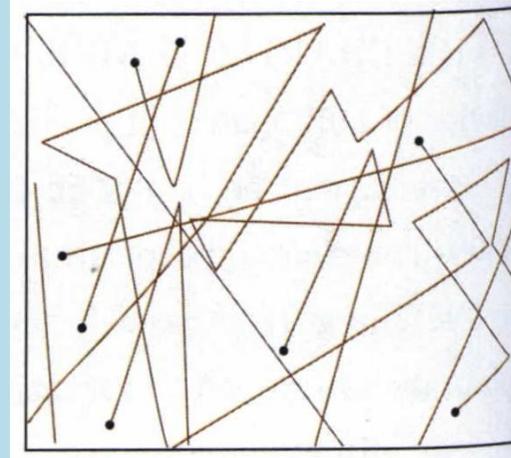


巨觀的氣體

我們的策略：



微觀看是質點系統

P, V, T, E_{int}, H



$\vec{r}_i, \vec{v}_i \quad i = 1 \dots N$

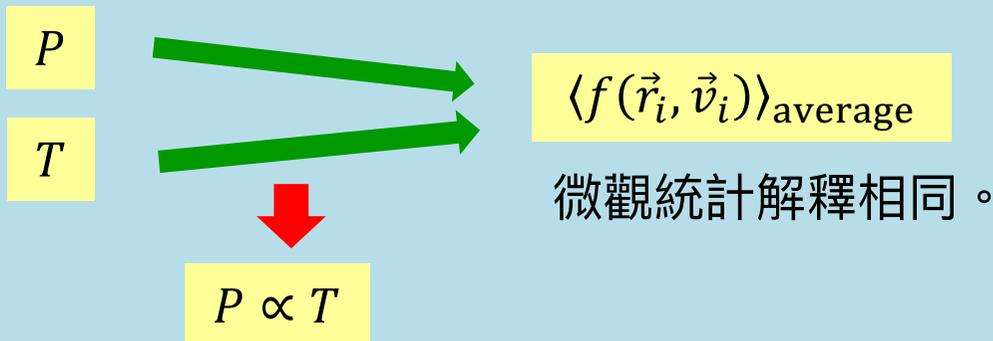
$N \sim 10^{23}$

巨觀描述氣體的物理量是來自微觀的質點物理量！

由大量的數字得出少量的有用的結果就稱為統計：

巨觀物理量本質上是微觀物理量的統計結果！

找到巨觀物理量的微觀統計解釋，或許就可以找到巨觀物理量彼此的關係！



$$\left\langle \frac{1}{2}mv^2 \right\rangle_{\text{av}} = \frac{3}{2}kT$$

$$T = \frac{2}{3k} \left\langle \frac{1}{2}mv^2 \right\rangle_{\text{avg}}$$

溫度 T 的微觀統計解釋！

壓力與溫度原來都是同一個微觀量的統計結果:動能平均。

已知壓力 P 的微觀統計解釋！

$$P = \frac{2nN_A}{3V} \cdot \left\langle \frac{1}{2}mv^2 \right\rangle_{\text{avg}}$$

加上溫度 T 的微觀統計解釋！

$$T = \frac{2}{3} \frac{N_A}{R} \left\langle \frac{1}{2}mv^2 \right\rangle_{\text{avg}}$$

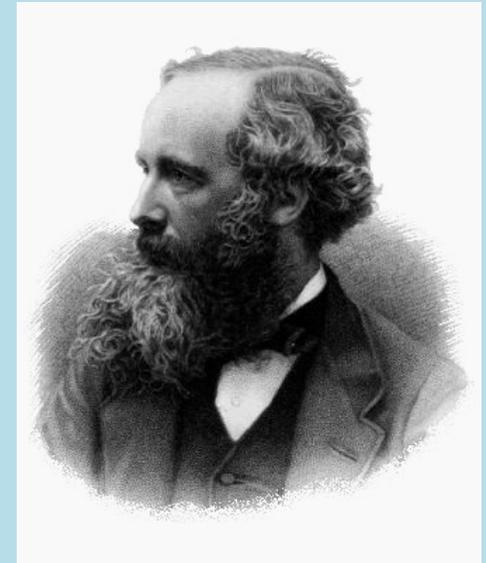


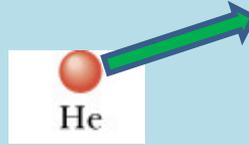
$$T = P \frac{V}{nR}$$

導出了狀態方程式

$$N = nN_A$$

$$kN_A = R$$





在理想氣體中，位能可以忽略，內能只能來自動能：

內能等於平均動能乘粒子數：

$$E_{\text{int}} = N \left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle_{\text{av}} = \frac{3}{2} N k T = \frac{3}{2} n R T$$

導出了內能

$$E_{\text{int}} = \frac{3}{2} n R T$$

這也是第一次人類可以估計氣體分子速度，最容易估計的：

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle_{\text{avg}}}$$

氣體分子的方均根速率，root-mean-square speed
不是速率平均，但可以是一近似。

$$\left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle_{\text{avg}} = \frac{1}{2} m v_{\text{rms}}^2 = \frac{3}{2} kT$$

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3PV}{nM}}$$

$$N = nN_A$$

$$mN_A = M$$

以室溫 300K 的氫氣為例 $M = 0.002 \text{ kg/mol}$

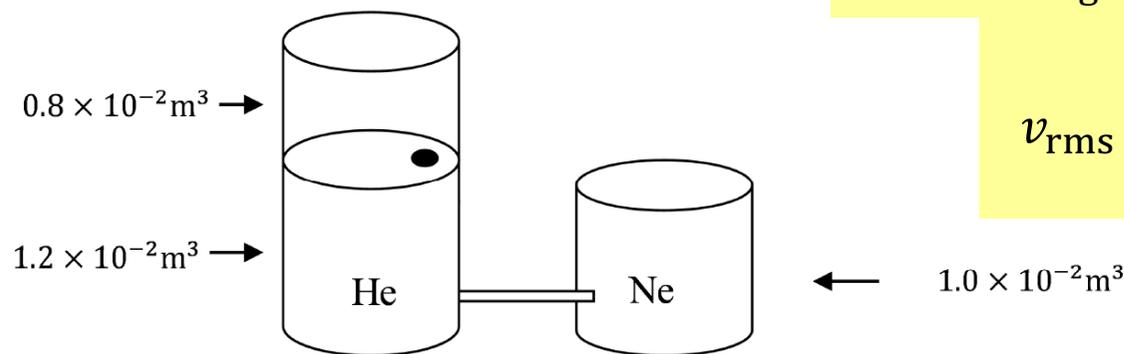
$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8.31 \cdot 300}{0.002}} \sim 1920 \text{ m/s}$$

氣體分子的速率大致與溫度的平方根成正比，而與分子量的平方根成反比。

如圖所示，考慮一莫耳的氦氣（He 原子量 4），裝在體積 $1.2 \times 10^{-2} \text{m}^3$ 的容器內，以及同樣是一莫耳的氖氣（Ne 原子量 20），裝在體積 $1.0 \times 10^{-2} \text{m}^3$ 的容器內，這兩缸氣體起初的壓力相同，已知氦氣的溫度是 300K。

- (a) 問這兩缸氣體內氣體分子的方均根速率的比例為何？請注意氦氣和氖氣都是由單原子分子組成。(5 分)

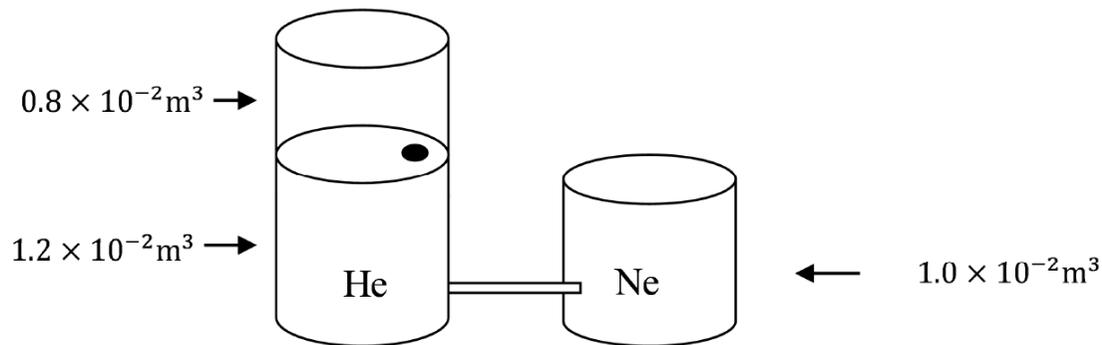
解答：(a) 理想氣體分子的方均根速度是由平均動能決定，而平均動能是正比於溫度，由於氦氣體積是氖氣的 1.2 倍，其他條件相同，由 $PV = nRT$ ，得知氦氣溫度是氖氣的 1.2 倍（氖氣溫度為 250K），故氦氣平均動能亦是氖氣的 1.2 倍，但 He 分子質量為 Ne 分子的 1/5，所以 He 分子方均根速度是 Ne 分子的 $\sqrt{(1.2 \times 5)} = \sqrt{6} = 2.45$ 倍。



$$\left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle_{\text{avg}} = \frac{1}{2} m v_{\text{rms}}^2 = \frac{3}{2} kT$$

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

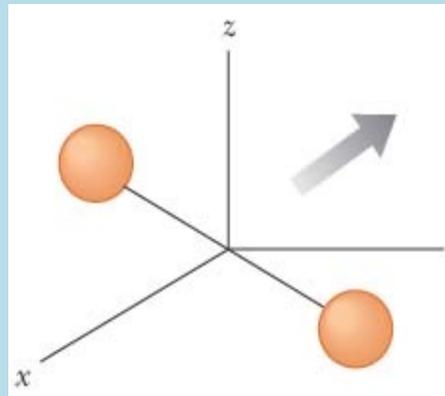
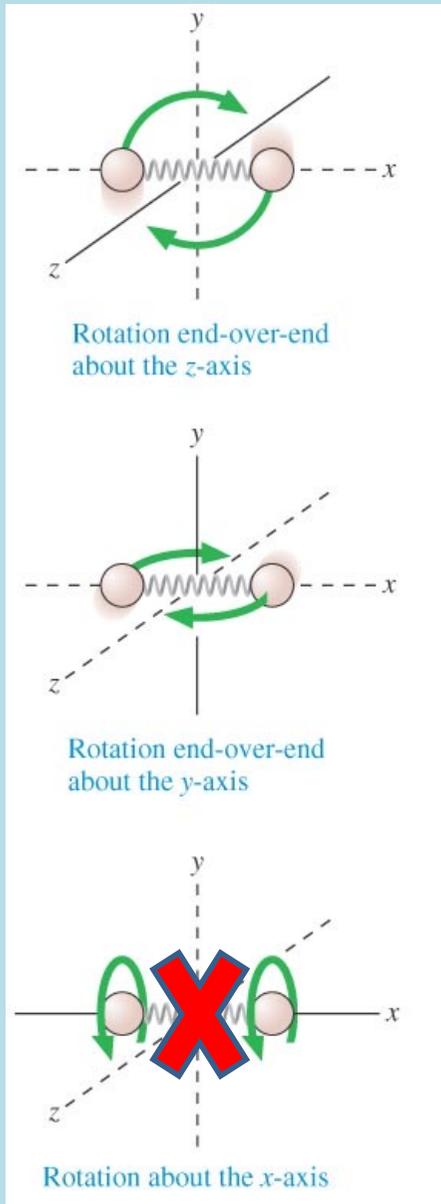
- (b) 假設氦氣的容器包含一活門，通往如圖所示隔壁體積為 $8.0 \times 10^{-3} \text{m}^3$ 的密閉空間，我們打開活門，使氦氣分子自由地擴散充滿整個容器，假設在此過程中氦氣與外界沒有熱量交換，等到氦氣再次達到熱平衡之後，請問此時氦氣的壓力是多少 N/m^2 ？ $R = 8.314 \text{ J/mol K}$ 。(5 分)
- (c) 在 b 的步驟之後我們將兩容器以一導管連接，使兩氣體都擴散到對方容器之中，等到兩種氣體再次達到熱平衡之後，請問其中氦氣分子的平均動能與原來未混合前的平均動能的比例為何？容器內總壓力是多少 N/m^2 ？假設在此過程中氣體與外界沒有熱量交換，但彼此會有熱交互作用。(10 分)



(b) 在自由擴散的過程中，因為氦氣分子與外界沒有任何能量交換，所以平均動能不變，溫度也就沒有改變，仍是 300K 。但擴散之後體積成為 20 公升，用 $PV = nRT$ ， $P = 1.24 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ 。

(c) 可以把問題中的過程分成兩段，想像兩氣體先自由擴散，如同 b) 的討論，溫度不會改變，然後兩氣體分子交換能量，最後溫度必須相同，也就是平均動能要一樣，根據能量守衡，末溫度為兩氣體原來溫度的平均為 275K 。氦氣分子混合前後平均動能的比即為溫度的比 $300/275 = 1.1$ 。

雙原子分子的內能



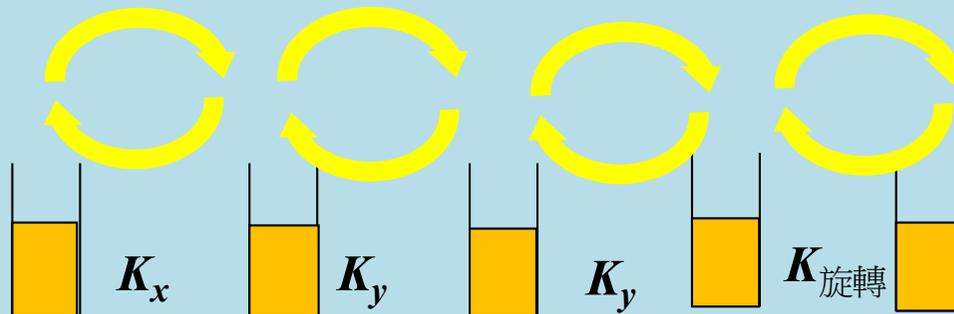
如果把可以儲存能量的轉動動能也包括進來：
 雙原子分子有兩個轉動動能、三個移動動能。
 可以儲存能量的型式的數目，稱為**自由度**。
 雙原子分子共有五個自由度。 $f = 5$

大膽假設，平衡時每一個自由度會得到相等的能量： $\frac{1}{2}kT$ 。

$$E_{\text{int}} = Nf \cdot \frac{1}{2}kT = \frac{5}{2}NkT = \frac{5}{2}nRT$$

$$c_V = \frac{5}{2}R$$

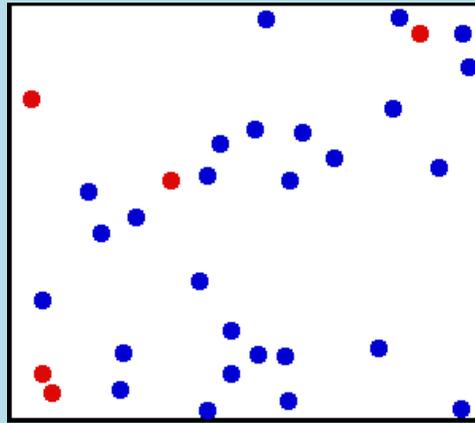
雙原子分子組成的氣體的定容比熱就可以得到解釋。



能量均分原則 Equipartition of Energy

一個系統中，**任一個**可以儲存能量的型式（稱為自由度），
在頻繁的熱作用（混亂的能量交換）

達到**熱平衡**後，都會得到同樣的平均能量： $\frac{1}{2}kT$ 。



溫度的微觀意義原來是每一個自由度所分配的能量！

$$\langle E \rangle_{\text{av}} = \frac{1}{2}kT$$

理想氣體溫度為動能平均是這個更廣泛的原則的一個特例。

混亂製造了平衡態，混亂也使我們可以預測平衡態的性質！

關鍵是需要**頻繁混亂的能量交換**！這是**熱現象的本質**。

氣體也可以定義莫耳比熱 c 。

單位莫耳數氣體，單位溫度變化對應的熱量。

$$Q = nc\Delta T$$

但比熱與路徑有關。同樣溫度變化對應不同熱量。

有兩個比熱特別有用。

定容過程

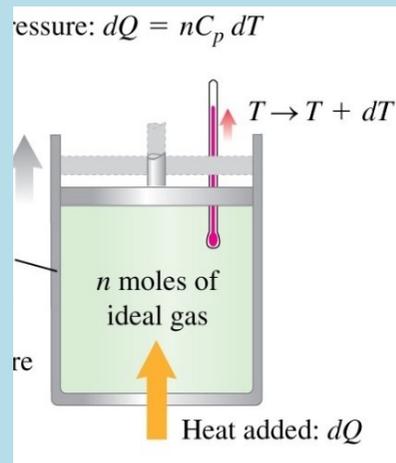
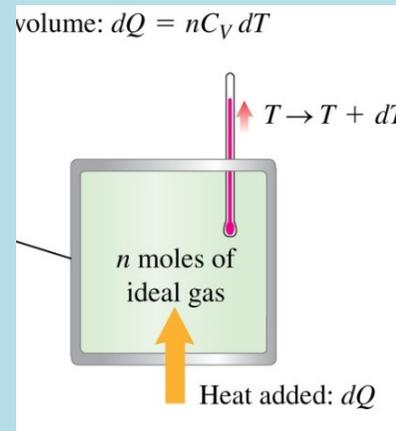
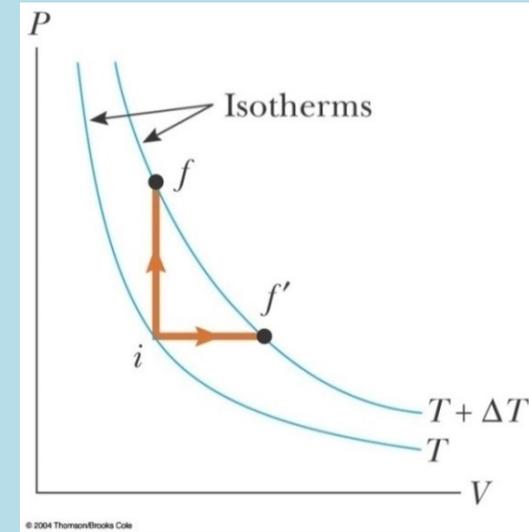
定容比熱 c_V

$$Q = nc_V\Delta T$$

定壓過程

定壓比熱 c_P

$$Q = nc_P\Delta T$$



Type of Gas	Gas	C_V (J/mol · K)
Monatomic	He	12.47
	Ar	12.47
Diatomic	H ₂	20.42
	N ₂	20.76
	O ₂	20.85
	CO	20.85
Polyatomic	CO ₂	28.46
	SO ₂	31.39
	H ₂ S	25.95

© 2012 Pearson Education, Inc.

單原子分子組成的理想氣體

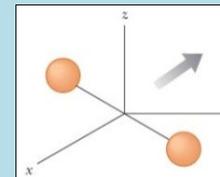
$$c_V = \frac{3}{2}R$$



雙原子分子組成的理想氣體

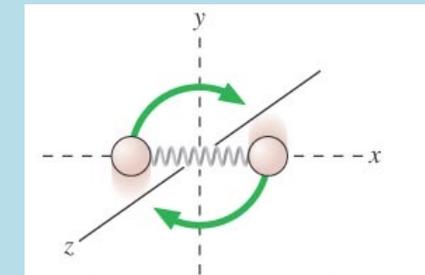
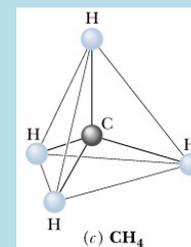
$$E_{\text{int}} = nc_V T$$

$$c_V = \frac{5}{2}R$$

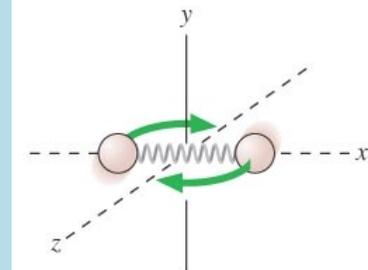


多原子分子組成的理想氣體

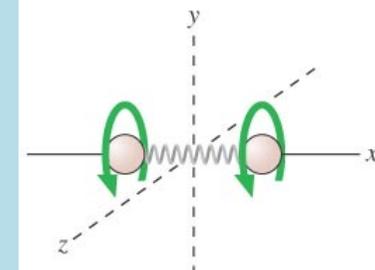
$$c_V = 3R$$



Rotation end-over-end about the z-axis



Rotation end-over-end about the y-axis



Rotation about the x-axis

$$c_p = c_v + R$$

單原子分子組成的理想氣體

$$c_v = \frac{3}{2}R$$

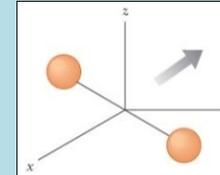
$$c_p = \frac{5}{2}R$$



雙原子分子組成的理想氣體

$$c_v = \frac{5}{2}R$$

$$c_p = \frac{7}{2}R$$



多原子分子組成的理想氣體

$$c_v = 3R$$

$$c_p = 4R$$

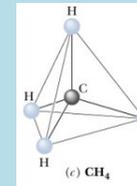


Table 19.1 Molar Heat Capacities of Gases at Low Pressure

Type of Gas	Gas	C_v (J/mol · K)	C_p (J/mol · K)	$C_p - C_v$ (J/mol · K)	$\gamma = C_p/C_v$
Monatomic	He	12.47	20.78	8.31	1.67
	Ar	12.47	20.78	8.31	1.67
Diatomic	H ₂	20.42	28.74	8.32	1.41
	N ₂	20.76	29.07	8.31	1.40
	O ₂	20.85	29.17	8.31	1.40
	CO	20.85	29.16	8.31	1.40
Polyatomic	CO ₂	28.46	36.94	8.48	1.30
	SO ₂	31.39	40.37	8.98	1.29
	H ₂ S	25.95	34.60	8.65	1.33

對於理想氣體：

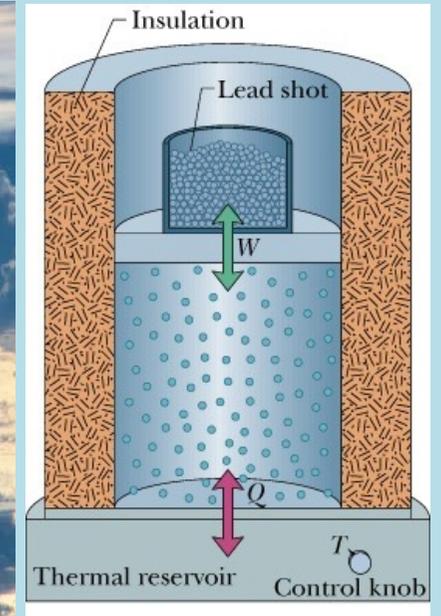
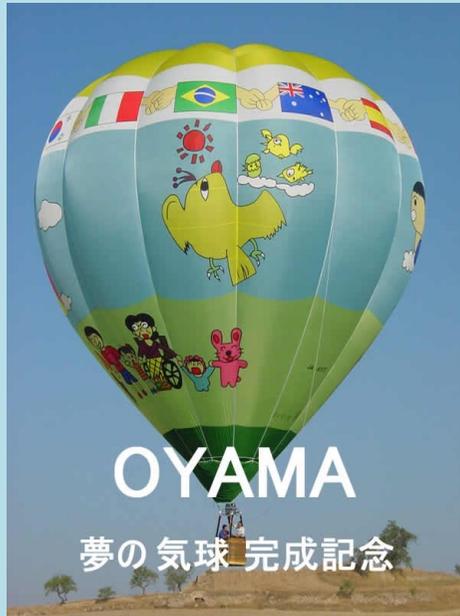
熱力學第零定律

$$T = \frac{PV}{nR}$$

熱力學第一定律

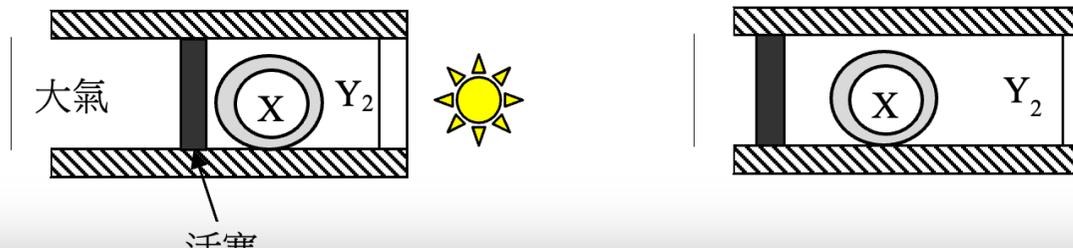
$$E_{\text{int}} = nc_v T$$

利用這兩個式子，即能判斷氣體與外界是否達到熱平衡，
以及計算在達到熱平衡的熱過程中進行的、見不到的熱量交換 Q 。

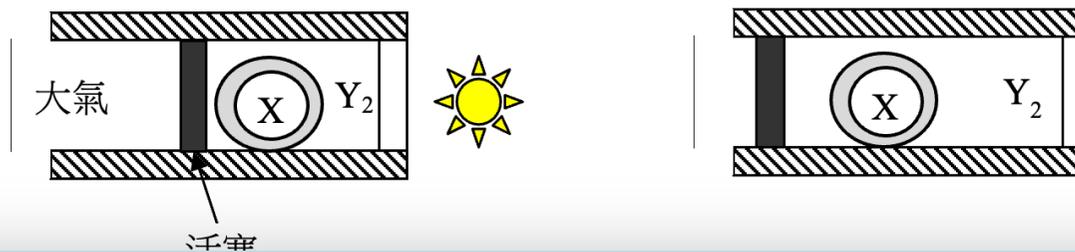


1. 考慮如下圖左的容器，由一可左右自由移動的絕熱活塞（圖中黑色）封閉，圖中斜線部分的器壁也絕熱，但右方器壁（圖中白色）可傳熱。活塞外為壓力保持 1.0 atm 的大氣，溫度 27°C 。容器內充滿 Y_2 氣體 2.0 莫耳， Y_2 氣體是雙原子分子所構成。此空間內，同時置一球型密閉不變形容器，體積為 V_0 ，器壁可傳熱。球內充滿 X 氣體 1.0 莫耳，此氣體為單原子分子所構成，球的器壁厚度可忽略。兩元素原子量的比為 $\text{X}:\text{Y} = m:n$ 。

起始時，容器內溫度為 27°C ，體積為 $2V_0$ （也就是 Y_2 氣體體積約為 V_0 ）。現在透過容器的右方器壁對氣體加熱， Y_2 氣體慢慢膨脹，推動活塞使右方空間體積增加，至 $3V_0$ 時停止加熱，如下圖右所示。假設此過程發生夠慢， Y_2 氣體與 X 氣體一直處於熱平衡狀態。所有氣體皆可視為理想氣體。 $R = 8.31 \text{ J/mol}\cdot\text{K}$ ， $1 \text{ atm} = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ 。(25)



- A. 在上述過程中， X 氣體及 Y_2 氣體分別經歷何種熱過程（例如定容、定壓、絕熱、定溫或其他）？過程結束時， X 氣體及 Y_2 氣體的溫度各是多少 K ？



解答：

A. X 氣體為定容過程，Y₂ 氣體為定壓過程。Y₂ 氣體在定壓下，體積變為兩倍，

$$\frac{T_f}{V_f} = \frac{T_i}{V_i}$$

因此溫度也變為原來的兩倍：600 K。兩種氣體在右方處於熱平衡因此溫度相等：X 氣體也是 600 K。

B. 在此過程中，X 氣體從 Y₂ 氣體吸收多少焦耳熱量？透過容器的右方器壁對氣體加熱多少焦耳熱量？

C. 在此過程中，X 氣體分子的方均根速率，前後比是多少（前:後）？在過程的終點，X 氣體分子與 Y₂ 氣體分子的方均根速率比是多少（X:Y₂）？

提示：當兩種氣體，彼此可以交換熱量，最後達成熱平衡時，溫度相等。

解答：

B. X 氣體進行定容過程，莫耳比熱為 $c_V = \frac{3}{2}R$ ，吸熱等於： $\frac{3}{2}nR\Delta T = \frac{3}{2} \times 1.0 \times 8.31 \times 300 = 3740 \text{ J}$ 。Y₂ 氣體進行定壓過程，因為是雙原子分子構成：定壓比熱為 $c_P = \frac{7}{2}R$ ，因此放出熱量等於： $\frac{7}{2}nR\Delta T = \frac{7}{2} \times 2.0 \times 8.31 \times 300 = 17451 \text{ J}$ 。

對整個容器來說，只右器壁可以讓熱量進出，因此透過右器壁對外界吸熱就是兩個氣體的總吸熱：21191 J。

C. X 氣體分子的方均根速率，前後比等於溫度根號的前後比： $\sqrt{300}:\sqrt{600} = 1:\sqrt{2}$ 。而兩氣體因同溫度，動能平均值相等，故方均根速率比為 $X:Y = \sqrt{n}:\sqrt{2m}$ 。

所有黑體，不論材質，同一溫度時發出的熱輻射都一樣！

這就是溫度為 T 的黑體輻射！

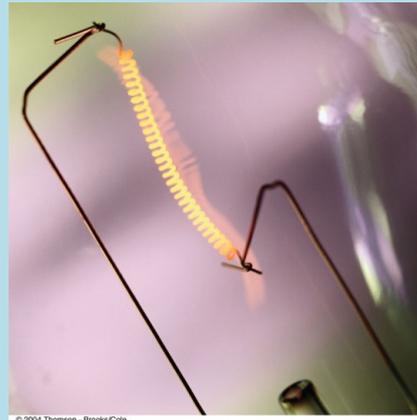
經過測量，黑體輻射總功率，與黑體的面積、及溫度的四次方成正比：

而與所有其他黑體的性質都無關。

$$P = \frac{Q}{\Delta t} = \sigma AT^4$$

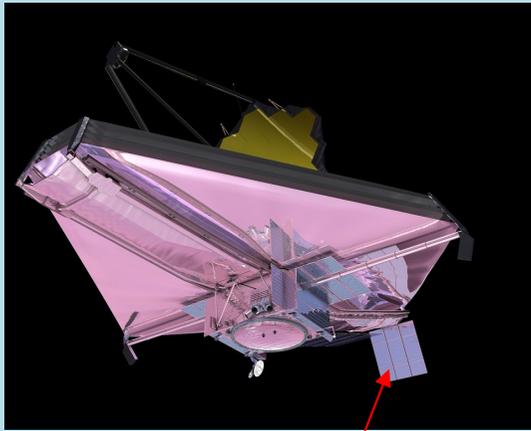
$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{W/m}^2 \text{K}^4$$

Stefan-Boltzmann Constant

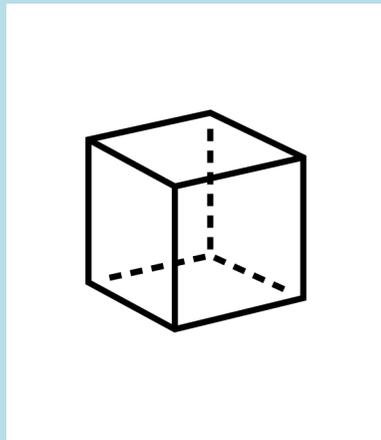


$$P = \sigma AT^4$$

黑體輻射總功率，由黑體的面積、及溫度就能計算出來。



$$P = \sigma 2abT^4$$



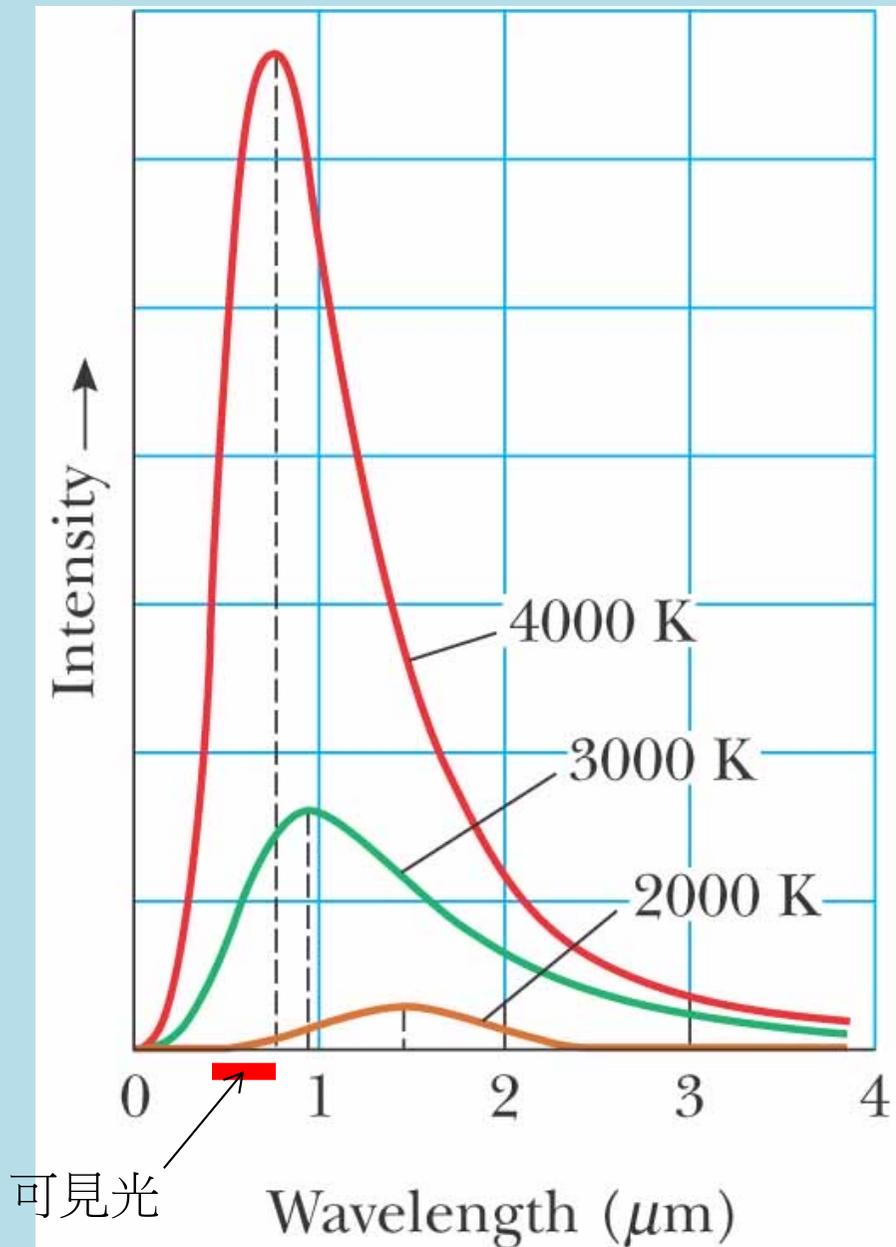
$$P = \sigma 6a^2T^4$$



$$P = \sigma 4\pi R^2T^4$$

只是它的輻射方向在幾何上自然很複雜。除了球形黑體較簡單，是球對稱。

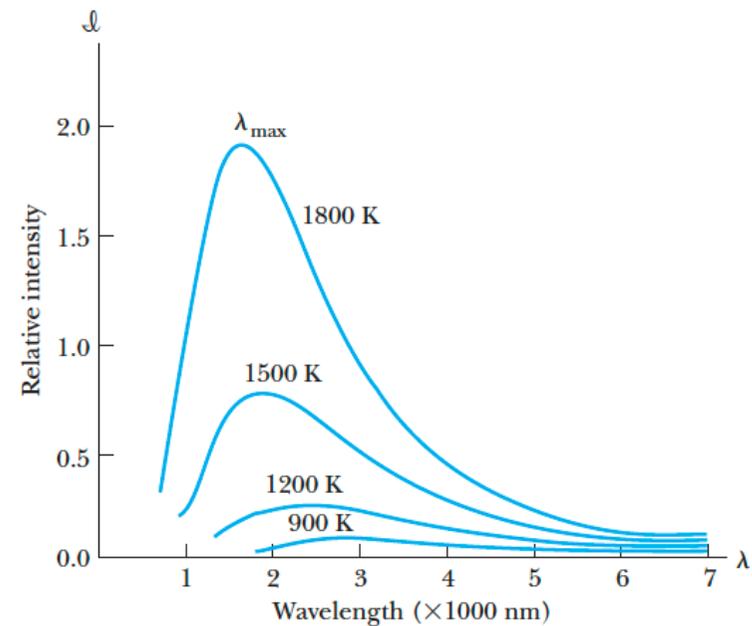
黑體輻射的波長分布只與溫度有關，與材質無關！



注意：黑體輻射的波長分布是連續的！

波長介於 λ 及 $\lambda + d\lambda$ 的熱輻射的功率等於：

$$P(\lambda) \cdot d\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \cdot d\lambda$$



溫度越高，黑體輻射的波長越偏向短波長、高頻率的區域。

計算太陽表面溫度 T

太陽表面積

$$A = 4\pi R_{\text{sun}}^2 = 6.1 \times 10^{18} \text{m}^2$$

太陽輻射總功率

$$P = \sigma 4\pi R_{\text{sun}}^2 T^4$$

在地球處，此總功率平均分配於半徑為兩者距離 D 的球表面。
因此地球大氣上層，每單位面積所接收到來自太陽的功率為：

$$I = \frac{P}{4\pi D^2} = \frac{\sigma 4\pi R_{\text{sun}}^2 T^4}{4\pi D^2} = \frac{\sigma R_{\text{sun}}^2 T^4}{D^2}$$

測量得到：地球大氣上層每單位面積，接收太陽的功率為 $I = 1370 \text{ W/m}^2$ 。

太陽與地球的距離為 $D = 1.5 \times 10^8 \text{ km}$ 。

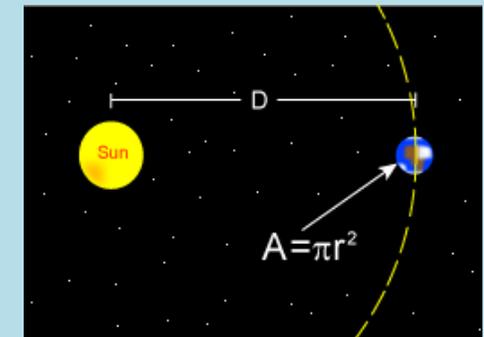
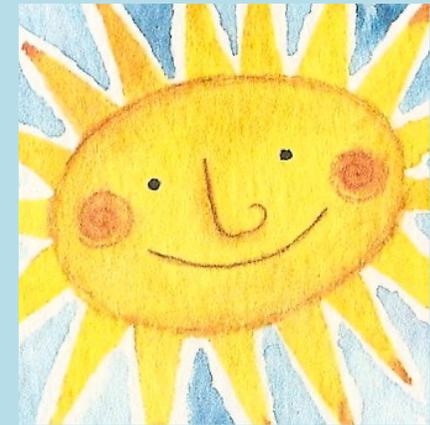
Solar constant

可以算出太陽溫度

$$T = 5800 \text{ K}$$

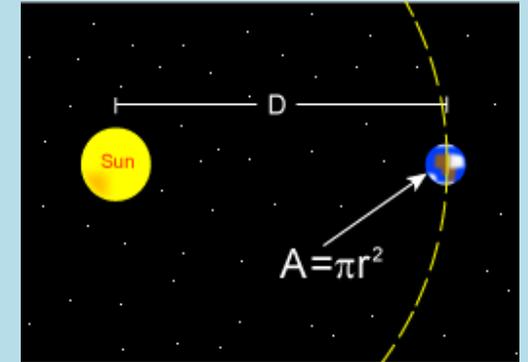
太陽的發射功率 $P = 3.9 \times 10^{26} \text{ W}$ 。

可預測光譜最大值在波長 $\sim 500 \text{ nm}$ ，與觀測相符。



地表也是一個幅射表面，

$$\sigma \cdot 4\pi R_{\text{earth}}^2 \cdot T_{\text{earth}}^4$$



地球表面照射到的總太陽輻射，等於單位面積接收的太陽功率，乘上地球的**截面積**：

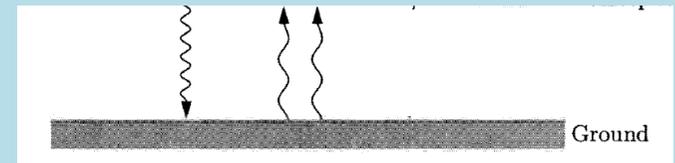
$$I \cdot \pi R_{\text{earth}}^2 = 1370 \cdot \pi R_{\text{earth}}^2$$

從太陽吸收的輻射必須全部放射出去。

大氣上層接收的太陽光有30%被雲層反射回去。其餘的光穿越大氣層被地表吸收。

地表接受的功率 = 地表輻射散發的功率

$$1370 \cdot \pi R_{\text{earth}}^2 \cdot 0.7 = \sigma \cdot 4\pi R_{\text{earth}}^2 \cdot T_{\text{earth}}^4$$



$$T_{\text{earth}} \sim 255 \text{ K} \quad \text{太冷!}$$

以真實地表溫度~300K來代入右式計算，輻射散發會大於吸收，地球應該愈來愈冷！一直到255K為止！

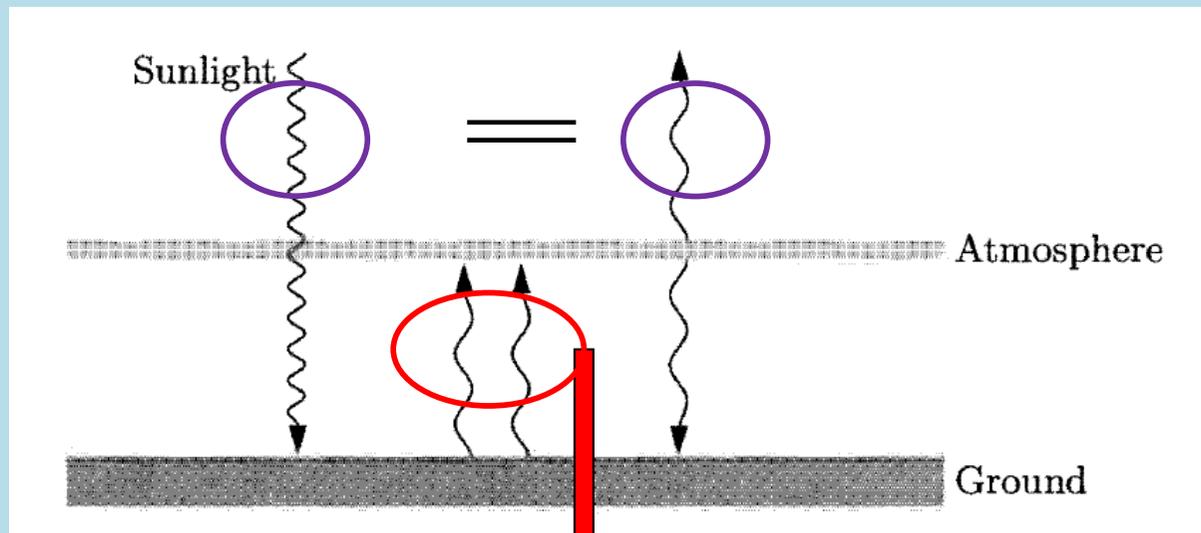
溫室效應！ It is good!

大氣層對太陽發出的可見光幾乎是透明，對紅外線卻是模糊的，而低溫的地球放出的熱輻射多是紅外線，

大氣層會吸收紅外線， $e \sim 1$ ，又將吸收的熱以輻射向上下釋放。

因此地球所發出的紅外線會有一半又反射回來地球！

真正離開地球的只有地表熱輻射的一半！



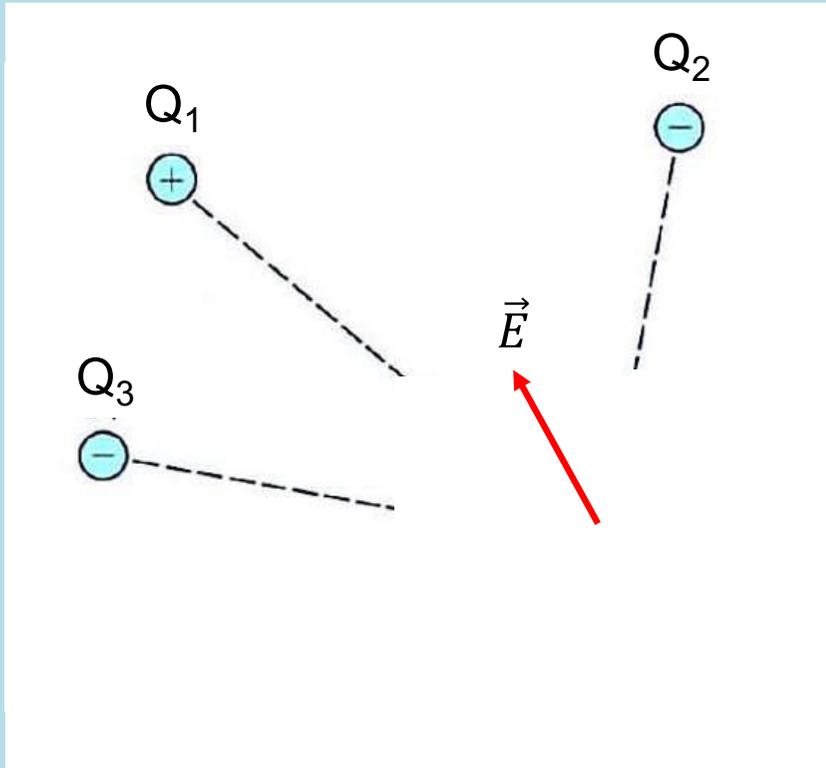
$$1370 \cdot \pi R_{\text{earth}}^2 \cdot 0.7 = \sigma \cdot 4\pi R_{\text{earth}}^2 \cdot T_{\text{earth}}^4 \cdot \frac{1}{2}$$

$$T_{\text{earth}} \sim 255 \cdot (2)^{1/4} \sim 303 \text{ K}$$

大氣層如同一件毛毯

$$\vec{F} = \left(\sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \hat{r}_i \right) \cdot q = \vec{E} \cdot q$$

$$\vec{E} = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$



電場與 q 的電荷量無關。

由固定電荷 Q_i 及 q 的位置決定。

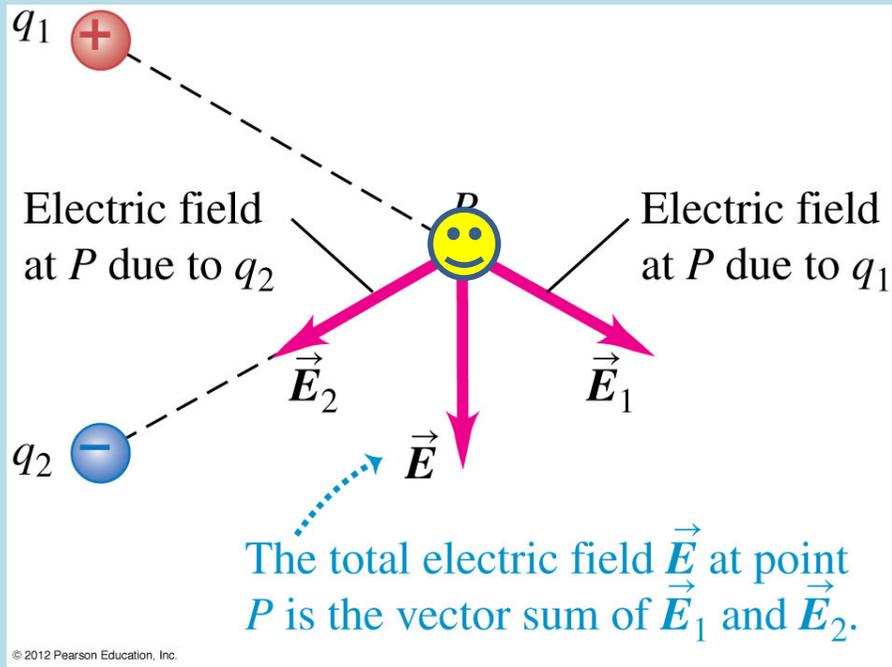
電場 $\vec{E}(\vec{r})$ 是空間的性質。

每一點都有 $\vec{E}(\vec{r})$ ，電場遍佈整個空間。

電場可以為零，但永遠存在。

電場就是會讓位於當地的電荷 q 得到靜電力 $q \cdot \vec{E}$ 的**空間的物理性質**。

電場是由固定電荷 Q_i 在空間各處產生。



小電荷所受的總電力等於個別電力的疊加

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

小電荷移開後，空間中總電場等於個別電場的向量疊加！

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$$

一個電荷的電場

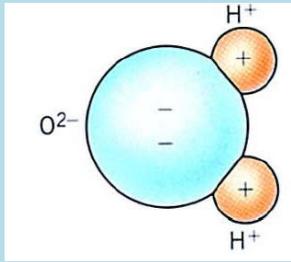
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$



一群電荷的電場

$$\vec{E} = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

由兩個相反電荷組成的電偶極 Electric Dipole



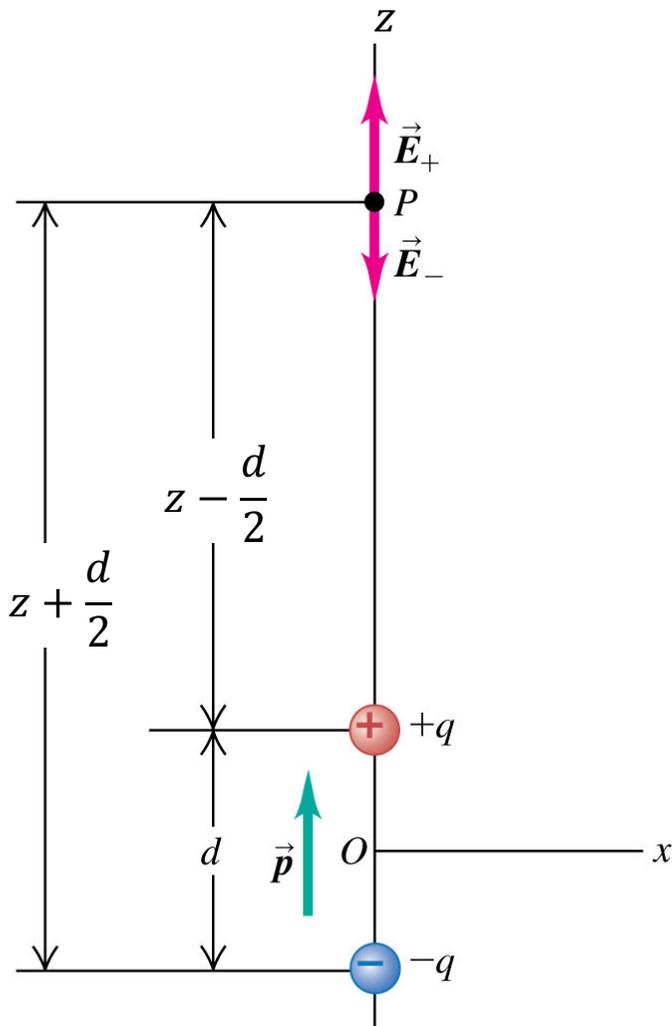
遠看電偶極如點一般。

$$E = E_+ + E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\left(z - \frac{d}{2}\right)^2} - \frac{q}{\left(z + \frac{d}{2}\right)^2} \right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 z^2} \left[\frac{q}{\left(1 - \frac{d}{2z}\right)^2} - \frac{q}{\left(1 + \frac{d}{2z}\right)^2} \right]$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \left[\left(1 - \frac{d}{2z}\right)^{-2} - \left(1 + \frac{d}{2z}\right)^{-2} \right]$$

$$\sim \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \left[\left(1 + \frac{d}{z}\right) - \left(1 - \frac{d}{z}\right) \right] = \frac{qd}{2\pi\epsilon_0 z^3} \equiv \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p}{z^3}$$



$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p}{z^3}$$

$$p = qd$$

$$d \ll z \rightarrow \frac{d}{z} \ll 1$$

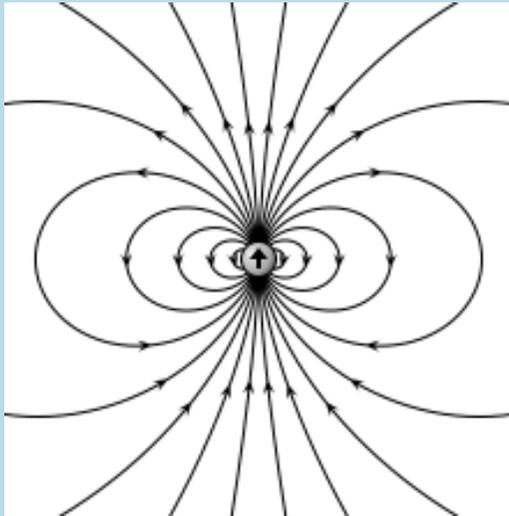
可用二項式定理：

$$(1 + a)^b \sim 1 + ab \quad a \ll 1$$

$$\left(1 - \frac{d}{2z}\right)^{-2} \sim 1 + \frac{d}{z}$$

由兩個相反電荷組成的電偶極 Electric Dipole

$$E = E_+ + E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\left(z - \frac{d}{2}\right)^2} - \frac{q}{\left(z + \frac{d}{2}\right)^2} \right]$$



遠看電偶極如點一般。

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p}{z^3}$$

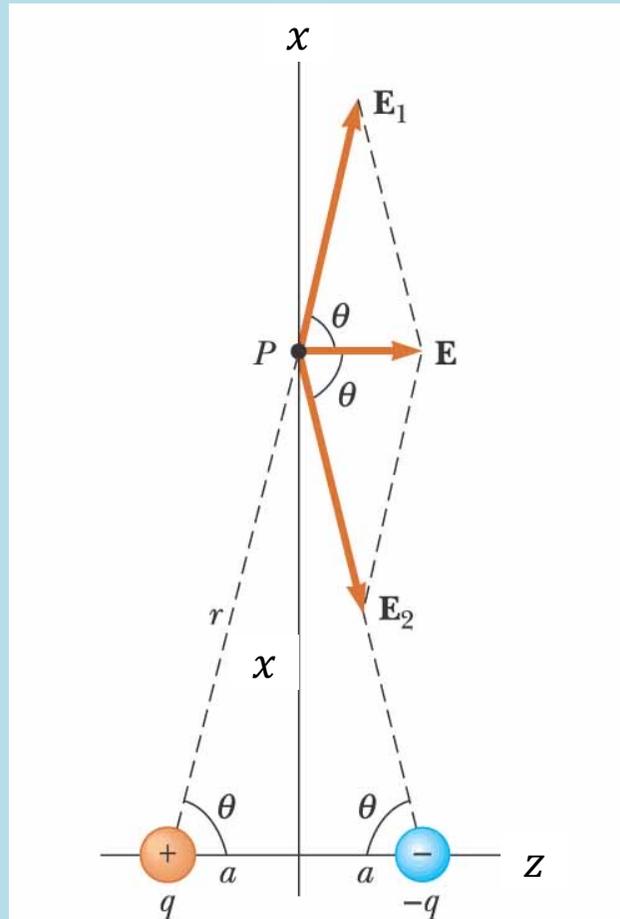
$$p = qd$$

z 是測量點與如點一般的電偶極的距離。

電偶極的電場 E 隨距離 z 的三次方成反比。

電場完全由電偶極矩 p 決定！電偶極矩 p 還有一自然的方向。

$$\vec{p} = q\vec{d} \quad \text{電偶極矩向量 } \vec{p}。$$



電偶極的電場 E 隨距離的**三次方**成反比這個性質在其他方向也成立！

1. 電偶極是由距離很靠近，電荷量分別為 $+q$ 、 $-q$ 的兩個電荷所構成。將 $-q$ 指向 $+q$ 的向量設為 \vec{d} ，電偶極矩向量 \vec{p} 定義為 $q\vec{d}$ 。可以證明在一個電偶極周圍，距離遠大於 d 處的電場完全由 \vec{p} 決定。←

A. 在原點處放一電偶極，其電偶極矩大小為 p ，方向指向 $+y$ 的方向，如下圖左所示。在

x 軸上座標 $(a, 0)$ 處，當 $d \ll a$ 時，靜電場強度近似於 $c_1 \frac{1}{a^3}$ 。計算 c_1 。(10)←

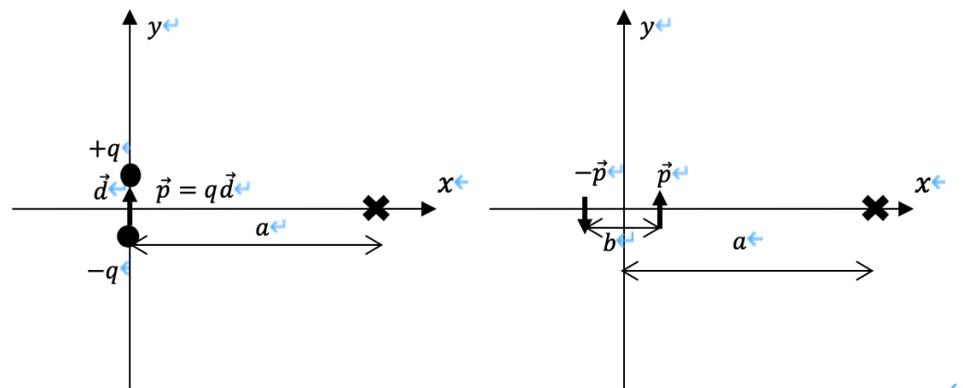
B. 將此電偶極移至 x 軸上座標 $(b/2, 0)$ 處，同時在 x 軸上座標 $(-b/2, 0)$ 處固定置放另一個電偶極大小同為 p 、但方向指向 $-y$ 的電偶極，如下圖右所示，假設 $d \ll b \ll a$ 。在 x 軸上

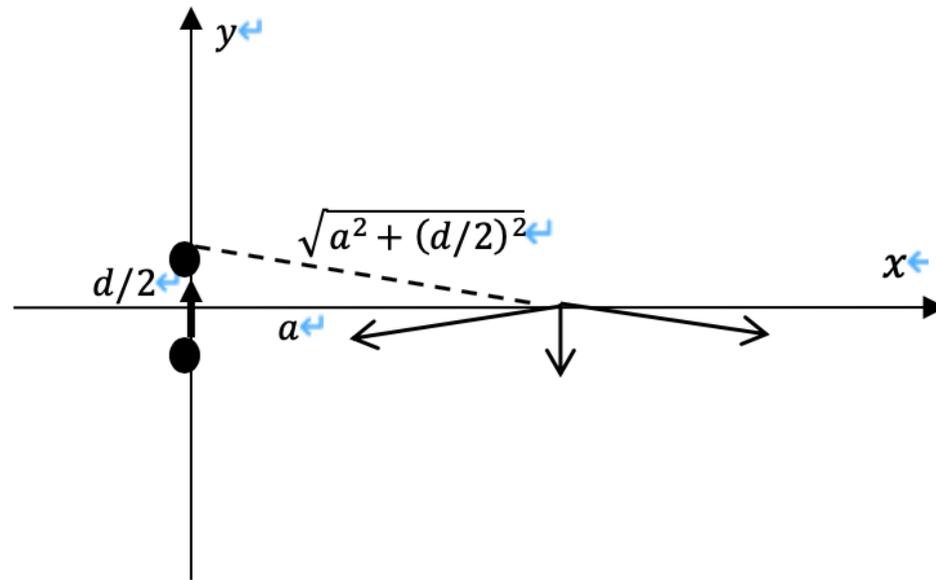
座標 $(a, 0)$ 處，靜電場強度近似於 $c_2 \frac{1}{a^4}$ 。計算 c_2 。(10)←

提示：因為 $d \ll b$ ，電偶極所產生的電場，可以直接運用題 A 的近似結果($c_1 \frac{1}{a^3}$)來計算。←

作近似計算時，可以直接使用二項式定理：當 $x \ll 1$ ， $(1+x)^k \sim 1+kx$ ，此式對任意實數

k 都成立。←



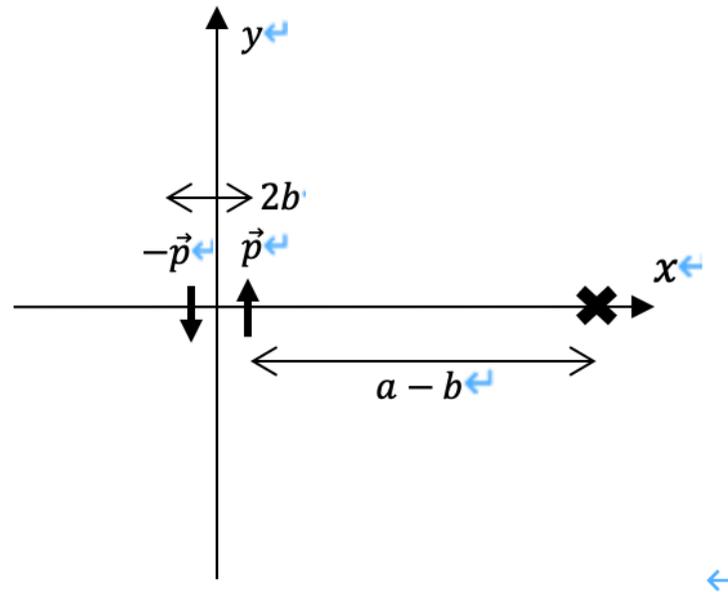


在x軸上座標(a, 0)處，兩電荷的電場的x方向分量抵消，靜電場近似等於

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2 + (d/2)^2} \frac{d/2}{\sqrt{a^2 + (d/2)^2}} \cdot 2 \sim \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd}{a^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{a^3}$$

因此 $c_1 = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}$ 。

B. 將上題的結果代入：↵

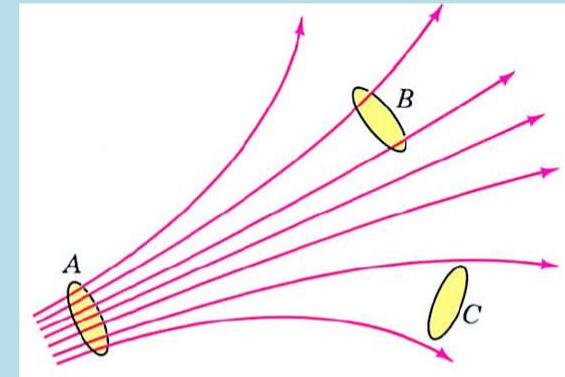
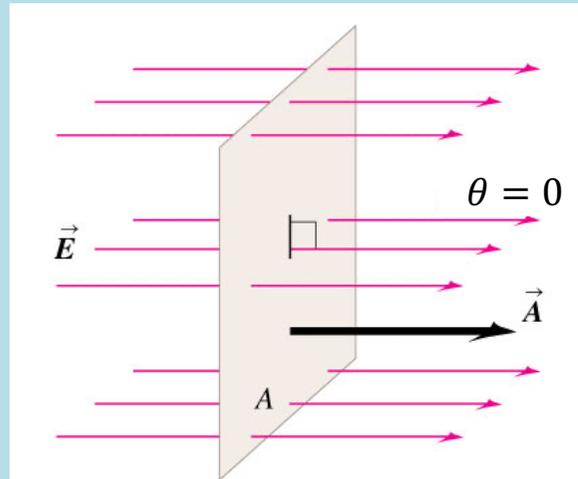


電場等於：↵

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{(a-b/2)^3} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{(a+b/2)^3} \quad \leftarrow \\ & = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{a^3} \left[\left(1 - \frac{b}{2a}\right)^{-3} - \left(1 + \frac{b}{2a}\right)^{-3} \right] \quad \leftarrow \\ & \sim \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{a^3} \left[\left(1 + \frac{3b}{2a}\right) - \left(1 - \frac{3b}{2a}\right) \right] = \sim \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3pb}{a^4} \quad \leftarrow \end{aligned}$$

$$\text{因此 } c_2 = \frac{3pb}{4\pi\epsilon_0} = \frac{3qdb}{4\pi\epsilon_0} \circ \quad \leftarrow$$

如果小平面與電場垂直，計算電力線的數目並不難！



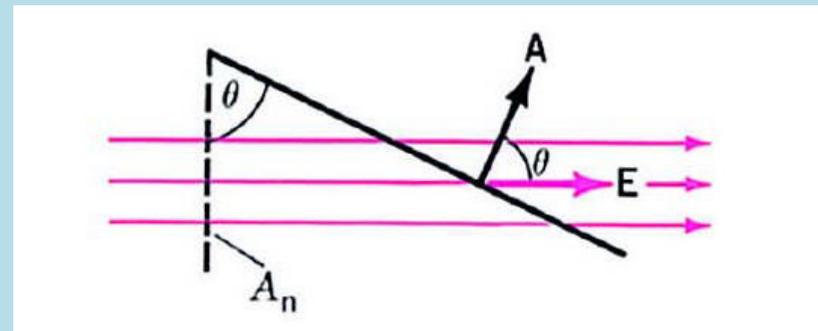
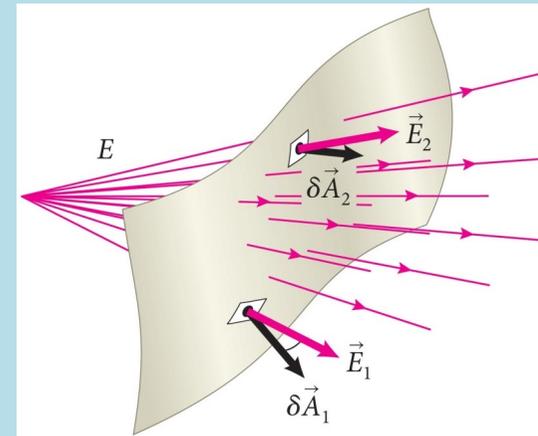
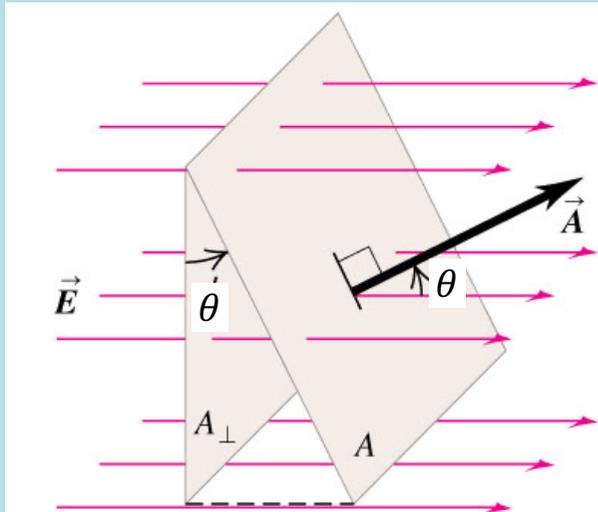
2. 電場強度與當地電力線的密度成正比！

電力線密度定義為通過當地一垂直於電場的單位面積平面的電力線數目。

$$E = \frac{N}{A}$$

通過此平面的電力線數目： $N = EA$

若小平面與電場不垂直：

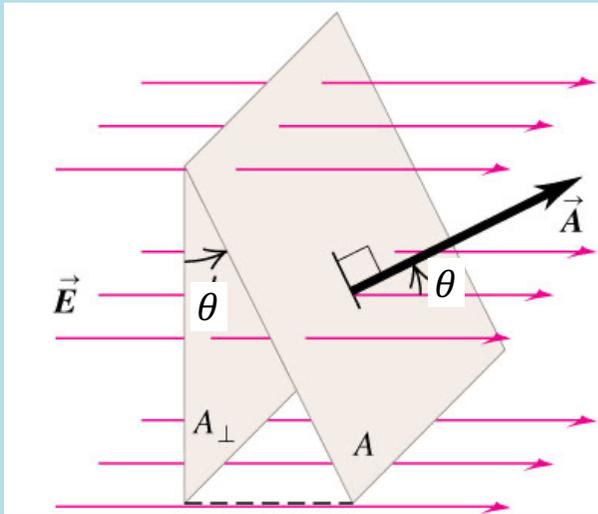


可以將小平面 A 投影於電場的垂直方向：

通過小平面 A 的電力線必通過其投影平面 A_{\perp}

而通過此 A_{\perp} 的電力線數目就可以用前一頁的辦法算：

$$N = E \cdot A_{\perp} = E \cdot A \cos \theta \quad \text{此值也就是通過該小平面 } A \text{ 的電力線數目。}$$



$$N = E \cdot A \cos \theta$$

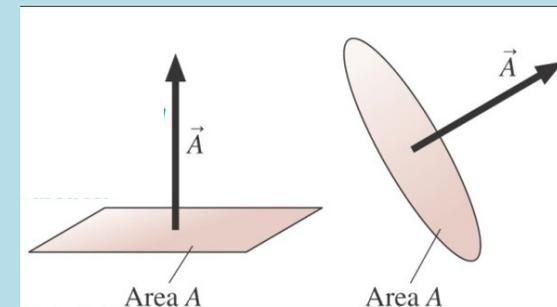
這個結果可以更聰明地以向量表示！

定義面積向量 \vec{A} ：大小就是此平面的面積，方向是垂直於平面的方向。

如此定義後，角度 θ 就是向量 \vec{A} 與電場 \vec{E} 之間的夾角。

$$N = E \cdot A \cos \theta = \vec{E} \cdot \vec{A} \equiv \Phi_E$$

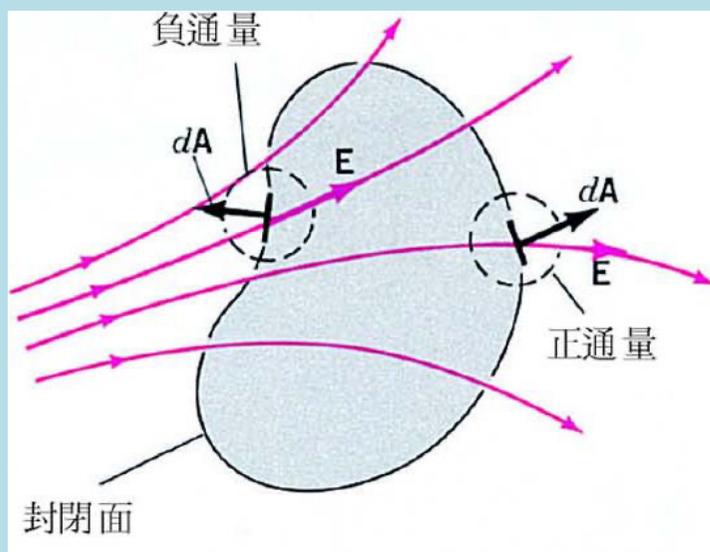
Φ_E 電場通量 Electric Flux，順著 \vec{A} 的方向通過平面的電力線數目。



注意對於一個平面， \vec{A} 的方向有兩個選擇。

奇妙的是，在前述的定義下，電力線數目有可能是負的！

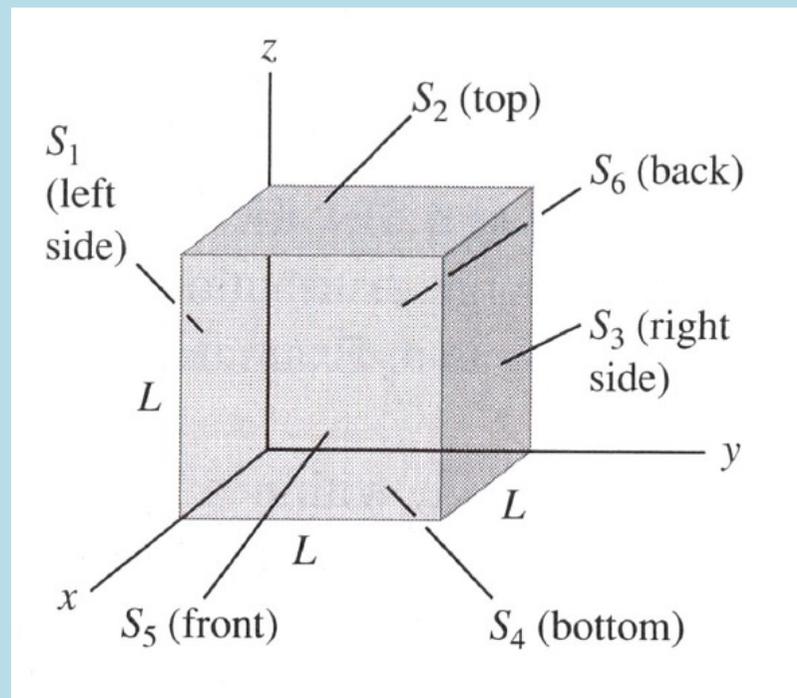
$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = E \cdot A \cos \theta$$



若電力線是逆著 \vec{A} 的方向，則電通量 Φ_E 為負！

電通量 Φ_E 除了電力線數目，還能得出電力線的流向！

22.34 •• A cube has sides of length $L = 0.300$ m. It is placed with one corner at the origin as shown in Fig. E22.6. The electric field is not uniform but is given by $\vec{E} = (-5.00 \text{ N/C} \cdot \text{m})x\hat{i} + (3.00 \text{ N/C} \cdot \text{m})z\hat{k}$. (a) Find the electric flux through each of the six cube faces $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5,$ and S_6 . (b) Find the total electric charge inside the cube.



以 S_5 為例：

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = -5 \times 0.3\hat{i} \cdot A\hat{i} = -1.5 \times 0.3^2 = 0.41 \text{ N/C} \cdot \text{m}$$

一般曲面，可視為由許多無限小的平面組成。

通過曲面的電力線數，等於這些小平面的電通量的和：

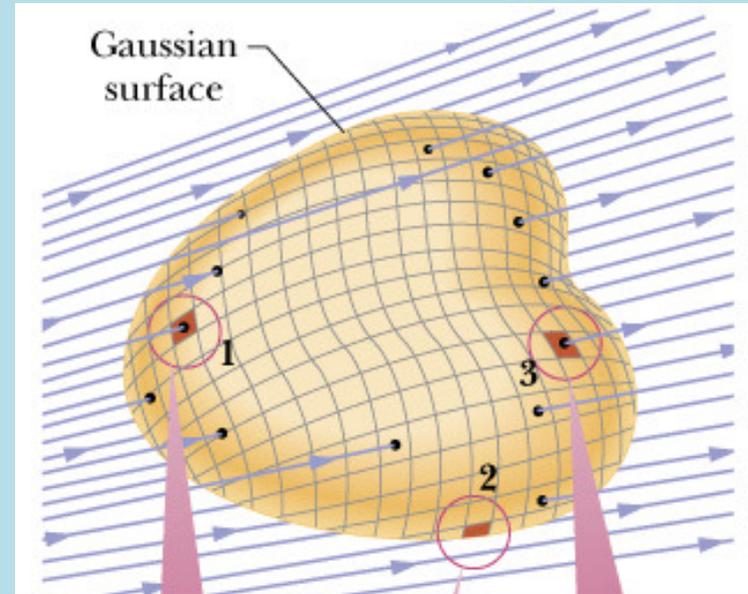
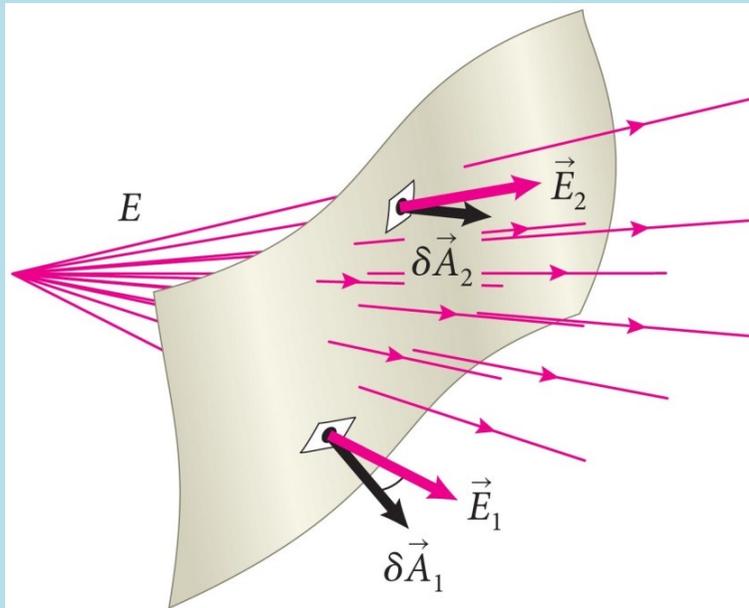
$$\Phi_E = \sum_i \vec{E}_i \cdot \delta\vec{A}_i$$

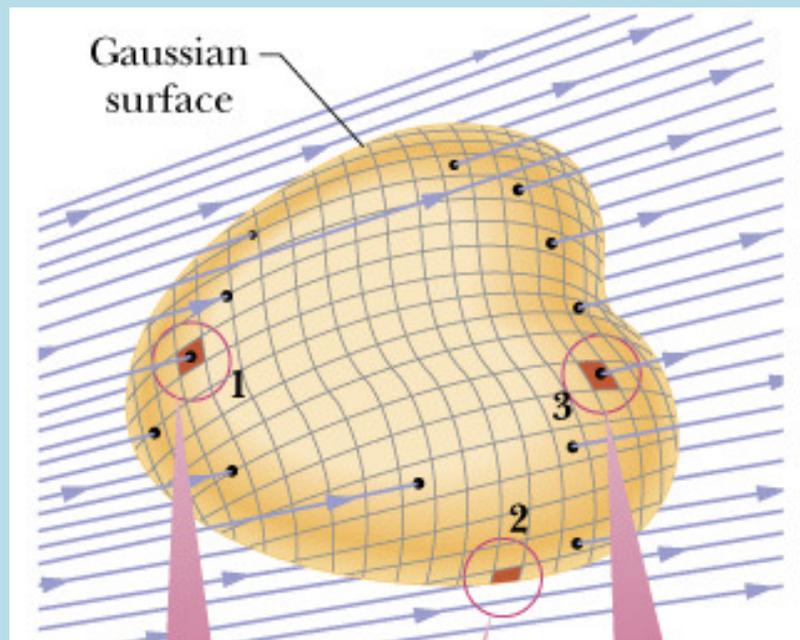
當小平面趨近無限小，總和就變為一個積分！稱為面積分。

$$\Phi_E = \sum_i \vec{E}_i \cdot \delta\vec{A}_i \xrightarrow[\substack{\delta A \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}]{\text{surface}} \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

定義為通過此曲面的電場通量Electric Flux！

注意 \vec{E} 是 $\delta\vec{A}$ 當地的電場！





通過一封閉曲面的總電場通量就有一個很簡單的物理意義；

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \text{離開曲面的電力線數目} - \text{進入曲面的電力線數目}$$

進入此封閉曲面的電場線數目必等於離開的電場線數目！

電力線數目守恆



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$$

對任一高斯面：

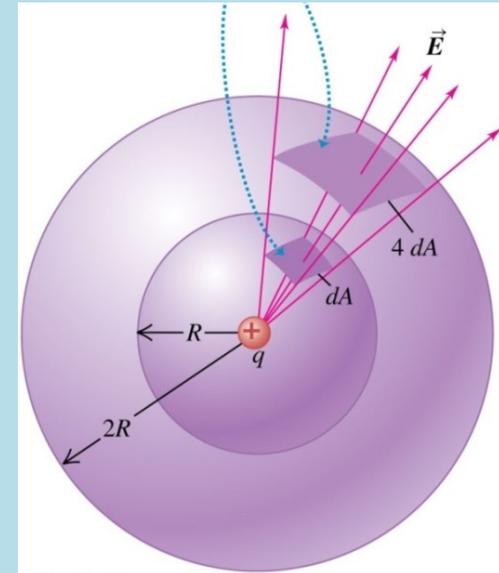
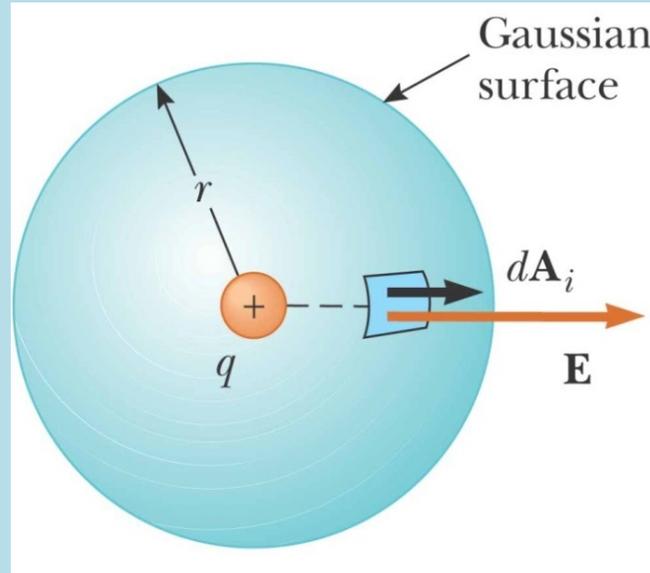
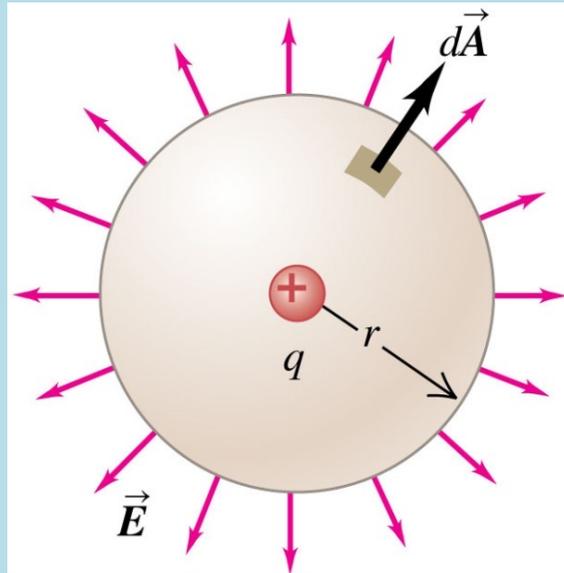
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$$



電力線數目守恆

包圍點電荷 q 的所有高斯面電通量都一樣！選一個最簡單的來算即可！

選一個封閉球面來計算電通量：



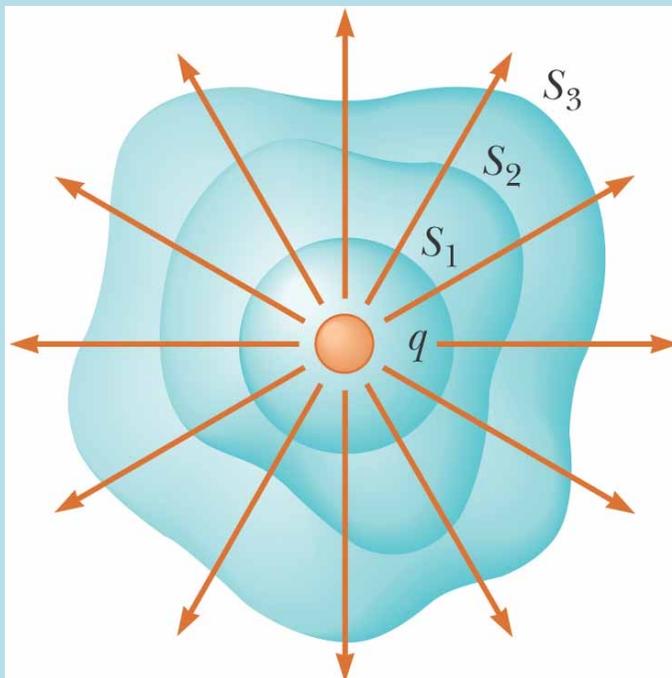
$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E \cdot dA = E \cdot \oint dA = EA = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

電場 \vec{E} 與 $d\vec{A}$ 同向，在球面上，電場大小 E 是一個常數！

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

由一個點電荷發出的電力線總數與球半徑無關！

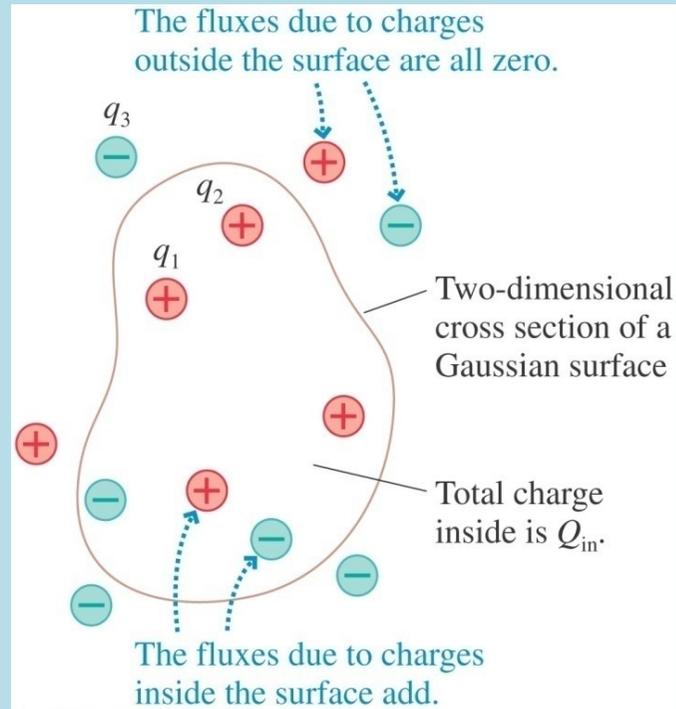
正(負)電荷產生(消滅)的電力線數目與電荷量成正比。



而因為電通量是電力線數目，電力線數目除了在電荷處之外都守恆，
所以任何包圍 q 的高斯面的電通量，與球高斯面的電通量相等！

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \text{電通量正比於電荷量！}$$

反過來，電荷對電通量的貢獻，只和它是否位於曲面內有關，與具體位置無關。

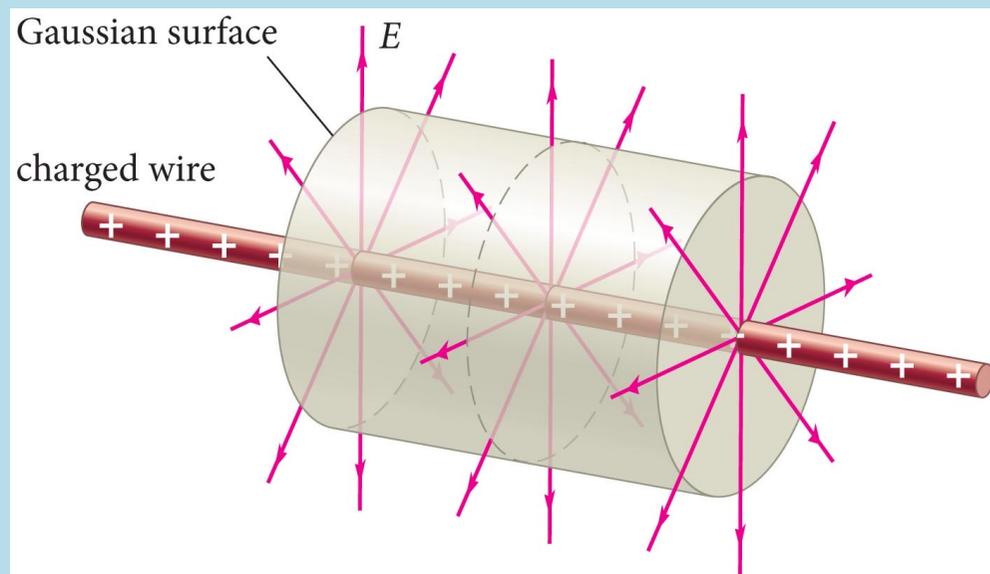
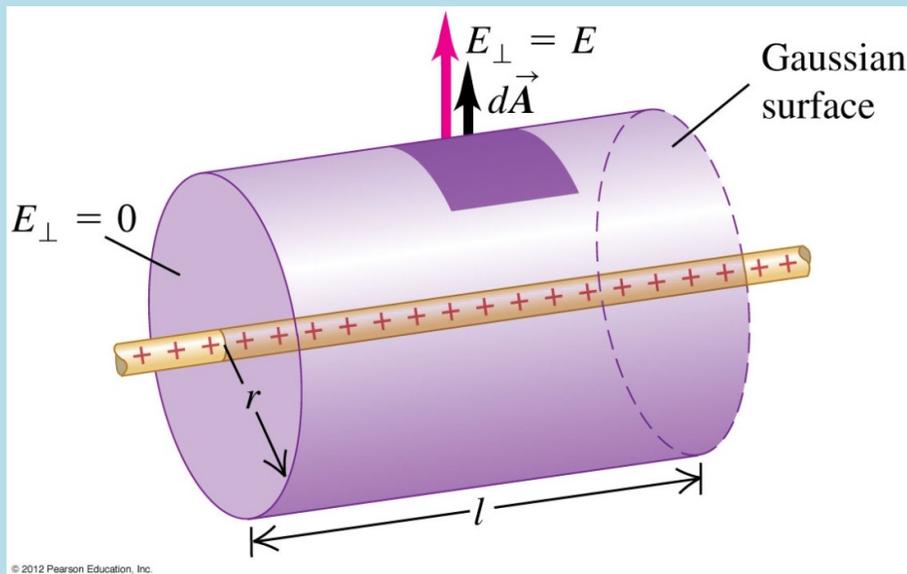


$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \text{高斯定律}$$

一個封閉曲面的電場通量，正比於曲面所包圍的總淨電荷量。

均勻的帶電棒（軸對稱）：

計算帶電棒周圍距軸心為 r 處的電場：選擇同軸半徑為 r 的圓柱面為高斯面！



電力線將由棒發出，並垂直於帶電棒的軸。

如此在兩端的蓋上，電場平行於蓋面，通量為零。只要算圓柱邊面上的電通量。

在圓柱邊，電場 \vec{E} 與 $d\vec{A}$ 平行，且電場大小 E 是一個常數！

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int E \cdot dA = E \int dA = EA = E \cdot 2\pi r l = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

設棒上線電荷密度為 λ 。 $q = \lambda l$

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$$