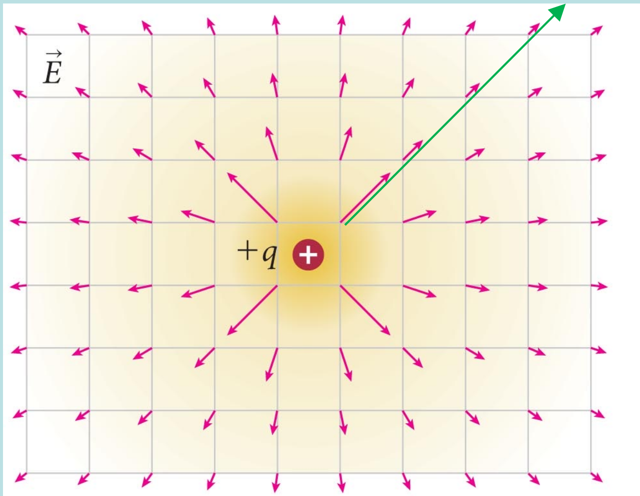
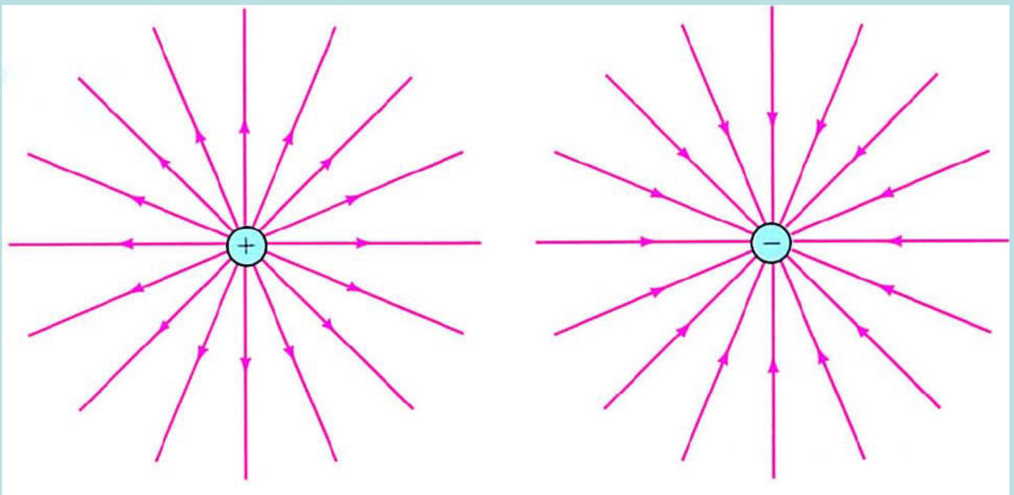
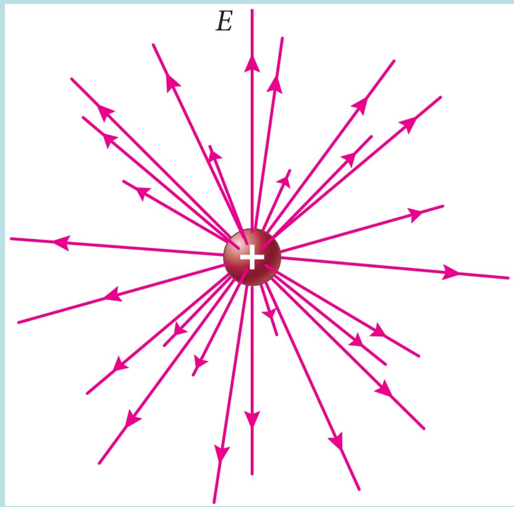
電場線

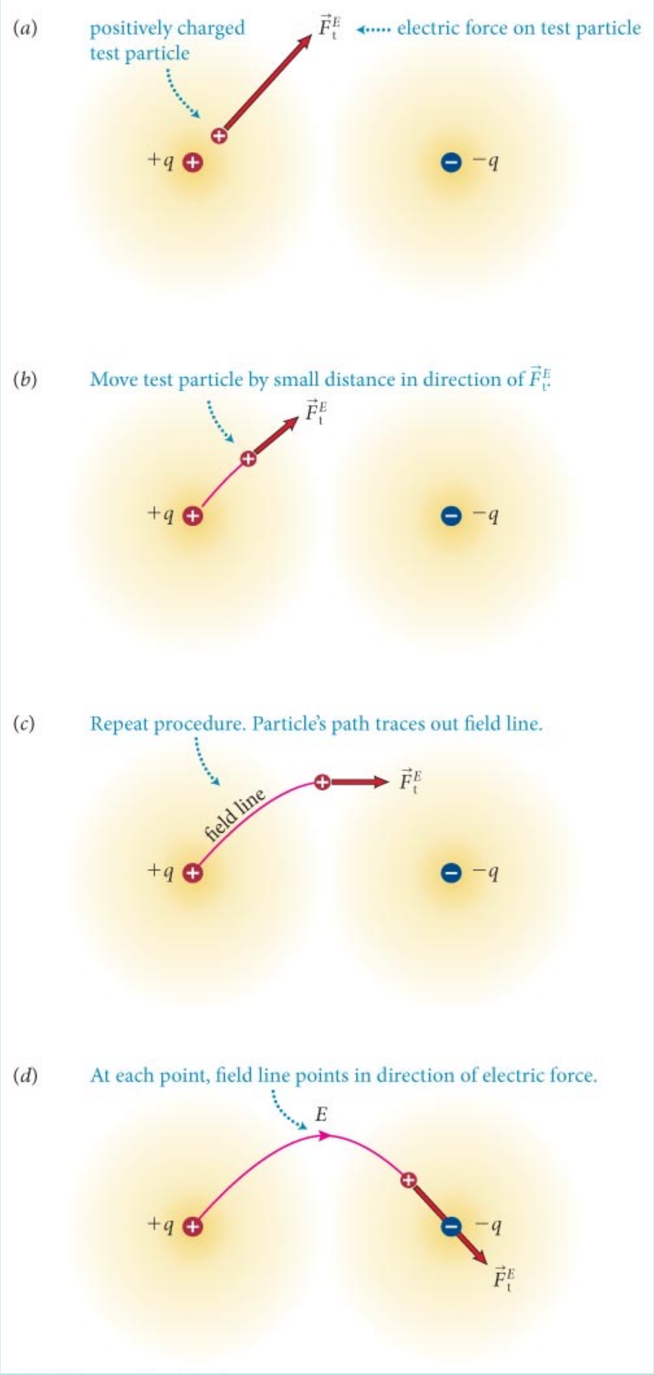
有沒有辦法將場的抽象概念圖像化？



將單一電荷周圍的電場的方向聯接起來，竟然可以連成連續的線！







這裡有一個更精確的作法。

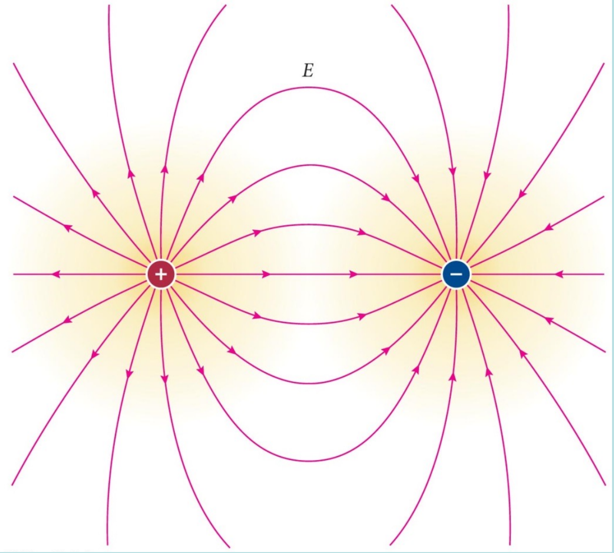
置一小電荷於空間中某處，

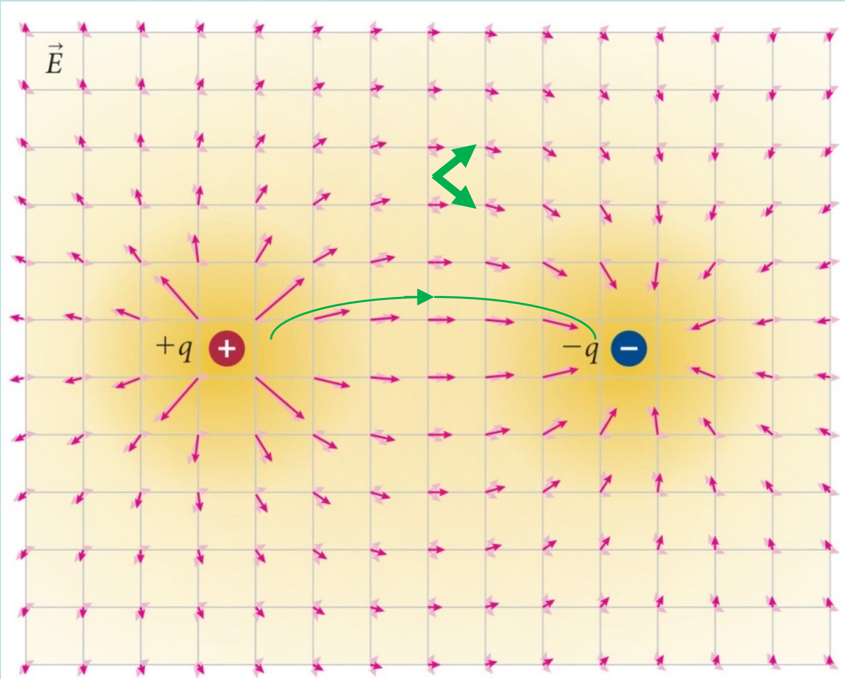
小電荷順著所受靜電力移動一小距離，

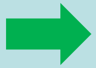
移動後在新位置繼續順著所受靜電力移動一小距離，

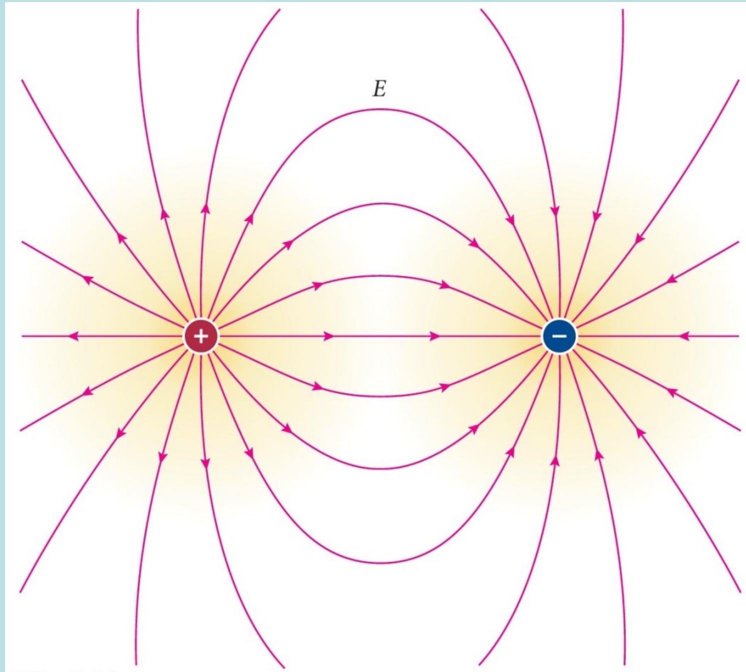
如此可一直繼續，小電荷的軌跡將形成一連續的線。

任何電荷分佈都可以如此繪出場線。





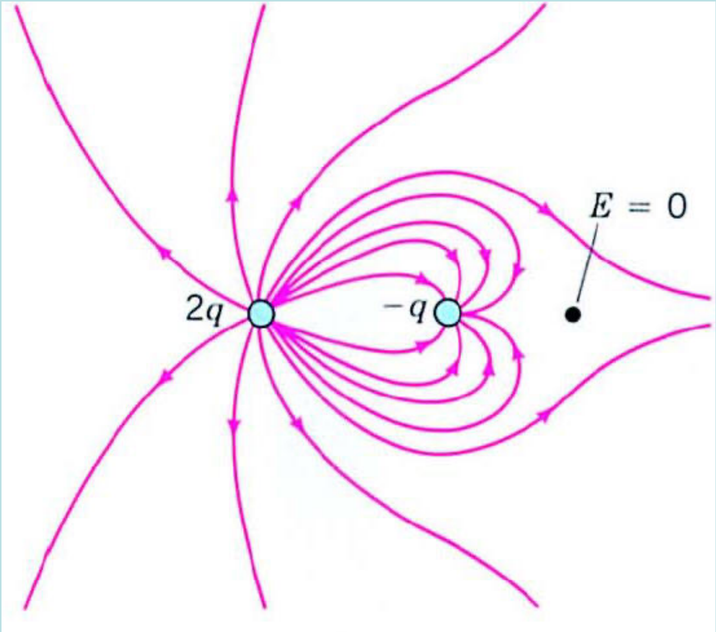




電場的方向連成連續的線！在兩個電荷的周圍也是如此！

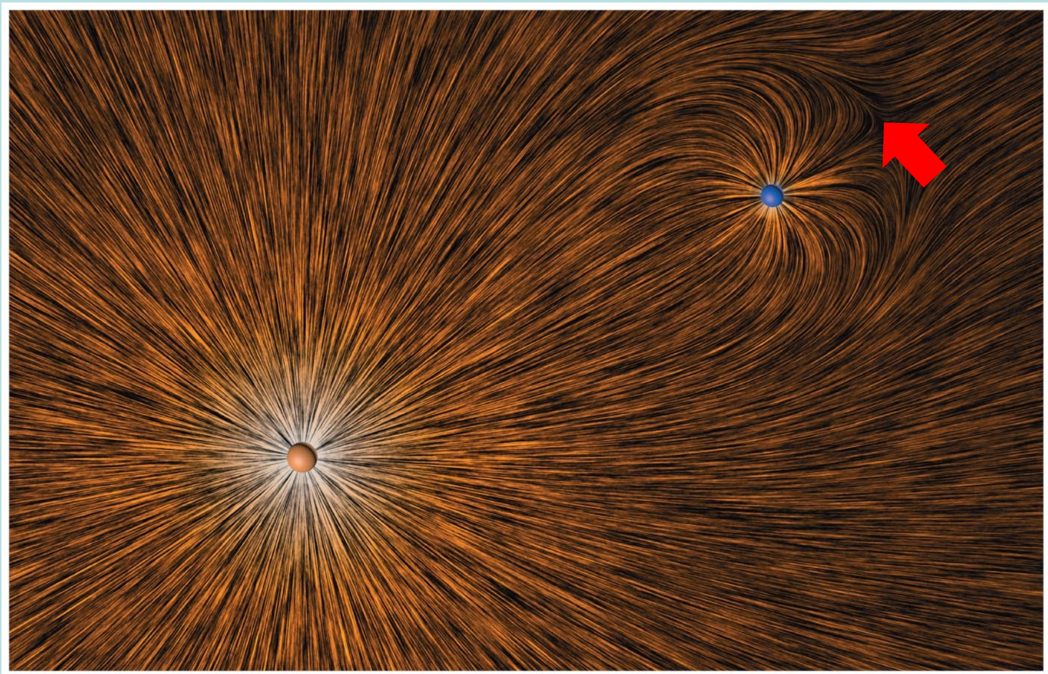
在這兩個圖之中，這些連續的線似乎都從電荷發出與消滅！

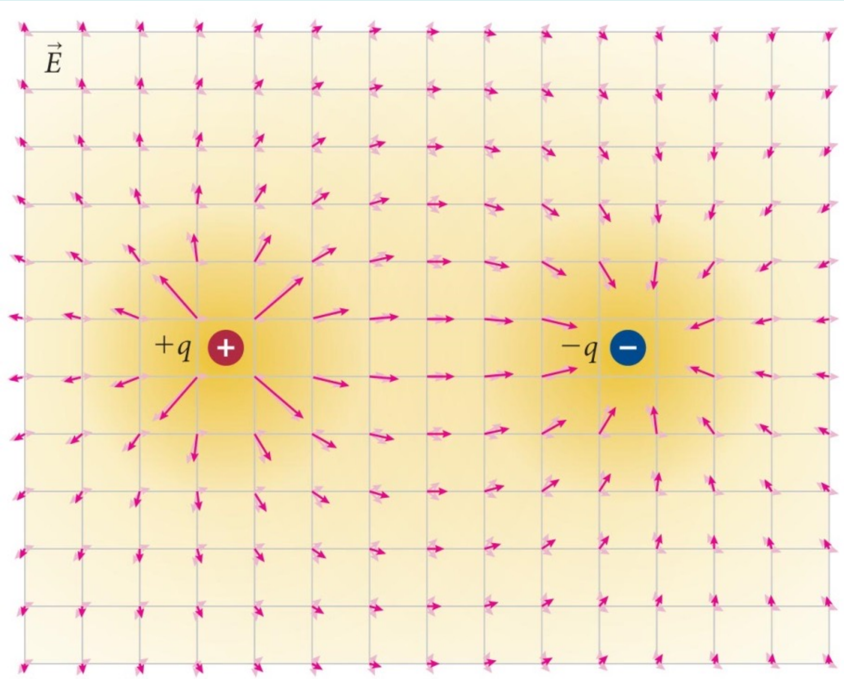
換言之，這些線在空間中不會突然產生或消滅！

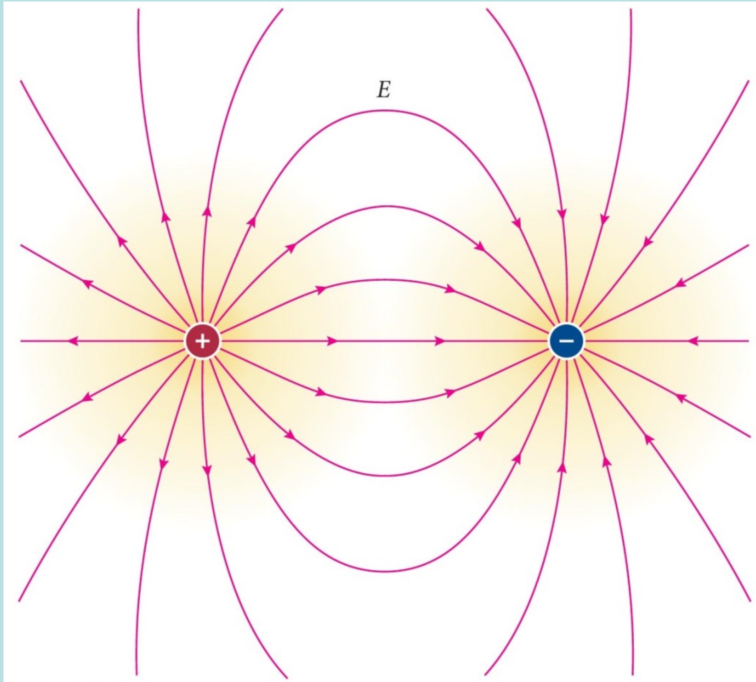


電場為零處，幾乎沒有線通過。

這些線似乎就是場的代表！





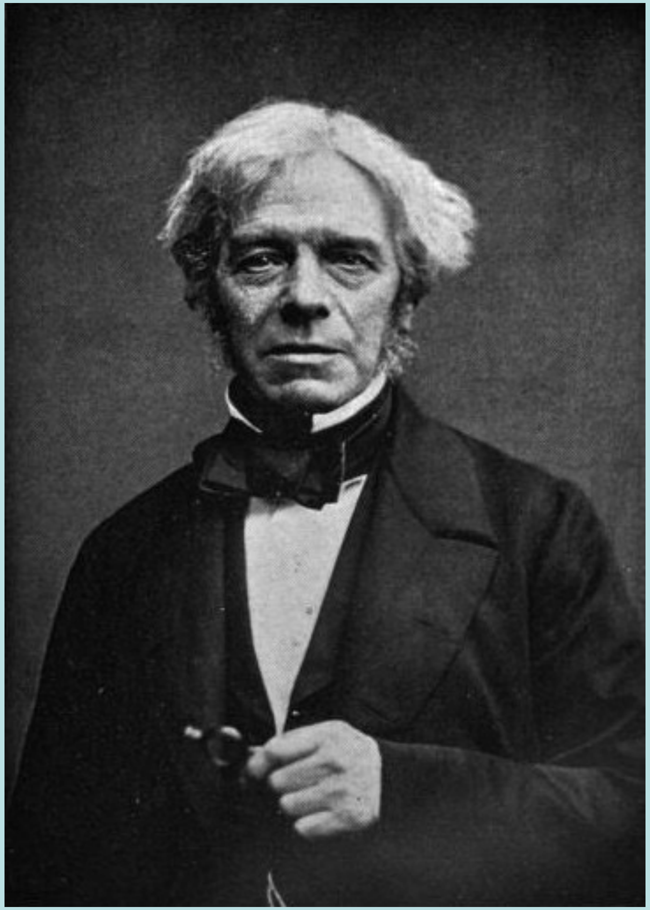


以上繪製線的步驟可在各處重複，因此空間中到處遍佈了連續的電場的線！

法拉第直覺地覺得這是電磁現象非常重要的特質。

這些線稱為電力線或電場線。這是驚天動地的一步！

Faraday 1791-1861

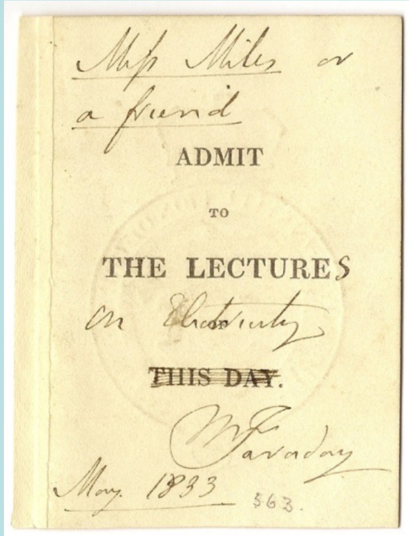



HARROW ALLEY


Bookbinder.

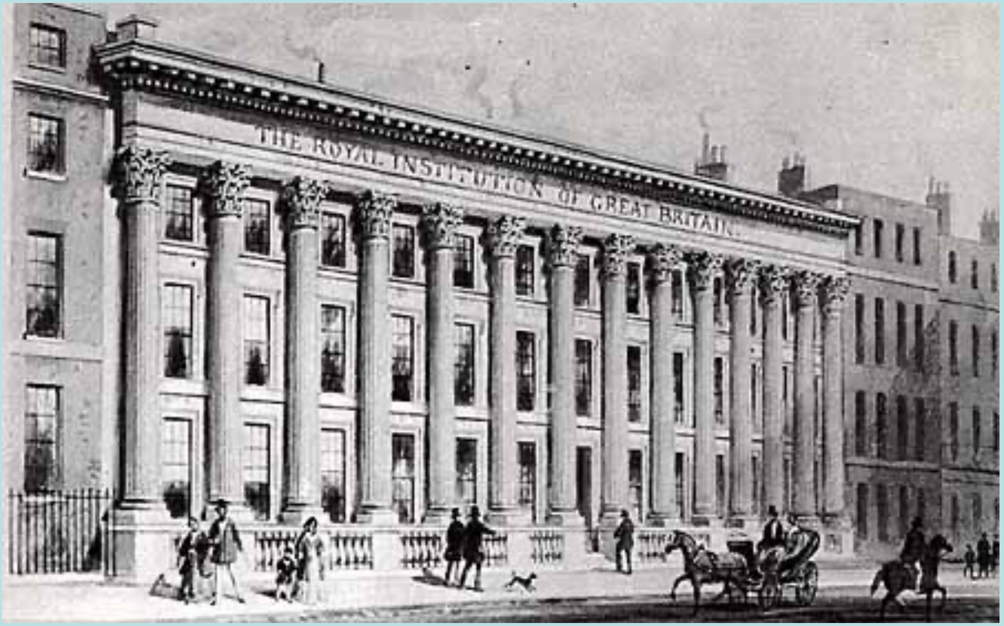

bildarchiv preussischer
kulturbesitz

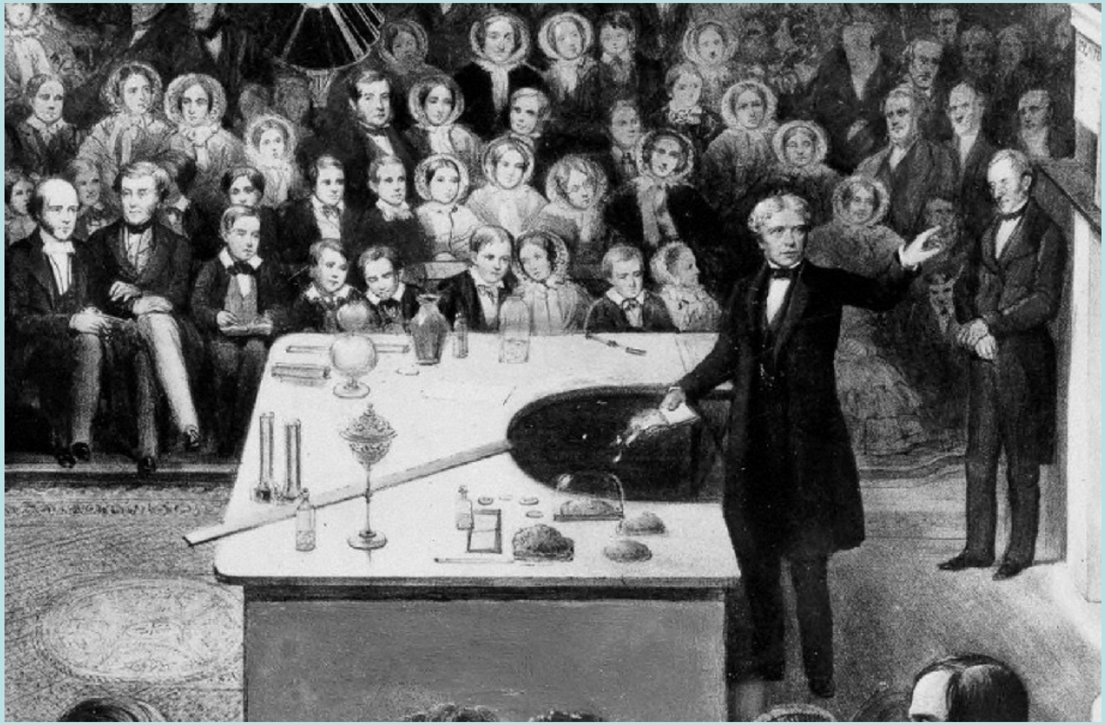
Sir Humphry Davy (1820-1827)

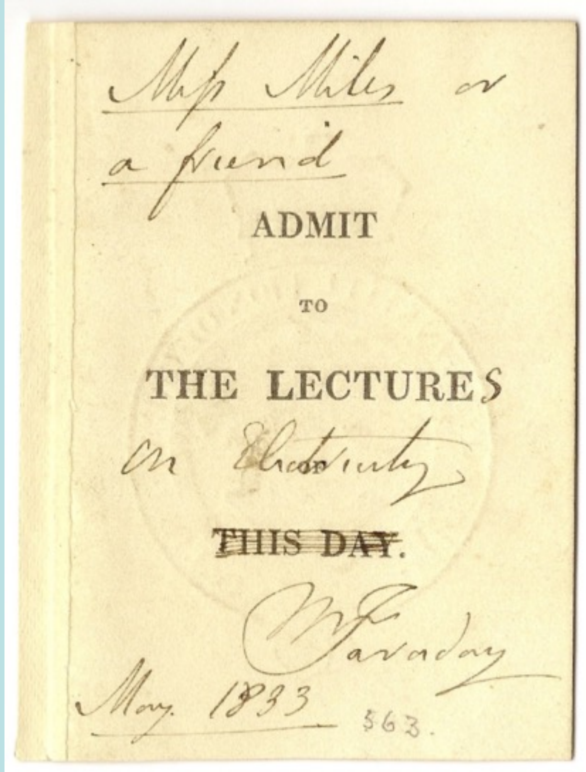


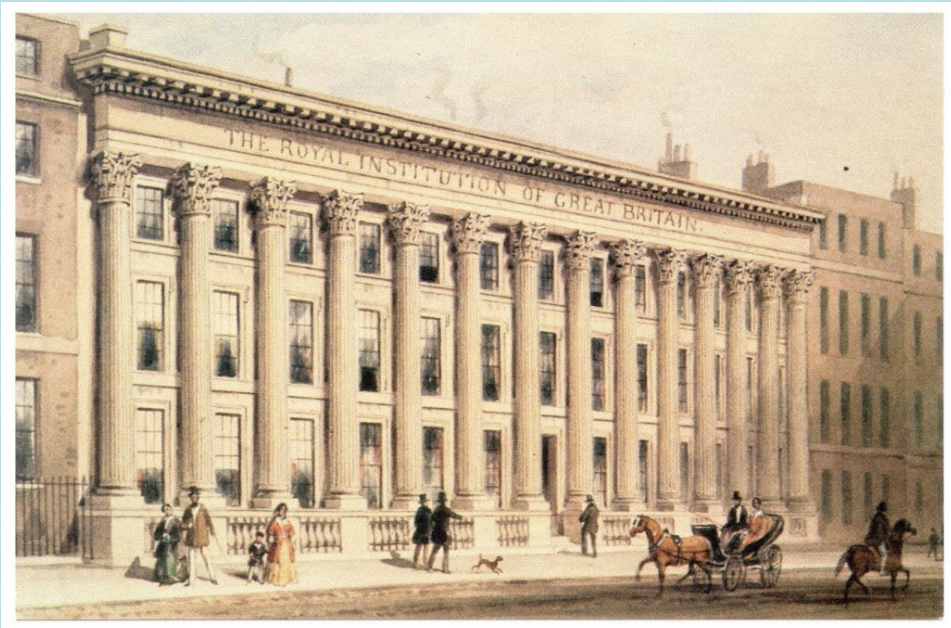
Royal Society

Royal Institute

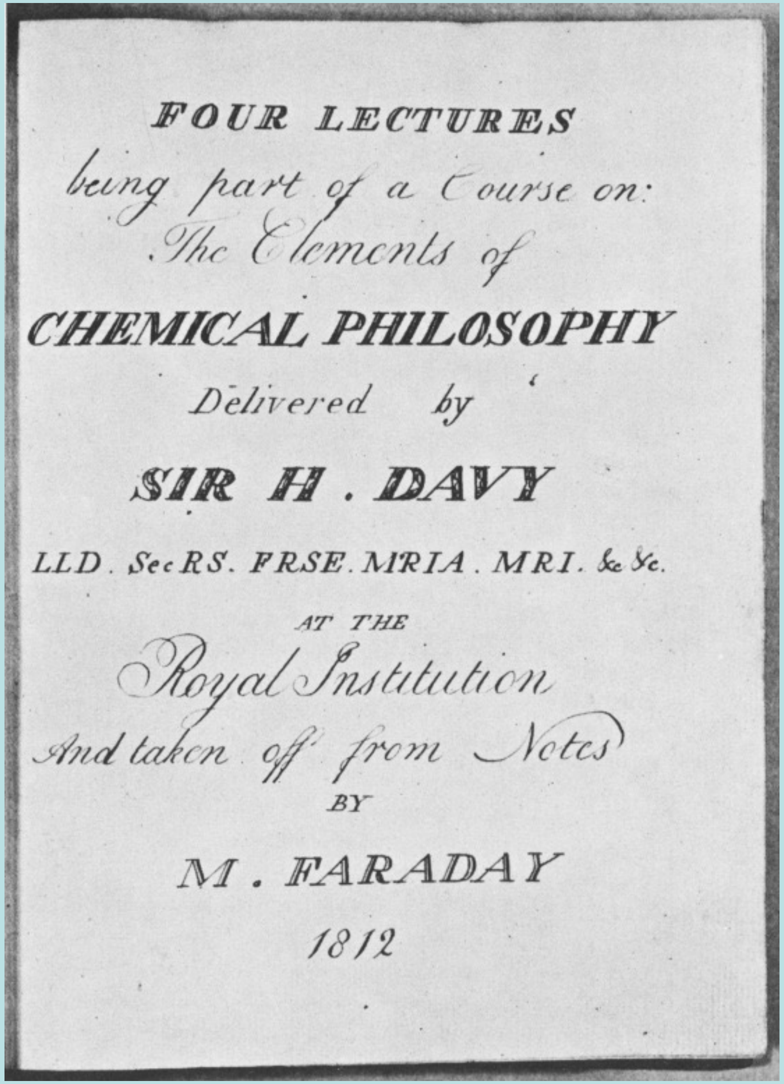


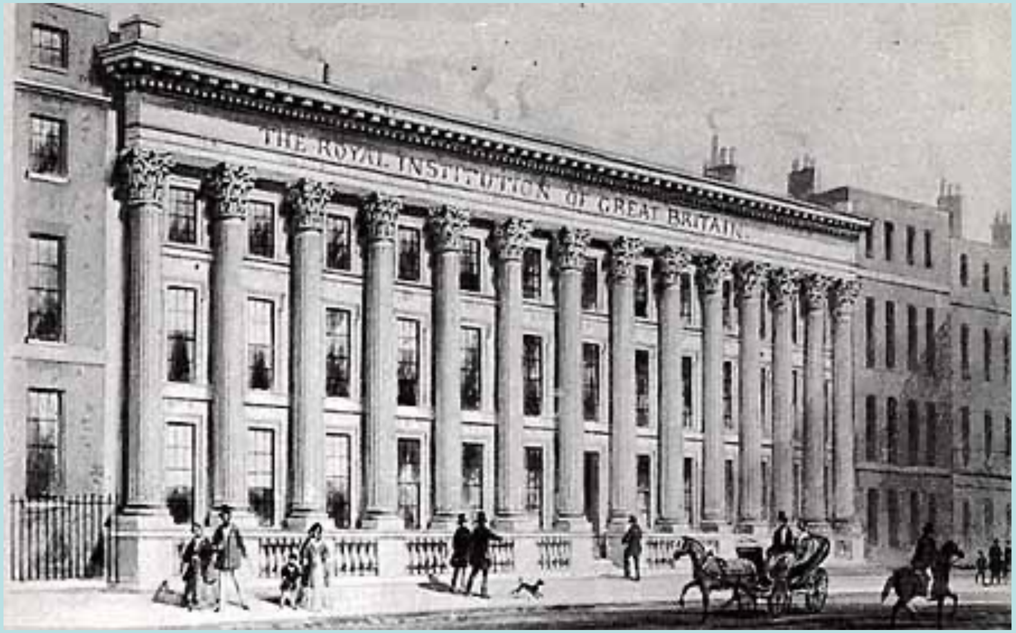


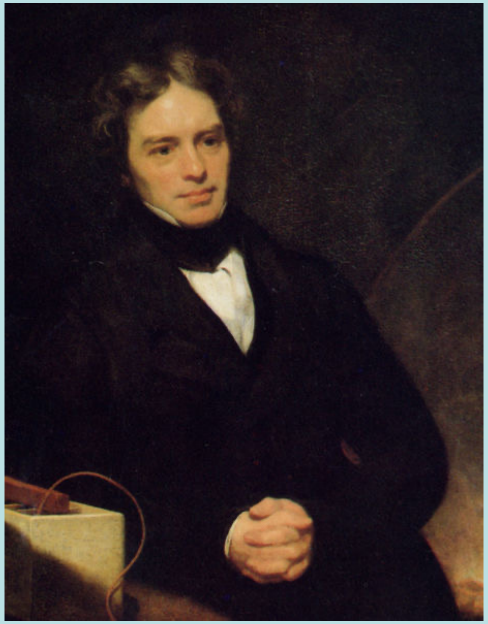

Mrs Miles or
a friend
ADMIT
TO
THE LECTURES
on Electricity
~~THIS DAY.~~
M Faraday
May 1833
563.

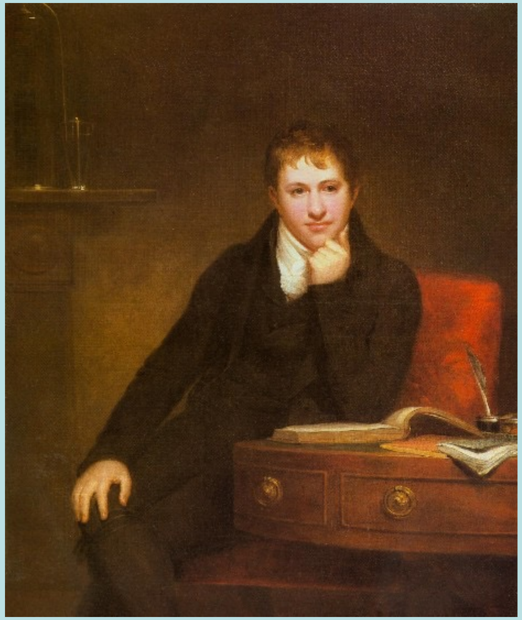


Royal Institute

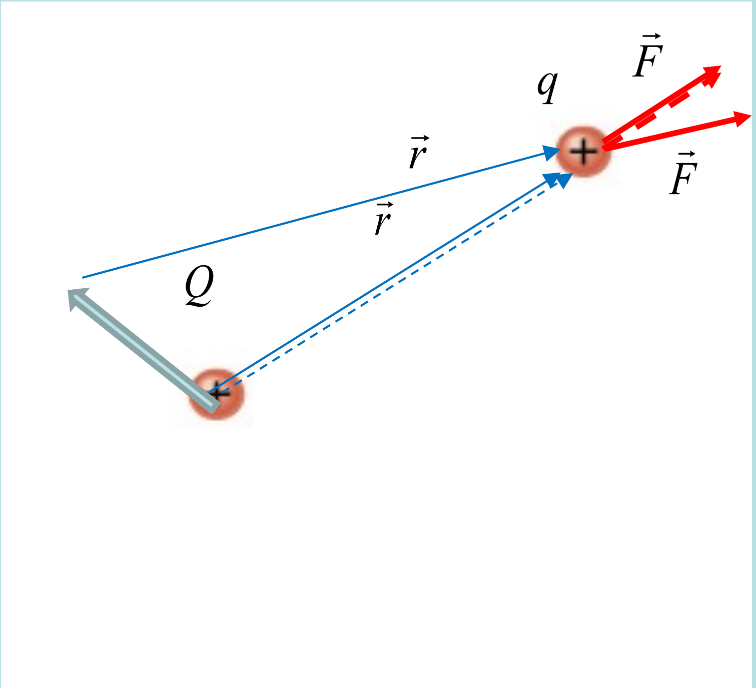

FOUR LECTURES
being part of a Course on:
The Elements of
CHEMICAL PHILOSOPHY
Delivered by
SIR H. DAVY
LLD. SecRS. FRSE. MRIA. MRI. &c &c.
AT THE
Royal Institution
And taken off from Notes
BY
M. FARADAY
1812





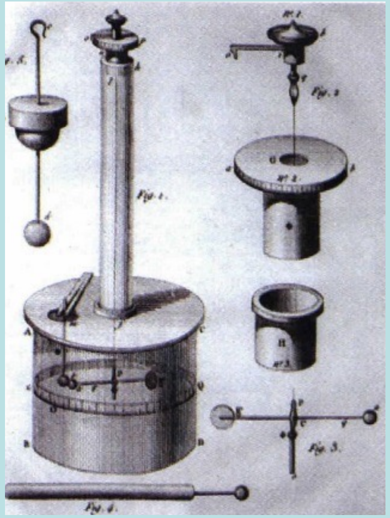


法拉第的儀器



$$\vec{F}(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2(t)}\hat{r}(t)$$

庫倫定律



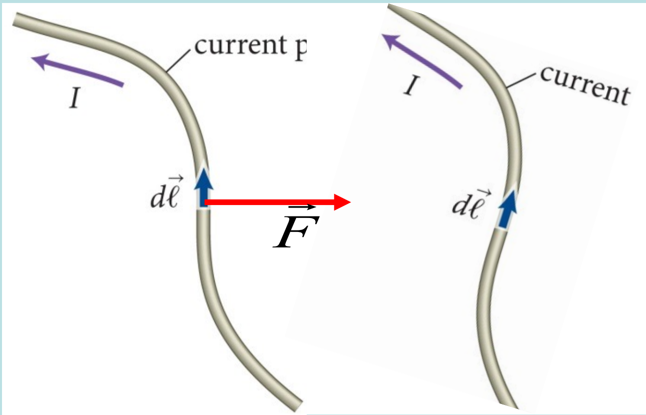
庫倫力是一個超距力 force at a distance!

電荷如果突然改變位置，距離 r 會立刻改變。

根據上式，q 所感受的電力也會立刻改變。

庫倫力是超越空間直接作用！

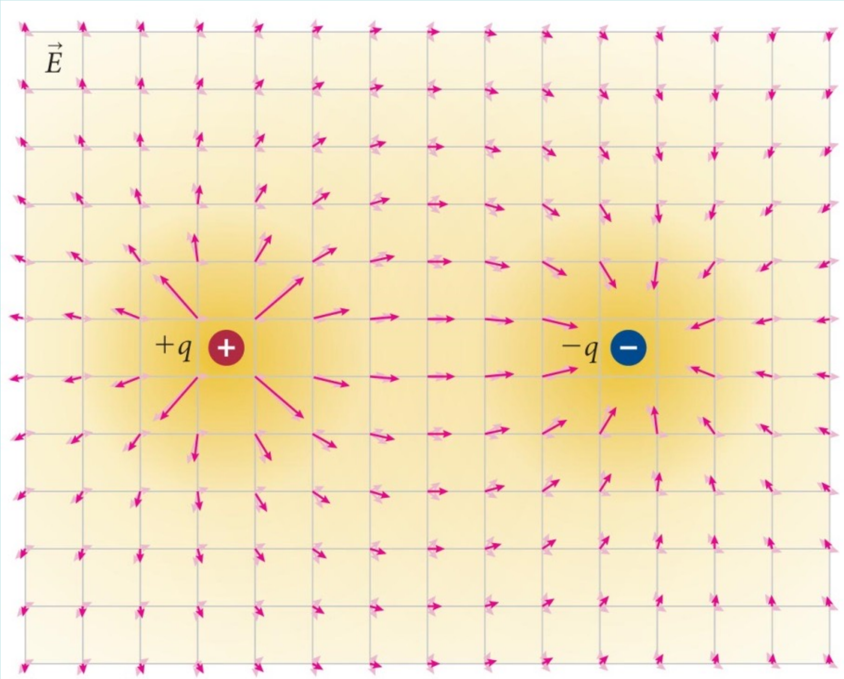
這樣的超距力的想法在當時歐洲大陸的物理界是一個普遍的看法。

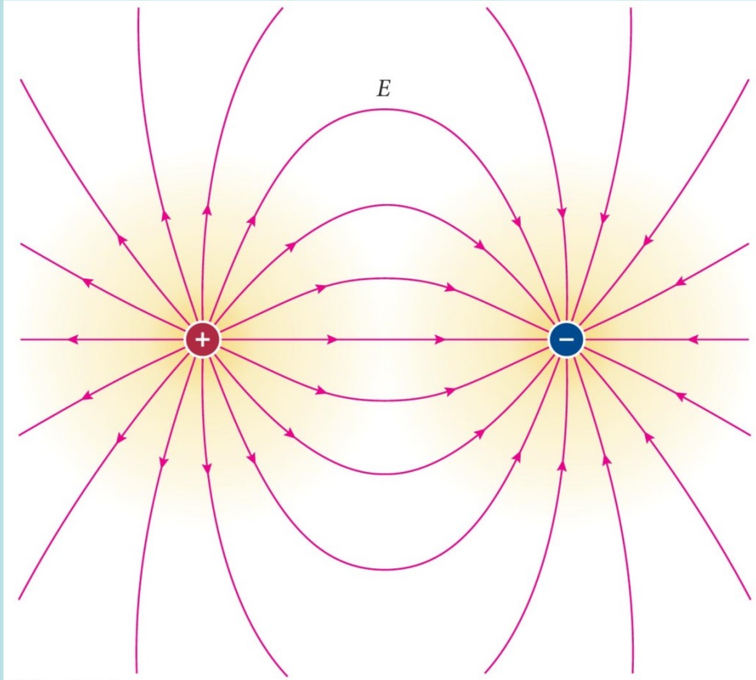


$$d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \hat{r}_{12})}{r_{12}^2}$$

Ampère Law 1820

帶電物體周圍的空間，在它們的電磁作用中，並未扮演任何角色。
空間不過是一個被動的舞台，讓電荷與電流扮演主要的角色。





法拉第直覺地覺得電力線是電磁現象非常重要的特質。

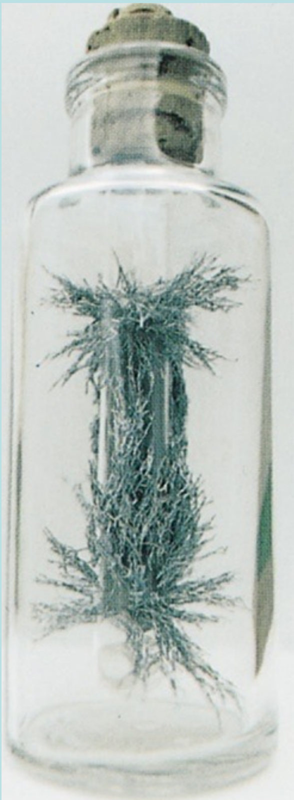
空間不只是一個被動的舞台，比較像裝置藝術，舞台的佈置就是主角！

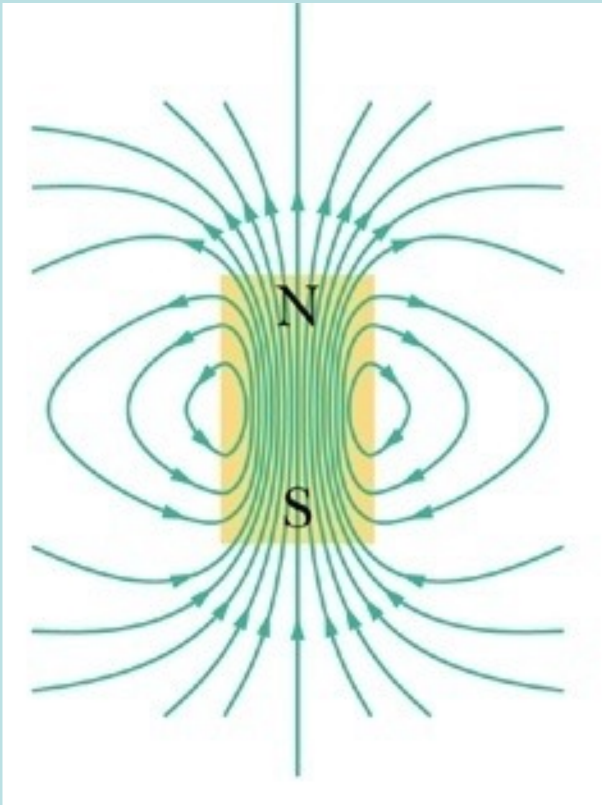
因此電磁現象不能不考慮電荷周圍的空間的性質。因此超距力是不對的！

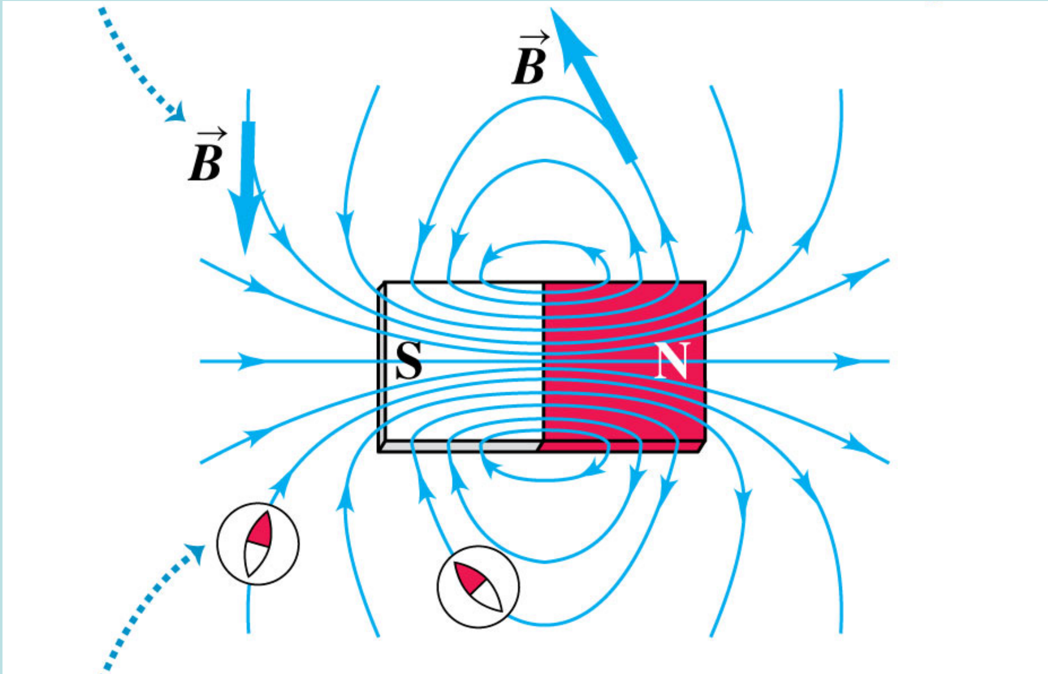
電磁現象必須以電場與磁場來描述！

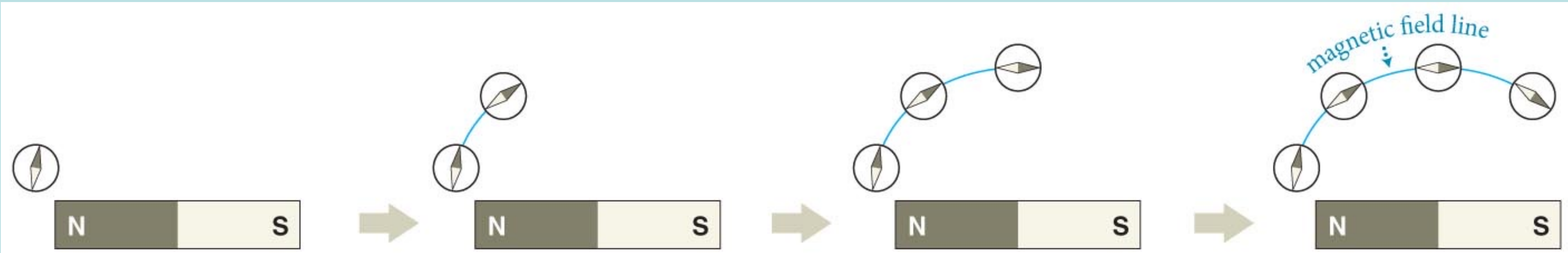
其實法拉第是觀察磁鐵時，發現了場線！

磁場線更加明顯易懂！將鐵屑撒在磁鐵旁就形成連續流線。



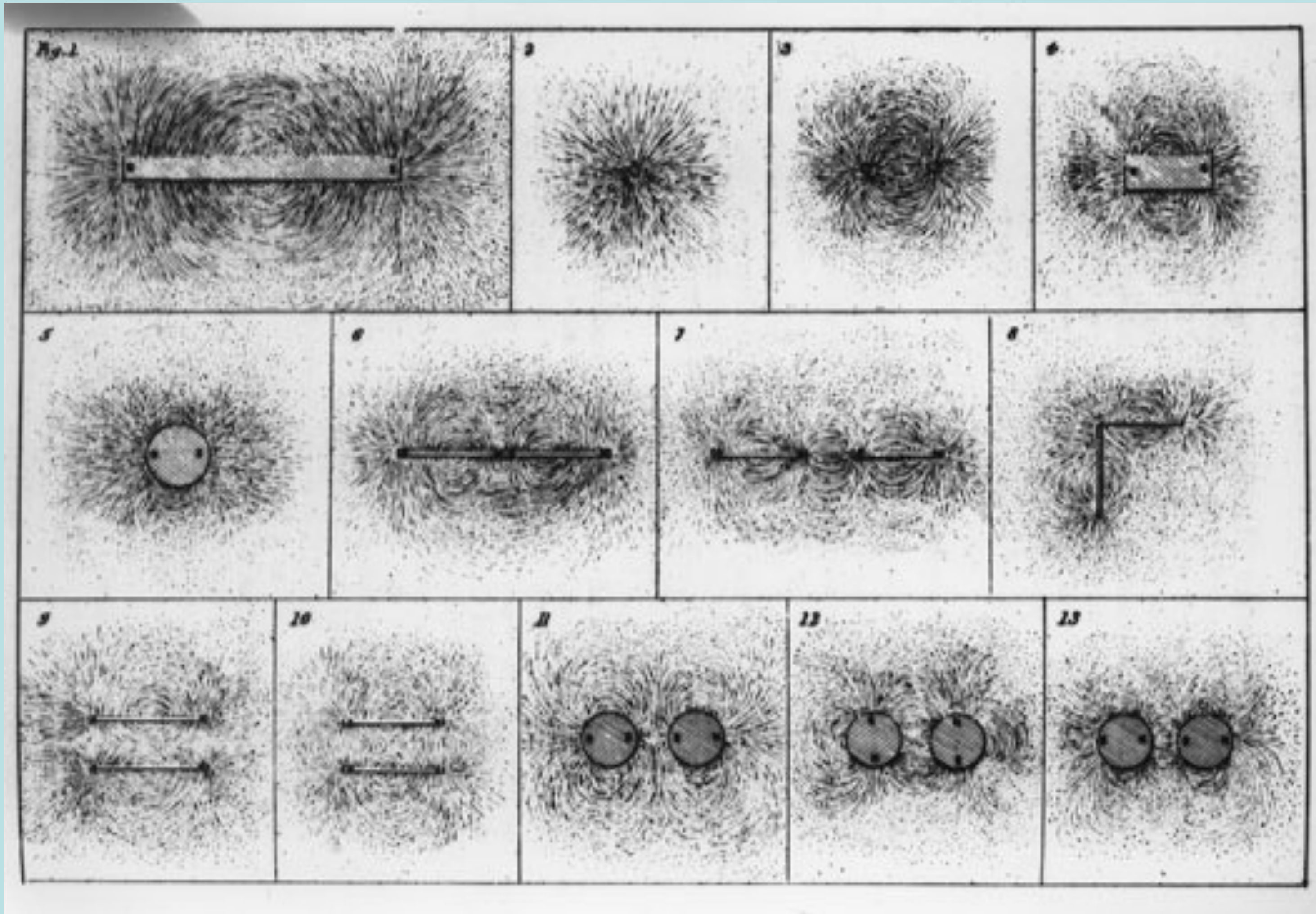


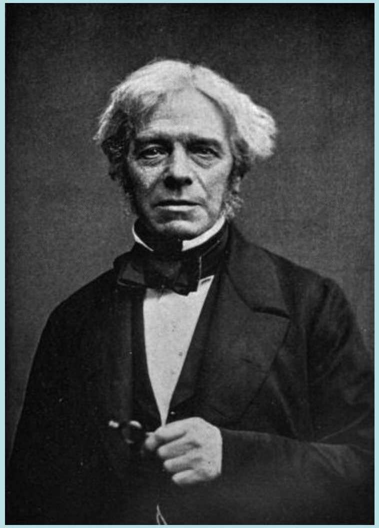


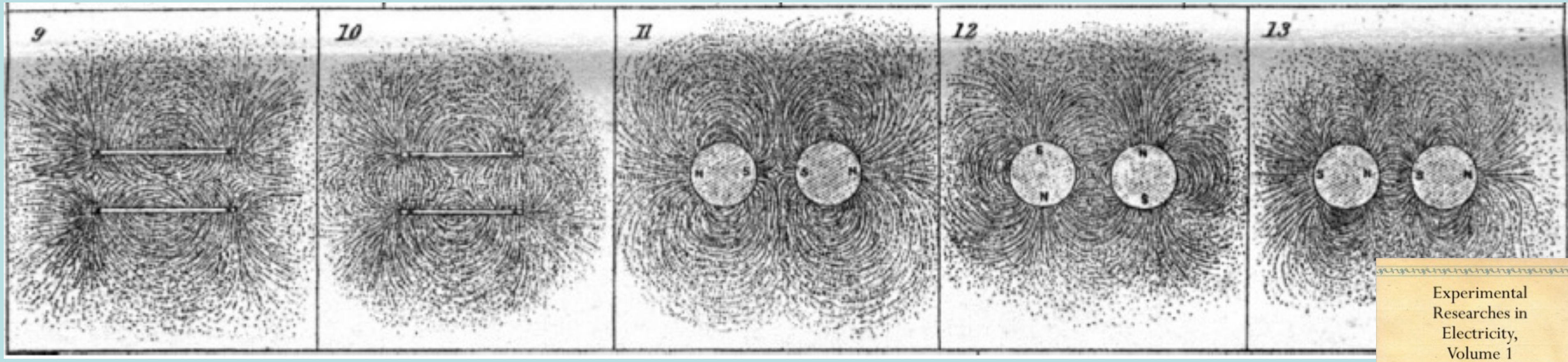


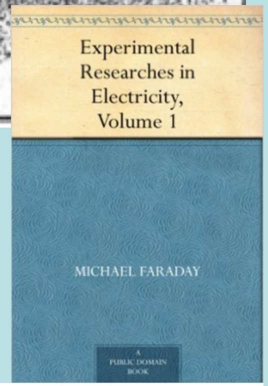
或讓小指南針在磁鐵周圍沿著指南針的指向連續移動，就形成磁場線。

法拉第嘗試了各式各樣的組合，發現空間中遍佈的連續的磁場的線是普遍的現象！

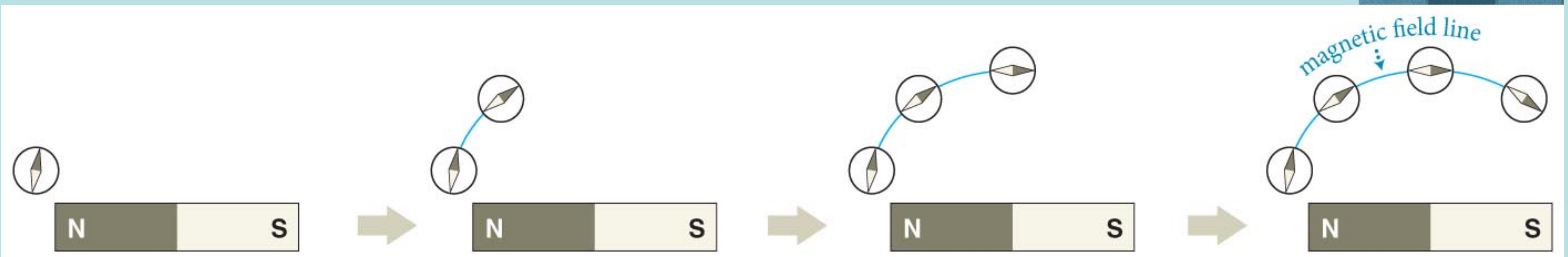


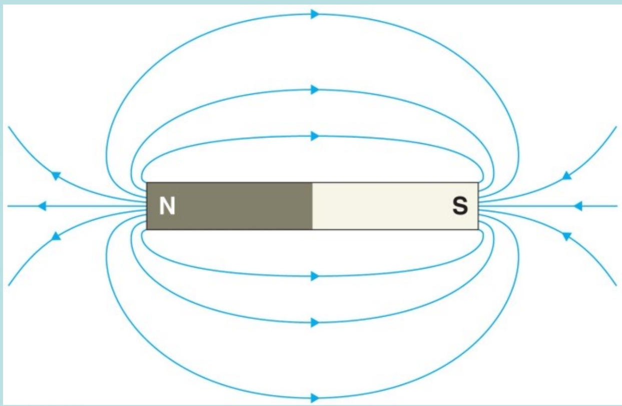


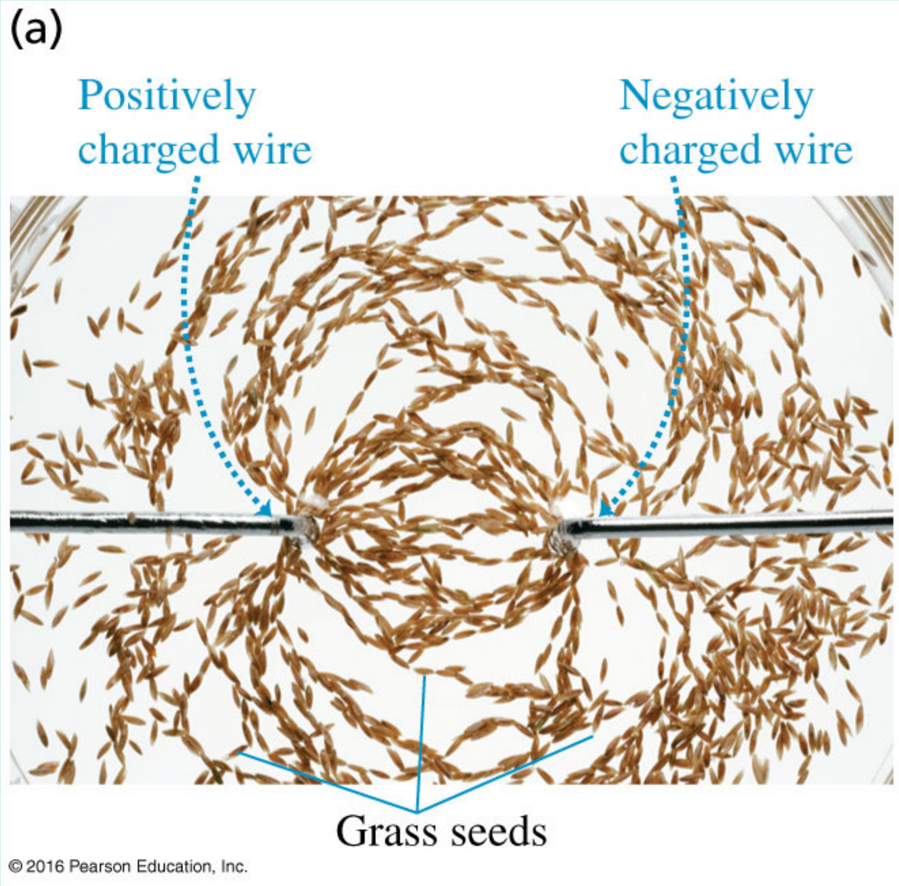




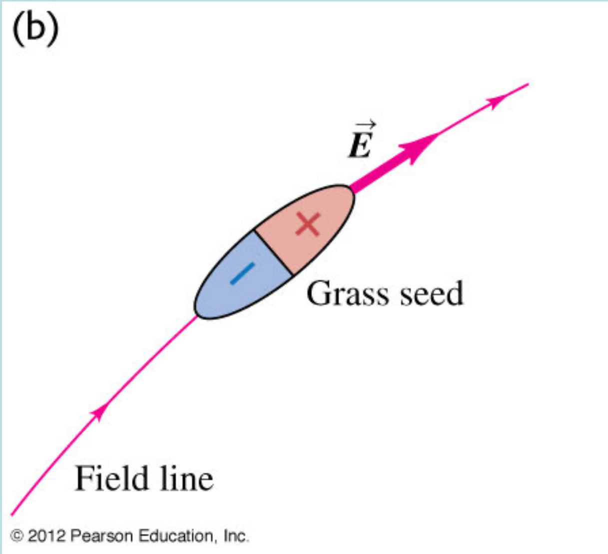
Maxwell 寫到：磁鐵周圍的力線如此美麗，令人不得不覺得此線是真實的（something real）：

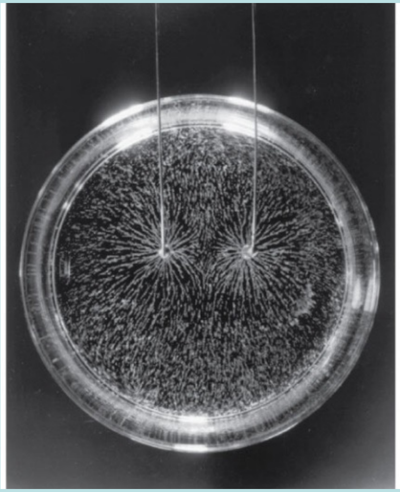






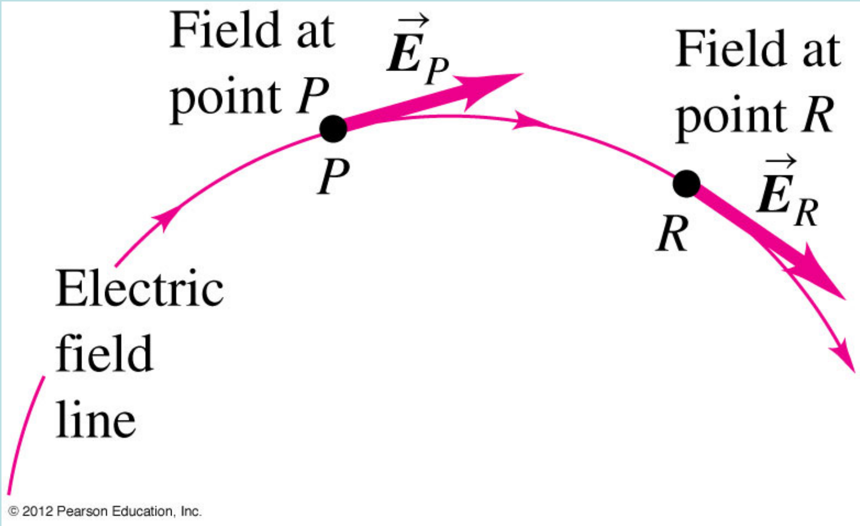
電場線也可以類似方法產生

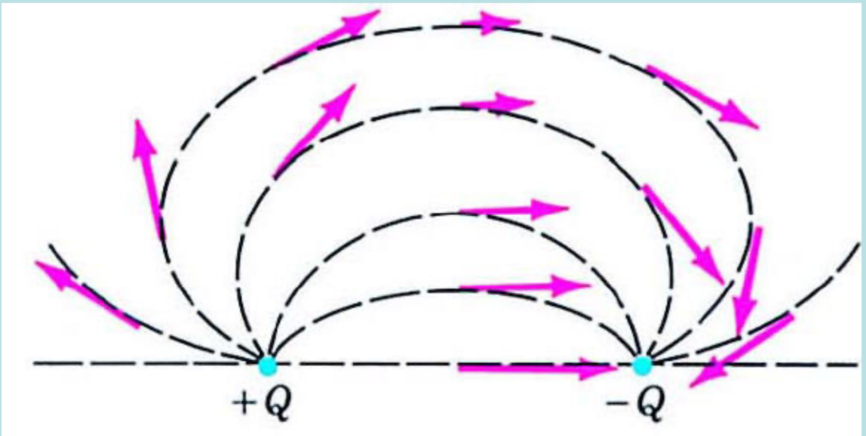


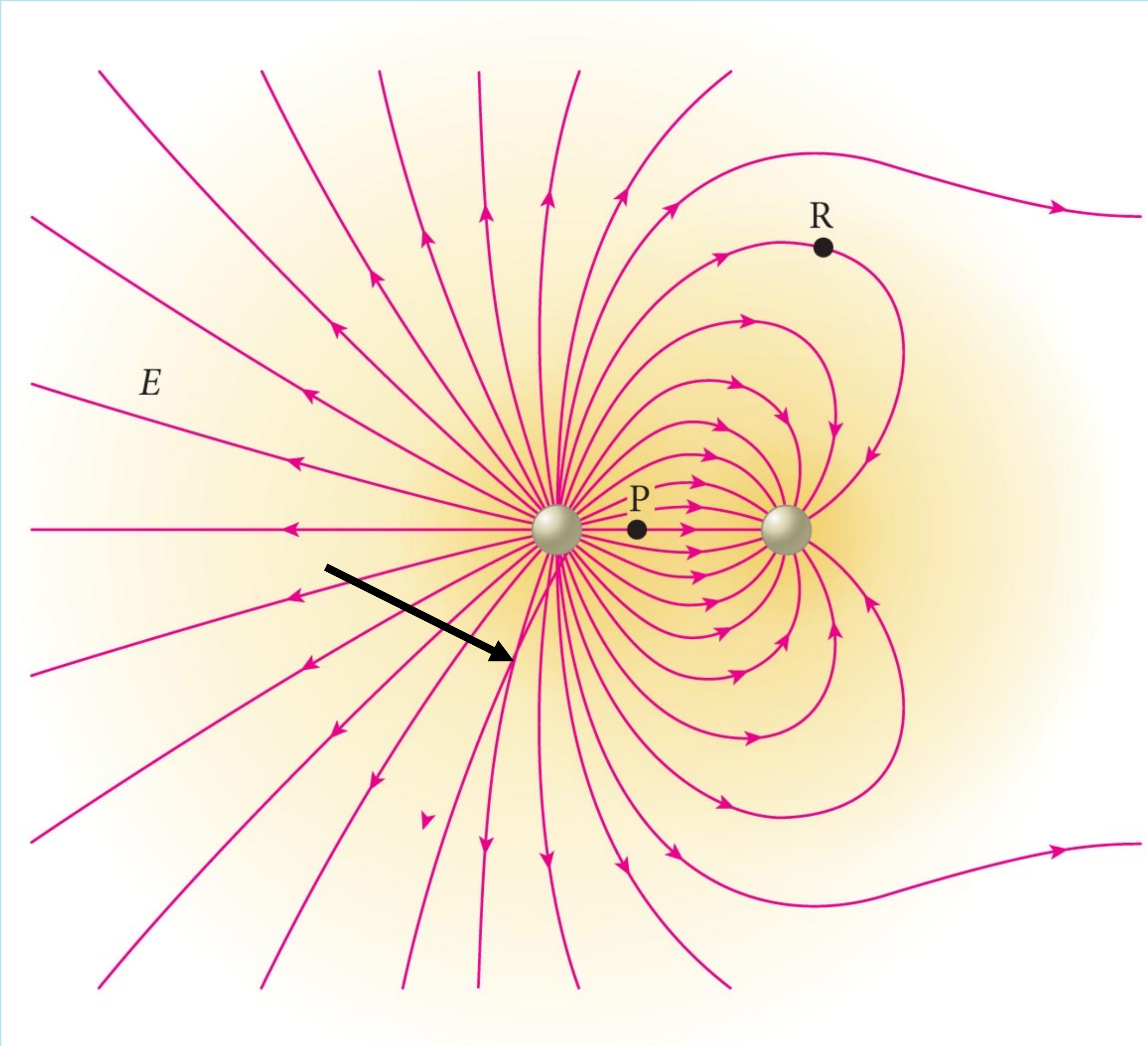


法拉第透過無數實驗觀察，歸納出場線的兩個性質：

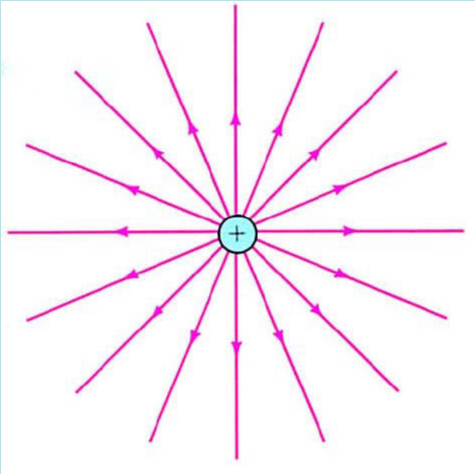
1. 電場的方向即為通過當地之電力線的切線方向。

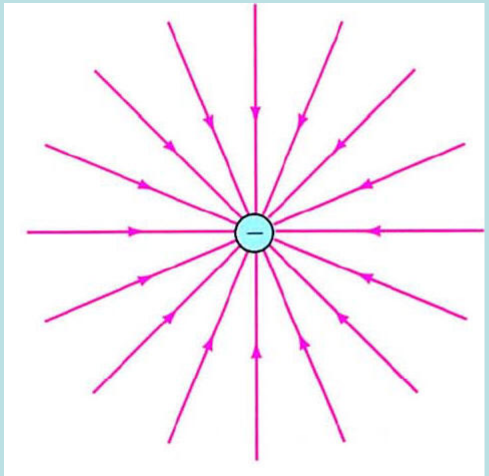






因此，電力線不會交叉。否則交叉點的電場會有兩個方向。

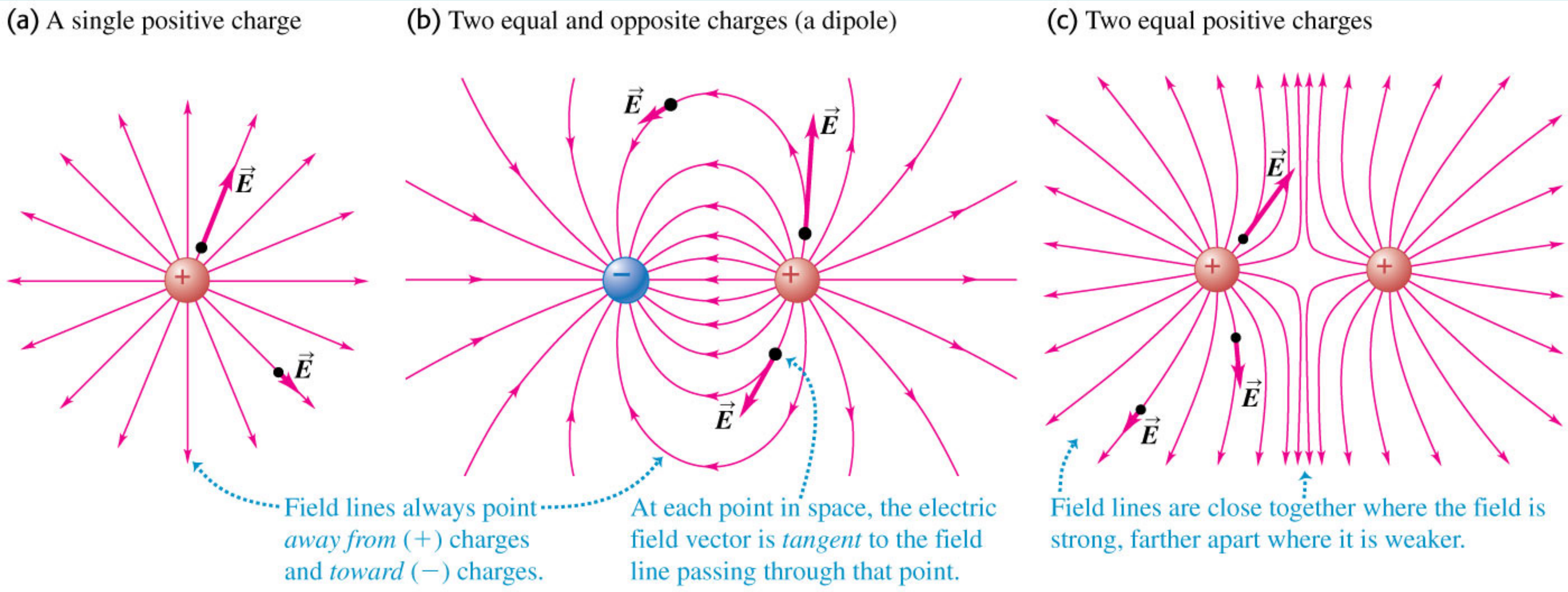




而且電力線不會中斷，否則中斷處電場方向將不明。

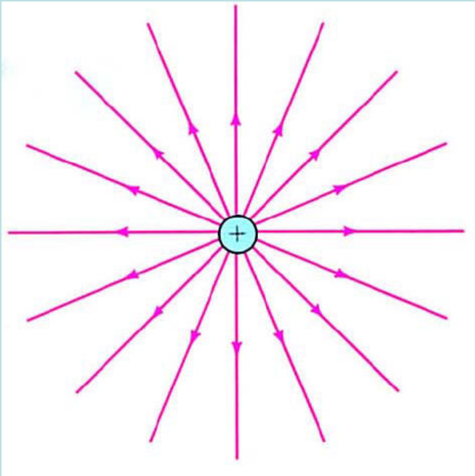
只有兩個例外，電力線由正電荷發出，由負電荷吸收！

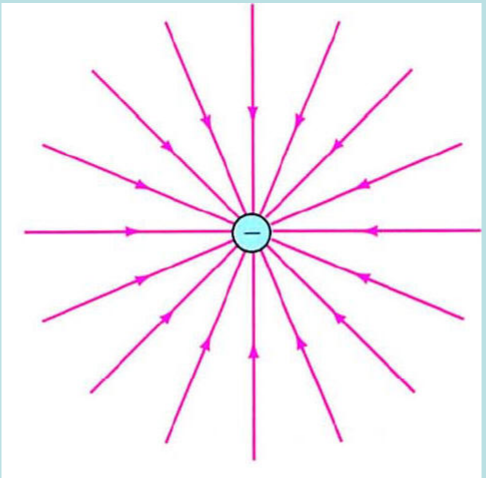
那麼：電力線在空間中數目不變而守恆！



電力線成為思考電場非常方便的工具。

注意靠近單一電荷處，電力線維持單一電荷的樣貌。





第二個特性是：電力線愈密，電場愈大！

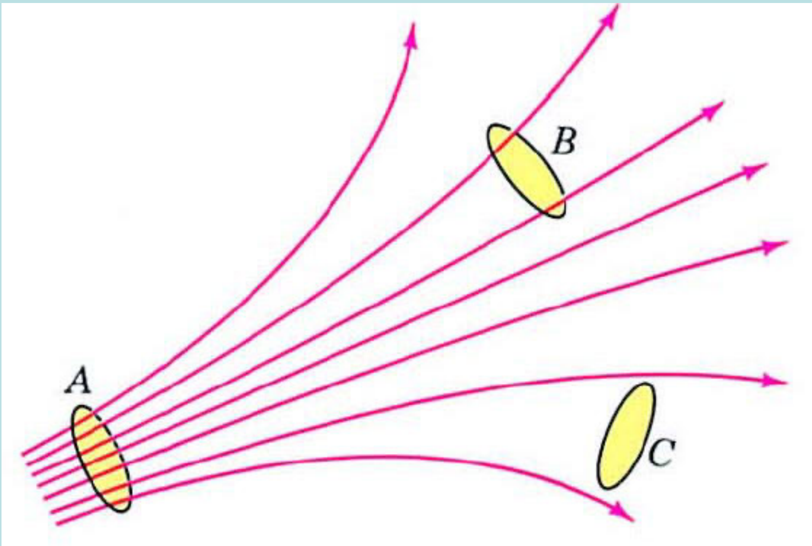
對於點電荷，同樣不變的數目的電力線，到越遠處就分配到越大的球面，

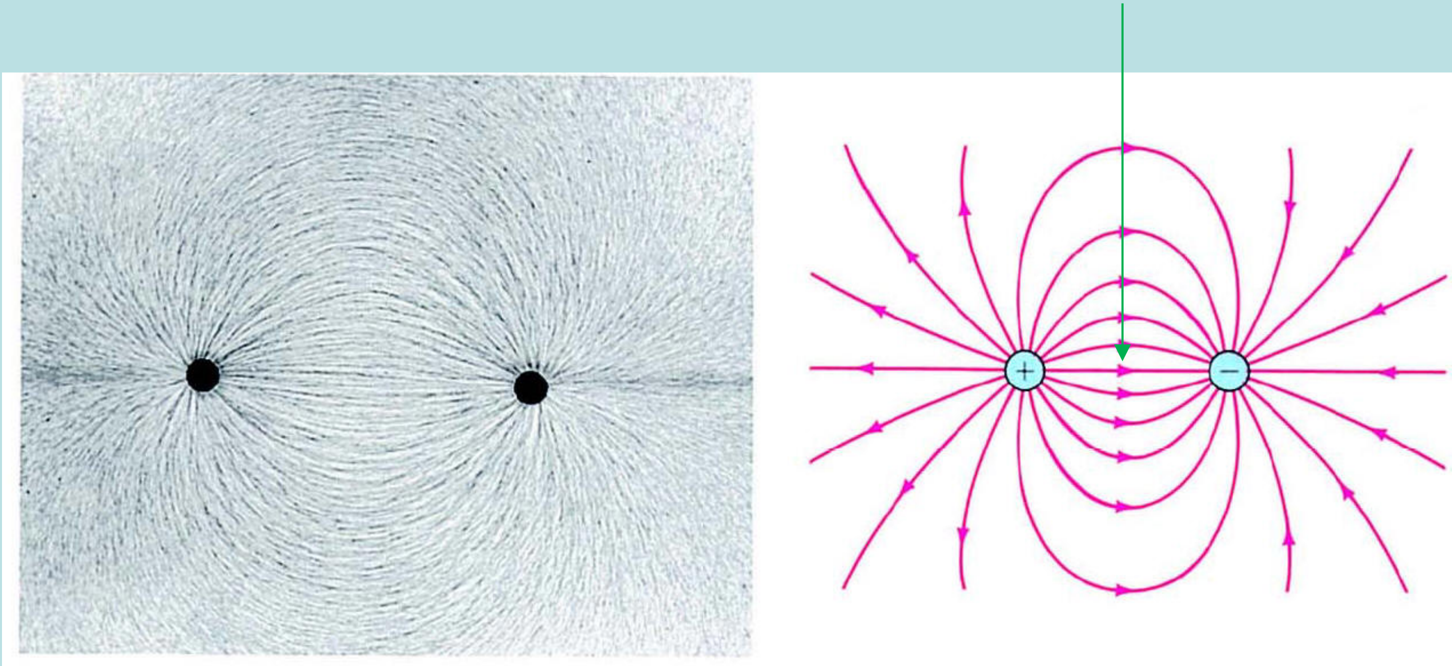
球面積正比於距離平方，所以電力線密度正好是距離平方反比，

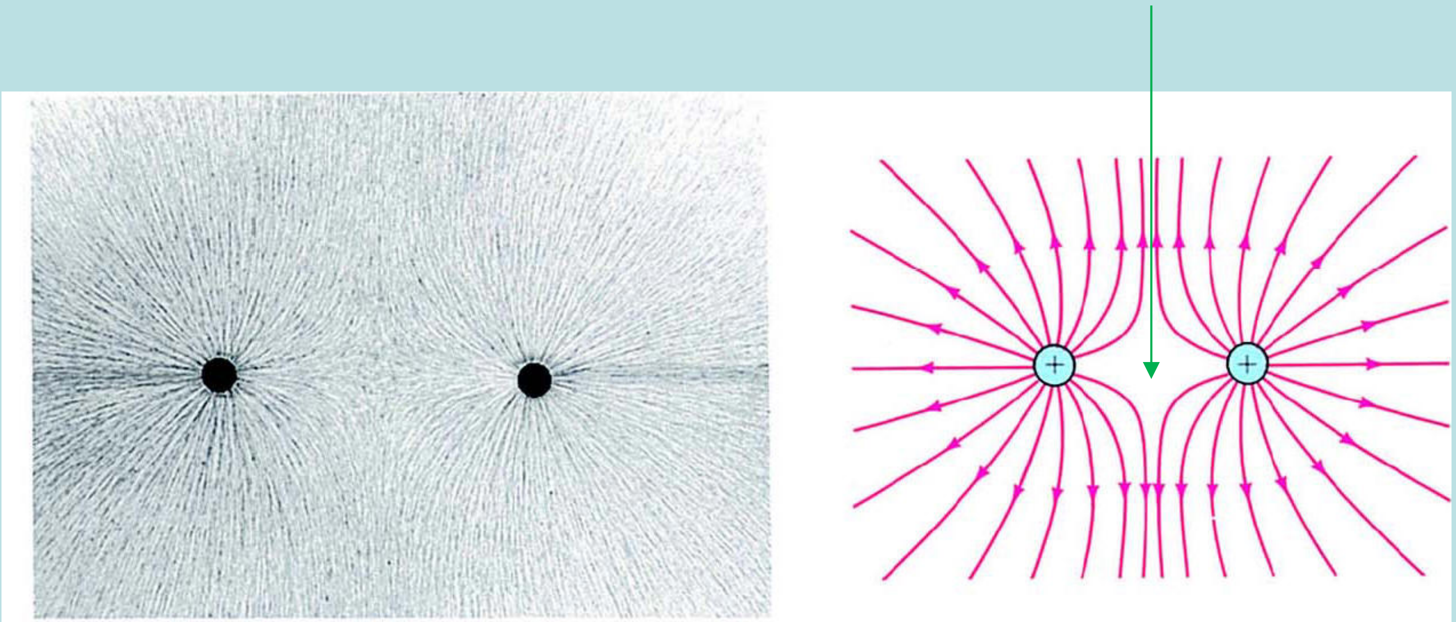
這與電場大小一樣，因此大膽猜想電力線密度正好是電場大小！

電力線密度定義為通過當地一垂直於電場的單位面積平面的電力線數目。

2. 電場大小與當地的電力線密度成正比！







高斯定律 Gauss’s Law

圖 24.1
數學家高斯（Carl F. Gauss, 1777-1855）

電磁力的基本定律：

Maxwell Equations, Finally

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

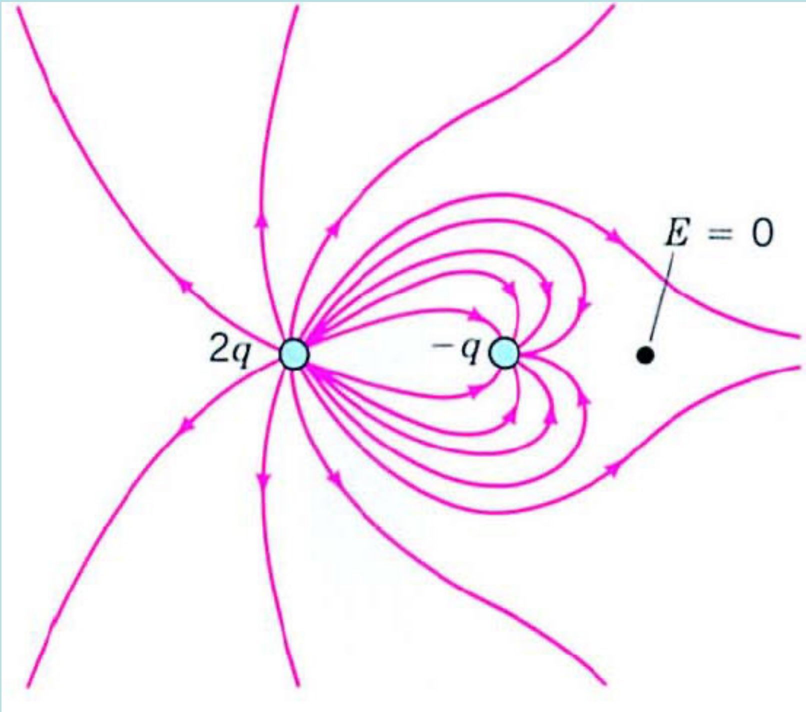
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

電力線在空間中數目顯然不變而守恆！

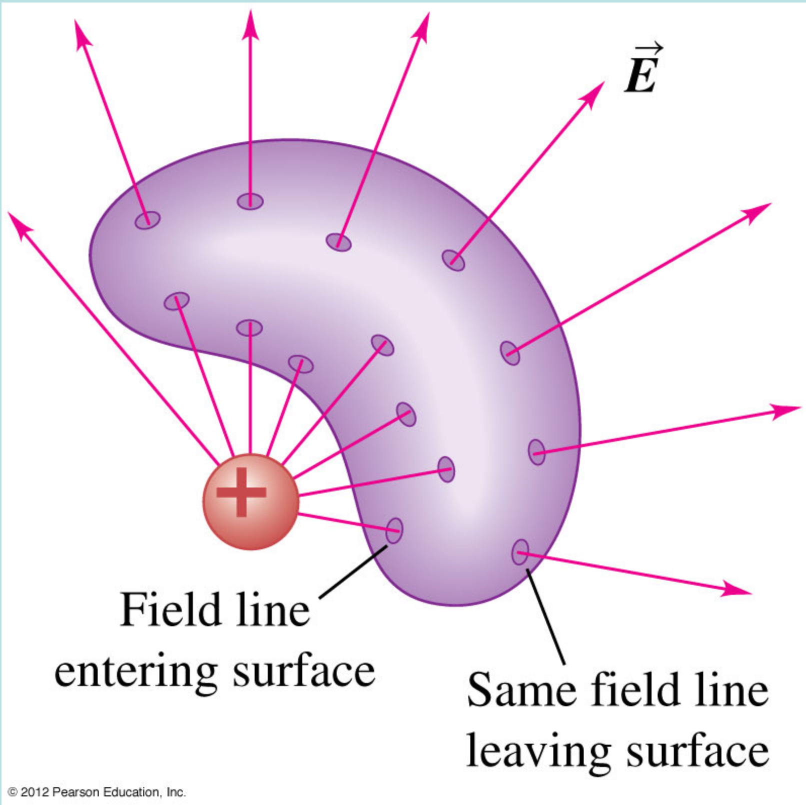


能不能把這守恆性質寫成一個有關電場$\vec{E}$的定量定律？

電力線在空間中數目不變而守恆！

這句話具體的意思：想像空間中任何一個沒有電荷在內的封閉區域，

進入此封閉曲面的電場線數目必等於離開的電場線數目！

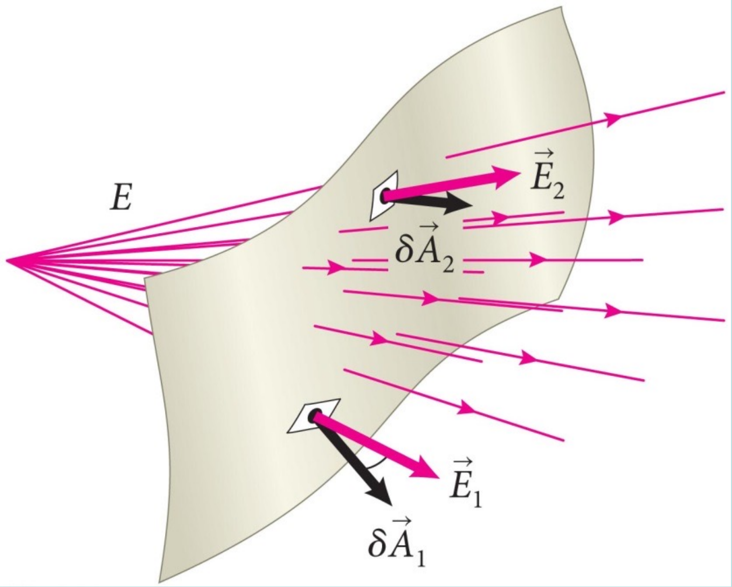


能不能把這句話寫成一個有關電場$\vec{E}$的定量定律？

首先找一辦法，以電場$\vec{E}$來計算通過一個曲面的電力線數目！

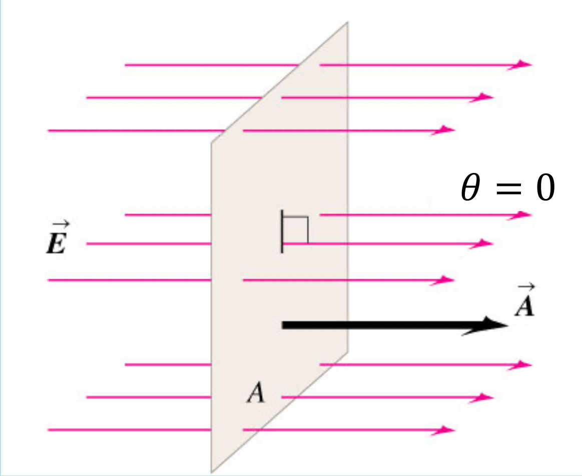
注意：在一個曲面上各個位置，電場可能不同。

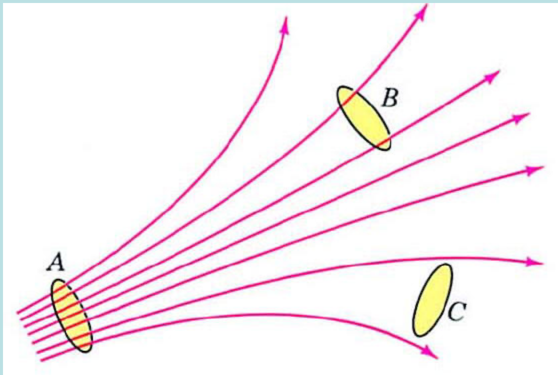
所以，先將曲面切成無限多個，無限小的平面。在一小片上電場可視為常數。



先嘗試，以當地的電場$\vec{E}$來計算，通過一個無限小的平面的電力線數目。

如果小平面與電場垂直，計算電力線的數目並不難！



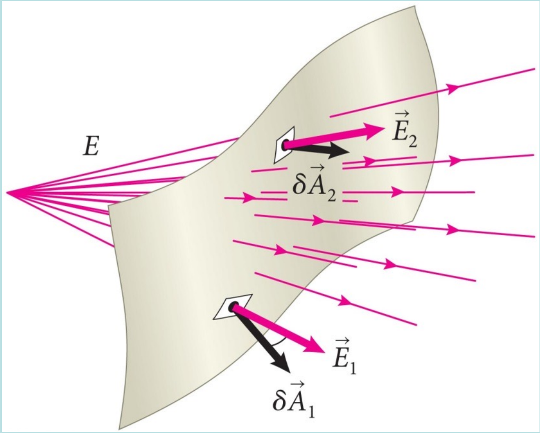


2. 電場強度與當地電力線的密度成正比！

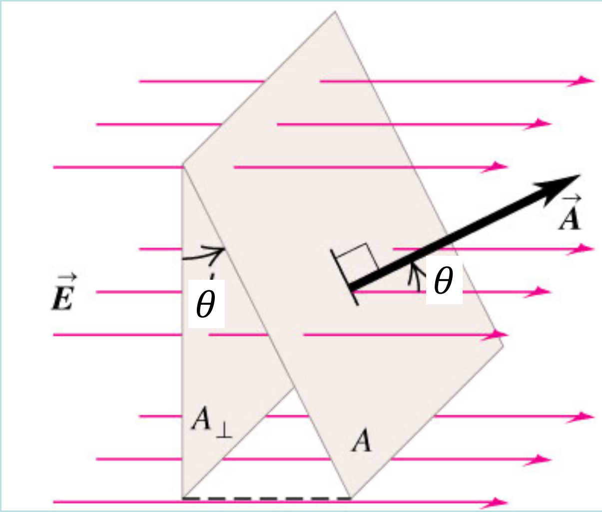
電力線密度定義為通過當地一垂直於電場的單位面積平面的電力線數目。

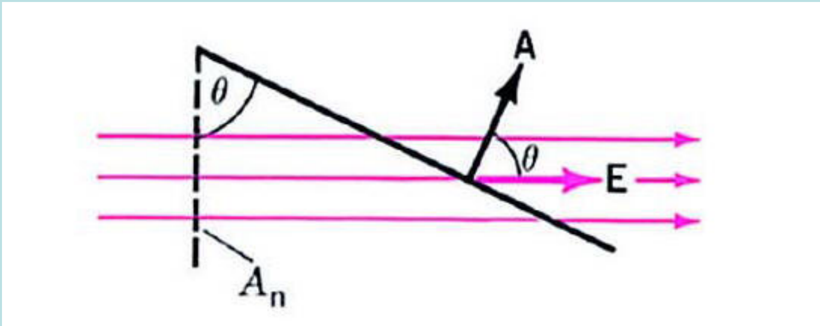
$$E = \frac{N}{A}$$

通過此平面的電力線數目： $N = EA$



若小平面與電場不垂直：



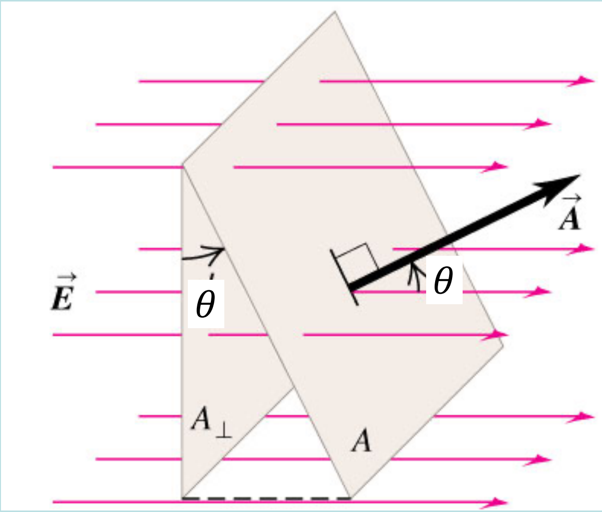


可以將小平面A投影於電場的垂直方向：

通過小平面A的電力線必通過其投影平面$A_\perp$

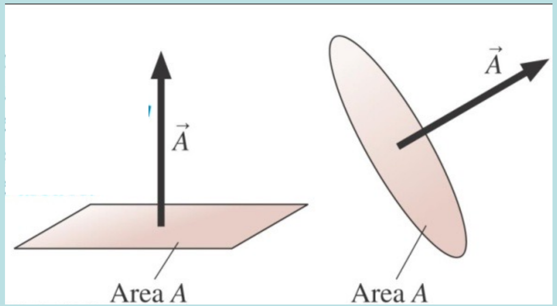
而通過此$A_\perp$的電力線數目就可以用前一頁的辦法算：

$N = E \cdot A_\perp = E \cdot A\cos\theta$ 此值也就是通過該小平面 A 的電力線數目。



$$N = E \cdot A\cos\theta$$

這個結果可以更聰明地以向量表示！



定義面積向量$\vec{A}$：大小就是此平面的面積，方向是垂直於平面的方向。

如此定義後，角度θ就是向量$\vec{A}$與電場$\vec{E}$之間的夾角。

$$N = E \cdot A\cos\theta = \vec{E}\cdot\vec{A} \equiv \Phi_E$$

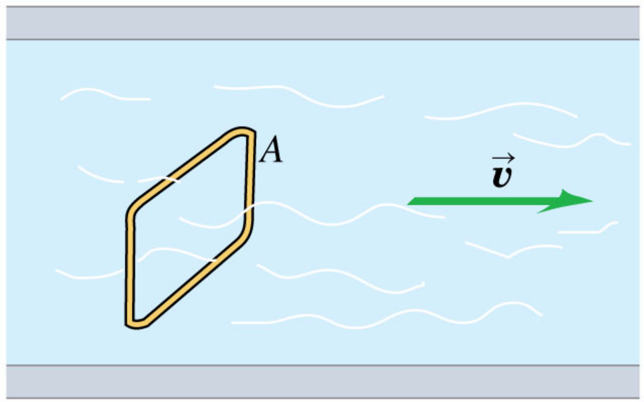
Φ_E電場通量 Electric Flux，順著$\vec{A}$的方向通過平面的電力線數目。

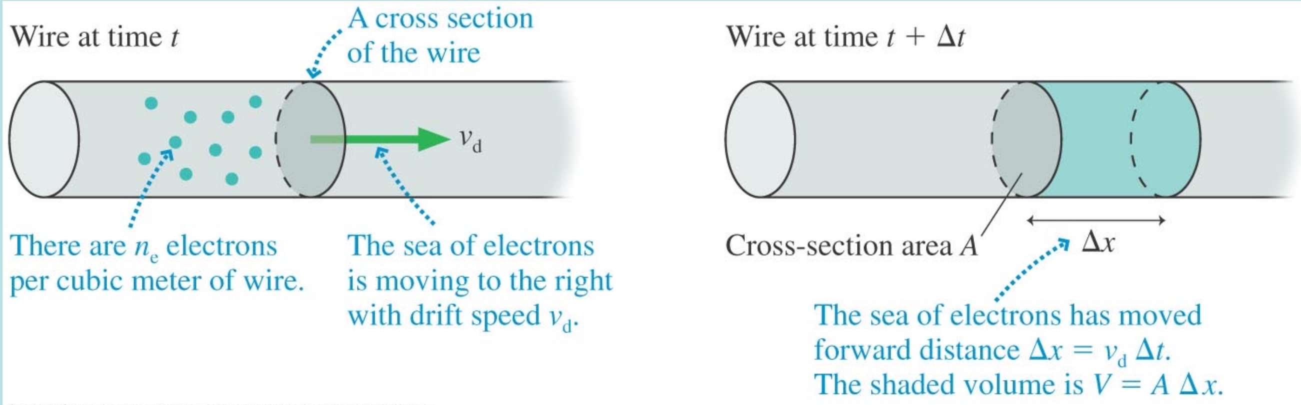
這個結果與流體的流量Flux計算非常類似！

在Δt內會流過面積的流體體積為$\Delta x \cdot A = v\Delta t \cdot A$，流量為$\rho \cdot v\Delta t \cdot A$。

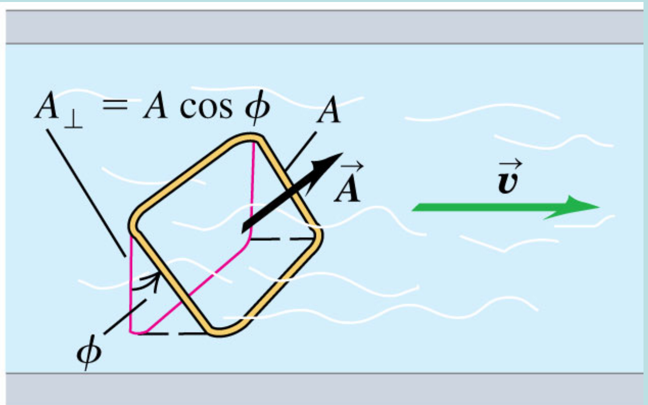
流體每秒流量 $= \dfrac{\rho \cdot v\Delta t \cdot A}{\Delta t} = \rho v \cdot A$　定義通量f為ρv。

流體會流過面積的每秒流量 = 流體通量 $f \cdot$ 面積A

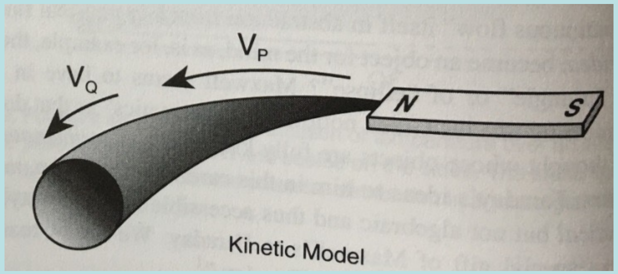




若進一步定義通量$\vec{f}$大小為ρv，方向為流向，則 $\vec{f} = \rho \vec{v}$



流體流過任一平面的每秒流量 $= f \cdot A \cdot \cos\theta = \vec{f} \cdot \vec{A}$

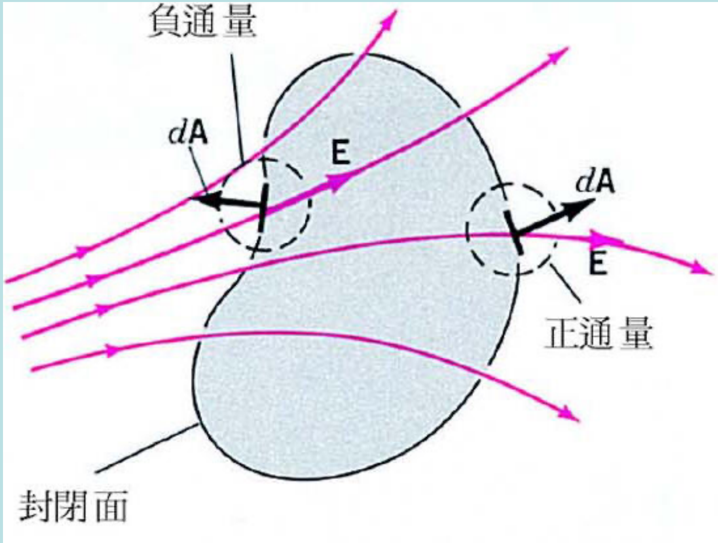


馬克思威爾當年就真的是以流體為模型來思考電場的通量。

注意對於一個平面，$\vec{A}$的方向有兩個選擇。

奇妙的是，在前述的定義下，電力線數目有可能是負的！

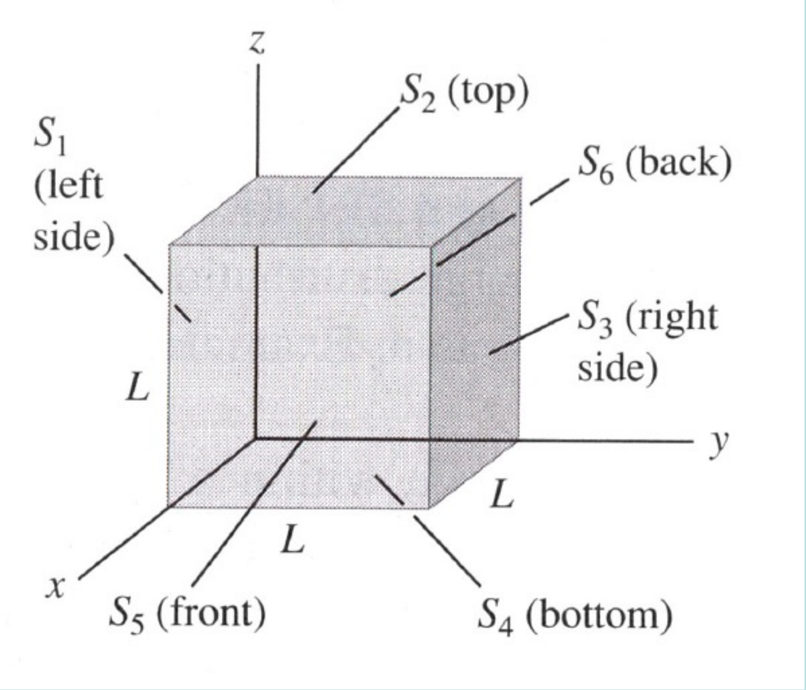
$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = E \cdot A \cos\theta$$



若電力線是逆著$\vec{A}$的方向，則電通量Φ_E為負！

電通量Φ_E除了電力線數目，還能得出電力線的流向！

22.34 •• A cube has sides of length $L = 0.300$ m. It is placed with one corner at the origin as shown in Fig. E22.6. The electric field is not uniform but is given by $\vec{E} = (-5.00\ \text{N/C}\cdot\text{m})x\hat{\imath} + (3.00\ \text{N/C}\cdot\text{m})z\hat{k}$. (a) Find the electric flux through each of the six cube faces S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, and S_6. (b) Find the total electric charge inside the cube.



以S_5為例：

$$\Phi_E = \vec{E}\cdot\vec{A} = -5\times 0.3\hat{\imath}\cdot A\hat{\imath} = -1.5\times 0.3^2 = 0.41\ \text{N/C}\cdot\text{m}$$

現在將上述的計算方法推廣到一般的曲面。

一般曲面，可視為由許多無限小的平面組成。

通過曲面的電力線數，等於這些小平面的電通量的和：

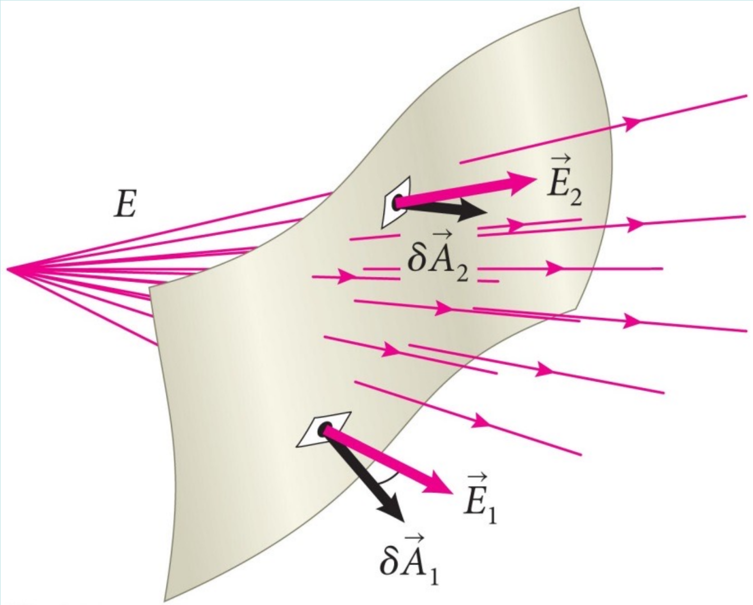
$$\Phi_E = \sum_i \vec{E}_i \cdot \delta\vec{A}_i$$

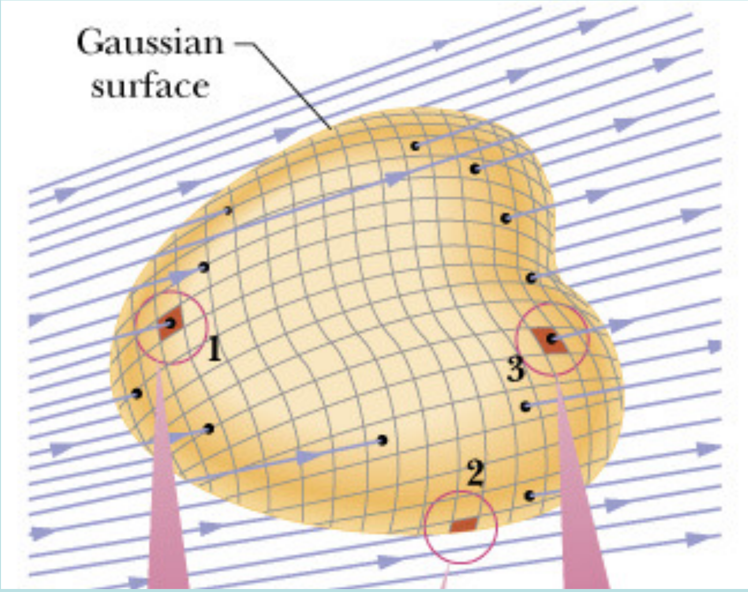
當小平面趨近無限小，總和就變為一個積分！稱為面積分。

$$\Phi_E = \sum_i \vec{E}_i \cdot \delta\vec{A}_i \xrightarrow[N\to\infty]{\delta A\to 0} \int_{\text{surface}} \vec{E}\cdot d\vec{A}$$

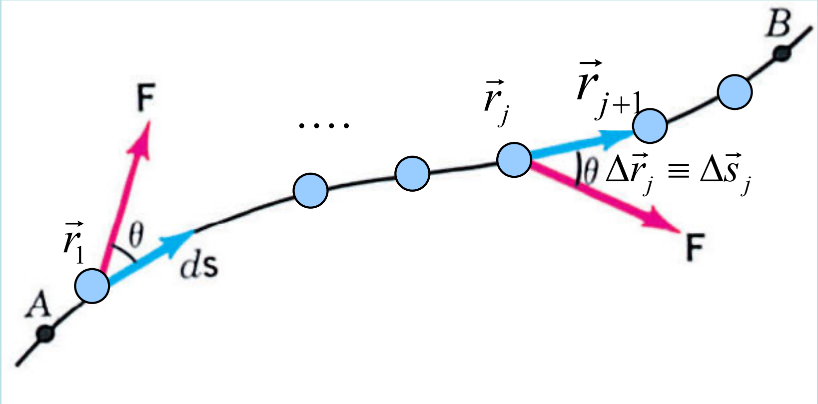
定義為通過此曲面的電場通量Electric Flux！

注意$\vec{E}$是$\delta\vec{A}$當地的電場！





此面積分與力學計算功所用的線積分非常類似



3D的功與動能原理

$$W = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta s\to 0}} \sum_{j=0}^{N} \Delta W_j \equiv \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta s\to 0}} \sum_{j=0}^{N} \left(\vec{F}_j \cdot \Delta\vec{s}_j\right) \equiv \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_j} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

線積分

$$\Phi_E = \lim_{\substack{\delta A\to 0 \\ N\to\infty}} \sum_i \vec{E}_i \cdot \delta\vec{A}_i = \int_{\text{surface}} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

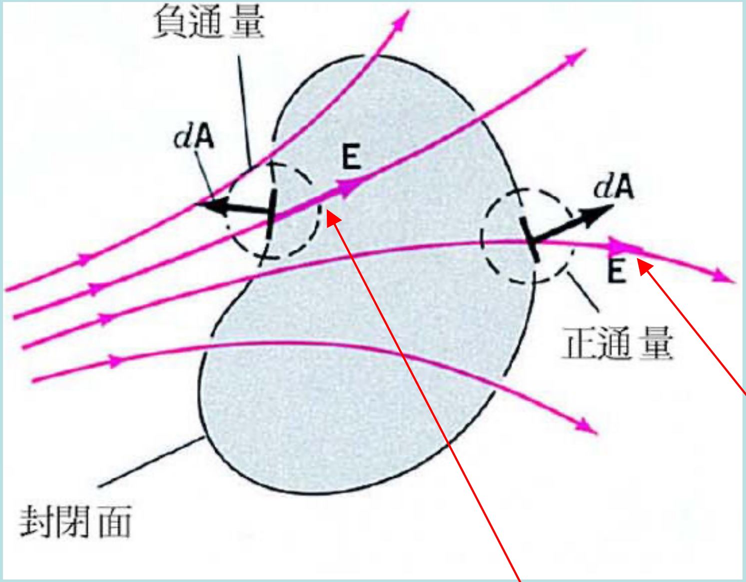
面積分

如果曲面是封閉曲面（這是高斯定律的主角，就稱高斯面）：

$$\Phi_E = \lim_{\substack{\delta A \to 0 \\ N \to \infty}} \sum_i \vec{E}_i \cdot \delta\vec{A}_i = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

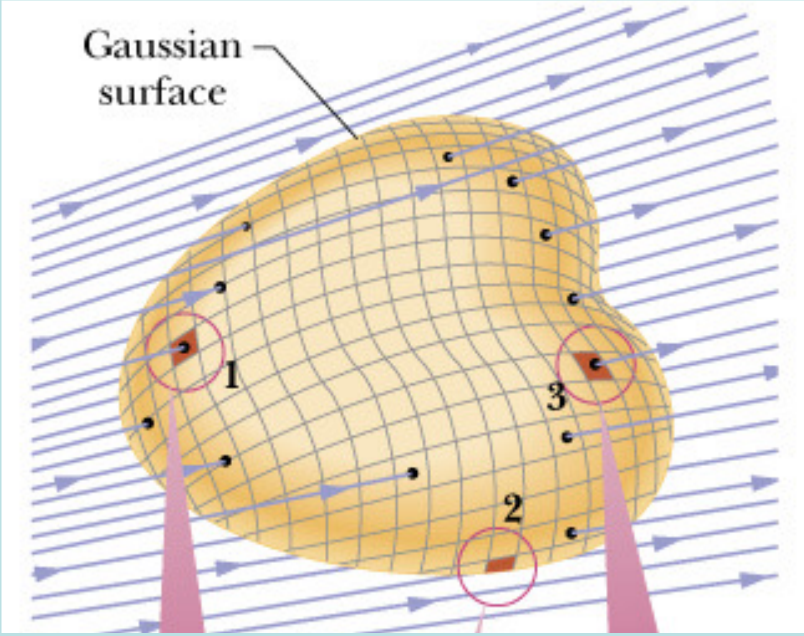
如果是封閉曲面，空間會被分成內外兩部分，

可以定義$d\vec{A}$的方向一律是由內指向外：



如此 $\Phi_E = \vec{E}_i \cdot \delta\vec{A}_i$ 為正時，電力線為離開曲面

為負時，電力線為進入曲面



通過一封閉曲面的總電場通量就有一個很簡單的物理意義；

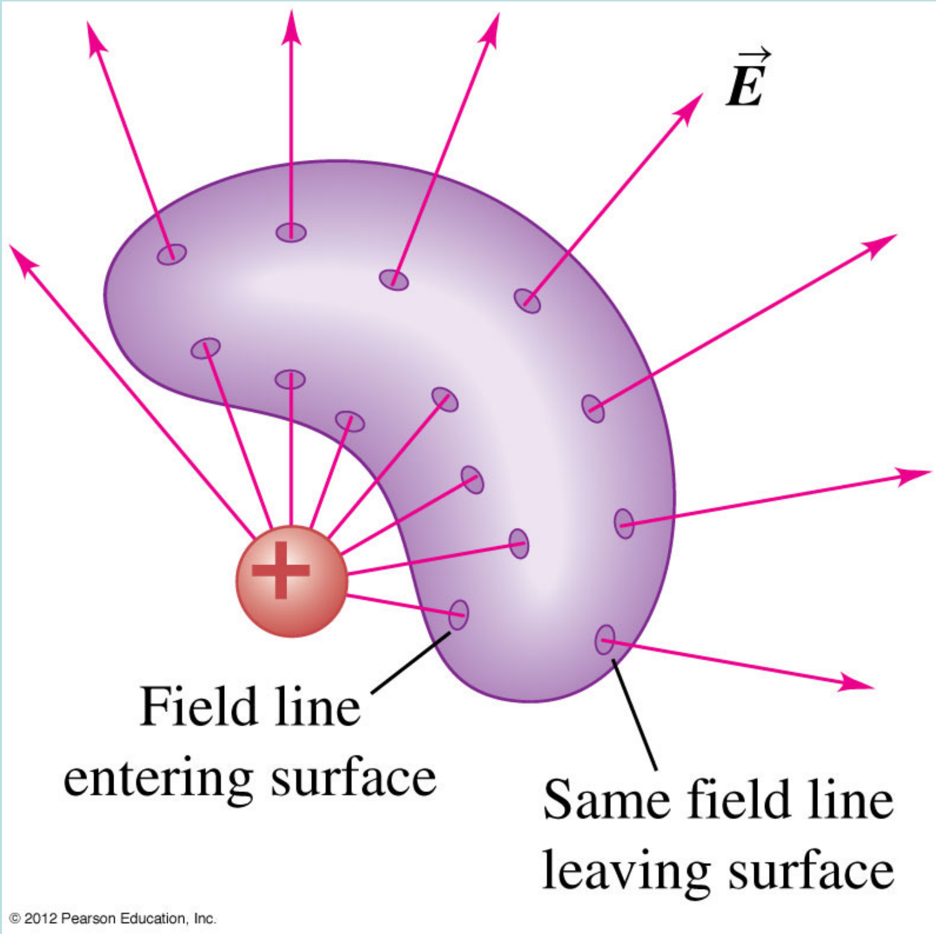
$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \text{離開曲面的電力線數目} - \text{進入曲面的電力線數目}$$

進入此封閉曲面的電場線數目必等於離開的電場線數目！

電力線數目守恆 ➡ $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$

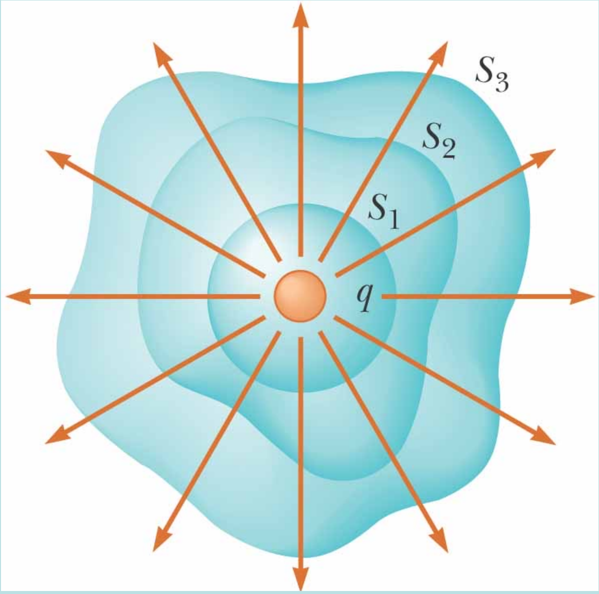
對任一高斯面：$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$ ➡ 電力線數目守恆

任一曲面，若其內沒有電荷，電力線就不能在裡面消失或產生，電力線守恆：



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$$

若曲面內有一點電荷，電力線由正電荷發出（由負電荷吸收）：



$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} =$ 離開曲面的電力線數目 $-$ 進入曲面的電力線數目 $\neq 0$

包圍一個電荷的高斯面的電通量，等於正(負)電荷所產生(消滅)的電力線數目。

因電力線產生後不中途消失，

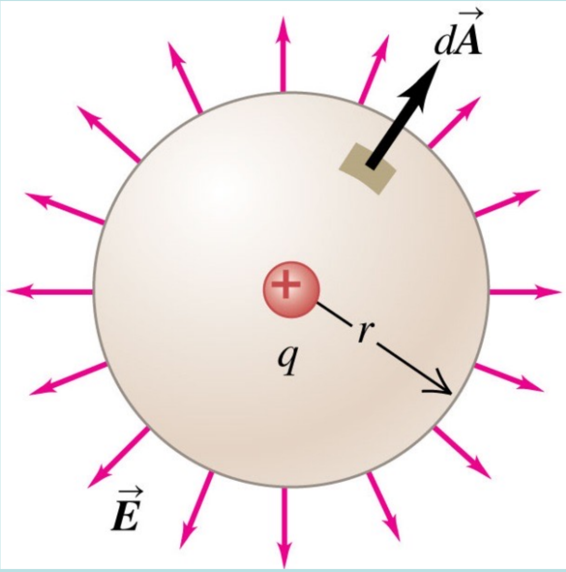
我們立刻可以得到：包圍點電荷q的高斯面$S_{1,2,3}$，電通量相等！

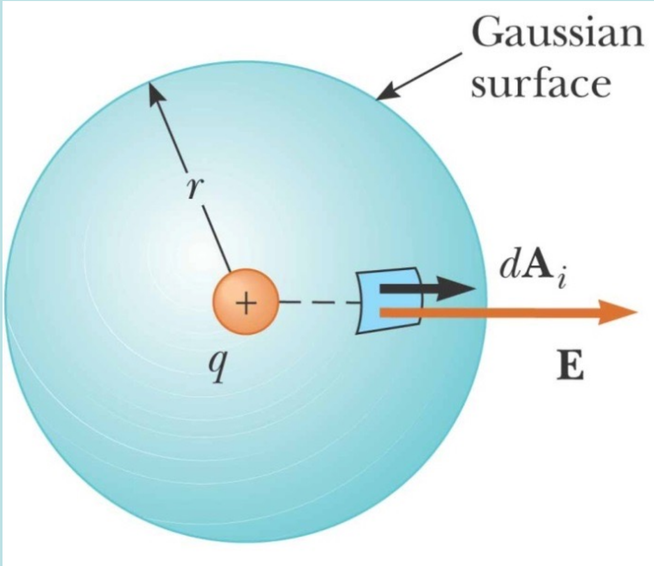
通過包圍點電荷的高斯面的電力線數與其形狀、位置、大小都無關！

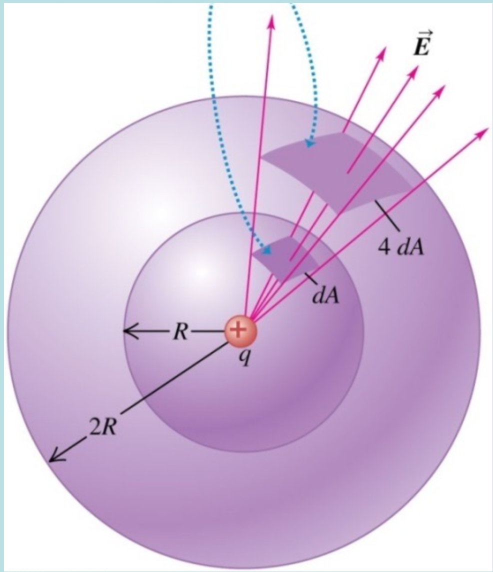
一個點電荷會產生多少電力線？包圍點電荷的高斯面的電通量是多少？

包圍點電荷q的所有高斯面電通量都一樣！選一個最簡單的來算即可！

選一個封閉球面來計算電通量：







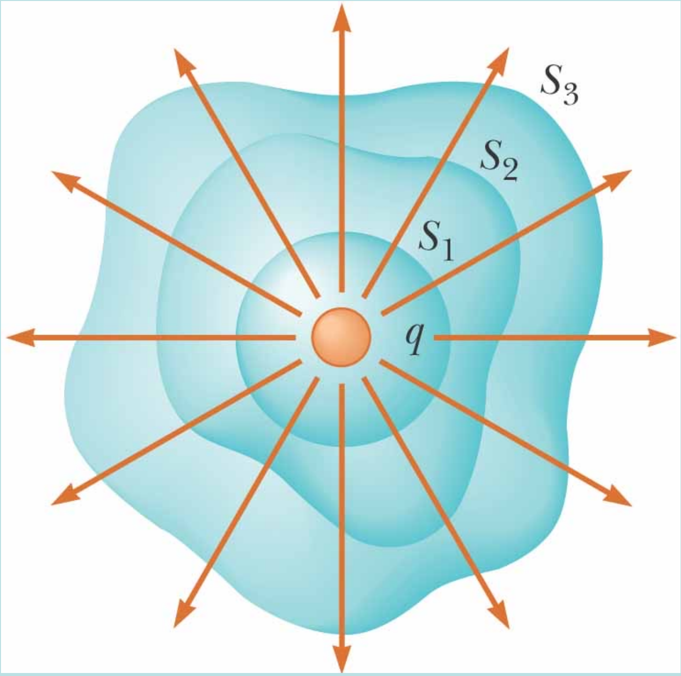
$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E \cdot dA = E \cdot \oint dA = EA = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

電場$\vec{E}$與$d\vec{A}$同向，在球面上，電場大小E是一個常數！

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

由一個點電荷發出的電力線總數與球半徑無關！

正(負)電荷產生(消滅)的電力線數目與電荷量成正比。



而因為電通量是電力線數目，電力線數目除了在電荷處之外都守恆，

所以任何包圍 q 的高斯面的電通量，與球高斯面的電通量相等！

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

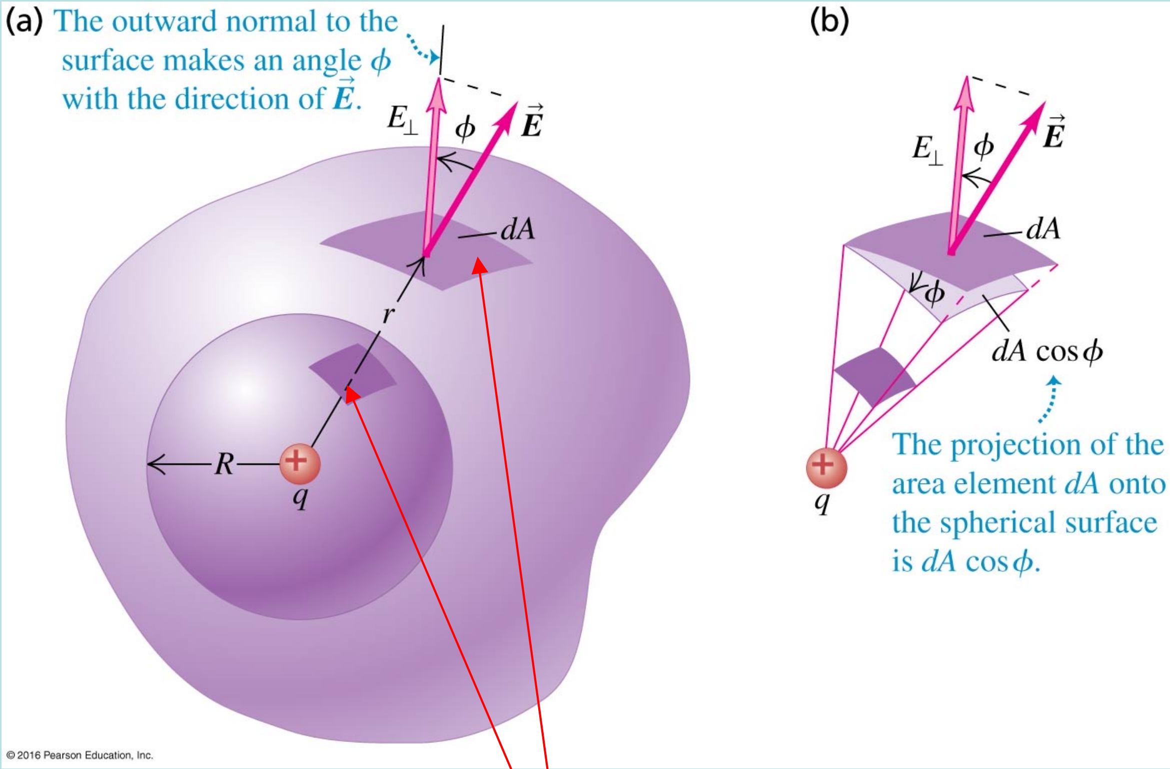
電通量正比於電荷量！

反過來，電荷對電通量的貢獻，只和它是否位於曲面內有關，與具體位置無關。

以上結果，是由場線守恆的性質推導得到，

也可以用庫侖定律直接證明得出：

現在先考慮任一包圍一點電荷的曲面：

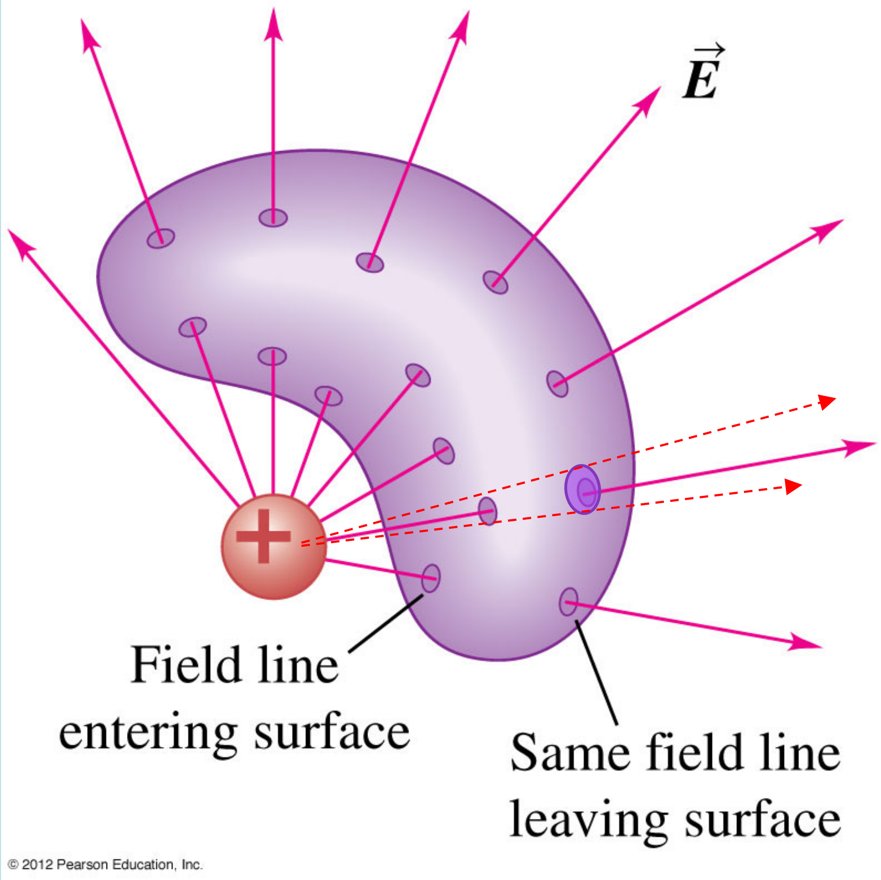


通過這兩片平面的電通量相等！

$$dA\cos\phi = r^2 d\Omega$$

$$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \oint E\cdot dA\cos\phi = \oint \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\cdot r^2 d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint d\Omega = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

若該點電荷在曲面之外：



$$\Phi_E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\text{射出}} d\Omega - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\text{射入}} d\Omega = 0$$

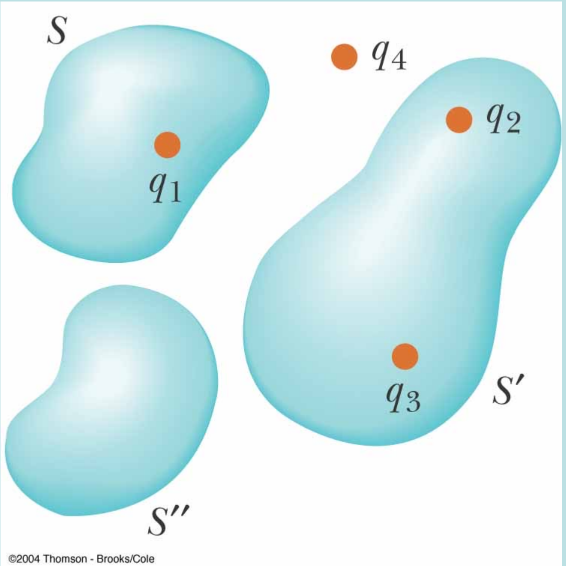
如圖，所有射入的立體角都可以找到一對應相等的射出立體角！

以上結果為一個點電荷，若有一個以上的電荷時：

電場滿足疊加定理：$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$。電通量也會疊加。

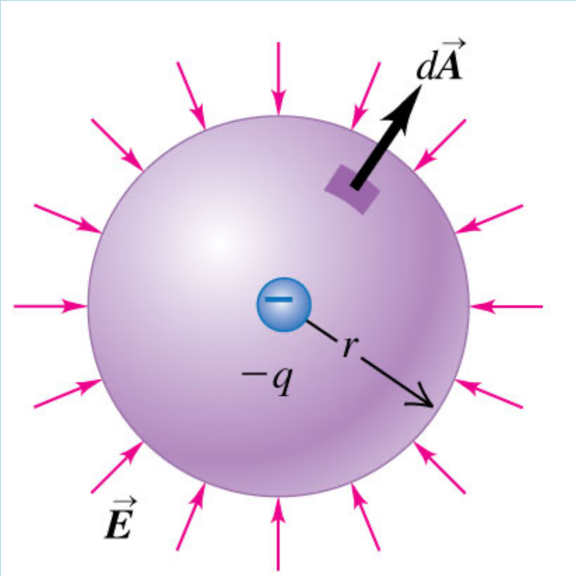
位於曲面外的電荷，對曲面上的電場有貢獻，

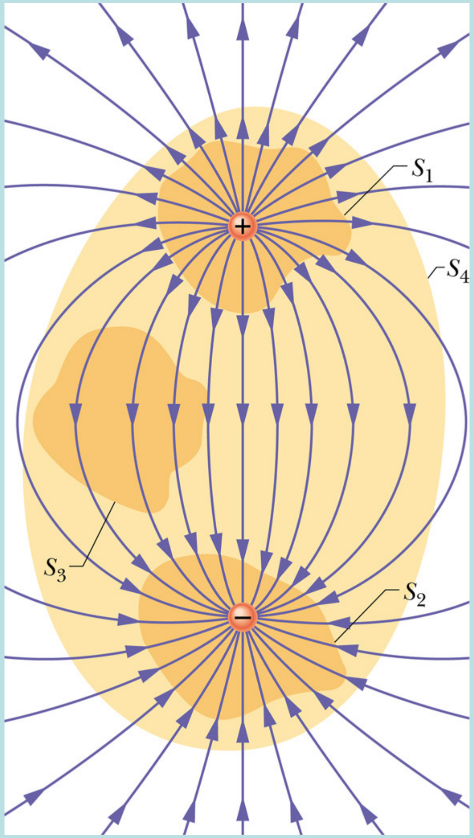
但對該曲面的電場通量卻沒有影響。

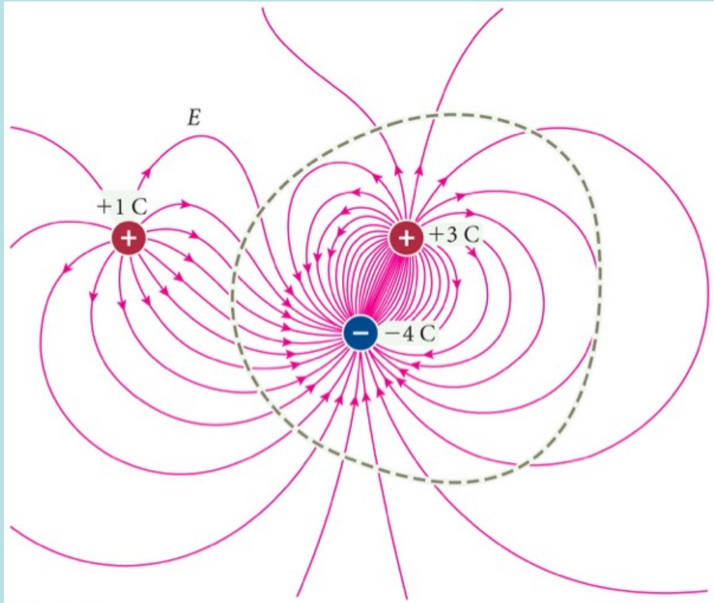


$$\Phi_{S'} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint \left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4\right) \cdot d\vec{A} = \frac{q_2 + q_3}{\varepsilon_0} = \frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0}$$

因此電通量正比於高斯面內的總電荷。





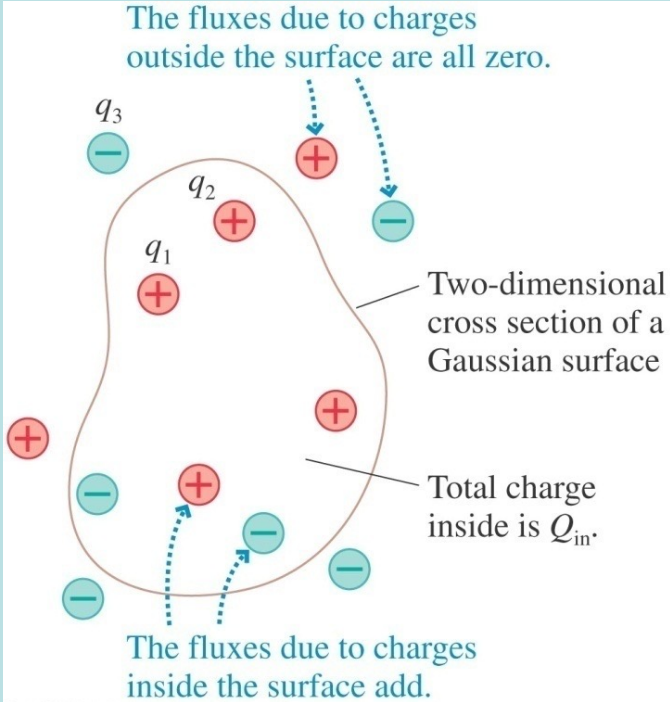


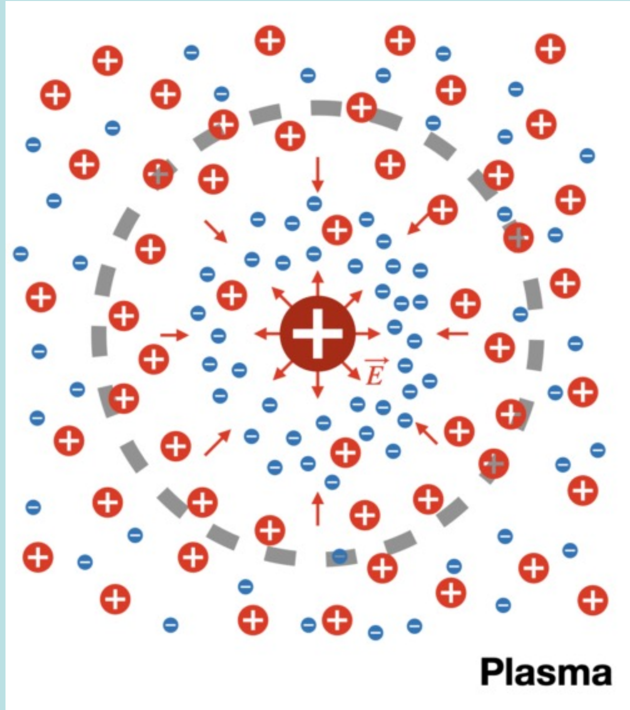
負電荷周圍電力線是入射的，電通量為負。

正電荷發出的電力線可以消失於負電荷

若高斯面內同時有正負電荷，負電荷會減少正電荷的電通量！

所以高斯面的電通量正比於高斯面內的總（淨）電荷（即正減去負）。





$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

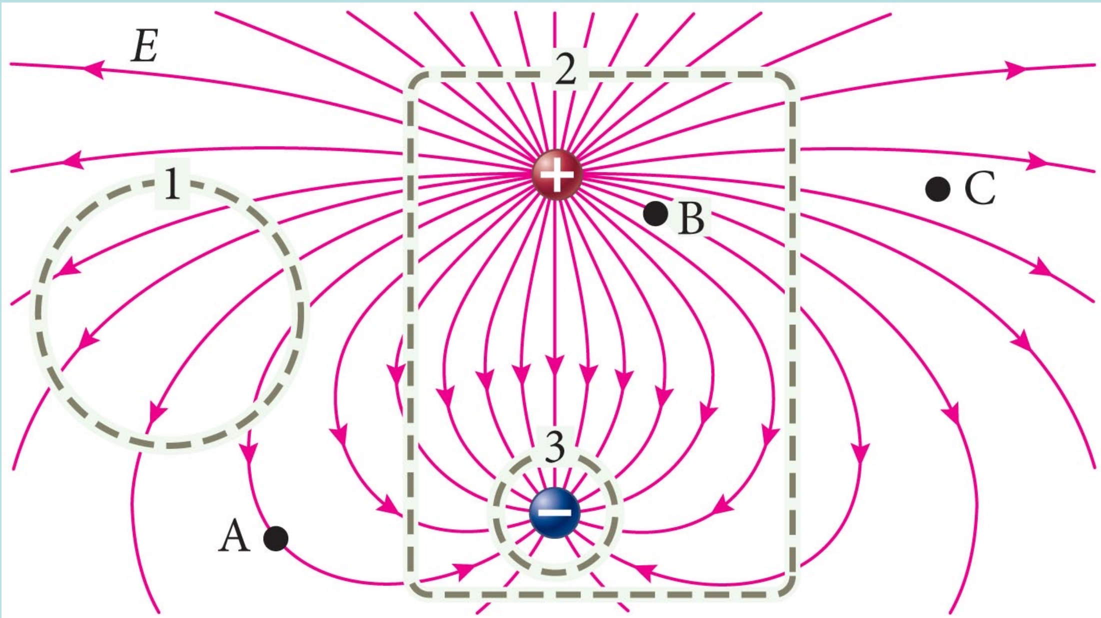
高斯定律

一個封閉曲面的電場通量，正比於曲面所包圍的總淨電荷量。

對連續的帶電流體，如電漿，此式也成立。

雖由庫侖定律推導得到，但庫侖定律不適用於動電，而高斯定律依舊成立！

這是電磁學的一個基本定律。

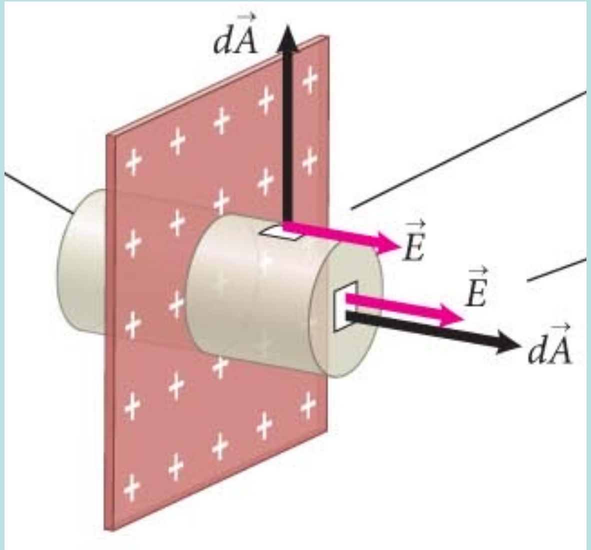

E
1
2
3
A
B
C

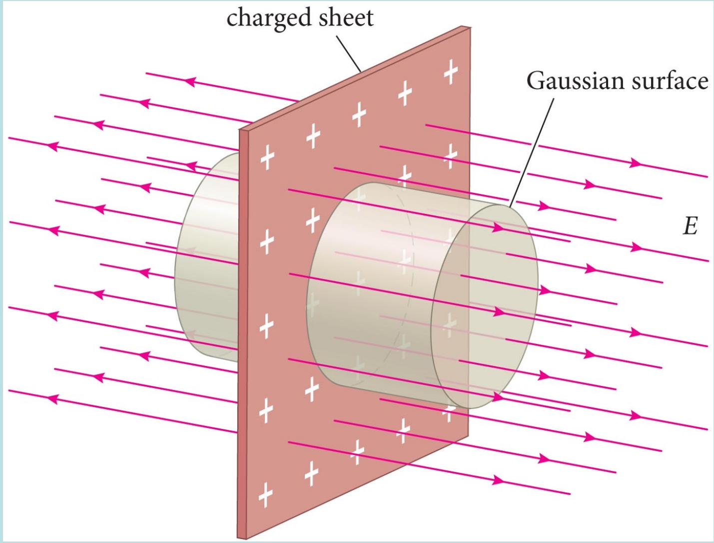
高斯定律的應用

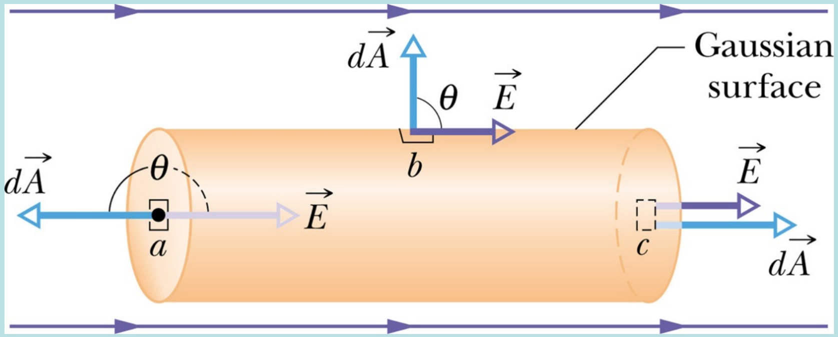
無限大的帶電平面板：設平板上面電荷密度為σ。

無限大平板上的均勻電荷，所發出的電力線垂直於平面。

因此選擇一個對稱的（圓）柱狀高斯面：

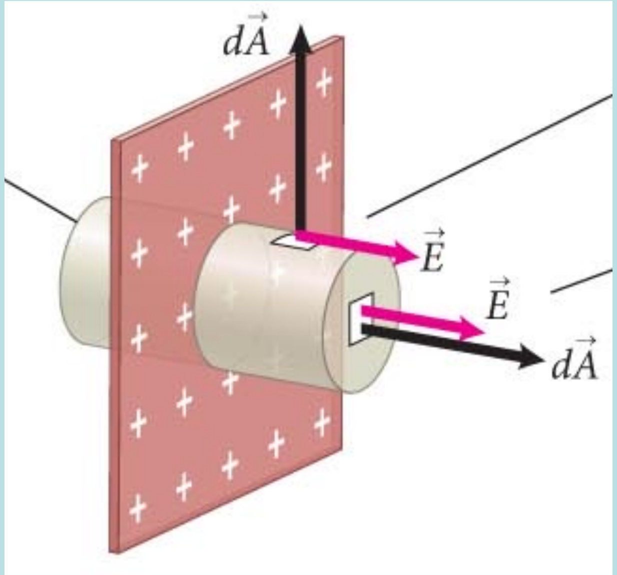


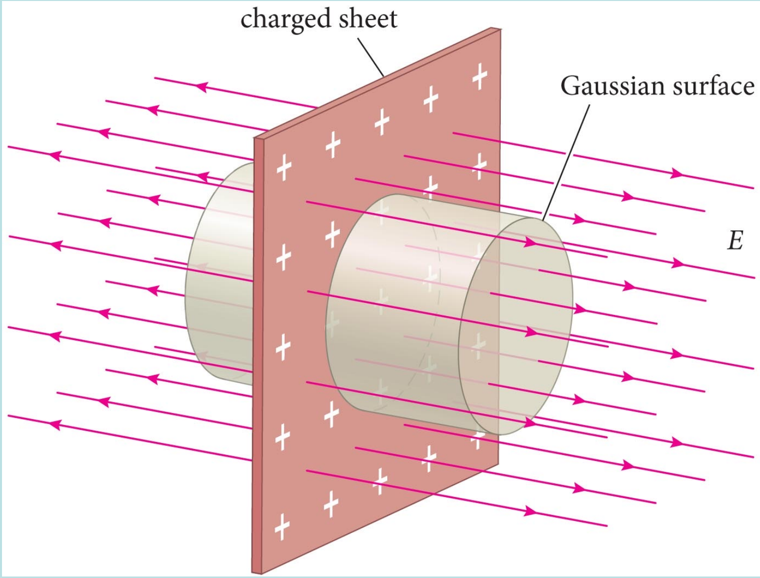


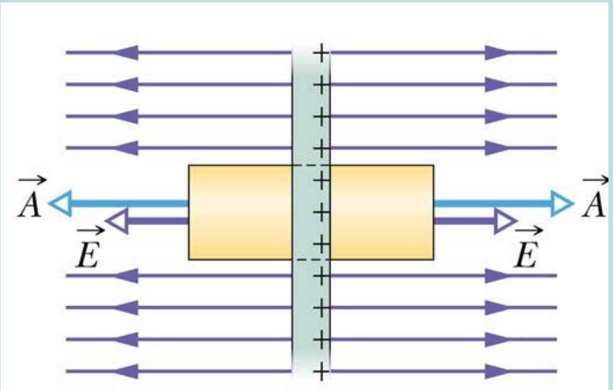


在圓柱邊， 電場平行於平面，電場$\vec{E}$與$d\vec{A}$垂直，通量為零！

在上下蓋，電場垂直於平面，或電場$\vec{E}$與$d\vec{A}$平行！







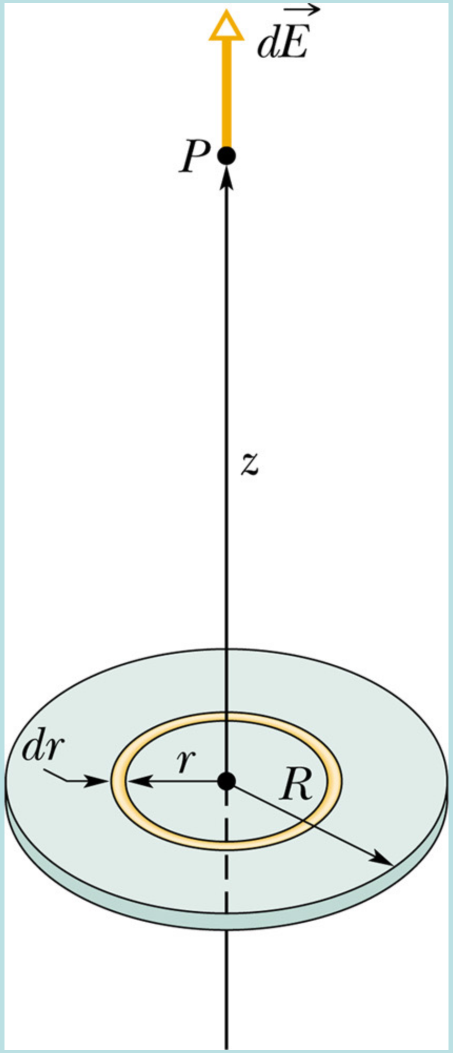
幸運的是：在上下蓋，電場大小E是一個常數！

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int E\cdot dA = E\int dA = 2E\cdot A = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

平板上面電荷密度為σ　　$q = \sigma A$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

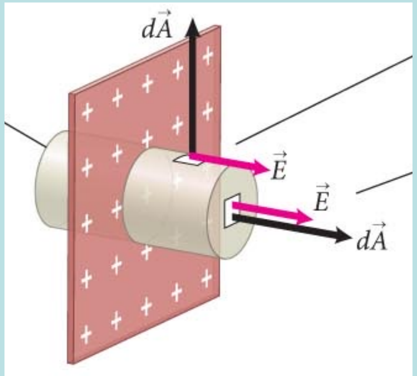
電場是均勻的：大小與位置無關。



帶電圓盤的電場

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right]\rightarrow\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\qquad 當R\rightarrow\infty$$

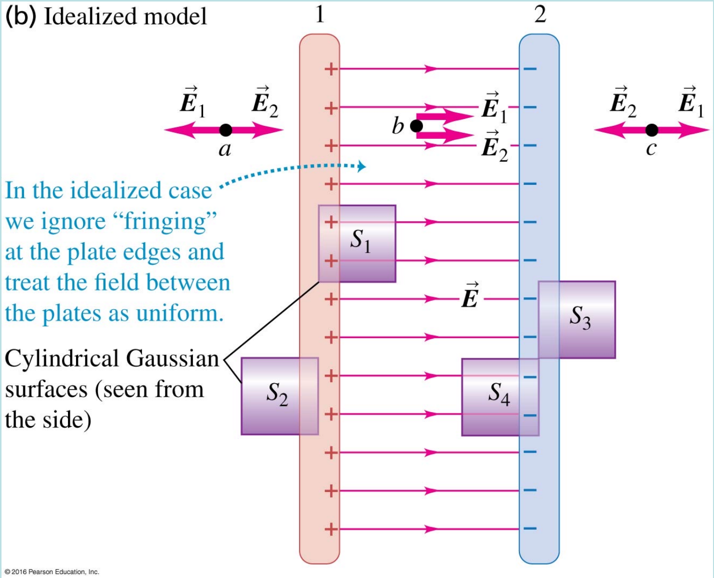
無限大帶電平板的電場

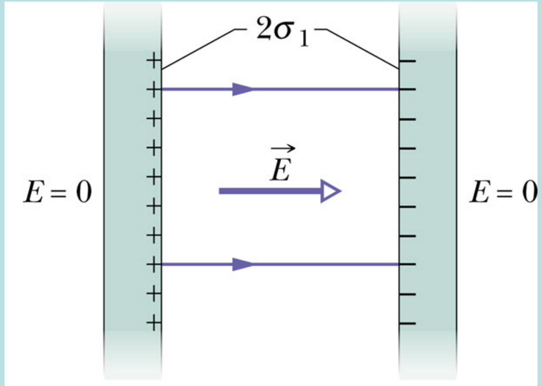


與高斯定律推導結果吻合！

但在此高斯定律推導比較容易！

兩片無限大等電荷密度之平行帶電板

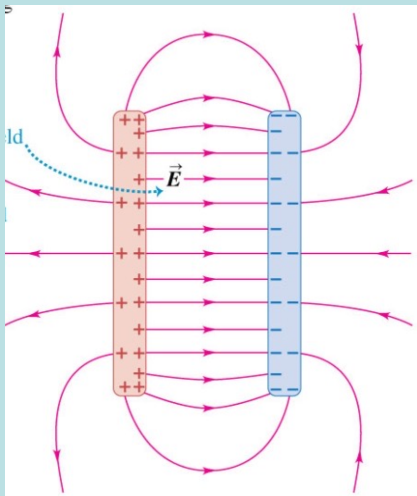




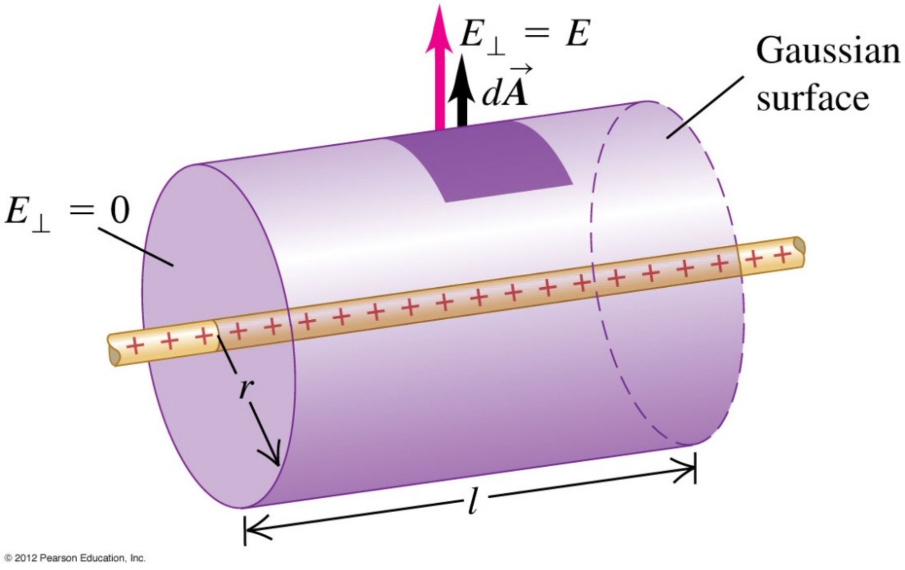
兩片電板間的電場是均勻電場 $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

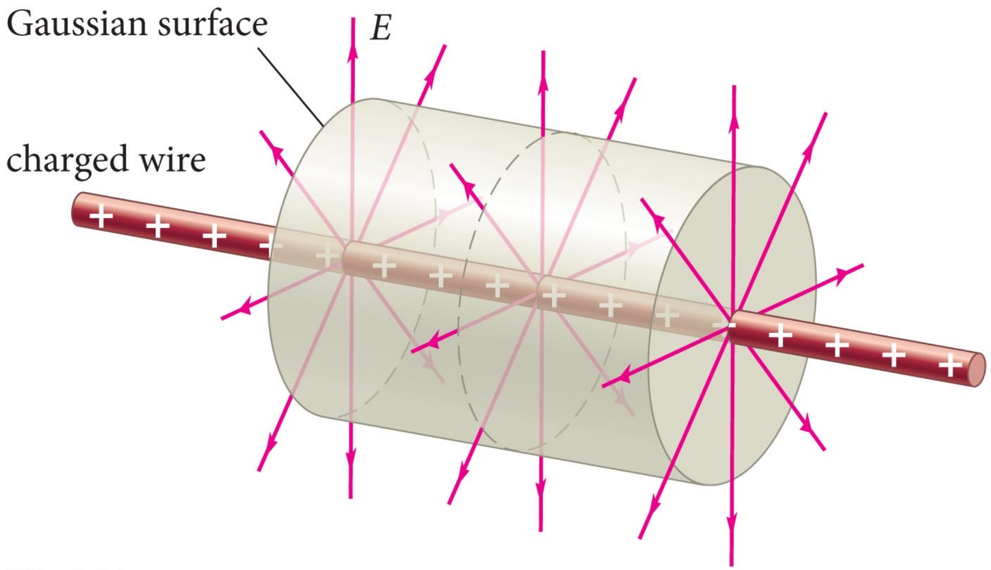
電板外電場為零

有限大的兩電板則有些許的邊界效應：



均勻的帶電棒： 設棒上線電荷密度為λ，計算帶電棒周圍距軸心為r處的電場。





電力線將由棒發出，並垂直於帶電棒的軸。

選擇同軸半徑為r的圓柱面為高斯面！

如此在兩端的蓋上，電場平行於蓋面，通量為零。只要算圓柱邊面上的電通量。

在圓柱邊，電場$\vec{E}$與$d\vec{A}$平行，且電場大小E是一個常數！

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int E \cdot dA = E \int dA = EA = E \cdot 2\pi rl = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

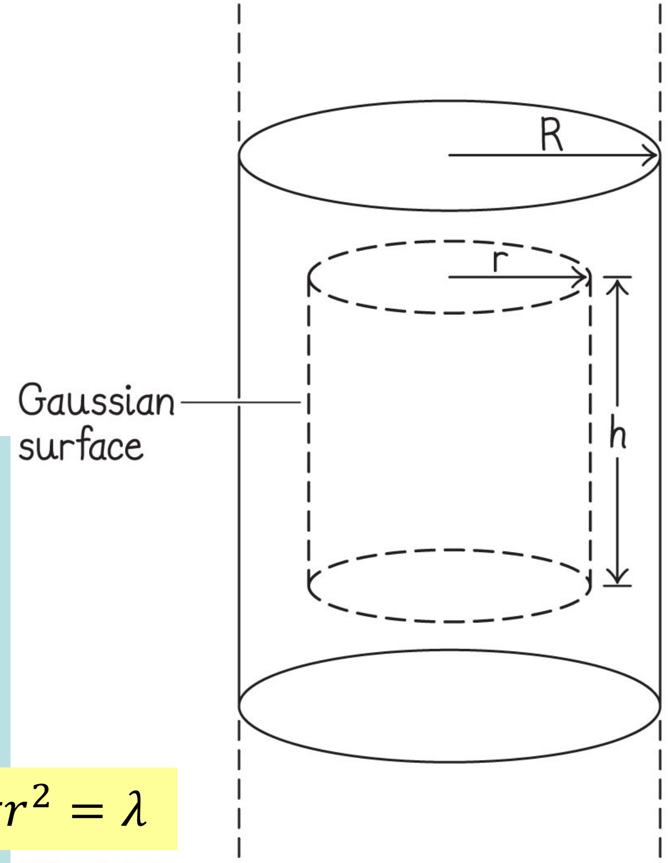
棒上線電荷密度為λ。 $q = \lambda l$

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}$$

同樣的方法也可以適用於半徑為R的粗帶電棒內，距軸心為r處的的電場。

$r < R$。

22.41 A very long, solid cylinder with radius R has positive charge uniformly distributed throughout it, with charge per unit volume ρ. (a) Derive the expression for the electric field inside the volume at a distance r from the axis of the cylinder in terms of the charge density ρ. (b) What is the electric field at a point outside the volume in terms of the charge per unit length λ in the cylinder? (c) Compare the answers to parts (a) and (b) for $r = R$. (d) Graph the electric-field magnitude as a function of r from $r = 0$ to $r = 3R$.



選擇一同軸半徑為r的圓柱面為高斯面！

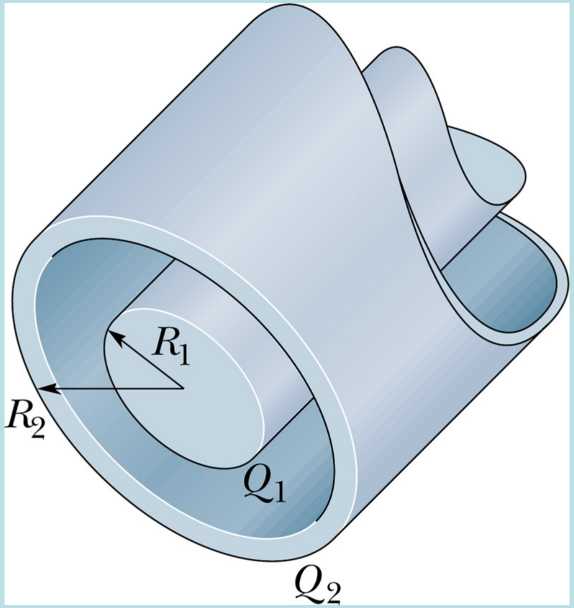
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot 2\pi r l = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\rho \cdot \pi r^2 l}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r$$

設棒內體電荷密度為 ρ。 $\rho \cdot \pi r^2 = \lambda$

如在帶電棒外$r > R$ ，電荷如同集中於軸上一細帶電棒，如同前一頁的計算。

或是

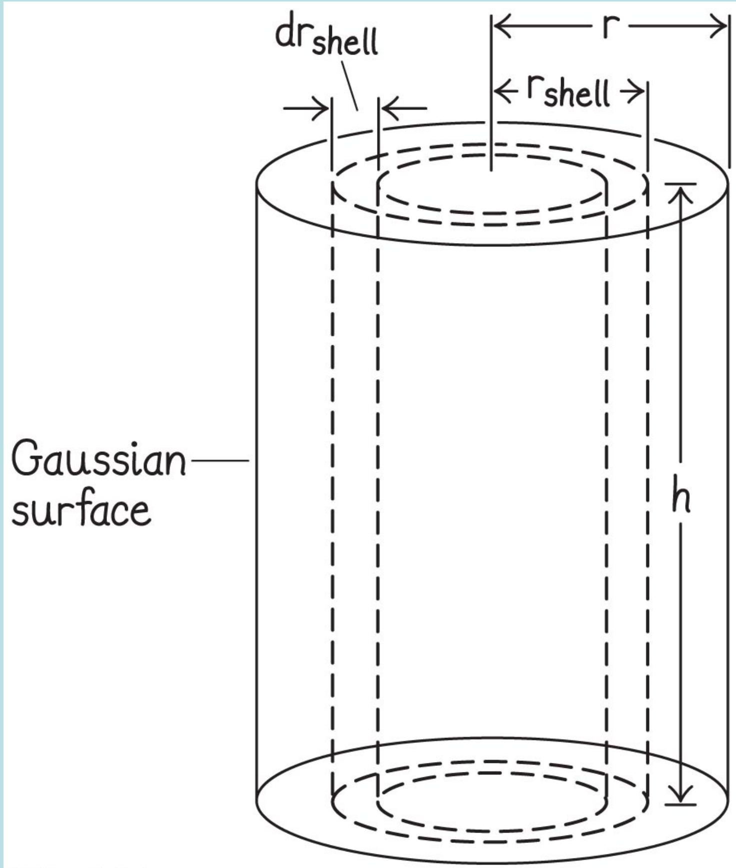


計算帶電棒周圍距軸心為r處的電場：

就選擇一同軸半徑為r的圓柱面為高斯面！

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot 2\pi r l = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

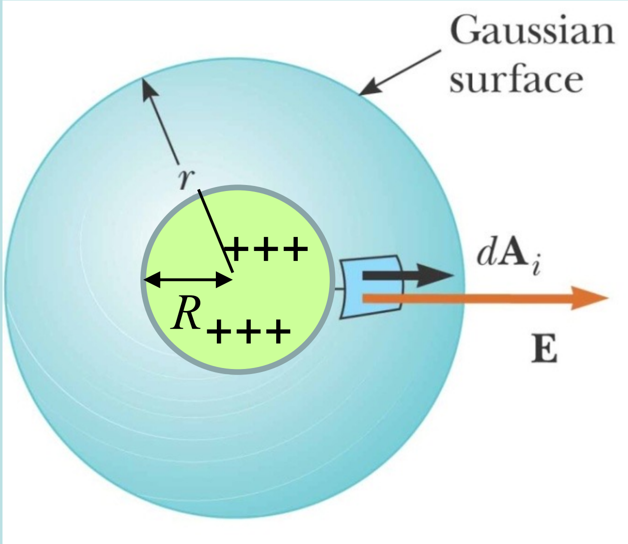
q就看r在哪一個範圍！



均匀的帶電球

均勻的帶電球（球對稱，半徑為R）周圍距球心為r處的電場：

選擇同球心半徑為r的球高斯面：



在電荷分布以外： $r > R$

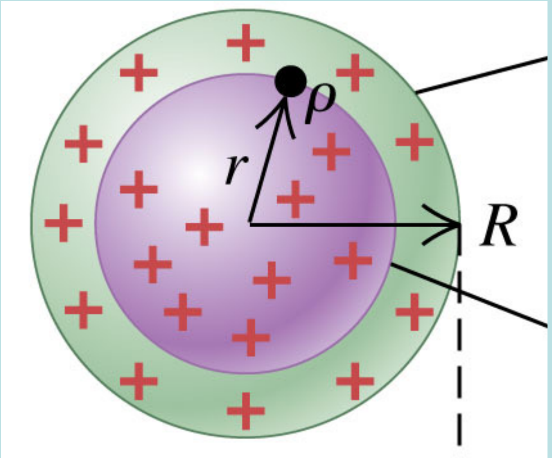
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int E \cdot dA = E \int dA = EA = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

電場如同所有電荷集中在球心的點電荷。

平方反比是三度空間的性質。

在電荷分布以內：$r < R$

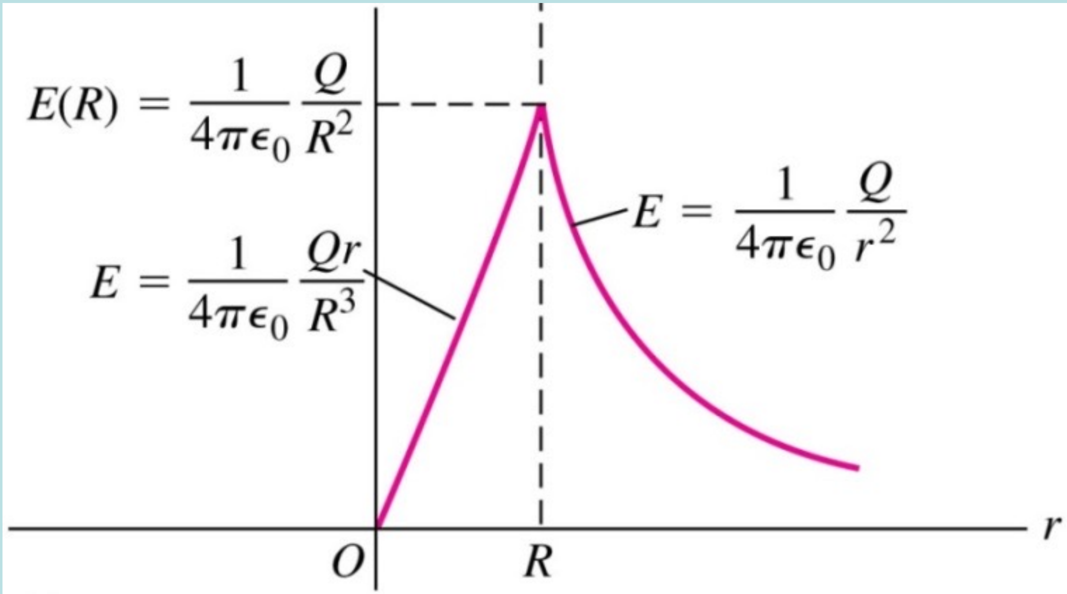


$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0}$$

設球內體電荷密度為 $\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$。

$$q = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3} r$$



••50 Figure 23-51 shows a spherical shell with uniform volume charge density $\rho = 1.84$ nC/m^3, inner radius $a = 10.0$ cm, and outer radius $b = 2.00a$. What is the magnitude of the electric field at radial distances (a) $r = 0$; (b) $r = a/2.00$, (c) $r = a$, (d) $r = 1.50a$, (e) $r = b$, and (f) $r = 3.00b$?

••51 In Fig. 23-52, a solid sphere of radius $a = 2.00$ cm is concentric with a spherical conducting shell of inner radius $b = 2.00a$ and outer radius $c = 2.40a$. The sphere has a net uniform charge $q_1 = +5.00$ fC; the shell has a net charge $q_2 = -q_1$. What is the magnitude of the electric field at radial distances (a) $r = 0$, (b) $r = a/2.00$, (c) $r = a$, (d) $r = 1.50a$, (e) $r = 2.30a$, and (f) $r = 3.50a$? What is the net charge on the (g) inner and (h) outer surface of the shell?

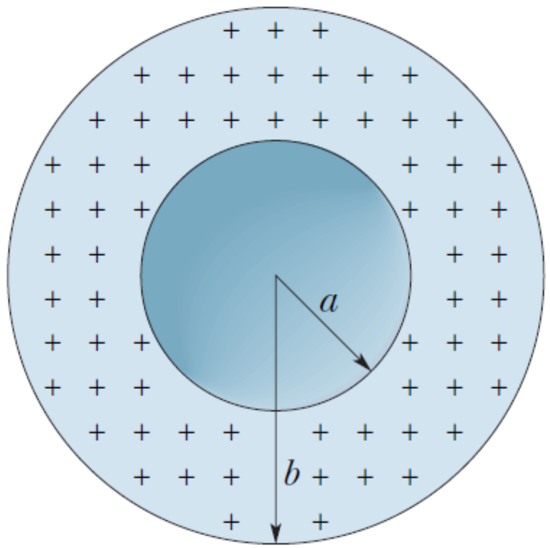


FIG. 23-51 Problem 50.

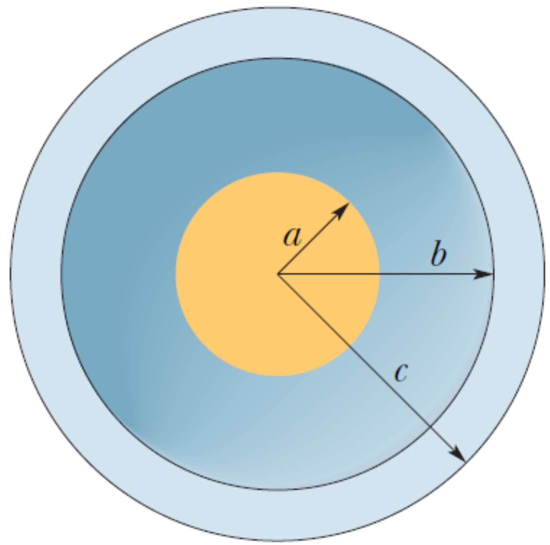
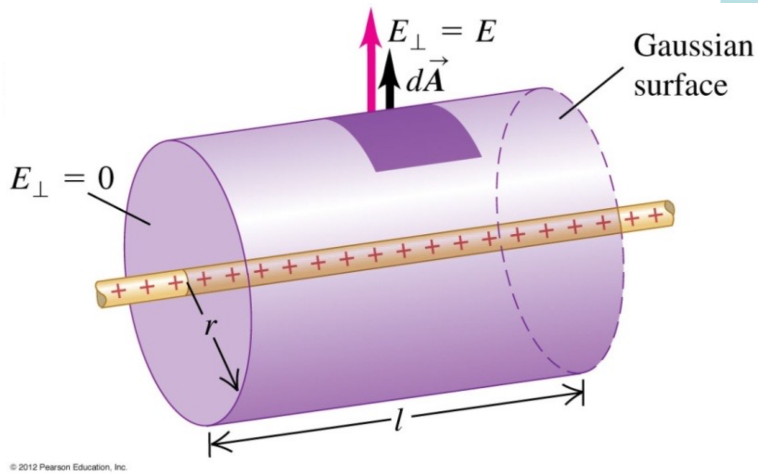
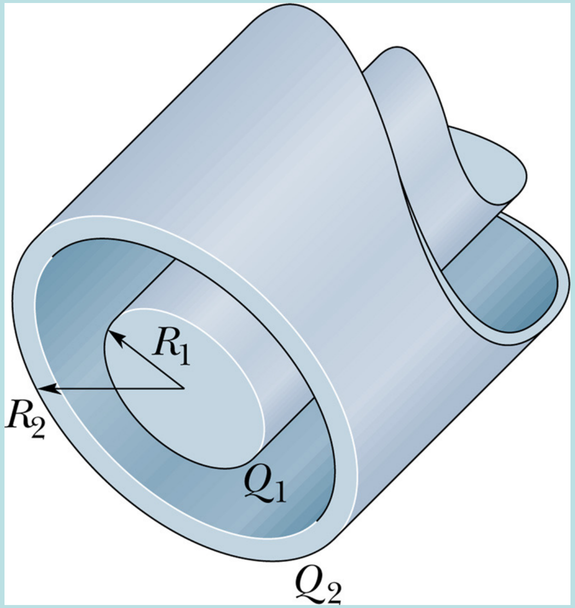


FIG. 23-52 Problem 51.

22.41 A very long, solid cylinder with radius R has positive charge uniformly distributed throughout it, with charge per unit volume ρ. (a) Derive the expression for the electric field inside the volume at a distance r from the axis of the cylinder in terms of the charge density ρ. (b) What is the electric field at a point outside the volume in terms of the charge per unit length λ in the cylinder? (c) Compare the answers to parts (a) and (b) for $r = R$. (d) Graph the electric-field magnitude as a function of r from $r = 0$ to $r = 3R$.



或是



1. 考慮一長直中空的帶電圓柱，其結構是圓柱對稱的，中空部分與圓柱同軸。中空部分半徑為 1.0m，軸的外半徑為 2.0m。橫切面如下圖左所示，圖中以軸心為原點，水平軸為 x 軸，垂直軸為 y 軸。假設電荷在中空圓柱中均勻分佈，圓柱中**沿軸方向**每單位長度（公尺）的總電荷為 4.5×10^{-6} C/m（**對橫切面加總**）。

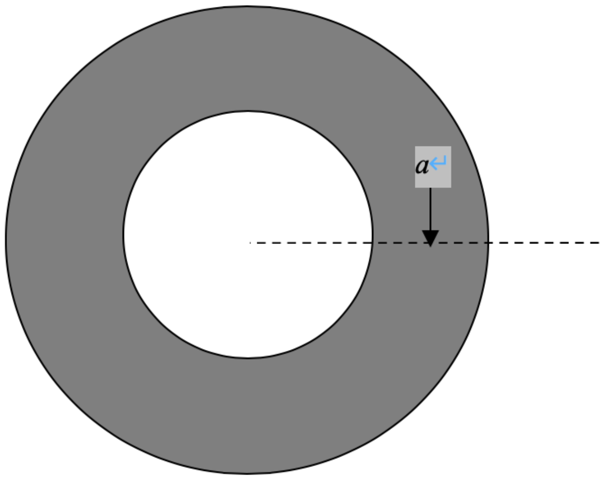
A. 計算圖上 a（在 x 軸上，距軸心 1.5 m）點的電場大小(N/C)及方向。(15)

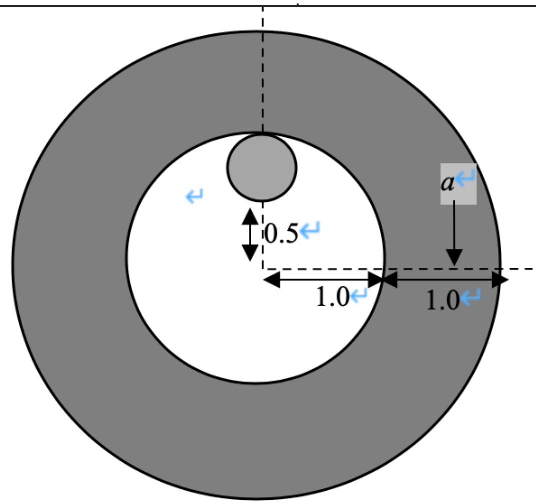
假設在中空處另外置入一個長直實心的帶電圓柱，半徑為 0.25m，軸心位於 y 軸上，距原本帶電中空圓柱軸心（即原點）0.75 m，橫切面如下圖右所示。假設電荷在此新的帶電圓柱內亦均勻分佈，圓柱中**沿軸方向**每單位長度的總電荷為 -4.5×10^{-6} C/m（**對橫切面加總**）。

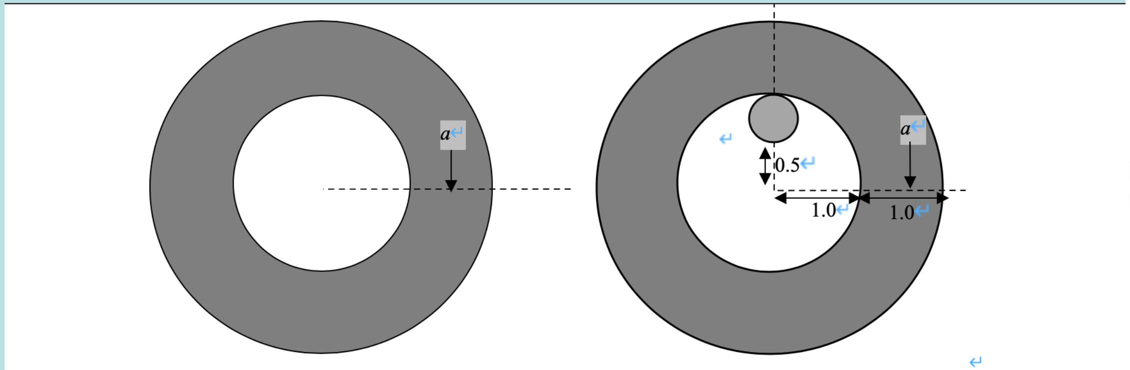
B. 計算圖上 a 點（在 x 軸上，距軸心 1.5 m）的電場的 x 分量大小(N/C)？(15)

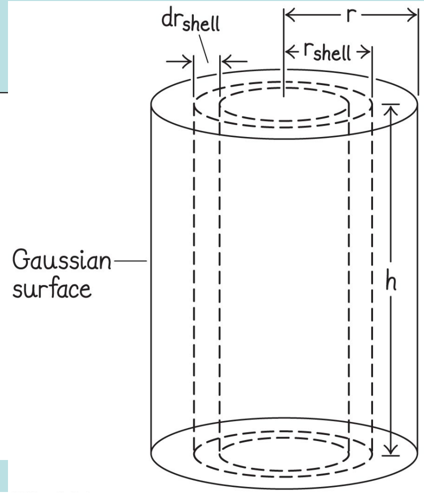
提示：將兩圓柱的電場分開計算再疊加起來。

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}=9.0\times10^{9}\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2}，\ \varepsilon_0=8.854\times10^{-12}\ \mathrm{C^2/N\cdot m^2}。$$









解答：取沿軸通過所選位置 a 的圓柱體（半徑為 1.5 m，長度為 l）為高斯面，

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = E\cdot 2\pi r\cdot l = \frac{Q}{\varepsilon_0}\text{，}E=\frac{Q/l}{2\pi\varepsilon_0 r}\text{。}$$

高斯面半徑為 1.5 m，只包圍一部分的電荷，此電荷每單位長為：

$$\frac{Q}{l}=4.5\times10^{-6}\times\frac{1.5^2-1^2}{2^2-1^2}=1.9\times10^{-6}\,\text{C/m}$$

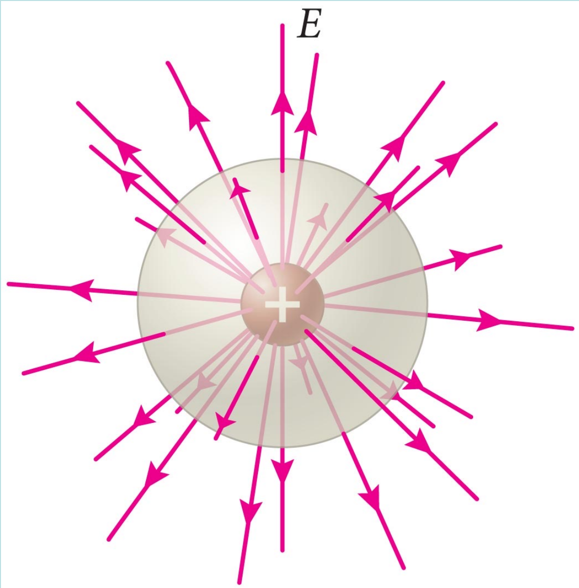
，此處電場：

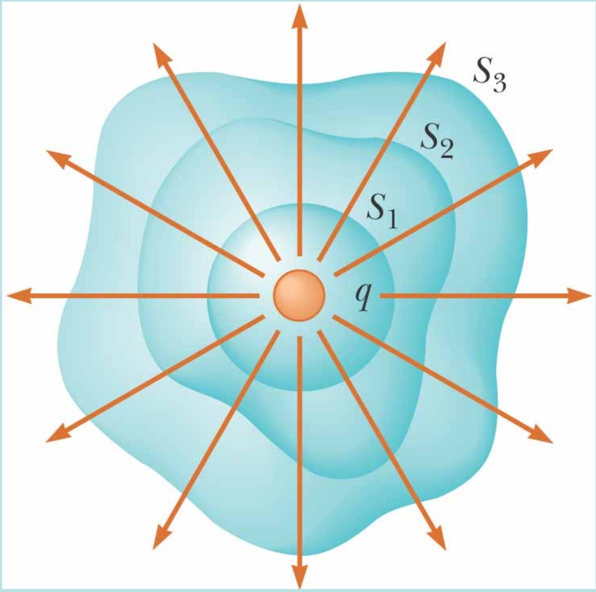
$$E_1=\frac{Q/l}{2\pi\varepsilon_0 r}=\frac{4.5\times10^{-6}\times\frac{1.5^2-1^2}{2^2-1^2}}{2\pi\varepsilon_0\times1.5}=2.3\times10^{4}\,\text{N/C}\text{。}$$

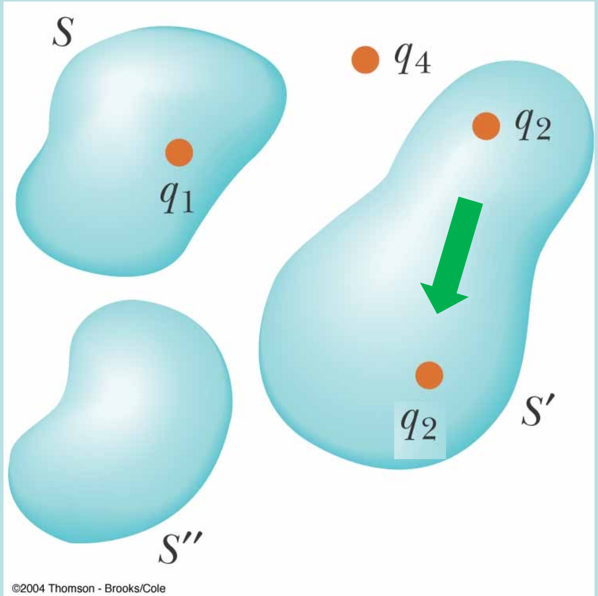
同樣的計算也適用於實心帶電圓柱，此時點 a 距離軸心 1.7m，此時高斯面包圍實心圓柱所有電荷，因此實心帶電圓柱所產生的電場：

$$E_2=\frac{Q/l}{2\pi\varepsilon_0 r}=\frac{-4.5\times10^{-6}}{2\pi\varepsilon_0\times1.7}=-4.9\times10^{4}\,\text{N/C}\text{。}$$

在 x 方向的電場 $E_2\times\frac{2}{\sqrt{5}}+E_1=-4.9\times10^{4}\times0.89+2.3\times10^{4}=-2.1\times10^{4}\,\text{N/C}$。





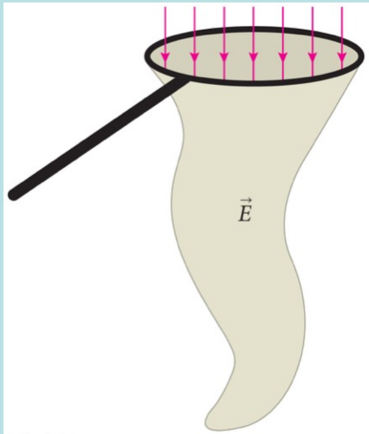


庫侖定律規定了點電荷q所產生的電場線形狀：放射狀！

面積分正好會捕抓曲面內所放射出的場線的數目，無論放射源在曲面內的何處。

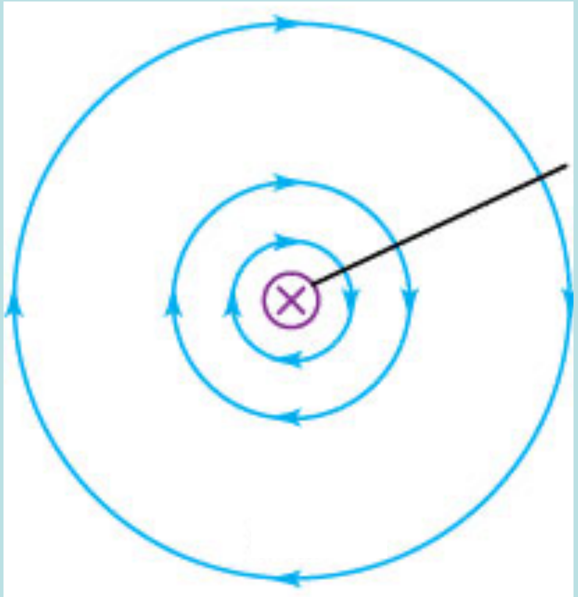
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

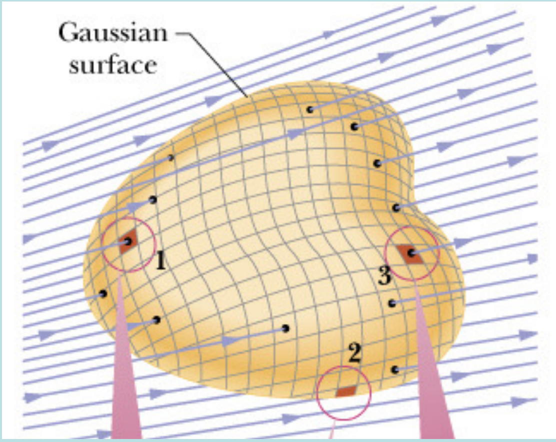
電荷量q就正比於所放射的電場線的數量！



連續的電場線可以是放射狀以外的其他形狀嗎？

它可以沒有生成的點也沒有消滅的點嗎？





想像由一條一條的封閉曲線（不一定是圓）構成的場線。

我們把它們稱為旋渦狀的場線。

這樣的線沒有生成的點也沒有消滅的點，而場線數目也是守恆的。

電場線可以是旋渦狀嗎？若根據庫侖定律，電場是沒有旋渦狀場線的。

但旋渦狀場線的電通量永遠等於零，因此高斯定律對之完全沒有約束。

防疫破口！

$$\oint \vec{E}_{\text{旋渦}} \cdot d\vec{A} = 0$$

高斯定律可以完全取代庫倫定律嗎？

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0} \Longleftrightarrow \vec{E} = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

不能！因為它不夠嚴格！

高斯定律的微分形式

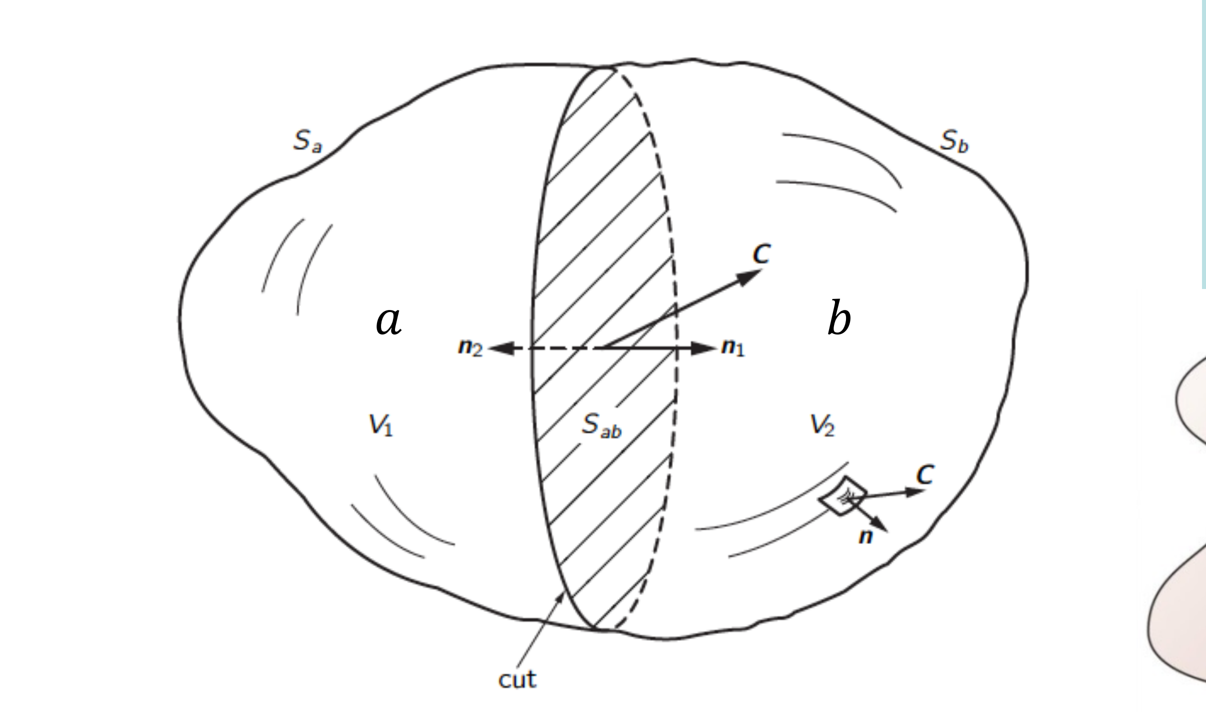
物理的成年禮！

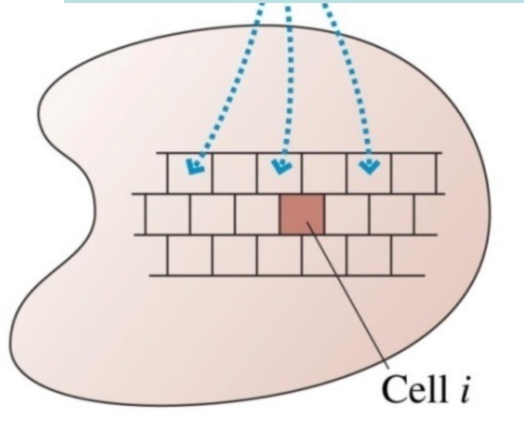
將一個空間分解成子空間， $a+b$

包圍此空間的電通量會等於包圍子空間的電通量的和。 $\Phi_{a+b}=\Phi_a+\Phi_b$

這是因為加總通量時，子空間的接觸面S_{ab}的通量會互相抵消，

只留下最外圍曲面S_a+S_b的通量。

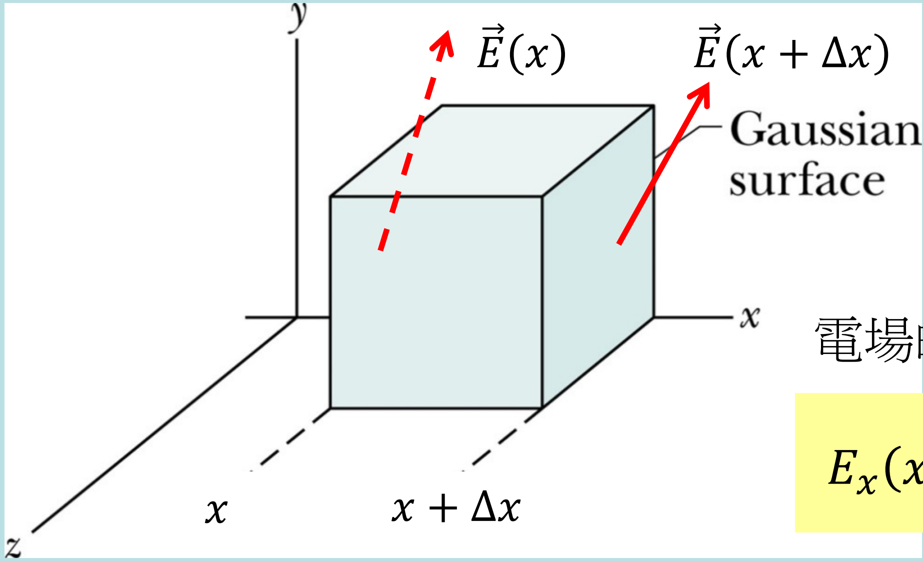




那麼若將一高斯面內的空間，分解成小方塊的組合，

將包圍小方塊高斯面的電通量加總，就是原來高斯面的電通量。

考慮一個無限小的立方體高斯面



電場的 x 分 量$E_x(x,y,z)$ 是多變數函數！

$$E_x(x+\Delta x,y,z)-E_x(x,y,z)=\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}\right)\Delta x$$

先計算垂直於 x 軸左右兩個面的通量$\vec{E}\cdot d\vec{A}$， $d\vec{A}\parallel \hat{e}_x$： $\vec{E}\cdot d\vec{A}\sim E_x\cdot dA$

$$E_x(x+\Delta x)\cdot\Delta y\Delta z-E_x(x)\cdot\Delta y\Delta z=\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}\right)\Delta x\cdot\Delta y\Delta z$$

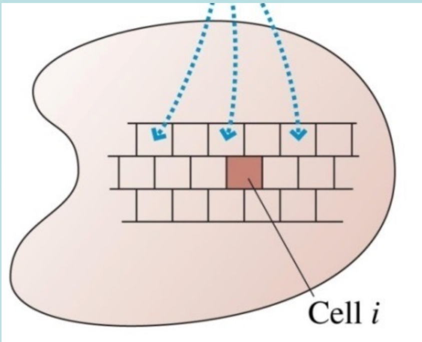
同理：垂直於 y 軸上下兩個面的通量就等於： $\left(\frac{\partial E_y}{\partial y}\right)\cdot\Delta x\Delta y\Delta z$

因此總通量為 $$\Phi_E=\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)\cdot\Delta x\Delta y\Delta z\equiv(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\cdot\Delta V$$

散度，一個純量，由向量場計算出的一個純量場 $$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\equiv\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}$$

一個無限小的方塊高斯面的電通量等於電場的散度乘上體積！

$$\Delta\Phi_E = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) \cdot \Delta x \Delta y \Delta z \equiv (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \cdot \Delta V$$



若將一高斯面內的空間，分解成小方塊的組合，

將小方塊表面的電通量加總，就是原來高斯面的電通量。

$$\Phi_E = \sum_i \Delta\Phi_{iE} = \sum_i (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \cdot \Delta V_i \rightarrow \int (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dV$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dV$$

對任何向量場任何高斯面都對！

數學上的高斯定律

一個無限小的方塊高斯面的電通量等於當地電場的散度乘上方塊體積！

$$\Phi_E = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) \cdot \Delta x \Delta y \Delta z \equiv (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \cdot \Delta V$$

將積分形式的高斯定律適運用於此小方塊，小方塊內電荷等於$\rho \cdot \Delta V$：

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\rho \cdot \Delta V}{\varepsilon_0} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \cdot \Delta V$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

高斯定律的微分形式，對任一個點成立

散度即是單位體積內電力線數目的增加。

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

積分形式的高斯定律可以推導出微分形式。

將微分形式的高斯定律

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

代入前述數學的高斯定律：

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dV$$

可得積分形式的高斯定律

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int \left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right) dV = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

微分形式的高斯定律可以推導出積分形式。

可見積分形式的高斯定律與微分形式的高斯定律是等價的。

電磁力的基本定律：

Maxwell Equations, Finally

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$