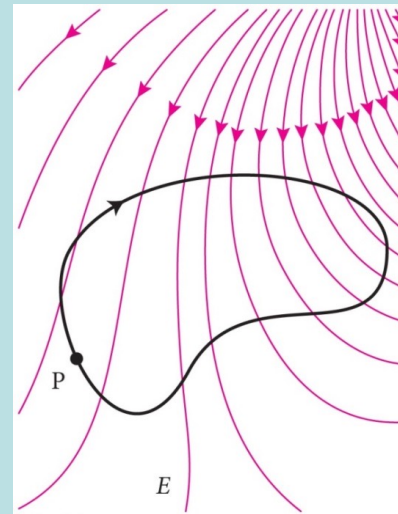
電位存在其實是電場一個非常重要的特質，這個特質給出一個定律：

記得電位差等於電場的線積分：

$$\Delta V = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

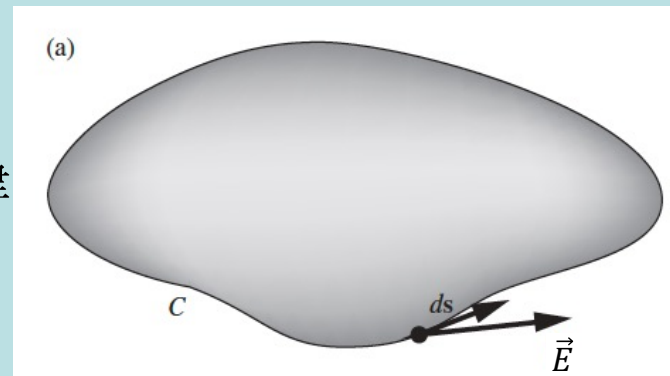
若繞一個封閉曲線計算電場的線積分，因為起點與終點相同，電位差永遠等於零！

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$



沿一個封閉曲線，電場的線積分必為零！

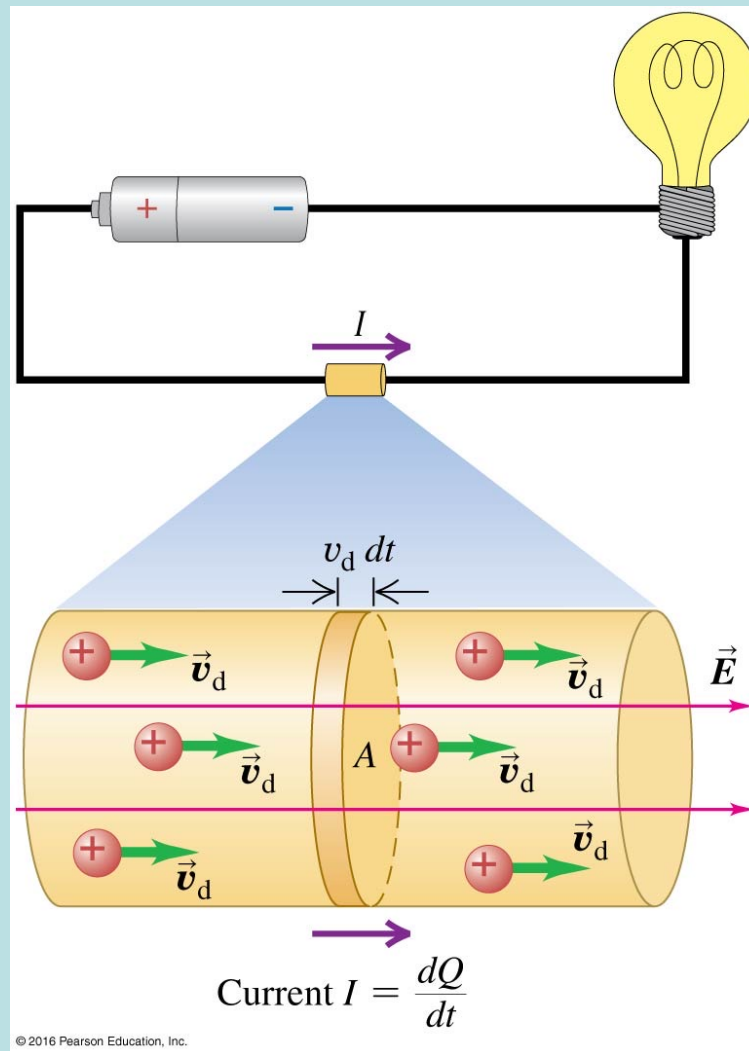
這是空間中任一個靜電場都必須滿足的定律

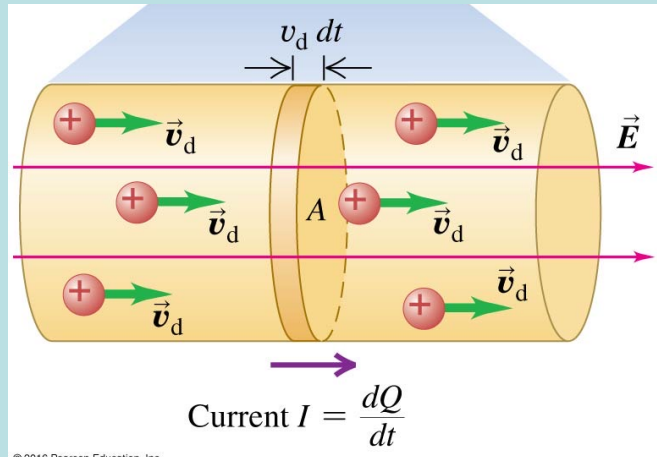


電流為單位時間流過某一截面積 A 的電荷量！

這等於一段時間內流過截面積 A 的電荷量 q 除以時間間隔 Δt ！

$$i = \frac{q}{\Delta t} \quad \text{注意電流不是向量！}$$





電流一般會與垂直截面積成正比。

將電流除以面積，才代表當地電荷的流動。

$$j = \frac{i}{A} \quad \text{稱為電流密度：單位面積的電流。}$$

電流密度代表當地電荷流動，可以給予一方向！

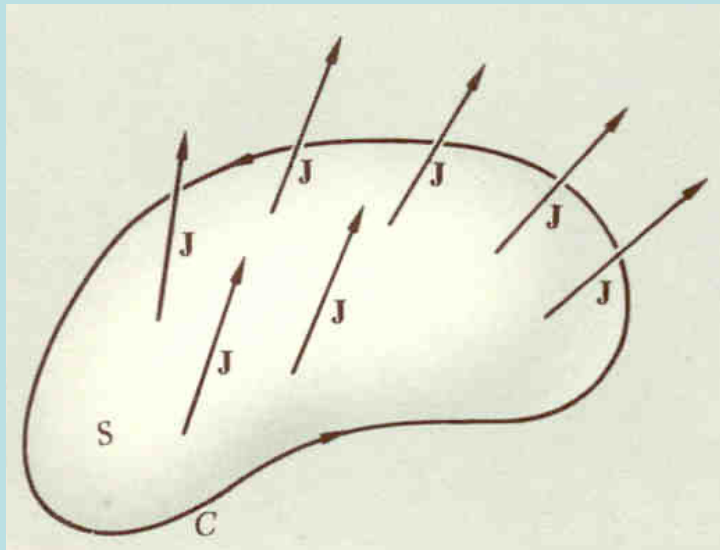
定電荷流動的方向為電流密度的方向

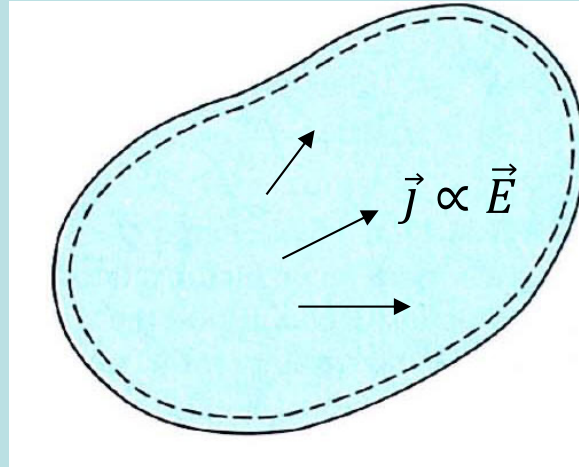
$$j \rightarrow \vec{j}$$

導體各處都可以有一個當地的電流密度。

$$\vec{j} \rightarrow \vec{j}(\vec{r})$$

電流密度是位置 \vec{r} 的函數





Georg Simon Ohm



實驗發現，在導體中電場與電流密度成正比！

$\vec{E} = \rho \vec{j}$ ρ 是電阻率 Resistivity，是材料的性質。

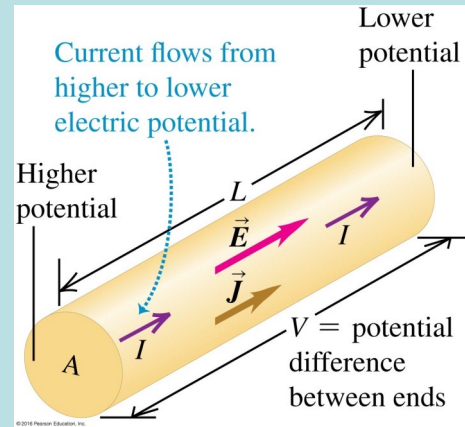
歐姆定律

適用於任意形狀、甚至大片導體內的電流流動的版本！

有了這個定律，導體內的電場直接可以由電流得到。

如果導體是導線，電流只能沿導線方向。

因此電場、電位差都只能沿導線方向。



均勻導線內的電流流動

$$E = \rho \cdot j$$

$$\frac{V}{L} = \rho \cdot \frac{I}{A}$$

V, I 是描述導線電流比較方便的量！

$$V = \frac{\rho L}{A} \cdot I = RI$$

電阻 R 是一元件的性質

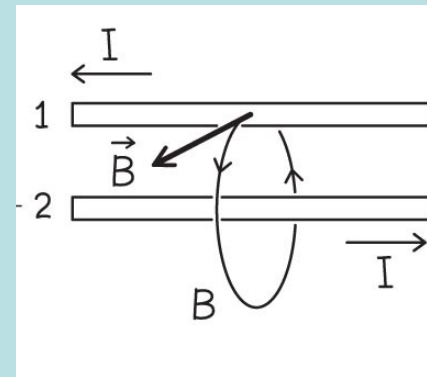
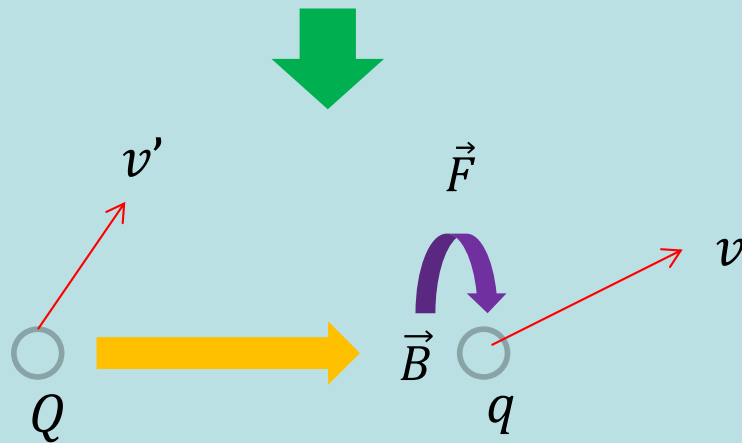
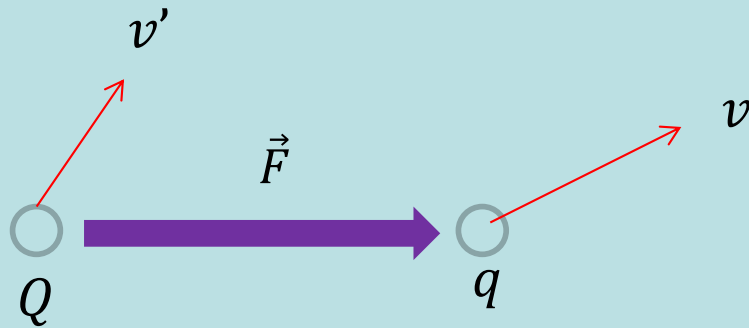
$$V = RI$$

適用於均勻導線內的歐姆定律

電流由電位差決定，（導線內部）電位差由電流決定！

現在引入磁場 \vec{B} 的概念：

磁力是移動的電荷之間的力！



移動的電荷 Q 在周圍產生磁場 \vec{B} ，磁場對當地的移動電荷 q 施磁力！

磁場 \vec{B} 就是會讓位於當地的運動電荷 q 得到靜磁力的空間的物理性質。

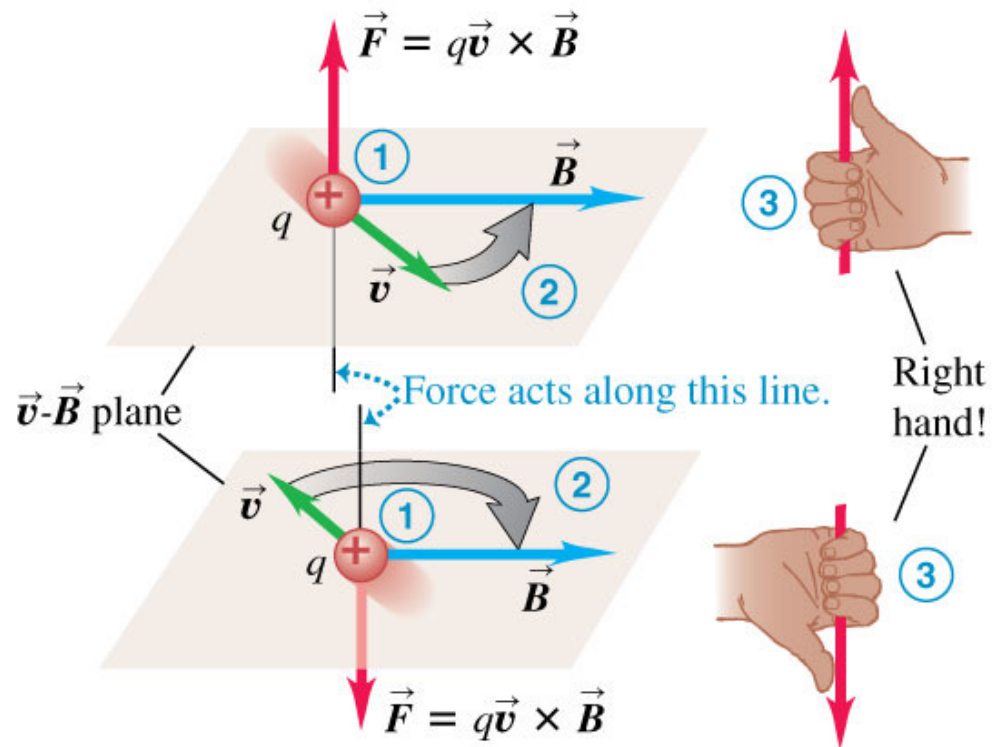
$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

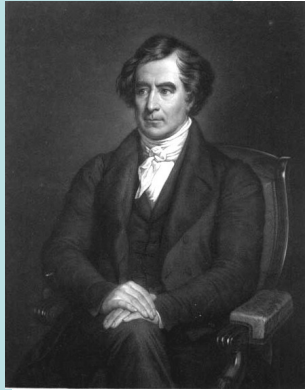
以右手手指以較小角將速度 \vec{v} 撥向磁場 \vec{B} ，大拇指方向即磁力 \vec{F} ：

(a)

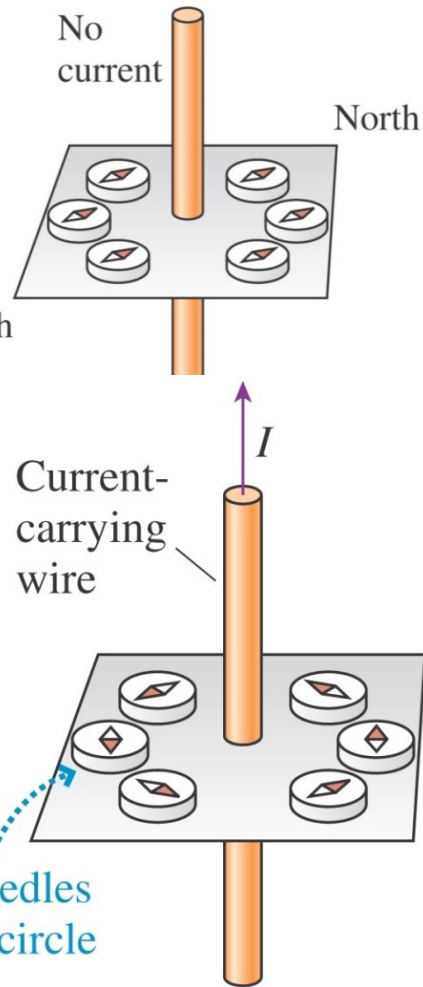
Right-hand rule for the direction of magnetic force on a **positive** charge moving in a magnetic field:

- ① Place the \vec{v} and \vec{B} vectors tail to tail.
- ② Imagine turning \vec{v} toward \vec{B} in the \vec{v} - \vec{B} plane (through the smaller angle).
- ③ The force acts along a line perpendicular to the \vec{v} - \vec{B} plane. Curl the fingers of your *right hand* around this line in the same direction you rotated \vec{v} . Your thumb now points in the direction the force acts.

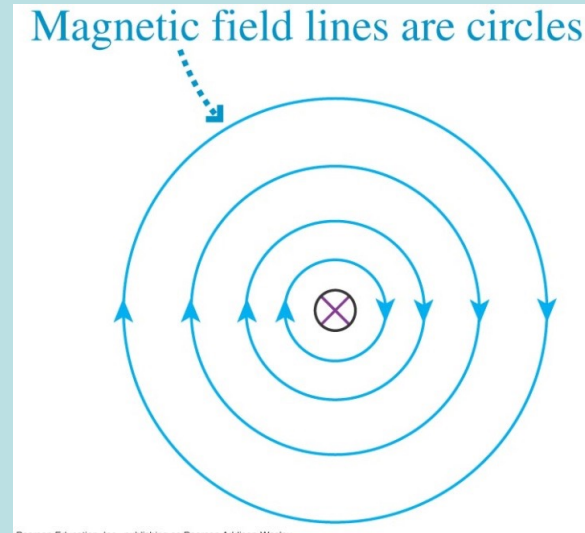
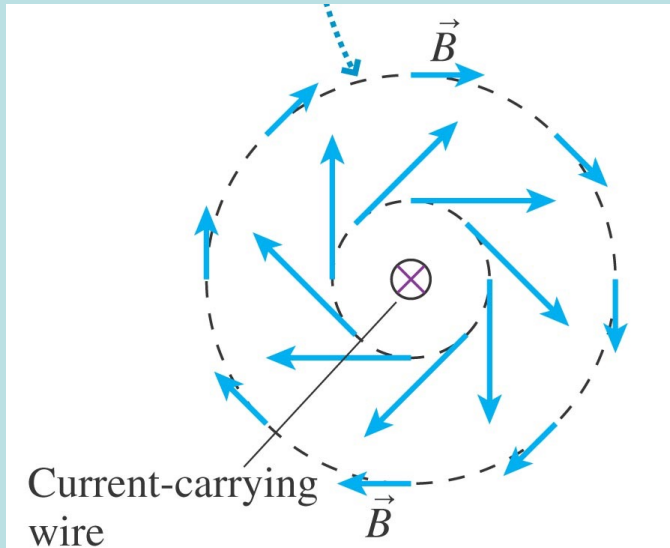
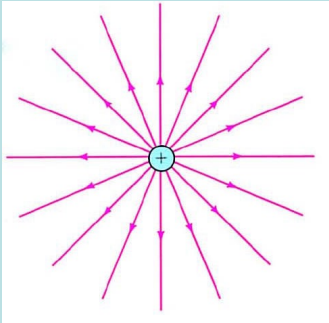




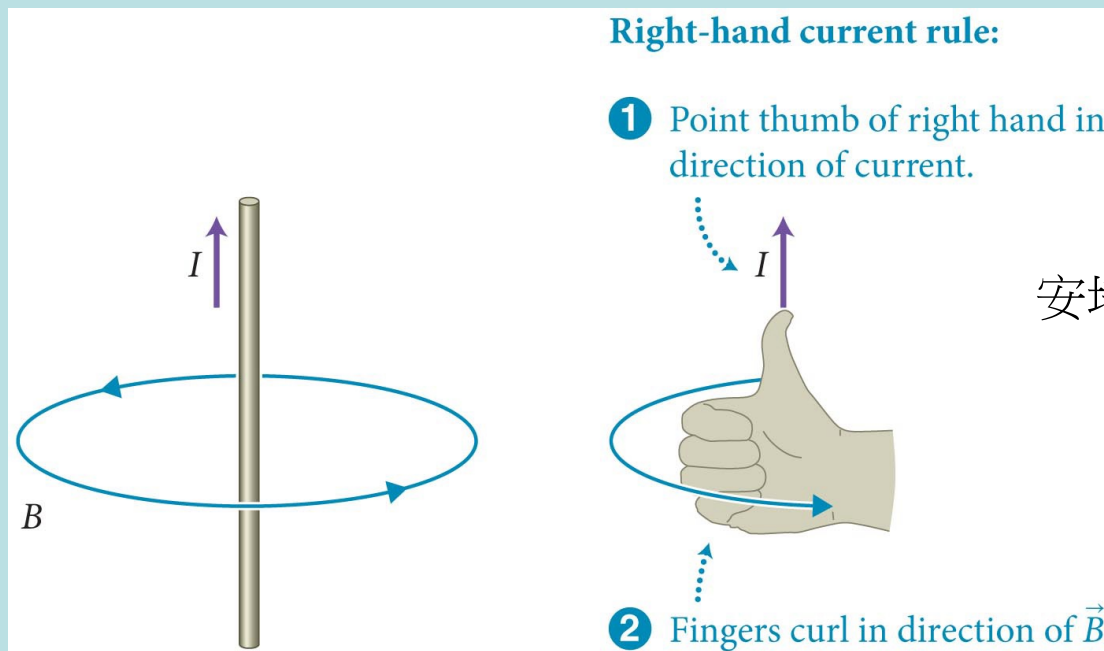
Arago 1820



長直導線電流周圍的磁力線是環繞該電流！

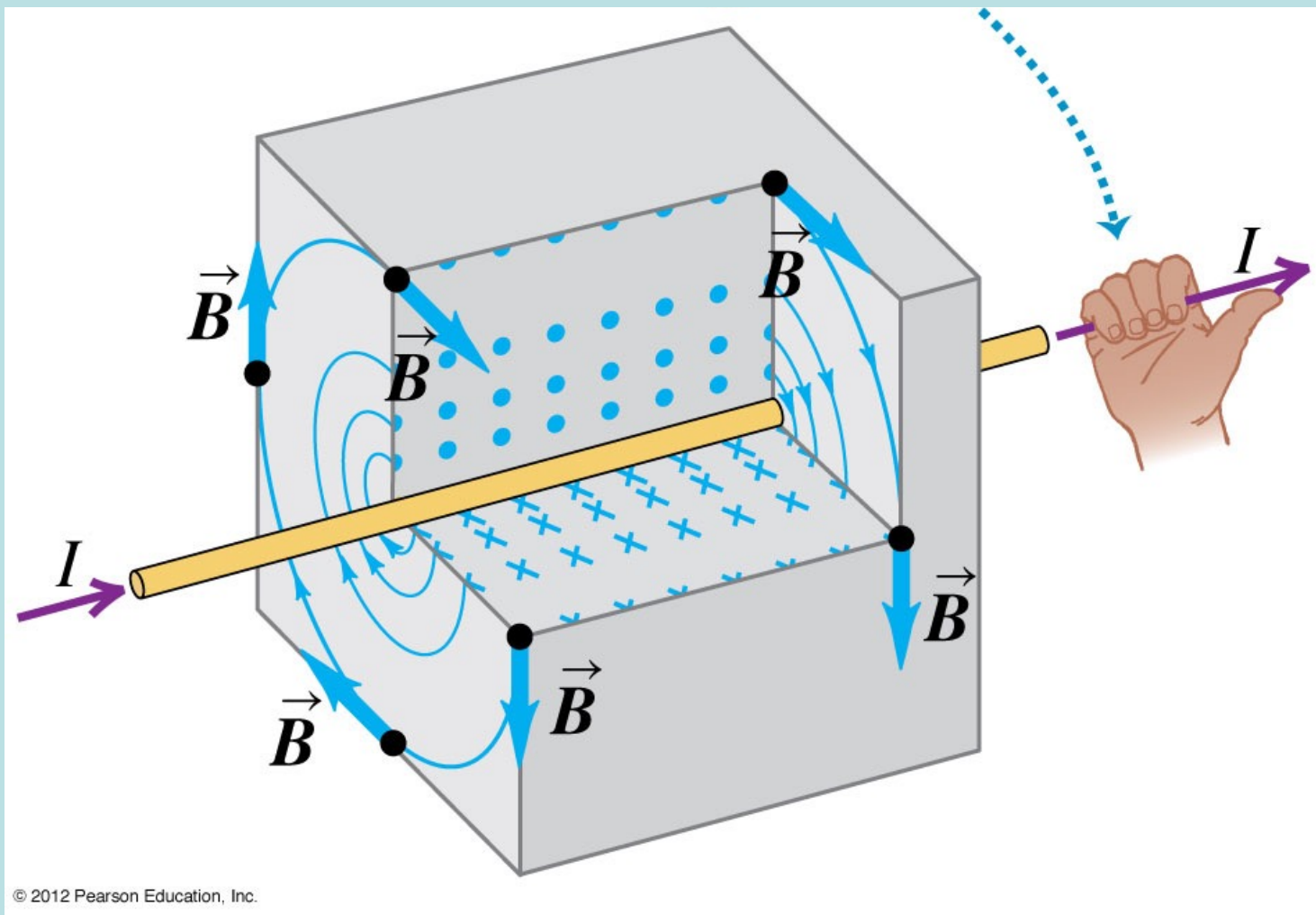


磁力線是無起點與終點的封閉的漩渦狀場線。
這是磁的高斯定律的結果！

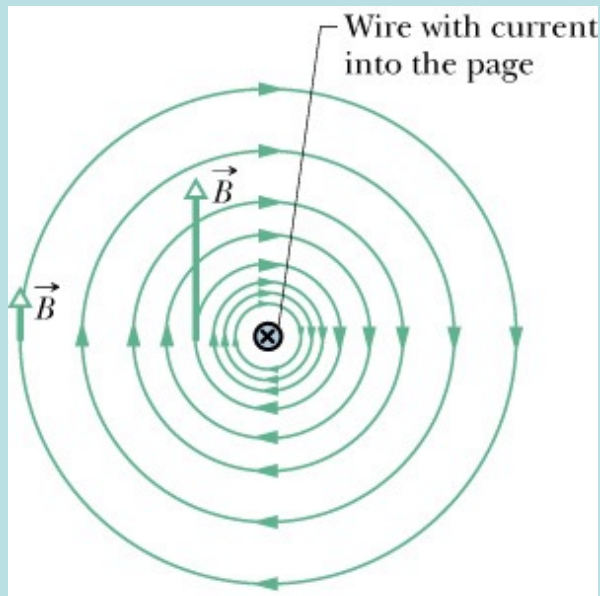


安培右手定則

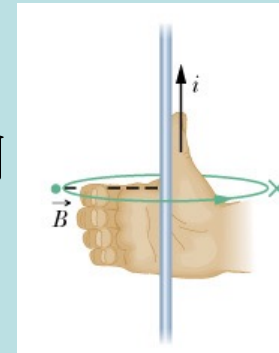
立體圖



長直導線周圍的磁場



方向：安培右手定則

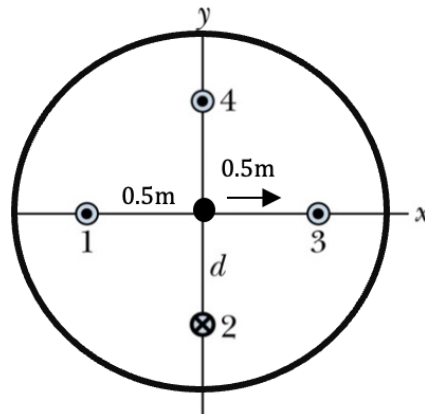


大小： $B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$

1. 考慮四條沿 z 軸方向（ $+z$ 為伸出紙面）的長直導線，導線位置與電流方向如圖所示（黑點表示射出紙面，交叉表示射入紙面），電流大小與 $x - y$ 座標位置分別是：

$$I_1 = 4.0 \text{ A}, (-0.5\text{m}, 0), I_2 = 2.0 \text{ A}, (0, -0.5\text{m}),$$

$$I_3 = 2.0 \text{ A}, (0.5\text{m}, 0), I_4 = 2.0 \text{ A}, (0, 0.5\text{m}).$$



- A. 計算在原點 $(0,0)$ 處， x 方向的磁場分量 B_x 與 y 方向的磁場分量 B_y 。(10)

提示：長直導線磁場大小： $B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$ ， $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$ 。將對各分量有貢獻的電流個別加總比較方便。

- B. 考慮在原點處有一電荷，電荷量為 2.0 C ，以 4.0 m/s 的速度沿 $+x$ 方向移動，此電荷所受的磁力大小是多少 N ？方向為何？(10)

- C. 考慮一個以原點為圓心的圓，半徑為 0.75m ，根據安培定律，磁場沿此圓為路徑的線積分 $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ 等於多少 $\text{T} \cdot \text{m}$ ？提示：應該不需真的算積分，依安培定律就能推得。(10)

解答：

A. 根據安培右手定則， I_1 與 I_3 所產生的磁場方向為沿 $+y$ 及 $-y$ 方向，

$$B_y = \frac{\mu_0(I_1 - I_3)}{2\pi \times 0.5} = \frac{2\mu_0}{\pi} = 8 \times 10^{-7} \text{ T}$$

I_2, I_4 所產生的磁場方向都是沿 $+x$ 方向，

$$B_x = \frac{\mu_0(I_2 + I_4)}{2\pi \times 0.5} = \frac{4\mu_0}{\pi} = 1.6 \times 10^{-6} \text{ T}$$

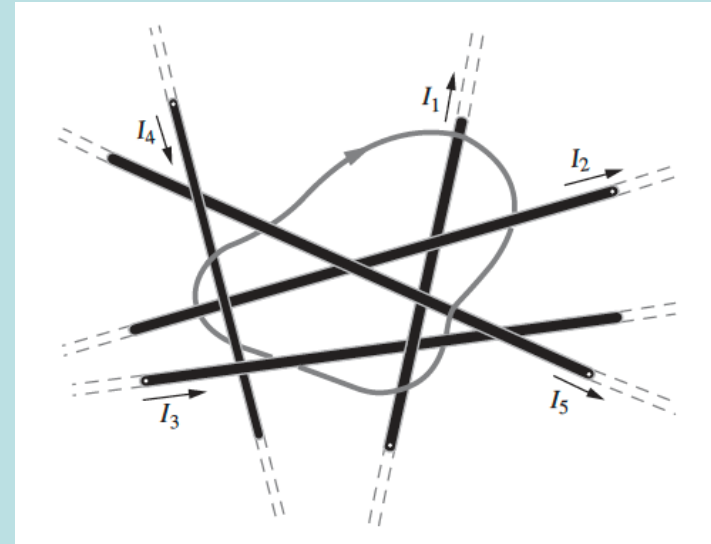
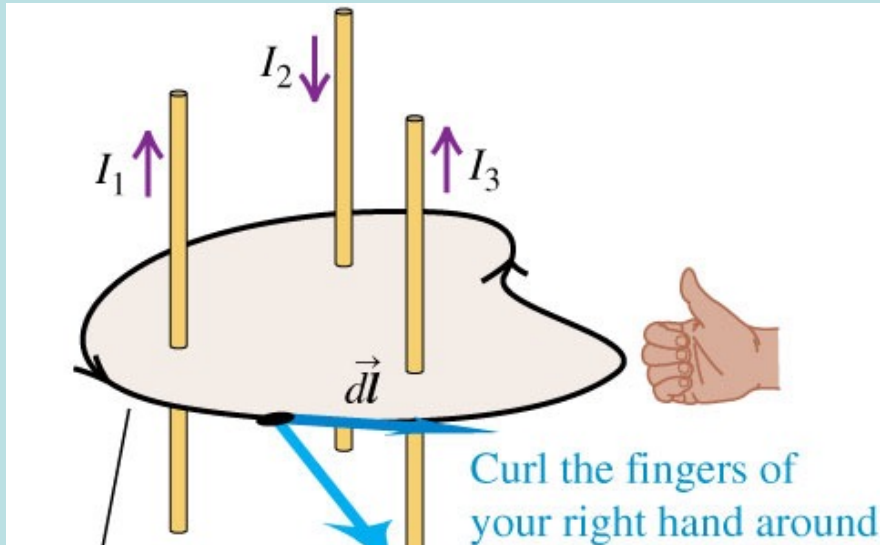
B. B_x 與電荷速度同向，因此對磁力沒有貢獻。

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B} = qv_x B_y \hat{e}_z = 2.0 \cdot 4.0 \cdot 8 \cdot 10^{-7} \hat{e}_z = 6.4 \times 10^{-6} \hat{e}_z$$

1

大小為 $6.4 \times 10^{-6} \text{ N}$ ，方向為 z 方向。

C. $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0(I_1 - I_2 + I_3 + I_4) = 6\mu_0 = 24\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m}$



當有一條以上電流通過時，個別電流產生的磁場（因此磁場線積分）可以疊加。
對任一封閉曲線，磁場的線積分正比於該曲線所包圍的總電流（電流疊加）。

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i \quad \text{安培定律}$$

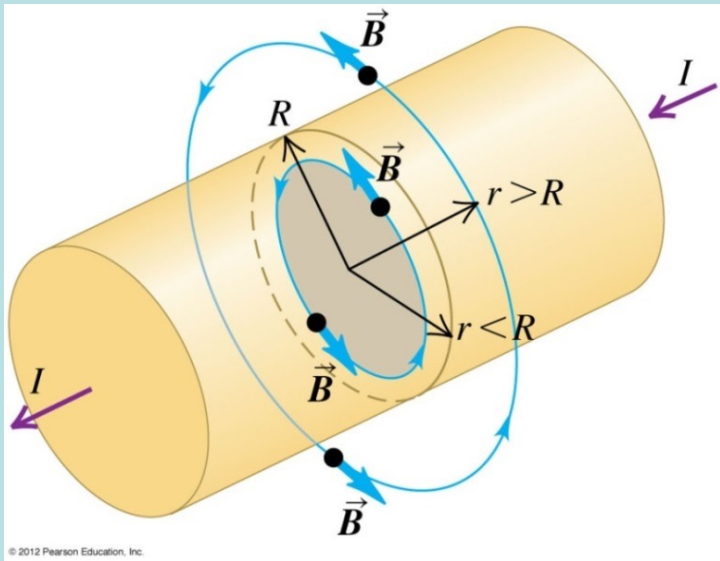
$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$ ，Magnetic (Permeability) Constant

這個結果，即使導線不是直的，只要被該曲線包圍，上式都成立。

我們為磁場找到了一個如高斯定律一樣的定律，

連接迴旋狀磁場 \vec{B} 與產生此磁場的源頭電流 i 。

長直粗電流導線周圍距導線軸為 r 處的磁場
以導線軸為圓心，取半徑 r 的圓形路徑為安培圈：
在導線外：



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B \cdot dl = B \oint dl = B \cdot 2\pi r = \mu_0 i$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \quad \text{導線外磁場如同電流集中於無限細的軸上}$$

在導線內：

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot \pi r^2 \frac{i}{\pi R^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R^2} r$$

