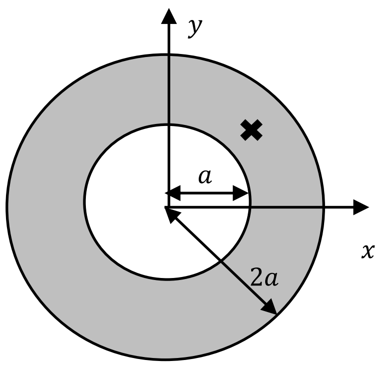
普物期末考

June 2026

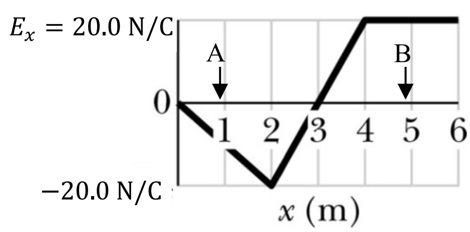
1. 考慮一半徑為$2a$的帶電圓球，球心為原點$(0,0)$。球內有一半徑為a、球心也在原點的圓球型空洞，空洞內無電荷，如圖所示。在帶電圓球內、空洞以外的體積中，電荷是均匀分布的，每單位體積電荷密度為ρ。考慮在距原點$\frac{3}{2}a$，方向與x軸夾$45°$，位置座標為$\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}a, \frac{3}{2\sqrt{2}}a\right)$處，計算此處電場沿$x$方向分量$E_x$、及沿$y$方向分量$E_y$。以$\rho, a, \epsilon_0$表示。(25)



解答：

先算出電場的大小，選擇高斯面為半徑為$\frac{3}{2}a$的球，利用高斯定律，$4\pi\frac{9}{4}a^2E = q/\epsilon_0$，高斯面內的電荷：$q = \rho\left(\frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{2}a\right)^3 - \frac{4}{3}\pi a^3\right) = \rho\frac{19}{8}\frac{4}{3}\pi a^3 = \frac{19}{6}\rho\pi a^3$，電場大小$E = \frac{\frac{19}{6}\rho\pi a^3}{4\pi\frac{9}{4}a^2\epsilon_0} = \frac{19\rho a}{54\epsilon_0}$。沿$x$方向分量：$E_x = \frac{19\rho a}{54\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{2}}$，沿$y$方向分量：$E_y = \frac{19\rho a}{54\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{2}}$。

2. 考慮某帶電介質內一個區域的電場，此電場的方向是沿x軸方向，大小與所在位置的y, z座標無關，只與其x座標有關，因此可以寫成$E_x(x)$。$E_x(x)$與座標x的關係如下圖所示：



考慮空間中的兩點，A: $x_A = 1.0$ m與B: $x_B = 5.0$ m。若$V_A = 10$ V，V_B是多少 V？原點處$x = 0$ m的電位V_0是多少 V？在原點與 B 之間電位最高處的x座標是多少？(25)

提示：$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int_A^B E_x \cdot dx,\ \frac{dV}{dx} = -E_x$

解答：$V_B - V_A = -\int_A^B E_x \cdot dx$。注意$2 \to 3$及$3 \to 4$間電位差抵消：

$$V_B - V_A = -\int_A^B E_x \cdot dx = -\left[20 \cdot 1.0(4 \to 5) - \frac{20+10}{2} \cdot 1.0(1 \to 2)\right] = -5\mathrm{V}$$

$$V_B = 5\ \mathrm{V}$$

$$V_A - V_0 = -\left[-\frac{10}{2} \cdot 1.0(0 \to 1)\right] = 5\mathrm{V}$$

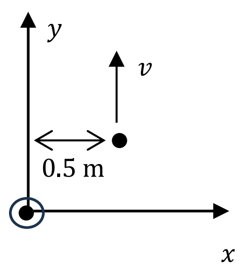
$$V_A = 10\ \mathrm{V} \to V_0 = 5\ \mathrm{V}$$

原點電位較低，電場由高電位指向低電位，因此在原點與A點之間，電場是負的，指向原點。

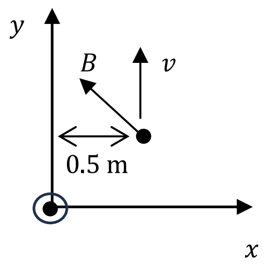
在原點與 B 之間電位最高處，是一極值，因此$\frac{dV}{dx} = 0 = -E_x$，在電場為零處：$x = 3.0\ \mathrm{m}$。

3. 考慮在原點處有一長直導線，電流大小是：$I = 4.0\ \mathrm{A}$，電流方向垂直射出紙面。有一電荷，位置在$(0.5\mathrm{m}, 0.5\mathrm{m})$，電荷量為$2.0\ \mathrm{C}$，以$4.0\ \mathrm{m/s}$ 的速度沿$+y$方向移動，此電荷所受的磁力大小是多少 N？方向為何？(25)

提示：長直導線磁場大小：$B = \frac{\mu_o i}{2\pi r}$，$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \mathrm{T \cdot m/A}$。以磁場向量分量算，先算大小，再算分量比較好算。

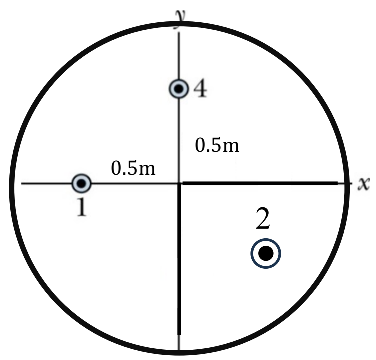


Sol: 電荷沿$+y$方向移動，因此只有x方向磁場會施以磁力：$F = qvB_x$，磁場大小為 $B = \frac{\mu_o i}{2\pi r} = \frac{4.0 \times 2 \times 10^{-7}}{\sqrt{0.5}}$，投影於$x$方向: $B_x = B\frac{1}{\sqrt{2}} = 8 \times 10^{-7}\ \mathrm{T}$。$F = qvB_x = 6.4 \times 10^{-6}\ \mathrm{N}$。方向為$z$方向。



4. 考慮三條沿z軸方向（$+z$為伸出紙面）的長直導線，導線位置與電流方向如圖所示（黑點表示射出紙面），電流大小與座標位置分別是：

$I_1 = 4.0\ \text{A}, (-0.5\text{m}, 0)$，$I_2 = 2.0\ \text{A}, (0.5\text{m}, -0.5\text{m})$，$I_4 = 2.0\ \text{A}, (0, 0.5\text{m})$。(25)



A. 計算在原點(0,0)處，x方向的磁場分量B_x與y方向的磁場分量B_y。

提示：長直導線磁場大小：$B = \frac{\mu_o i}{2\pi r}$，$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\text{T}\cdot\text{m/A}$。將對各分量有貢獻的電流個別加總比較方便。

B. 考慮一個以原點為圓心的圓，半徑為0.9m，根據安培定律，磁場沿此圓為路徑的線積分$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s}$等於多少T·m？提示：應該不需真的算積分，依安培定律就能推得。

解答：

A. 根據安培右手定則，I_1所產生的磁場方向為沿$+y$方向，

$$B_y = \frac{\mu_0(I_1)}{2\pi \times 0.5} = \frac{4\mu_0}{\pi} = 16 \times 10^{-7}\ \text{T}$$

I_4所產生的磁場方向都是沿$+x$方向，

$$B_x = \frac{\mu_0(I_4)}{2\pi \times 0.5} = \frac{2\mu_0}{\pi} = 8.0 \times 10^{-7}\ \text{T}$$

I_2所產生的磁場磁場大小為$B = \frac{\mu_o i}{2\pi r} = \frac{2.0\times2\times10^{-7}}{\sqrt{0.5}}$，投影於$x, y$方向: $B_x = B_y =$

$-B\frac{1}{\sqrt{2}} = -4 \times 10^{-7}\ \mathrm{T}$。

加總：

$$B_x = 4.0 \times 10^{-7}\ \mathrm{T}, B_y = 1.2 \times 10^{-6}\ \mathrm{T}$$

B. $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0(I_1 + I_2 + I_4) = 8\mu_0 = 32\pi \times 10^{-7}\mathrm{T} \cdot \mathrm{m}$