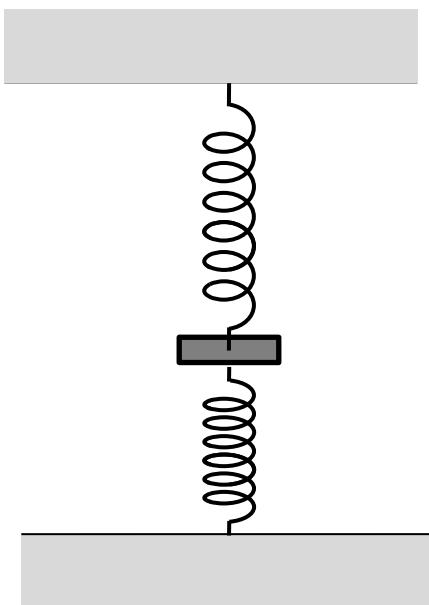


普物期末考

Dec 2025

1. 有一個薄片方塊，質量為 0.1 kg ，厚度可以忽略。上下各接一個彈簧，彈簧的自然長度各都為 0.1m ，彈力常數 $k = 100.0 \text{ N/m}$ ，彈簧的另一端固定於不動的上下兩個水平牆面，兩水平牆面的垂直距離為 0.16m ，兩固定點水平位置相同，假設兩個彈簧一直保持都是垂直的，如下圖所示。為方便討論，以兩水平牆面間的中點為垂直高度 $y = 0$ ，注意當方塊在 $y = 0$ ，兩個彈簧都是被壓縮的。(30)

- A. 計算方塊的總位能 $U(y)$ 。設彈力位能以彈簧在自然長度時為零，重力位能以 $y = 0$ 為零。將方塊提高至高度 $y = 0.02\text{m}$ 處，自靜止狀態放手，方塊落下後反彈向上。
- B. 方塊的機械能等於多少 J ？當方塊下落至 $y = 0$ 處，速率是多少 m/s ？
- C. 下落過程中，方塊速率最快時的高度 y_0 是多少 m ？
- D. 當方塊反彈時，高度 y_1 是多少 m ？



解答：

- A. 總位能為彈力位能加重力位能：

$$U = mg \cdot y + \frac{1}{2}k \cdot (0.02 + y)^2 + \frac{1}{2}k \cdot (0.02 - y)^2 = ky^2 + mgy + k \times 0.0004$$
$$U = 100y^2 + y + 0.04$$

- B. 在出發點高度 $y = 0.02\text{m}$ 處，位能等於： $U(0.02) = 0.1 \text{ J}$ ，動能為零，機械能等於 $E = 0.1 \text{ J}$ 。當方塊下落至 $y = 0$ 處，位能等於 0.04 J ，動能等於 0.06 J ，此時方塊速率 $v = \sqrt{1.2} \sim 1.1 \text{ m/s}$ 。
- C. 方塊由靜止因力而加速下落，力之後改變方向，使下落開始減速，因此速率最大時為平衡點，力正好為零，設此時的高度為 y_0 ， $U'(y_0) = 200y_0 + 1 = 0$ ， $y_0 = 0.005\text{m}$ 。

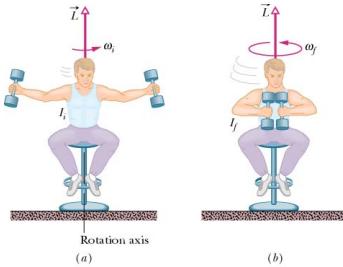
D. 反彈點為折返點，動能為零，位能等於機械能：

$$U = 100y^2 + y + 0.04 = 0.1$$

$$100y^2 + y - 0.06 = (10y + 0.3)(10y - 0.2) = 0$$

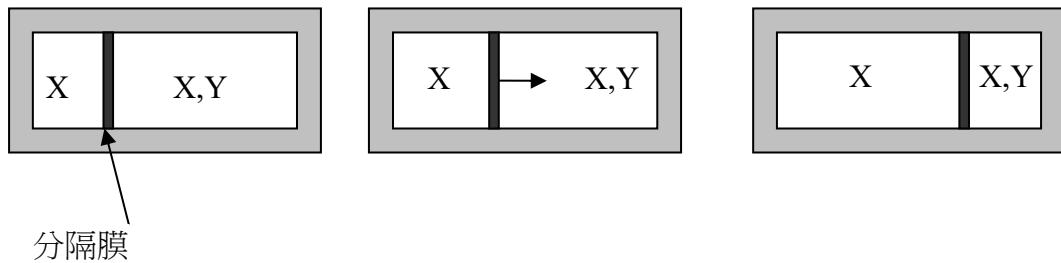
反彈點在 $y_1 = -0.03\text{ m}$ 。

2. 如下圖之一觀察者，開始時手臂張開，如左圖。使整個啞鈴、人、椅一起開始等速旋轉，角速度為 $\omega_i = 2\pi \text{ s}^{-1}$ (角度單位是度： $2\pi = 360^\circ$)，啞鈴距軸心約 1.5 m 。現在在旋轉過程中，觀察者將啞鈴拉向自己，如右圖，此時啞鈴距軸心約 0.3 m 。假設摩擦力都可忽略，人、椅的質量相對啞鈴的質量也可忽略(計算方便)。



- A. 計算此時的角速度 ω_f 。
- B. 每秒鐘旋轉幾次？(15)
- C. 考慮一個容器，內有單原子分子所組成的 X 氣體與 Y 氣體，周圍完全隔熱，容器內的溫度為 27°C 。在容器內有一無摩擦、可左右活動的半透膜，X 氣體可以自由通過此膜，Y 氣體則完全不能通過。膜左方空間有 X 氣體，右方則有 X 氣體與 Y 氣體，X 氣體總莫耳數為 2.0 ，Y 氣體莫耳數為 1.0 。此膜一開始的位置，恰使膜左方與右方空間的體積比為 $1:2$ ，半透膜上來自右方空間 Y 氣體的壓力為 1.0 atm ，因為 X 氣體可以通過此膜，所以對膜的壓力沒有貢獻。實驗者開始施力將半透膜慢慢向右移動，最後，當膜左方與右方空間的體積比為 $2:1$ 時，使膜固定，此時半透膜上來自右室 Y 氣體的壓力為 2.5 atm 。假設此過程發生夠慢，Y 氣體與 X 氣體一直處於熱平衡狀態。(25)

提示：假設氣體足夠稀薄，所以兩種氣體除了交換熱量之外，可以視為彼此獨立的理想氣體。



- A. Y 氣體的末溫度是多少 K？半透膜右方及左方的 X 氣體的末溫度各是多少 K？
 B. 氣體的總能量（X 氣體加 Y 氣體）變化是多少？實驗者對膜施力所作的功是多少？
 C. 在末狀態，膜右方空間容器壁上，X 氣體與 Y 氣體的總壓力是多少 atm？

解答：。

- A. 對 Y 氣體來說：

$$\frac{T_f}{P_f V_f} = \frac{T_i}{P_i V_i}$$

$$\frac{T_f}{2.5 \cdot \frac{1}{3} V_0} = \frac{300}{1.0 \cdot \frac{2}{3} V_0}$$

因此 $T_f = 375$ K。

根據熱力學第零定律，在右室中達成熱平衡的氣體溫度相等，右室 X 氣體與 Y 氣體處於熱平衡，故溫度也是 375 K。分隔膜對 X 氣體無影響，因此左右兩室的 X 氣體溫度與壓力皆相等，故左方 X 氣體溫度也是 375 K。

- B. 因為能量守恆，容器隔熱，實驗者對膜施力所作的功等於 X 氣體與 Y 氣體總能量變化，而總能量完全由溫度決定：

$$\Delta E_{\text{int}} = \frac{3}{2} nR(T_f - T_i) = \frac{3}{2} 3R \cdot 75 = 2800 \text{ J}$$

$W = 2800 \text{ J}$ 。

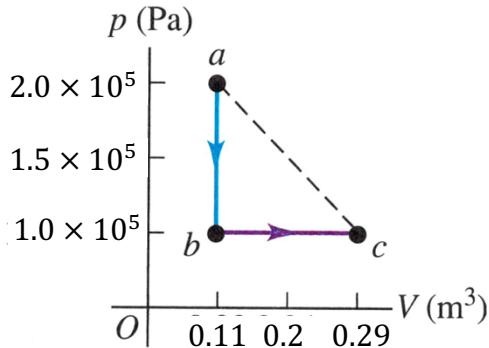
- C. 容器壁上的壓力等於 X 氣體與 Y 氣體壓力的總和，Y 氣體的壓力已知是 2.5 atm。注意左右兩室的 X 氣體壓力相等，因 X 氣體與 Y 氣體同溫：

$$\frac{n_X}{P_X V_X} = \frac{n_Y}{P_Y V_Y}$$

$$\frac{2}{P_X \cdot V_0} = \frac{1}{2.5 \cdot \frac{1}{3} V_0}$$

$P_X = 1.6 \text{ atm}$ ，膜右方空間容器壁上的壓力是 4.1 atm。

D. 有一氣體作如下圖 $a \rightarrow c$ 的擴張。(30)



A. 若此氣體為 1.0 kg 的冷媒四氟乙烷 CF_4H_2 ，它在不同溫度與壓力下，每一kg的體積、內能如下表所示：氣壓單位(Pa是 SI 制單位) $1 \text{ bar} = 1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$

Table A-18 Properties of superheated refrigerant 134a (CF_4H_2)

(T , $^{\circ}\text{C}$; v , m^3/kg ; u , kJ/kg ; h , kJ/kg ; s , kJ/kg K)

T	v	u	h	s	v	u	h	s
0.6 bar (0.060 MPa) ($T_{\text{sat}} = -37.07^{\circ}\text{C}$)					1.0 bar (0.10 MPa) ($T_{\text{sat}} = -26.43^{\circ}\text{C}$)			
Sat.	0.31003	206.12	224.72	0.9520	0.19170	212.18	231.35	0.9395
-20	0.33536	217.86	237.98	1.0062	0.19770	216.77	236.54	0.9602
-10	0.34992	224.97	245.96	1.0371	0.20686	224.01	244.70	0.9918
0	0.36433	232.24	254.10	1.0675	0.21587	231.41	252.99	1.0227
10	0.37861	239.69	262.41	1.0973	0.22473	238.96	261.43	1.0531
20	0.39279	247.32	270.89	1.1267	0.23349	246.67	270.02	1.0829
30	0.40688	255.12	279.53	1.1557	0.24216	254.54	278.76	1.1122
40	0.42091	263.10	288.35	1.1844	0.25076	262.58	287.66	1.1411
50	0.43487	271.25	297.34	1.2126	0.25930	270.79	296.72	1.1696
60	0.44879	279.58	306.51	1.2405	0.26779	279.16	305.94	1.1977
70	0.46266	288.08	315.84	1.2681	0.27623	287.70	315.32	1.2254
80	0.47650	296.75	325.34	1.2954	0.28464	296.40	324.87	1.2528
90	0.49031	305.58	335.00	1.3224	0.29302	305.27	334.57	1.2799
1.4 bars (0.14 MPa) ($T_{\text{sat}} = -18.80^{\circ}\text{C}$)					1.8 bars (0.18 MPa) ($T_{\text{sat}} = -12.73^{\circ}\text{C}$)			
Sat.	0.13945	216.52	236.04	0.9322	0.10983	219.94	239.71	0.9273
-10	0.14549	223.03	243.40	0.9606	0.11135	222.02	242.06	0.9362
0	0.15219	230.55	251.86	0.9922	0.11678	229.67	250.69	0.9684
10	0.15875	238.21	260.43	1.0230	0.12207	237.44	259.41	0.9998
20	0.16520	246.01	269.13	1.0532	0.12723	245.33	268.23	1.0304
30	0.17155	253.96	277.97	1.0828	0.13230	253.36	277.17	1.0604
40	0.17783	262.06	286.96	1.1120	0.13730	261.53	286.24	1.0898
50	0.18404	270.32	296.09	1.1407	0.14222	269.85	295.45	1.1187
60	0.19020	278.74	305.37	1.1690	0.14710	278.31	304.79	1.1472
70	0.19633	287.32	314.80	1.1969	0.15193	286.93	314.28	1.1753
80	0.20241	296.06	324.39	1.2244	0.15672	295.71	323.92	1.2030
90	0.20846	304.95	334.14	1.2516	0.16148	304.63	333.70	1.2303
2.0 bars (0.20 MPa) ($T_{\text{sat}} = -10.09^{\circ}\text{C}$)					2.4 bars (0.24 MPa) ($T_{\text{sat}} = -5.37^{\circ}\text{C}$)			
Sat.	0.09933	221.43	241.30	0.9253	0.08343	224.07	244.09	0.9222
-10	0.09938	221.50	241.38	0.9256	0.08348	224.14	244.17	0.9225
0	0.10438	229.23	250.10	0.9582	0.08574	228.31	248.89	0.9399
10	0.10922	237.05	258.89	0.9898	0.08993	236.26	257.84	0.9721
20	0.11394	244.99	267.78	1.0206	0.09399	244.30	266.85	1.0034
30	0.11856	253.06	276.77	1.0508	0.09794	252.45	275.95	1.0339

計算過程 $a \rightarrow c$ 中，氣體所做的功 W 、與熱量輸送 Q 與內能變化 ΔE_{int} 各是多少 J。

- B. 若圖中的氣體為一由單原子分子組成的理想氣體，而不是冷媒，莫耳數為 10 mol。計算狀態 a, c 的溫度(K)，以及過程 $a \rightarrow c$ 中，氣體所作的熱量輸送與內能變化各是多少 J。

Hint: 功與題 A 一樣，不用再算一次。 $R = 8.31 \text{ J/mol}\cdot\text{K}$ 。

解答：

- A. 氣體 $a \rightarrow c$ 的擴張時所作的功等於梯形面積：

$$W = (0.29 - 0.11) \times \frac{1.0 \times 10^5 + 2.0 \times 10^5}{2} = 2.7 \times 10^4 \text{ J}.$$

兩個狀態的內能能可以查表得到： $E_a = 237 \text{ kJ}$ ， $E_c = 305 \text{ kJ}$ ，內能差為 $\Delta E = 6.8 \times 10^4 \text{ J}$ 。

熱量為 $Q = \Delta E + W = 9.5 \times 10^4 \text{ J}$ 。

B. $T_a = \frac{PV}{nR} = \frac{2.0 \times 10^5 \times 0.11}{10 \times 8.31} \sim 265 \text{ K}$. $T_c = \frac{PV}{nR} = \frac{1.0 \times 10^5 \times 0.29}{10 \times 8.31} \sim 349 \text{ K}$

$$\Delta E = \frac{3}{2} nR\Delta T = 1.05 \times 10^4 \text{ J}$$

熱量為 $Q = \Delta E + W = 3.75 \times 10^4 \text{ J}$