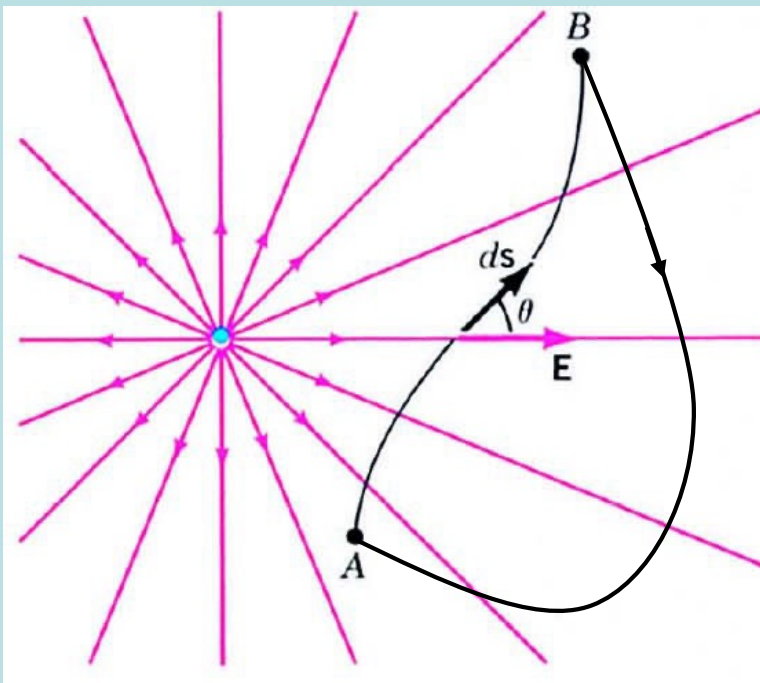


從A出發再回到A，形成一封閉曲線。



$$\oint \vec{F}_E \cdot d\vec{s} = -\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_A} \right) = 0$$

沿任一封閉曲線，庫倫靜電力所作的功必為零！

靜電力為保守力，可以定義電位能。

點電荷的電位能

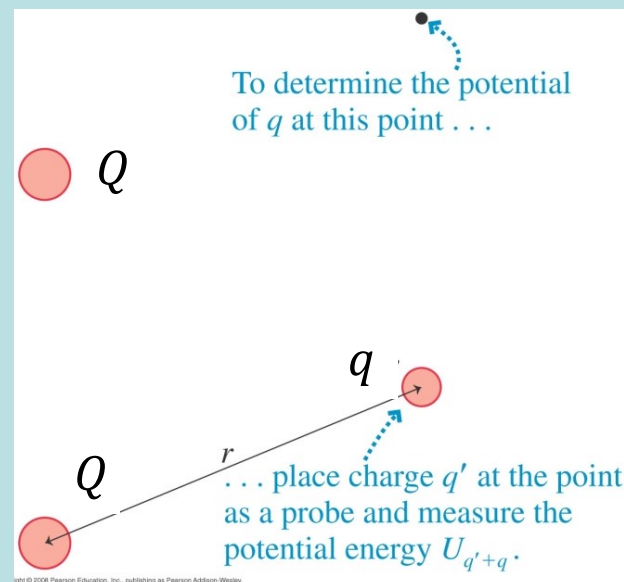
$$U(\vec{r}) = - \int_{\vec{c}}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r}$$

點電荷的電位

$$V = \frac{U}{q}$$

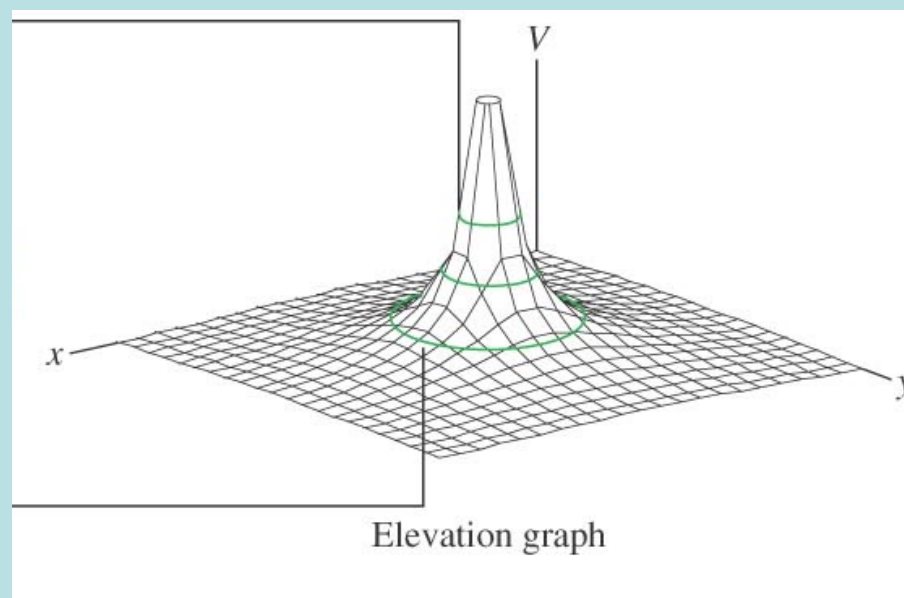
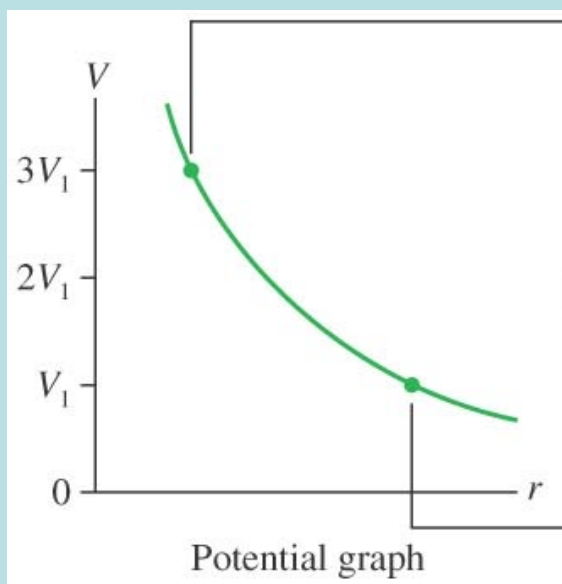
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

庫侖電位

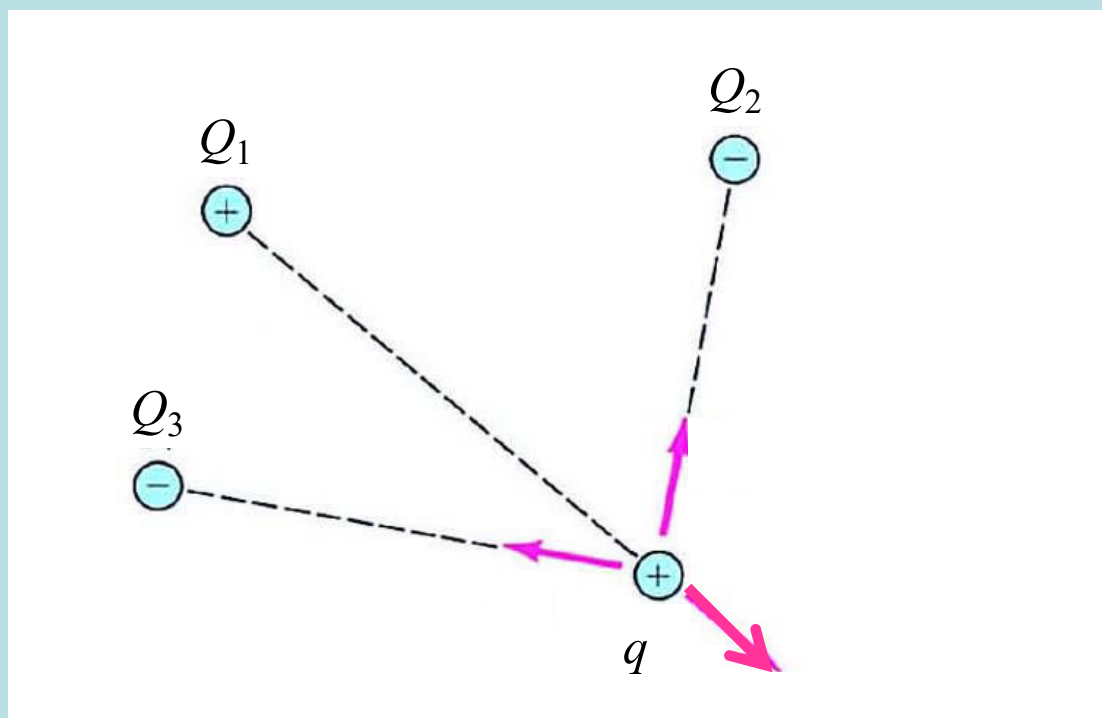


如同位能可以任意加上一個常數，電位也是如此。

此公式是設無限遠處電位為零。這樣設一般就很好用。

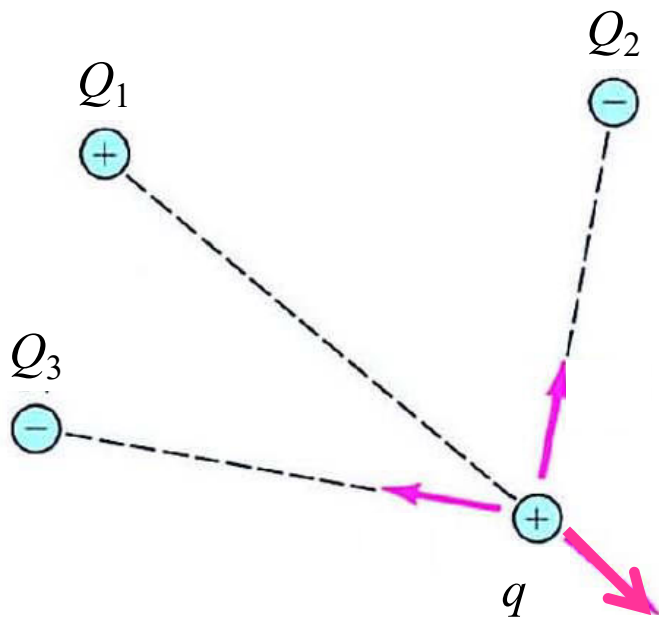


若有一個以上的固定電荷 Q ，電位能可以以一個點電荷的電位能疊加：



$$U = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i q}{r_i}$$

但電位能還是屬於一個帶電粒子的性質，但我們很容易把電荷分離開來。



注意這個電位能表示式中， q 可以提出！

$$U = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i q}{r_i}$$

$$= \left(\sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i} \right) \cdot q \equiv Vq$$

$$V = \frac{U}{q}$$

電位 V 只與 q 的位置相關，與 q 的電荷無關
想像 q 漸漸趨近於零....電位依舊存在吧！

$$q \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i q}{r_i^2} \hat{r}_i \\ &= \left(\sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \hat{r}_i \right) \cdot q = \vec{E} \cdot q \end{aligned}$$

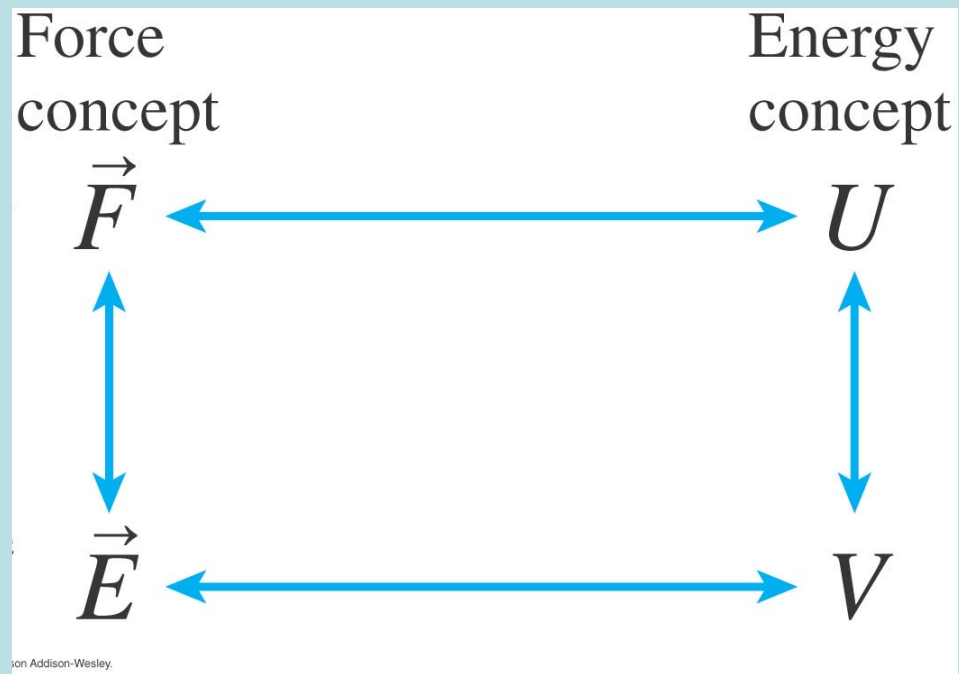
電位是會讓位於當地的電荷得到電位能的空間性質。
因此電位 $V(\vec{r})$ 遍佈整個空間。

電場就是會讓位於當地的電荷 q 得到靜電力 $q \cdot \vec{E}$ 的空間的物理性質。

每一點都有 $\vec{E}(\vec{r})$ ，電場遍佈整個空間。

與向量的電場 $\vec{E}$ 不同，電位 V 是一個純量。

$$\Delta U = - \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$



$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

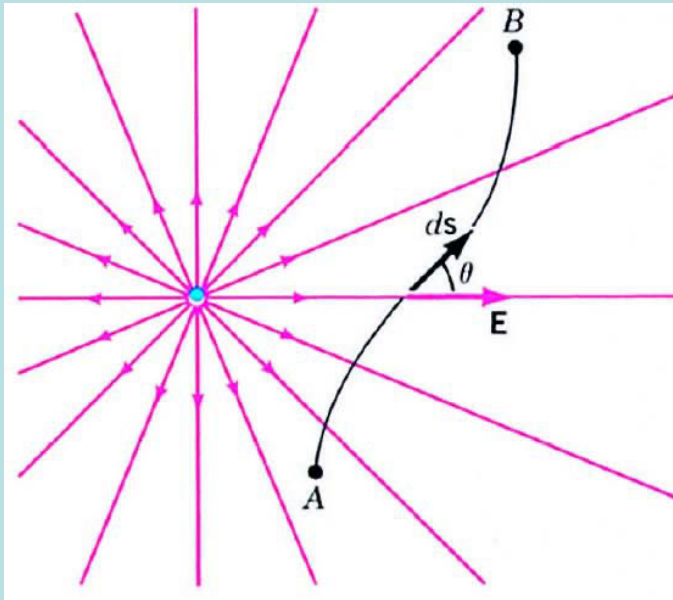
$$V = \frac{U}{q}$$

$$\Delta V = - \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$U = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i q}{r_i}$$

$$V = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i}$$

有時用電荷算電位十分繁雜，若已知電場，電位也可以以場的線積分來計算。



$$\Delta U = - \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

位能差等於力的線積分的負號。

$$V = \frac{U}{q}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

$$\Delta V = - \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

兩點之間的電位差，等於沿任一連接兩點的曲線，負電場的線積分！

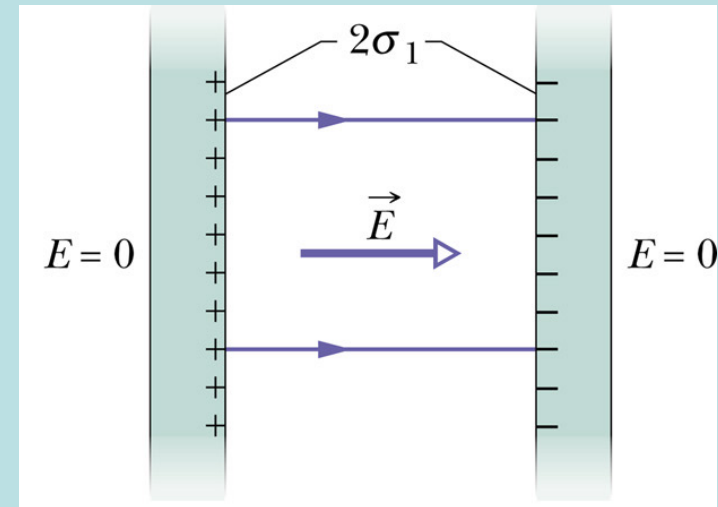
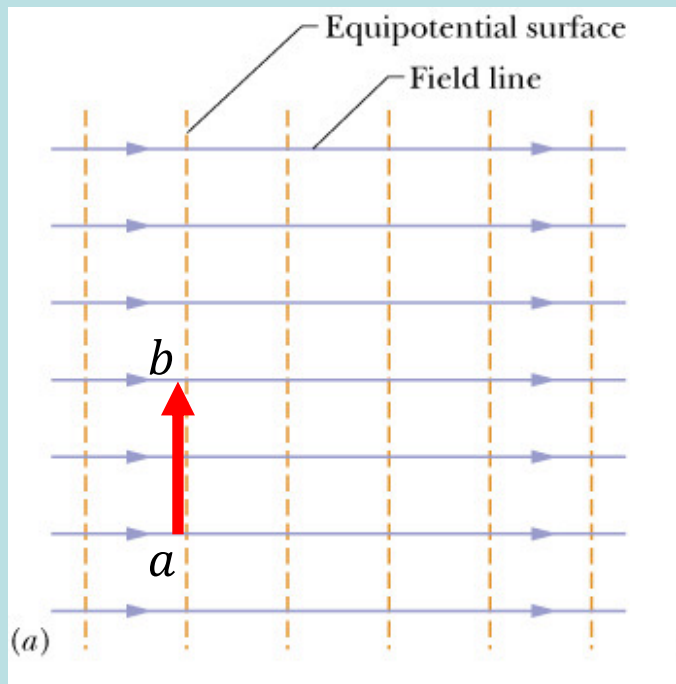
注意電場只給定了電位差！因此可以在電位上全數加一個常數，

或是找任一位置作為電位為零的參考點，不影響結果。

考慮兩片帶大小相等正負電的無限大電板，電板間的電場是均勻的。

先看沿著垂直於電場方向的電位差：

$$\Delta V = - \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$



沿著垂直於電場的方向，電位不變！

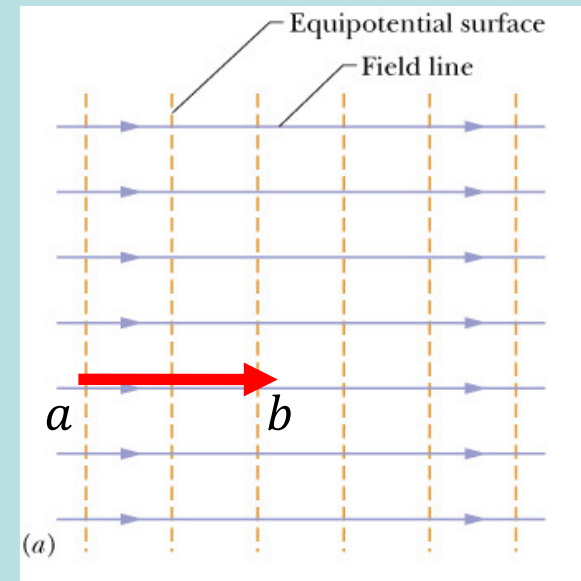
等位面與電場垂直。

沿著平行於電場方向的電位差，設此方向為 x ：

$$\Delta V = - \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_a^b E(x) \cdot dx$$

電位差即是電場大小的積分。

注意：電場是指向電位下降的方向。



高電位

低電位

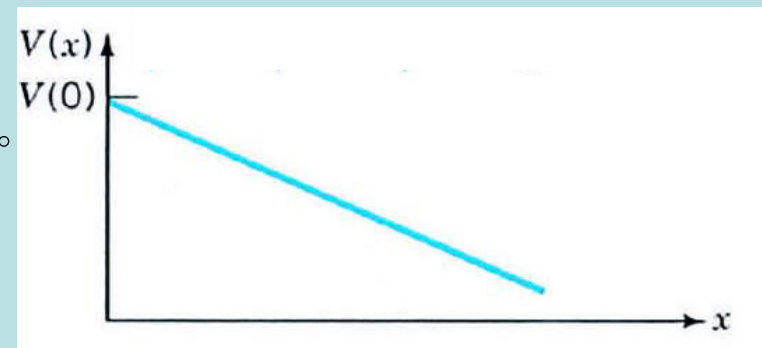
若電場是均勻的：

$$\Delta V = -E \int_a^b dx = -Ed$$

電場是指向電位下降的方向。

$$E = -\frac{\Delta V}{d}$$

電位降得越快，電場越大。

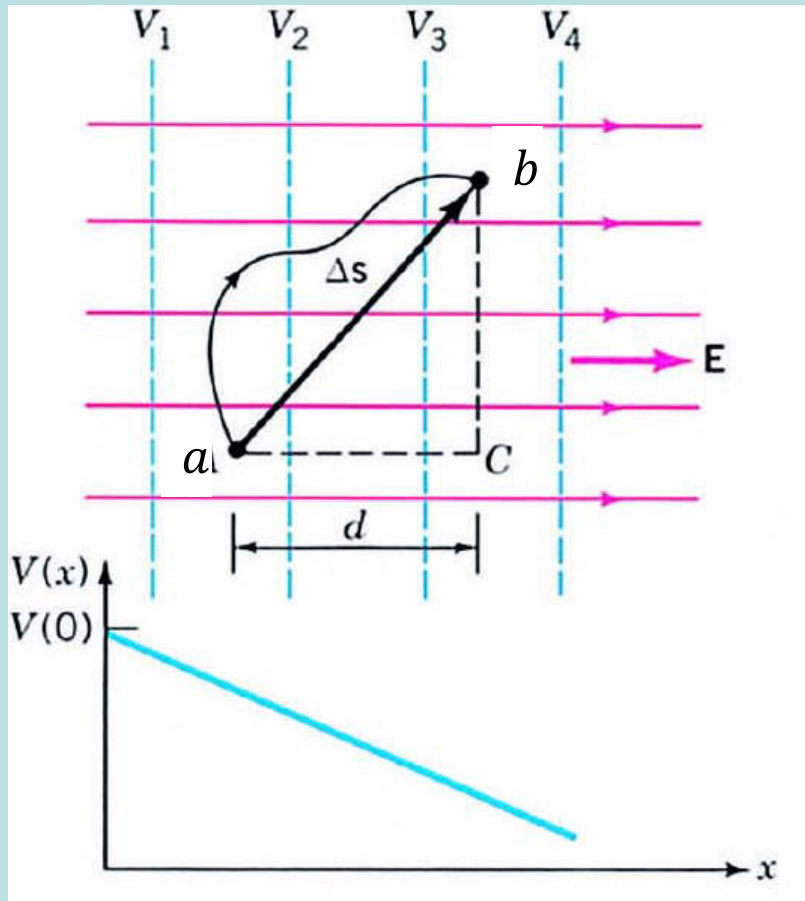


將這兩個結果綜合起來：

沿著垂直於電場的方向移動，電位不變！

均勻電場中任意兩點的電位差只要考慮沿電場方向的位移即可。

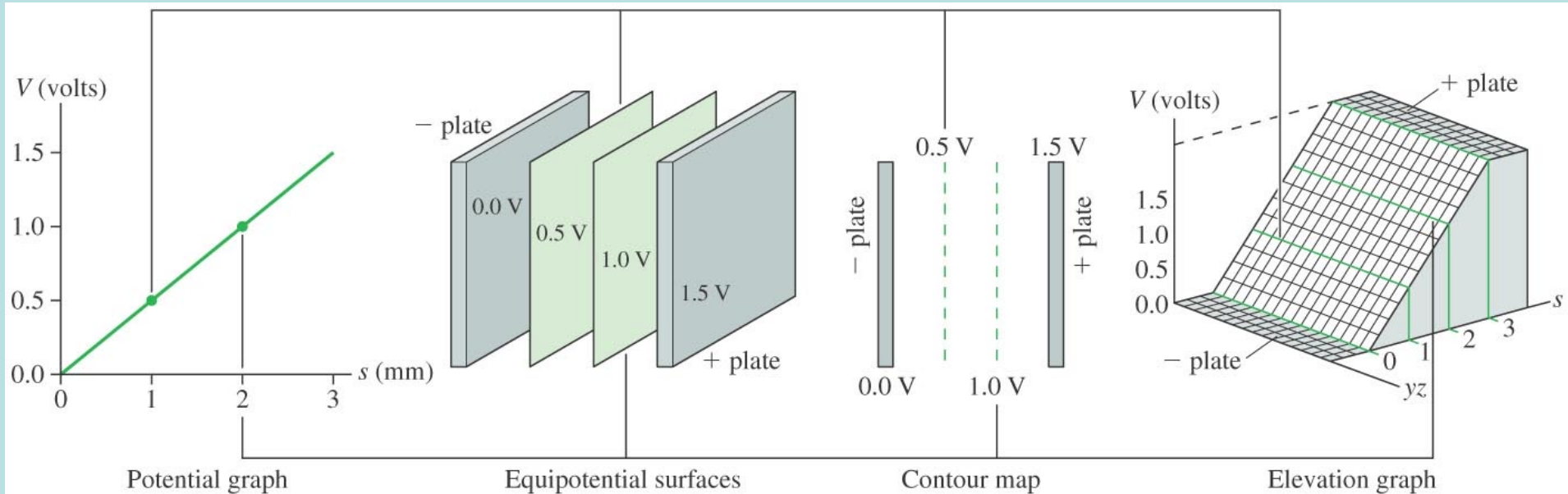
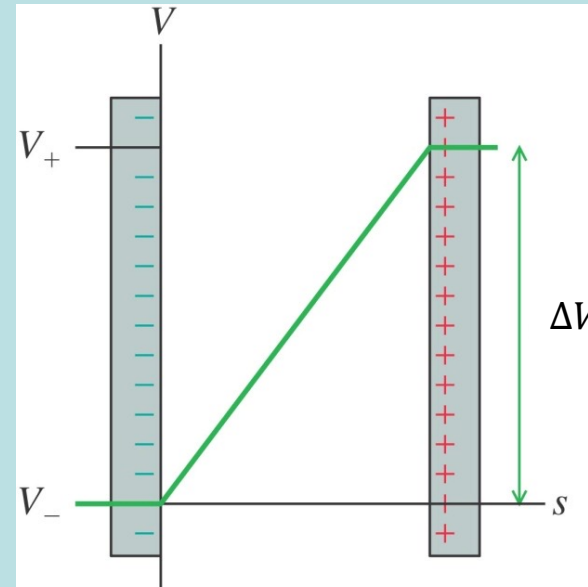
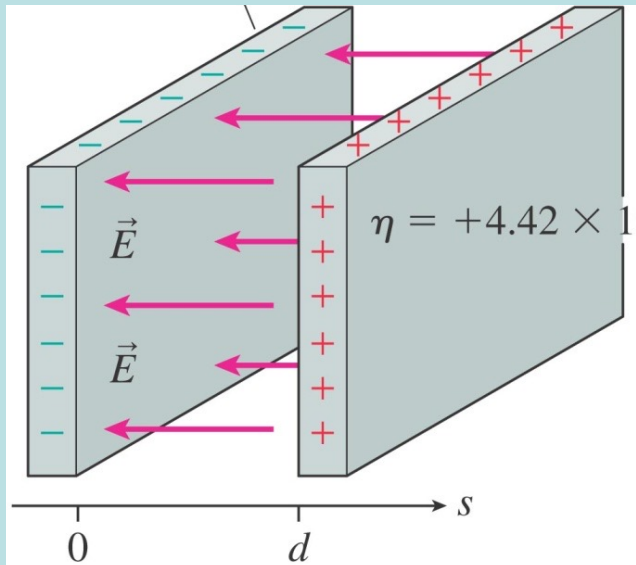
$$\Delta V = -Ed \quad d \text{ 是沿電場方向的位移。}$$



$$E = -\frac{\Delta V}{d}$$

電場的方向是電位下降的方向

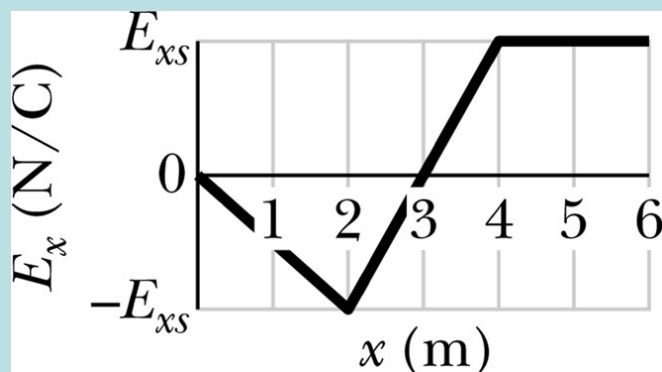
兩平行電板間的電位： $\Delta V = -Ed$



若電場是定向但不均勻，取方向為 x ：

$$\Delta V = - \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_a^b E_x(x) \cdot dx$$

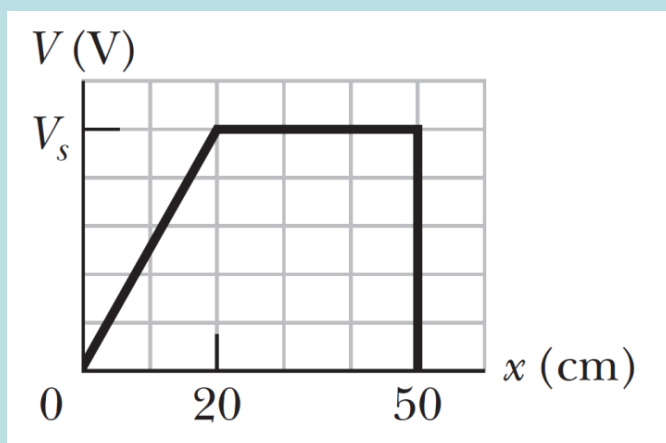
兩位置之間的電位差即是負電場的積分，即在兩點之間電場函數下的面積。

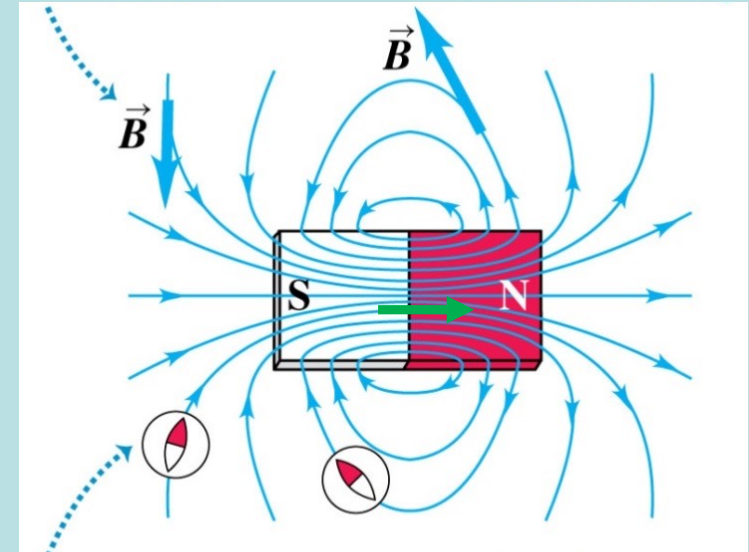
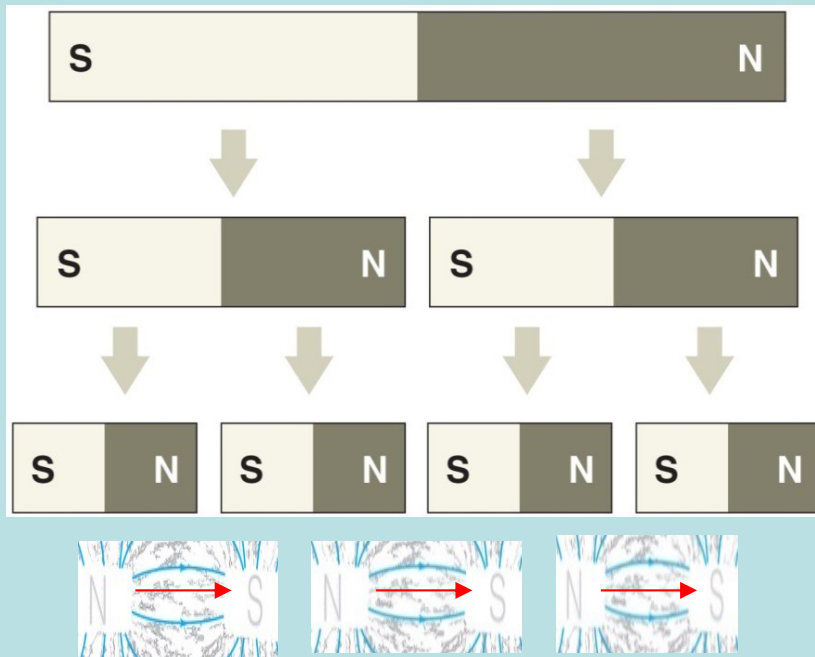


x 軸下的面積要算是負電位差。

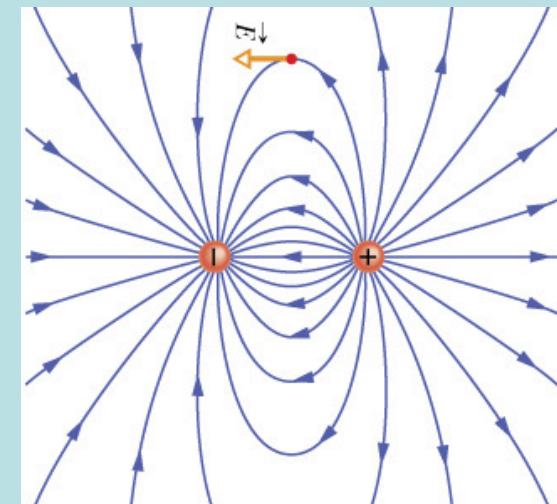
因此電場是電位的微分乘負號：

$$E_x = - \frac{dV}{dx}$$

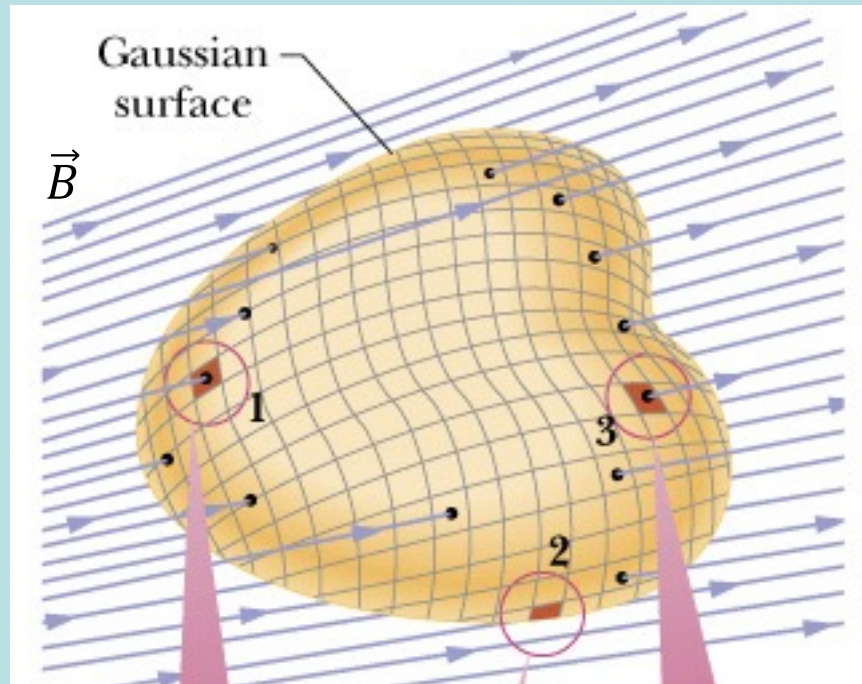




因此一塊磁鐵可以看成如上一系列極小極薄的磁鐵連接而成，
 磁鐵外的磁力線到達南極後，在磁鐵內是會繼續向左延伸流動，
 而非如電偶極的所有電場線，都在負電荷消失。
 注意兩者在兩極間的場線方向相反！
 磁鐵外的磁力線由北極到達南極後，
 在磁鐵內是會繼續由南極向北極延伸流動，
 磁力線形成一封閉迴路，是迴旋狀場線。



任何情況下，都沒有磁荷可以產生及消滅磁力線



通過任何一個封閉曲面的總通量永遠等於零。

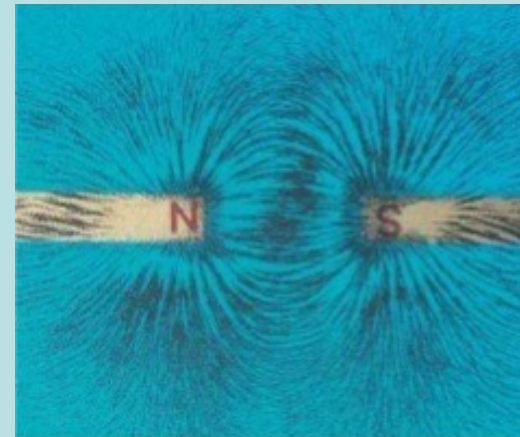
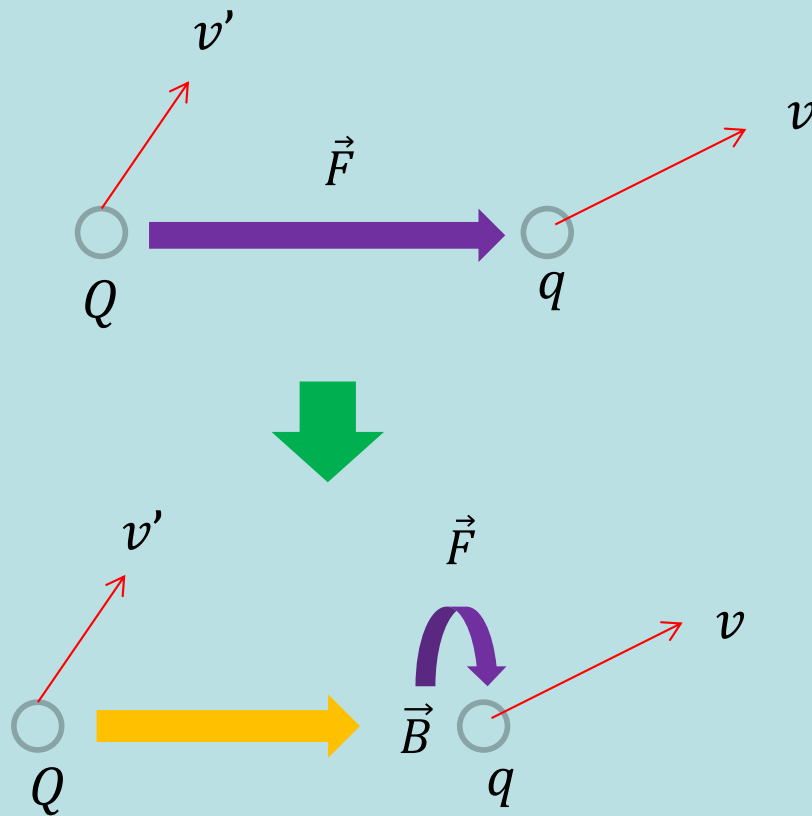
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

磁場的高斯定律

磁力線數目守恆且沒有磁荷！

現在引入磁場 $\vec{B}$ 的概念：

磁力是移動的電荷之間的力！



移動的電荷 Q 在周圍產生磁場 $\vec{B}$ ，磁場對當地的移動電荷 q 施磁力！

磁場 $\vec{B}$ 就是會讓位於當地的運動電荷 q 得到靜磁力的空間的物理性質。

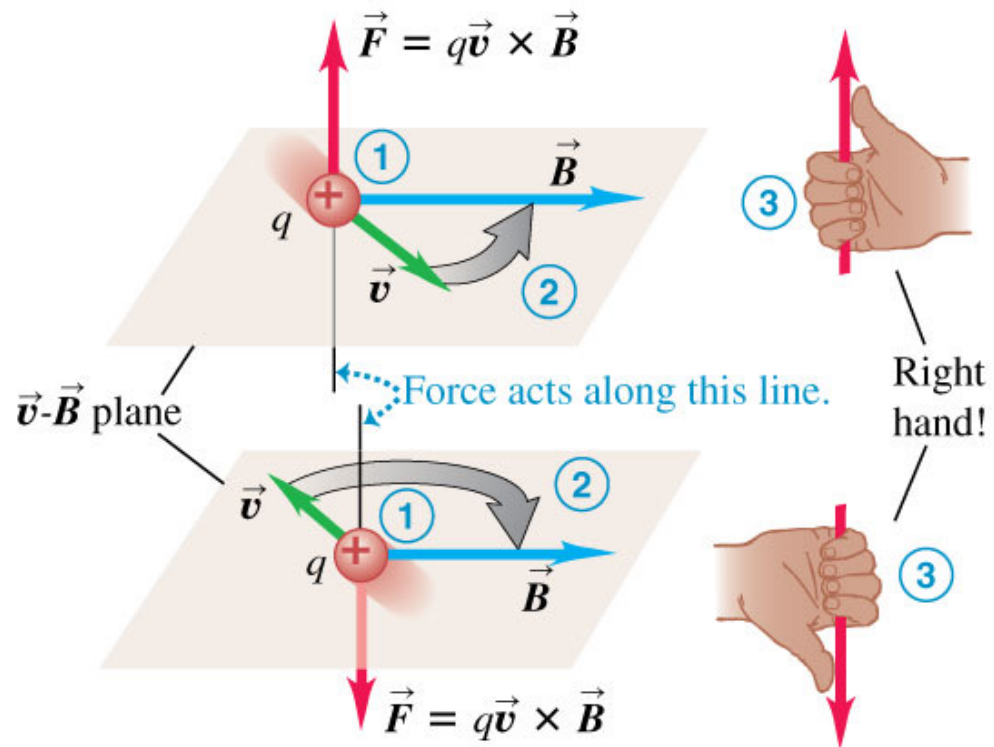
$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

以右手手指以較小角將速度 $\vec{v}$ 撥向磁場 $\vec{B}$ ，大拇指方向即磁力 $\vec{F}$ ：

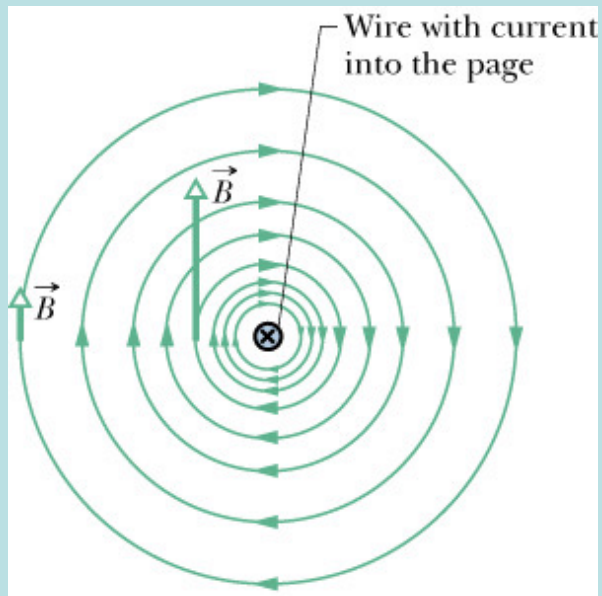
(a)

Right-hand rule for the direction of magnetic force on a **positive** charge moving in a magnetic field:

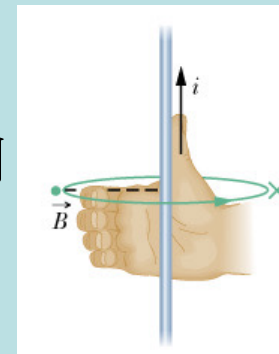
- ① Place the $\vec{v}$ and $\vec{B}$ vectors tail to tail.
- ② Imagine turning $\vec{v}$ toward $\vec{B}$ in the $\vec{v}$ - $\vec{B}$ plane (through the smaller angle).
- ③ The force acts along a line perpendicular to the $\vec{v}$ - $\vec{B}$ plane. Curl the fingers of your *right hand* around this line in the same direction you rotated $\vec{v}$. Your thumb now points in the direction the force acts.



長直導線周圍的磁場



方向：安培右手定則

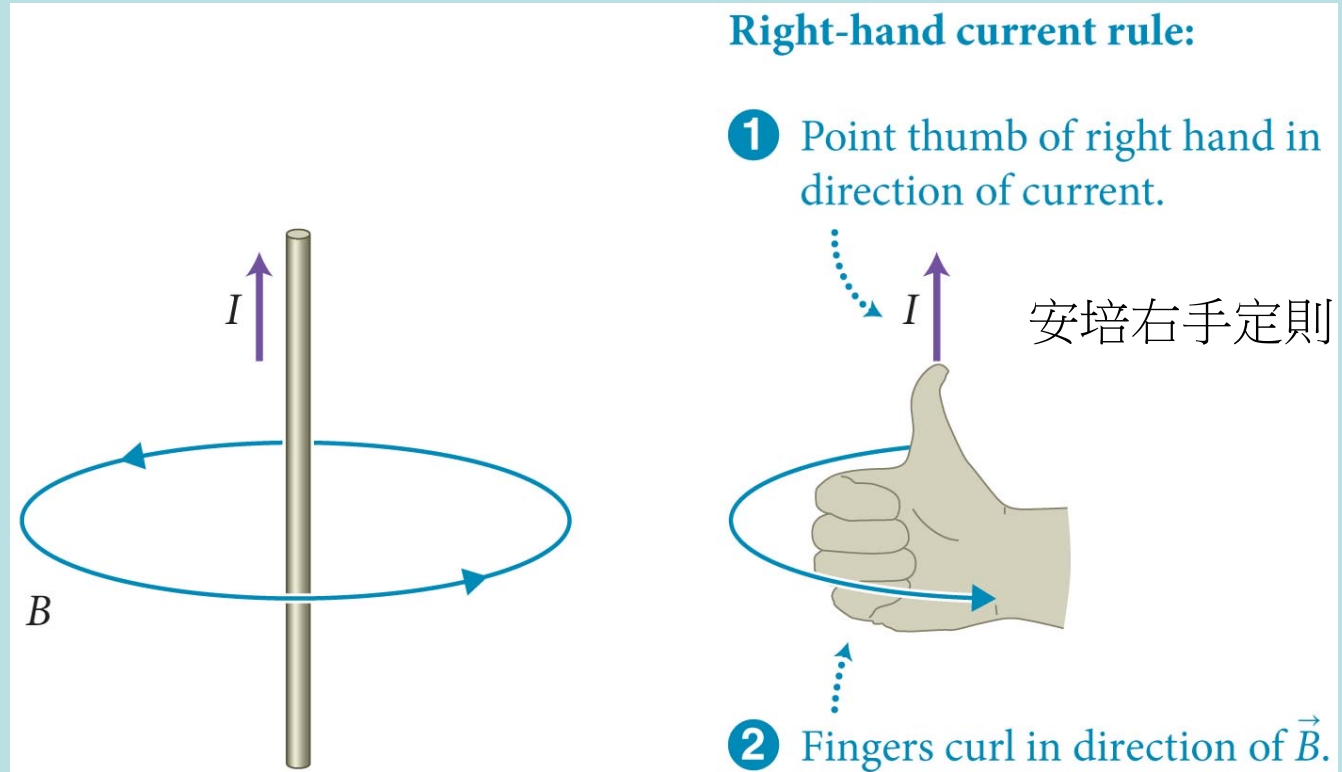
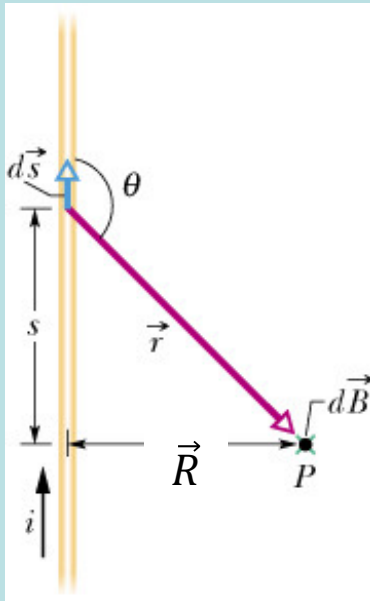


大小：

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

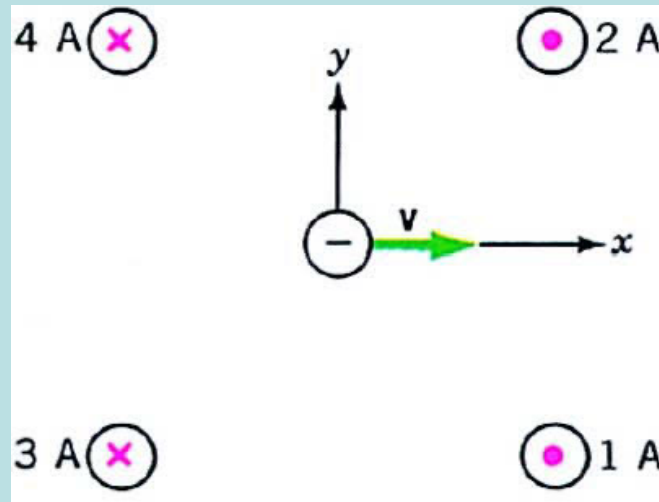
長直導線所產生磁場的方向是在垂直於導線的平面上。

磁場指向垂直於徑向 $\vec{R}$ 的方向，因此磁力線是繞導線迴旋！



這是漩渦狀場線！

電場線不能呈漩渦狀，但典型的電流產生的磁場卻呈漩渦狀！

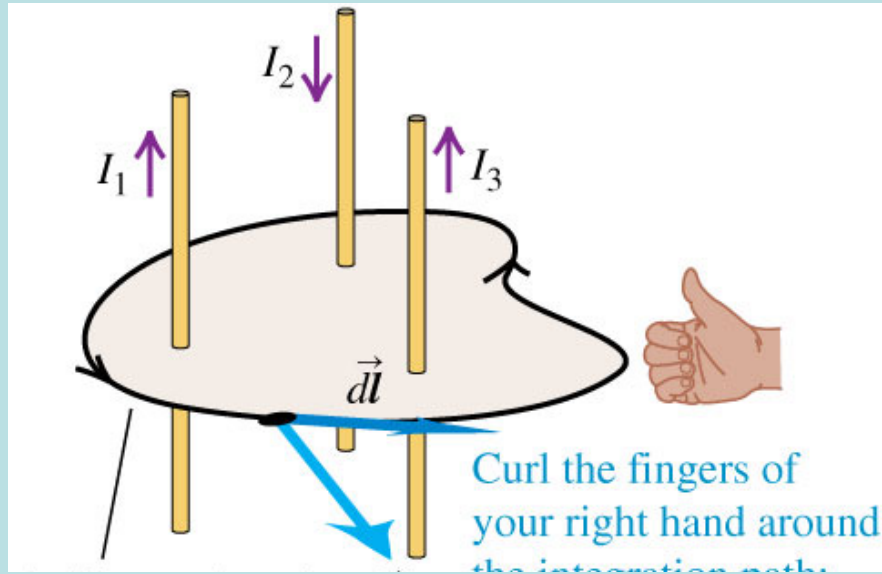


$$(a) B_0 = \mu_0 I / 2\pi r \text{ where } I = 1 \text{ A and } r = L/\sqrt{2}$$

$$B_x = 0 \text{ and } B_y = 10B_0 \cdot \cos 45^\circ$$

$$B = -1.33 \times 10^{-5} \hat{j} \text{ T}$$

$$(b) \vec{F} = -e\vec{v} \times \vec{B} = 8.53 \times 10^{-18} \hat{k} \text{ N}$$



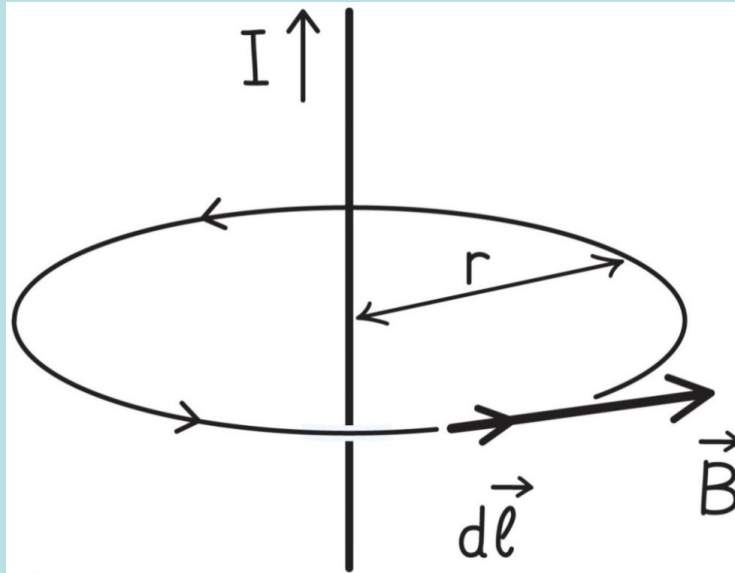
對任一封閉曲線，磁場的線積分正比於該曲線所包圍的總電流（電流疊加）。

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i \quad \text{安培定律}$$

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$, Magnetic (Permeability) Constant

安培定律的應用

倒過頭來，以安培定律來推導長直導線周圍，距導線為 r 處的磁場。



磁場的方向是繞著導線的圓！而且是圓柱對稱。

以導線為圓心，取半徑 r 的圓形路徑為安培圈。

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint B \cdot dl = B \oint dl = B \cdot 2\pi r = \mu_0 i$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

磁場方向的討論：

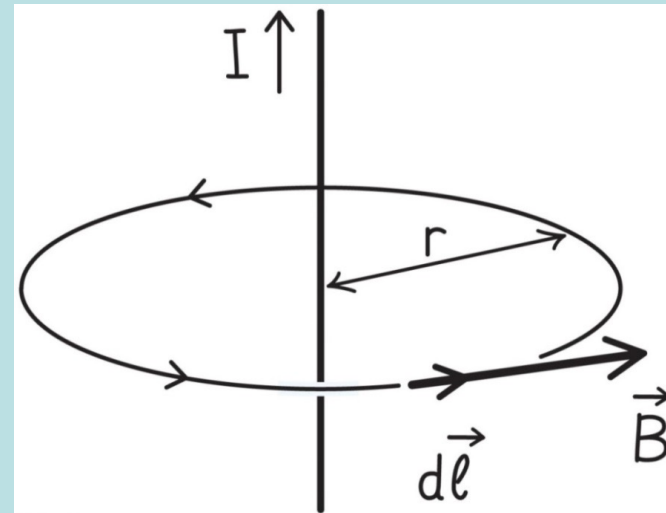
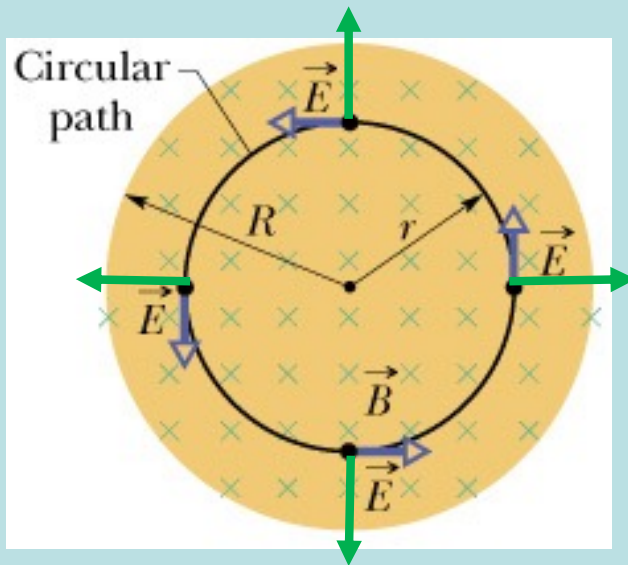
沿導線方向的磁場為零，否則必須由下方磁荷發出。

長直導線是圓柱對稱的。

因此產生的磁場也必須是圓柱對稱！

如下圖，圓柱對稱的磁場只可能是放射狀或漩渦狀

但磁場不能是放射狀。



因此磁場的方向是繞著導線的圓！

長直粗電流導線周圍距導線軸為 r 處的磁場
以導線軸為圓心，取半徑 r 的圓形路徑為安培圈：
在導線外：

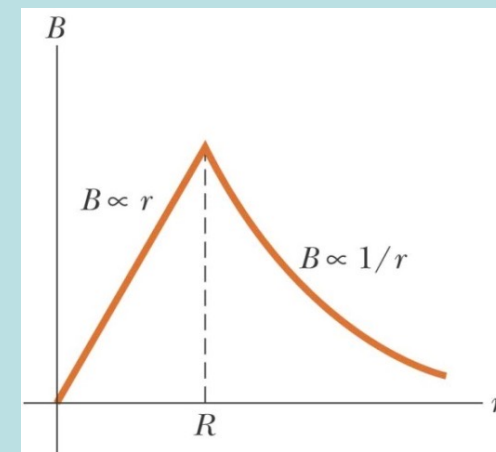
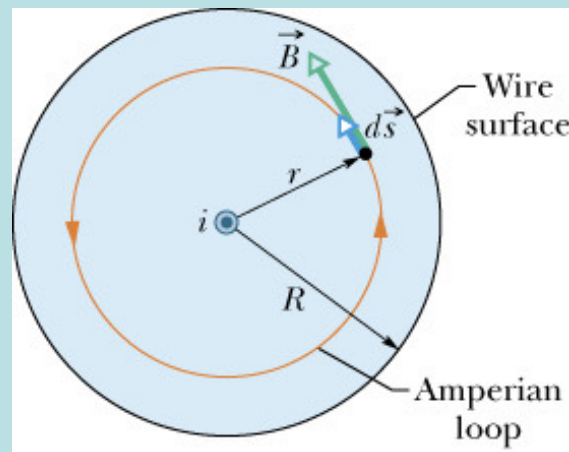
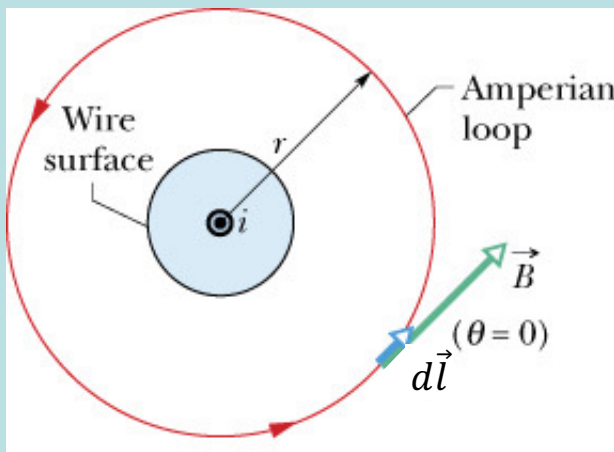
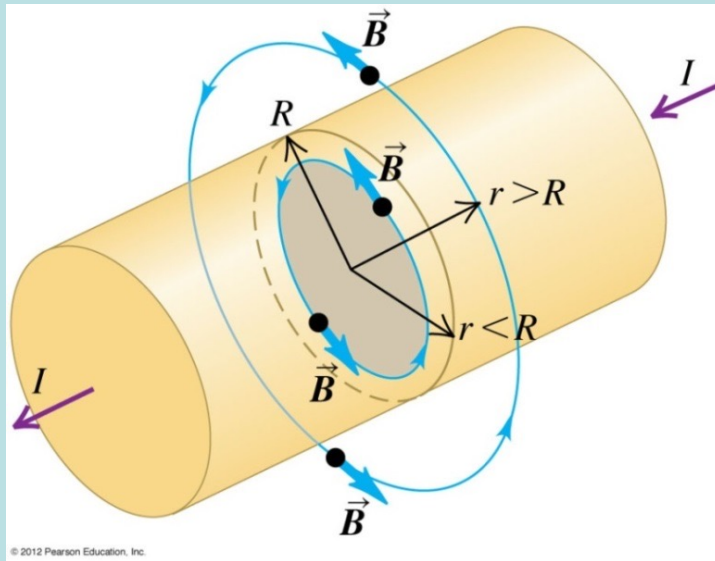
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B \cdot dl = B \oint dl = B \cdot 2\pi r = \mu_0 i$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \quad \text{導線外磁場如同電流集中於無限細的軸上}$$

在導線內：

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot \pi r^2 \frac{i}{\pi R^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R^2} r$$



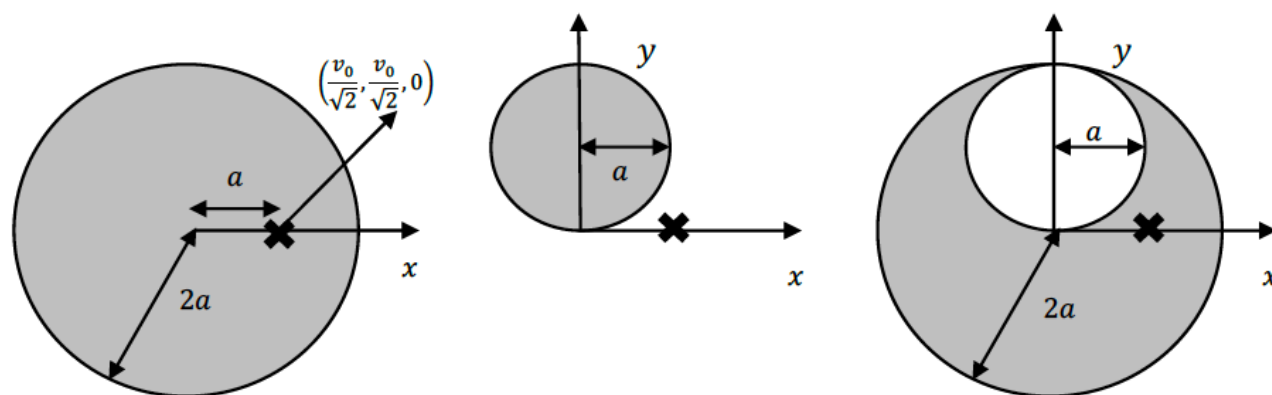
2. 考慮三條無限長的粗直導體電纜：

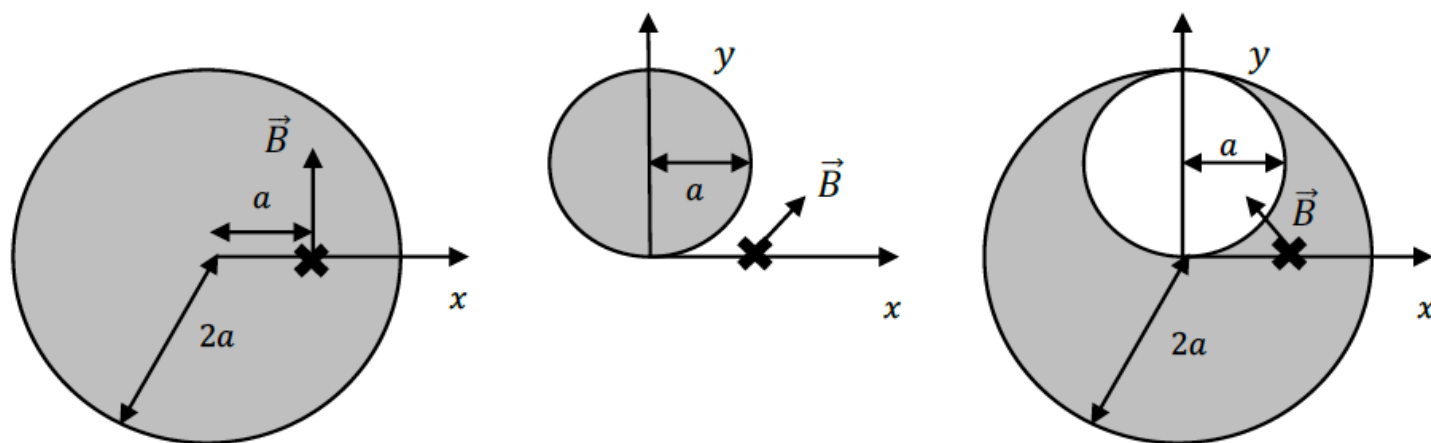
A. 第一條電纜為一長直導體圓柱，半徑為 $2a$ ，橫切面如下圖左所示，以軸心為原點。

設圓柱軸的方向射出紙面為 z 軸，橫切面上均勻電流密度大小是常數 j ，方向沿 z 軸方向。計算在 $(x, y) = (a, 0)$ 處，磁場的 x 分量及 y 分量。(10)

B. 設電纜導體之 resistivity 電阻率為常數 ρ ，寫下電纜導體內的電場大小，及通過電纜截面的電流大小。此電纜長度為 l ，寫下兩端的電位差。(10)

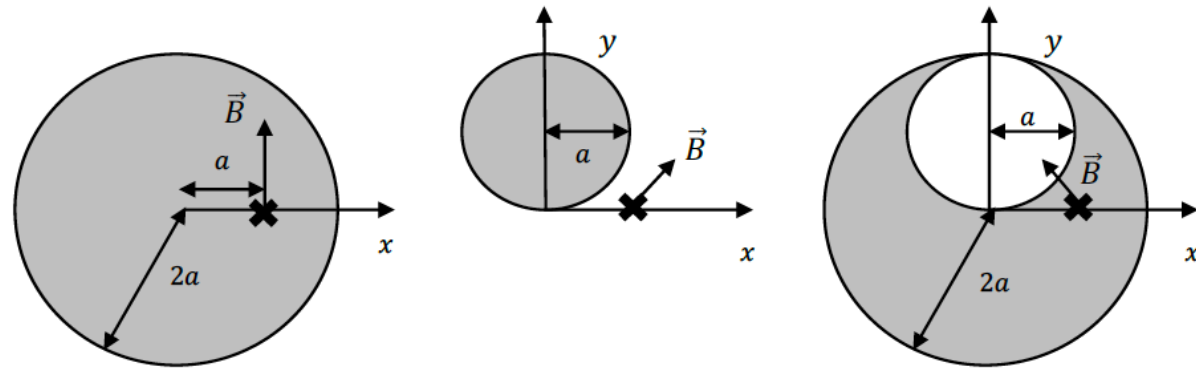
C. 若在 $(a, 0)$ 處有一正電荷 q ，以速度 $\vec{v} = \left(\frac{v_0}{\sqrt{2}}, \frac{v_0}{\sqrt{2}}, 0\right)$ 移動，計算此電荷所受的磁力大小及方向。(10)





- D. 移除此電纜，考慮第二條無限長的粗直導體電纜，半徑為 a ，軸同樣沿 z 軸，軸心置於 $(0, a)$ ，電流密度大小同樣是常數 j ，沿 z 軸方向。位置與橫切面如下圖中所示，同樣計算在 $(a, 0)$ 處的磁場的 x 分量及 y 分量。(5)
- E. 移除電纜，重新置入第三條電纜，此電纜為一類似 A 題中半徑為 $2a$ 的長直導體圓柱，但此導體圓柱內有一中空半徑為 a 的圓柱空間，當導電圓柱的軸心在 $(0, 0)$ ，中空圓柱的軸心在 $(0, a)$ ，導電圓柱與中空圓柱的軸都同樣沿 z 軸，位置與橫切面如下圖右所示，橫切面上的電流密度大小還是常數 j ，沿 z 軸方向。注意中空部分無電流通過。同樣計算在 $(a, 0)$ 處的磁場的 x 分量及 y 分量。(5)

解答：取一半徑為 a 之圓形安培圈，磁場的線積分等於圓所包圍的電流。



A. 沿此安培圈磁場與 $d\vec{l}$ 平行，而安培圈所包圍電流與所包圍面積成比例：

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2\pi a = \mu_0 j \pi a^2$$

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 j a$$

在 $x = a$ 處，磁場指向 y 方向，因此 $B_x = 0, B_y = \frac{1}{2} \mu_0 j a$ 。

B. $E = \rho j$ ， $I = j \pi a^2$ 。 $V = \rho j l$ 。

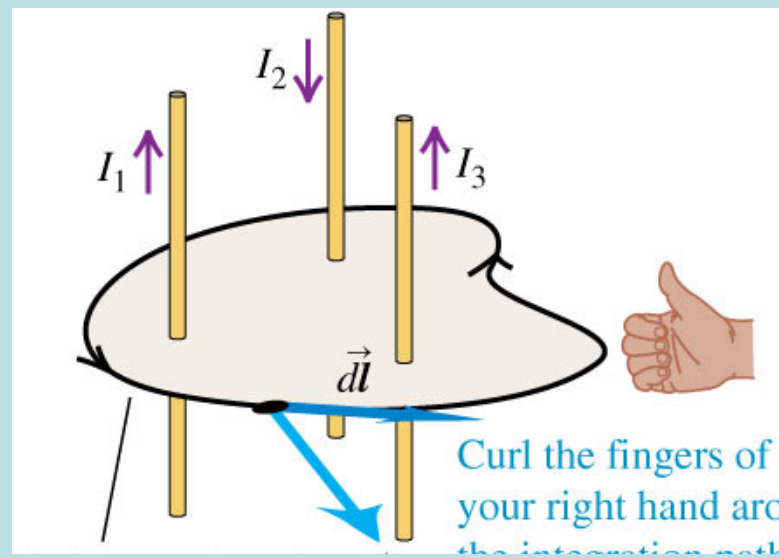
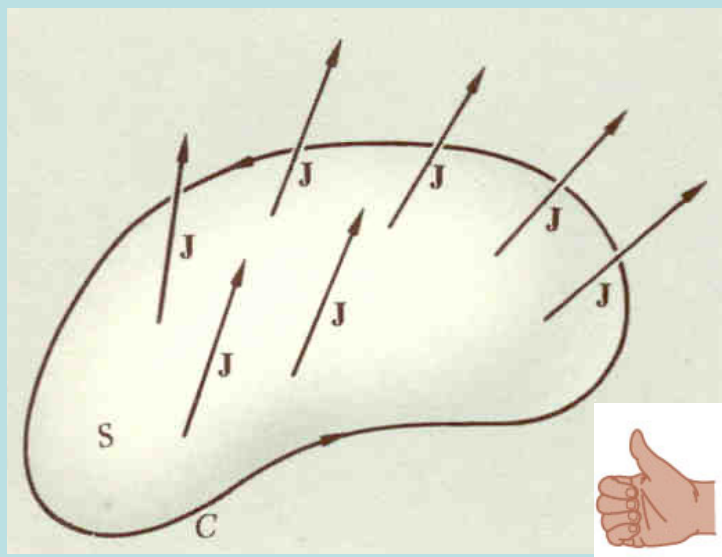
C. $\vec{B}$ 與電荷速度夾 45° ， $F = q v_0 B_y \sin 45^\circ = \frac{1}{2\sqrt{2}} q v_0 \mu_0 j a$ ，方向為沿 z 軸方向。

D. 計算類似 A，此時安培圈包圍所有電流，電流量與 A 相同，但測量點距離軸心為

$\sqrt{2}a$ ，因此在 $x = a$ 處的磁場 $B = \frac{1}{2\sqrt{2}} \mu_0 j a$ ，磁場方向與軸夾角為 45° ，因此 $B_x =$

$\frac{1}{4} \mu_0 j a, B_y = \frac{1}{4} \mu_0 j a$ 。

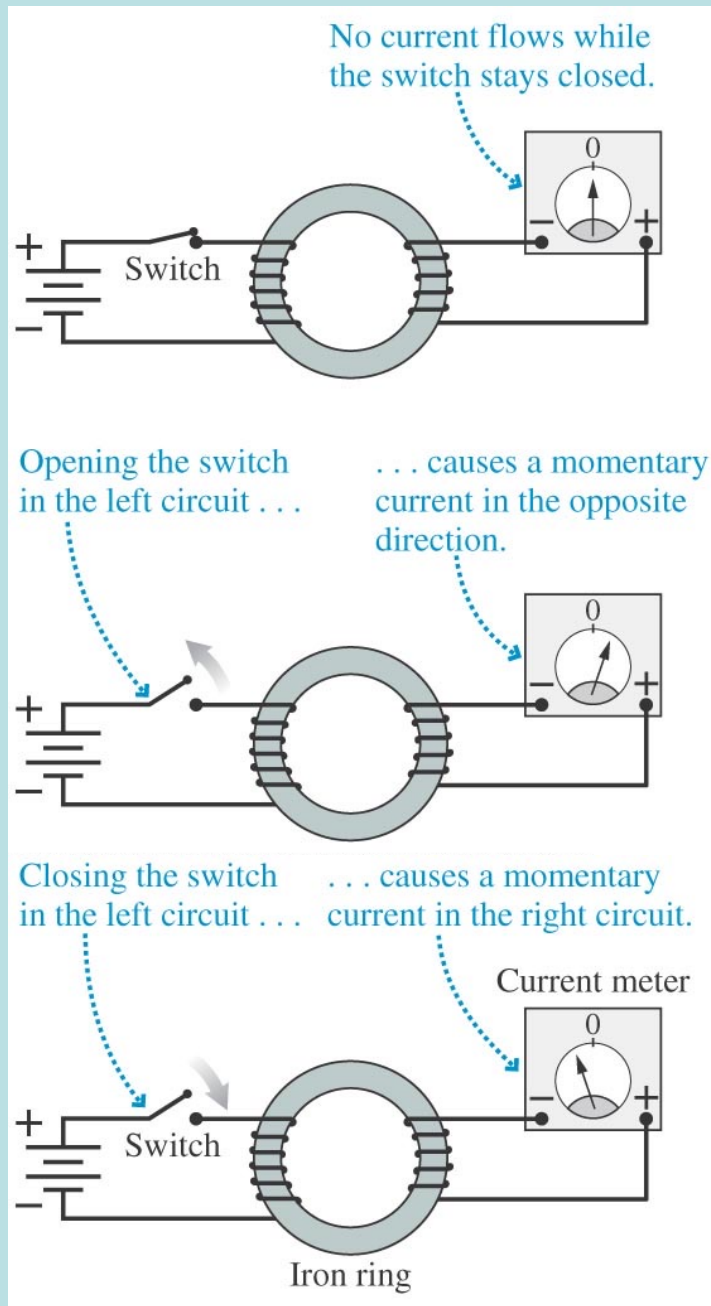
E. 右圖即為左圖減去中圖， $B_x = -\frac{1}{4} \mu_0 j a, B_y = \frac{1}{4} \mu_0 j a$ 。



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i$$

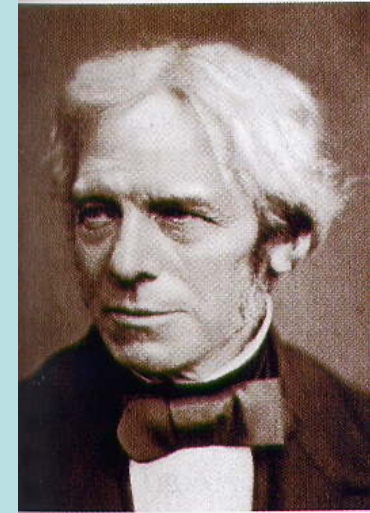
安培定律的方向

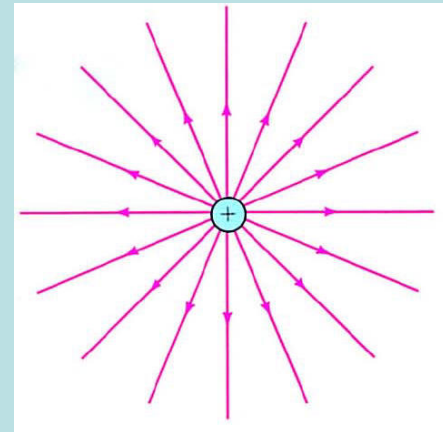
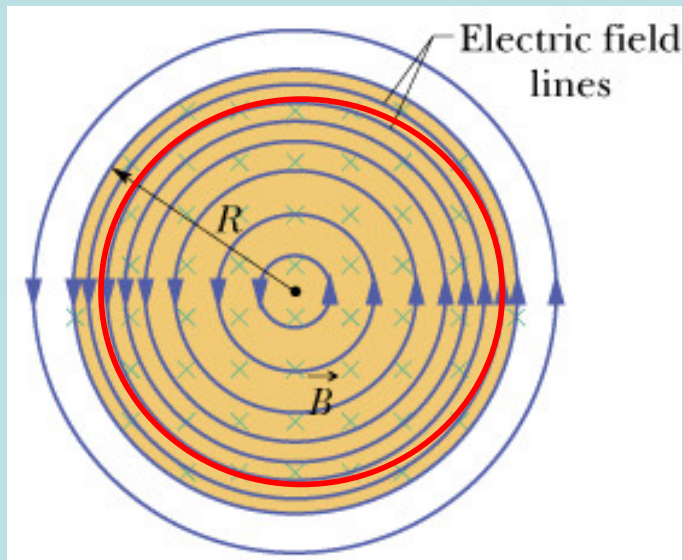
路徑有一個方向，此方向與通過曲面的正向電流方向以右手定則規定！



電磁感應 Induction 1831

磁場變化時產生電流！





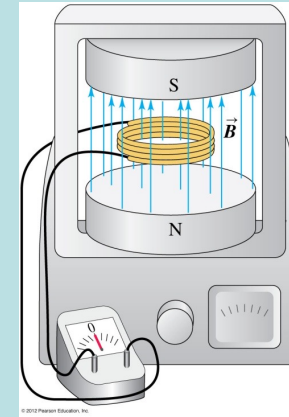
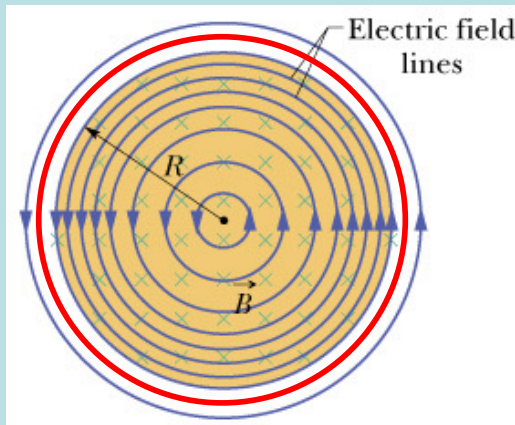
電場有電荷以外其它的來源！且性質差異甚大。

感應電場線是漩渦狀的封閉曲線，如同電流產生的磁場線！

可見捕捉漩渦狀場的電場線積分不為零！

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \neq 0$$

若有感應電場，則電荷繞迴路一圈回到出發點，會被作功。



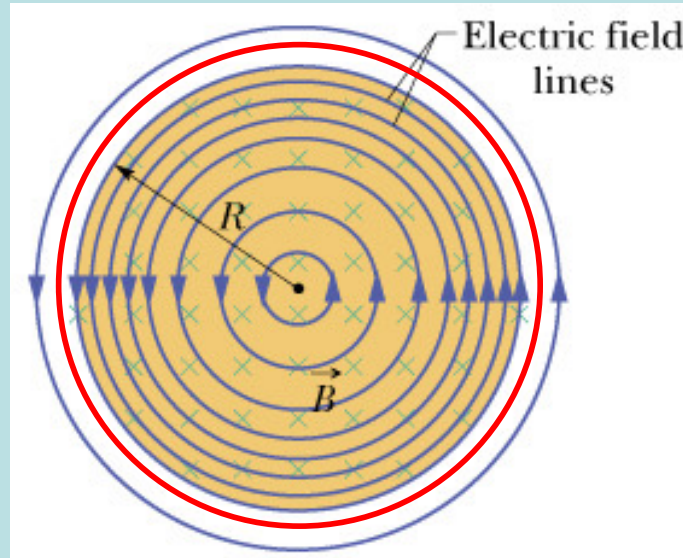
在電磁感應的情況：感應電動勢根據定義，就等於感應電場沿迴路的線積分：

$$\mathcal{E} = \frac{W}{q} = \frac{\oint \vec{F} \cdot d\vec{l}}{q} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

感應電場的感應電動勢的效果猶如一個不存在的電池：

Emf $\mathcal{E}$ 相當於此等效電池的電壓 V ： $\mathcal{E} = V$

如此有一定電阻的迴路內的感應電流就正比於Emf： $\mathcal{E}$ 。



法拉第由實驗總結：磁場通量 Φ_B 的時變率： $\frac{d\Phi_B}{dt}$ ，決定了感應電流。

根據歐姆定律，迴路內的感應電流就正比於相當於一電池的Emf $\mathcal{E}$ 。

因此，感應電動勢，等於曲線內曲面的磁通量變化。

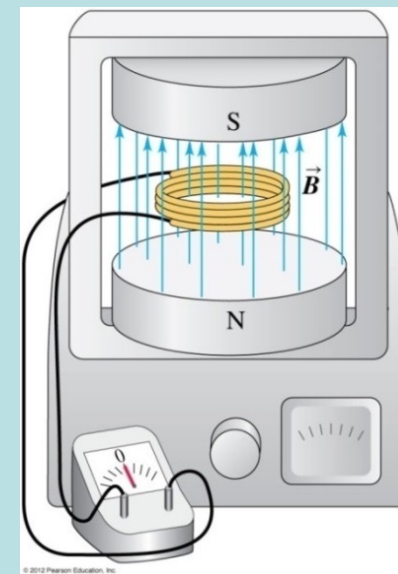
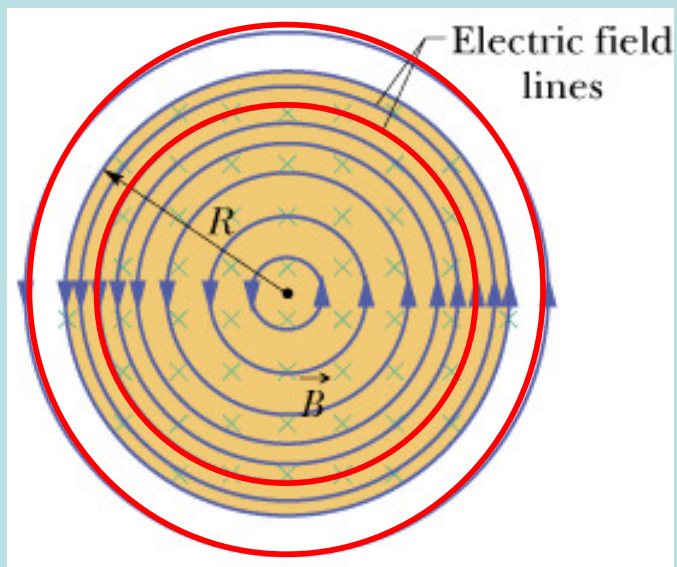
$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

在許多應用，磁場會垂直於平面，且是均勻磁場，磁通量的定義可以簡化：

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_S B \cdot dA = B \int_S dA = BA$$

實際的計算：圓柱對稱的磁場變化所產生的感應電場



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint E \cdot dl = E \oint dl = E \cdot 2\pi r = \frac{d\Phi_B}{dt}$$

在 $r > R$ 處的感應電場 E : $\Phi_B = BA$

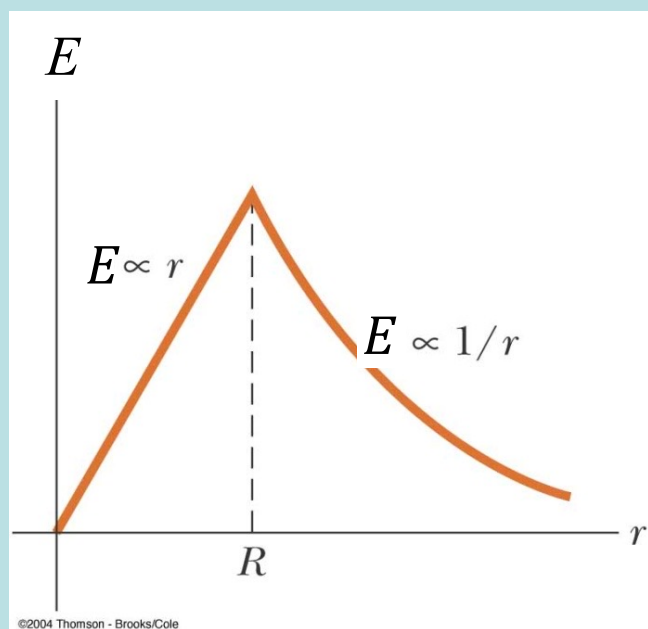
$$\Phi_B = B \cdot \pi R^2$$

$$E = -\frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt}$$

$$r < R$$

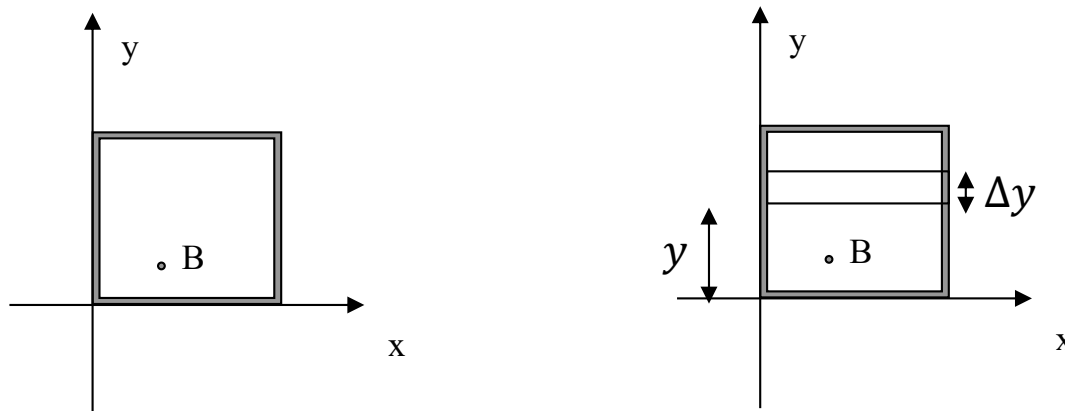
$$\Phi_B = B \cdot \pi r^2$$

$$E = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$$



如果迴路不是圓，各處電場一般來說很難算，但電動勢則非常容易！

考慮如圖一方形的導體迴路，一邊邊長2.0 cm，置於x-y平面上，如圖方形的一角是原點。迴路的總電阻是20.0 Ω 。在空間中有一隨時間變化的磁場 B ，磁場是指向z方向，也就是指出紙面的方向。



A. 假設磁場是均勻的， $B = 2.0 t^3$ ，此處 B 的單位是tesla, 時間 t 是秒。請問在時間 $t = 2.0$ s時，迴路內的電流是多大？方向在上圖中是順時鐘還是逆時鐘？

B. 假設磁場是非均勻的， $B = 2.0 t^3 y$ ，這裡位置 y 的單位是公尺，請問在時間 $t = 2.0$ s時，迴路內的感應電動勢是多少？

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = \sum B \cdot (2.0 \cdot \Delta y) \rightarrow \int_0^{2.0} 2.0 t^3 y \cdot (2.0 \cdot dy)$$

Maxwell Equations

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

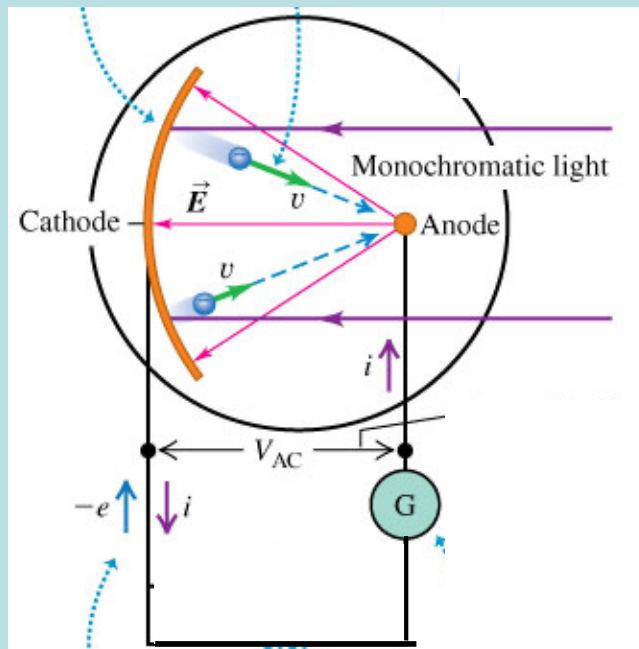
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

電流是靜磁場的來源，而且產生的磁場是漩渦狀的，不是放射狀的。

電荷是靜電場的來源，而且產生的電場是放射狀的，不是漩渦狀的。

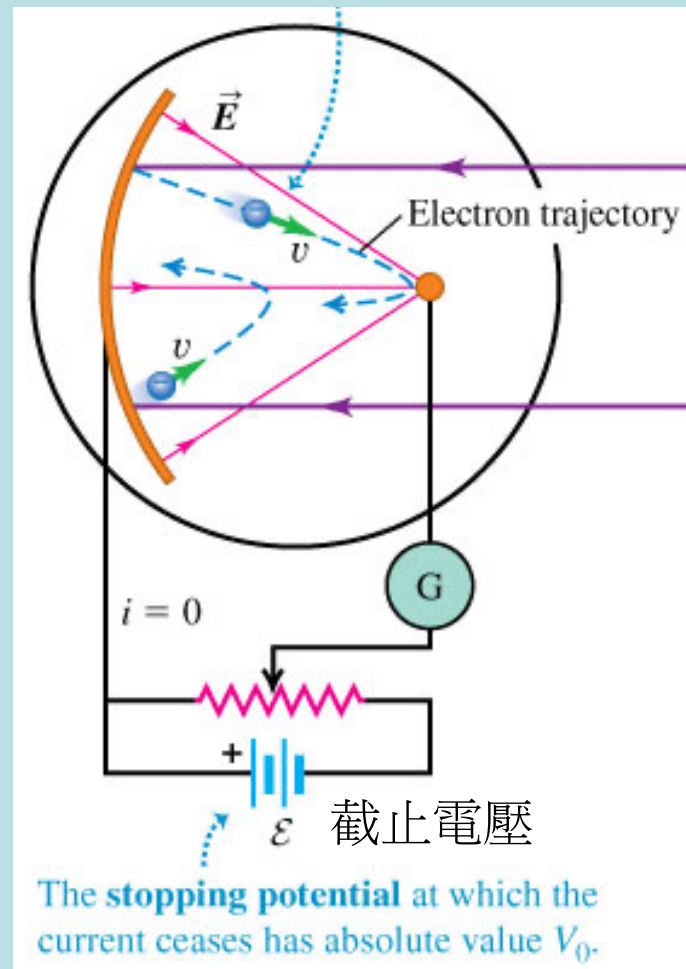
電（磁）場變化時會感應產生磁（電）場，感應產生的磁（電）場是漩渦狀，大致與變化的電（磁）場方向垂直。

光電效應 Photoelectric Effect



光照射於電極上，有時候可以撞擊出電子產生光電流。

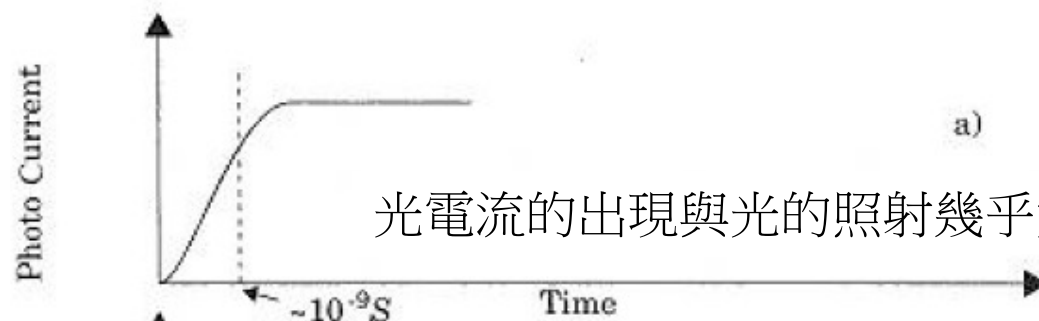
光電效應 Photoelectric Effect



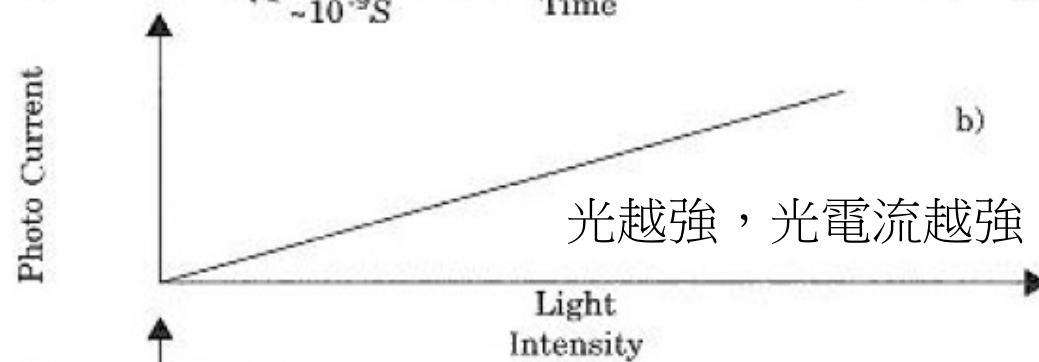
進一部的實驗加上一個截止電壓以完全抑制光電流，

測量截止電壓就等於光電子的動能！

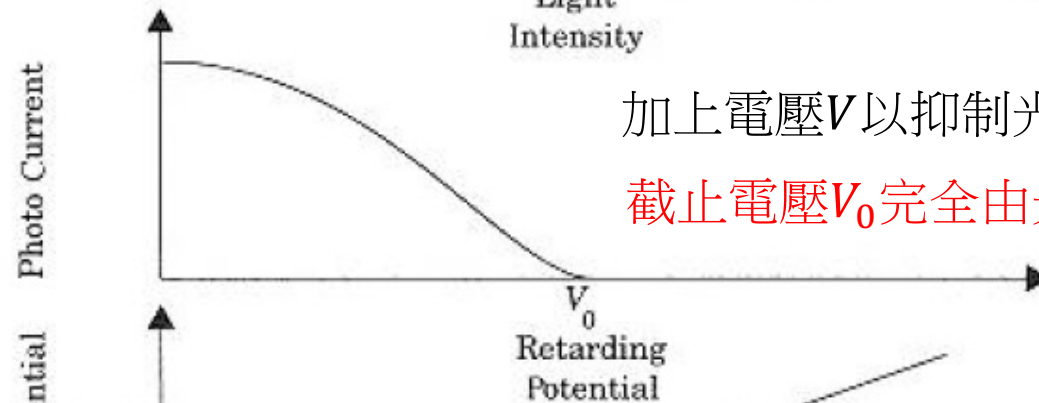




光電流的出現與光的照射幾乎完全沒有時間差。

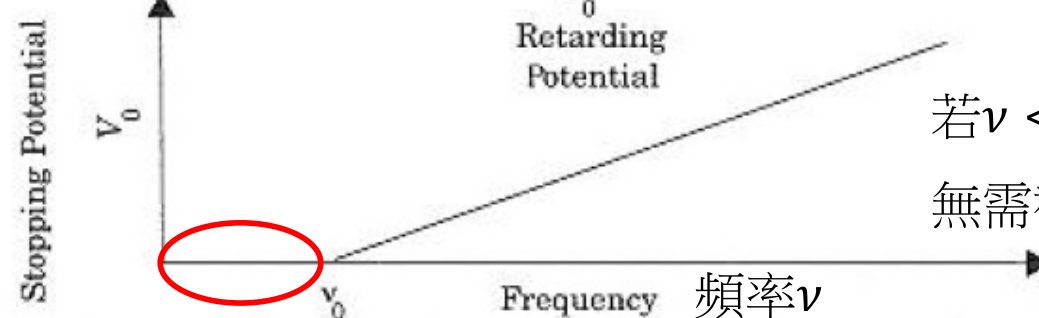


光越強，光電流越強。



加上電壓 V 以抑制光電流，測量完全抑制時的 V_0 。

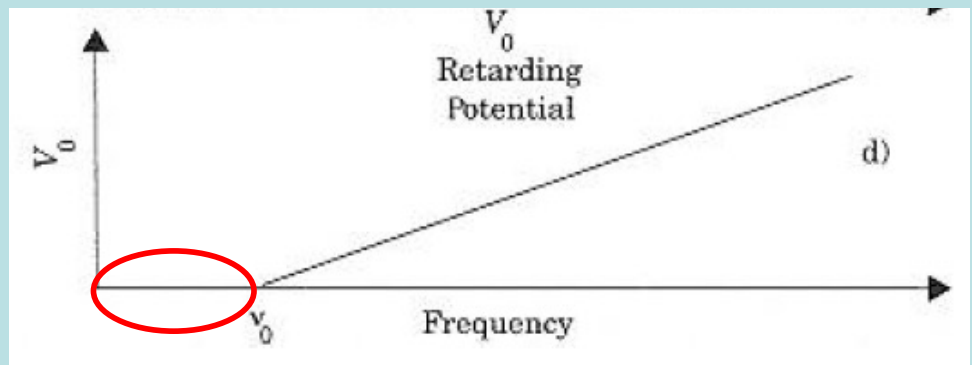
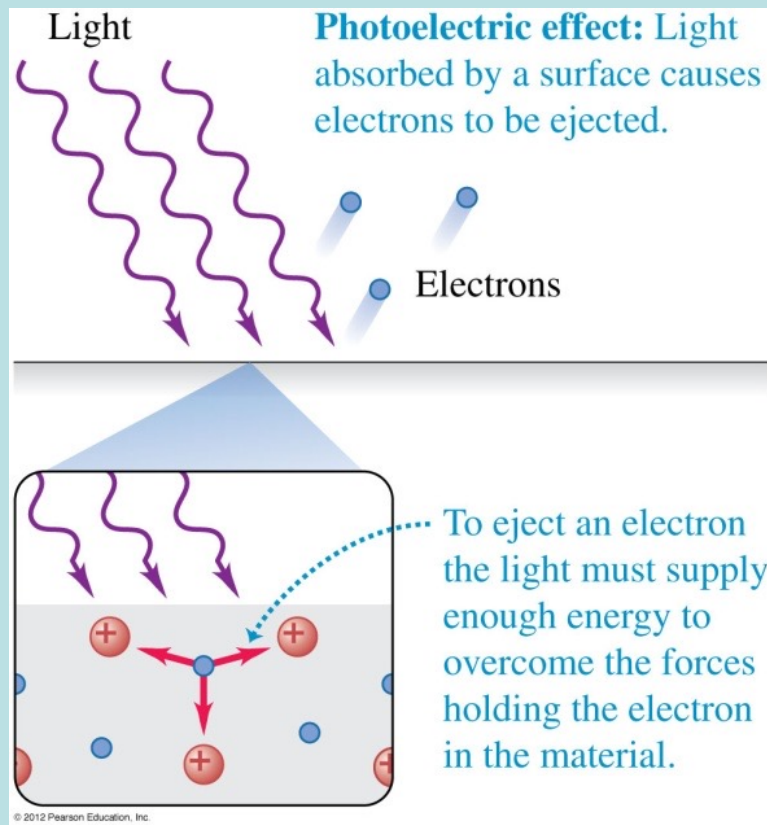
截止電壓 V_0 完全由光的頻率 ν 決定。與光強度無關。



若 $\nu < \nu_0$ ， $V_0 = 0$ ：

無需截止電壓，就沒有光電流了！





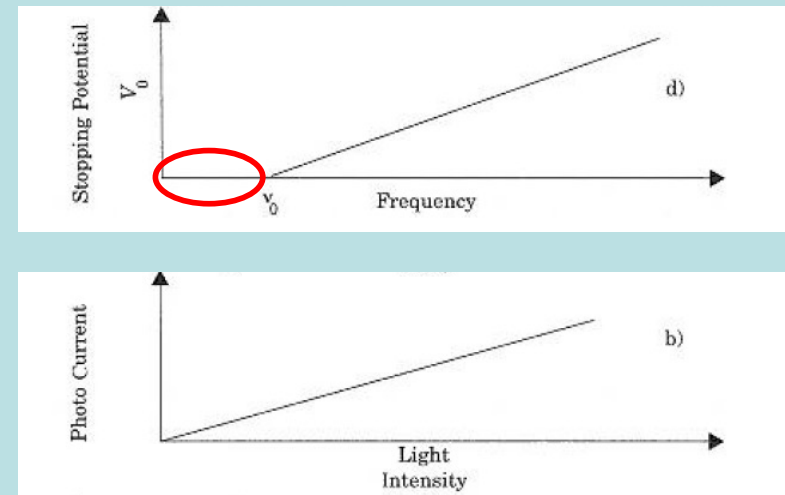
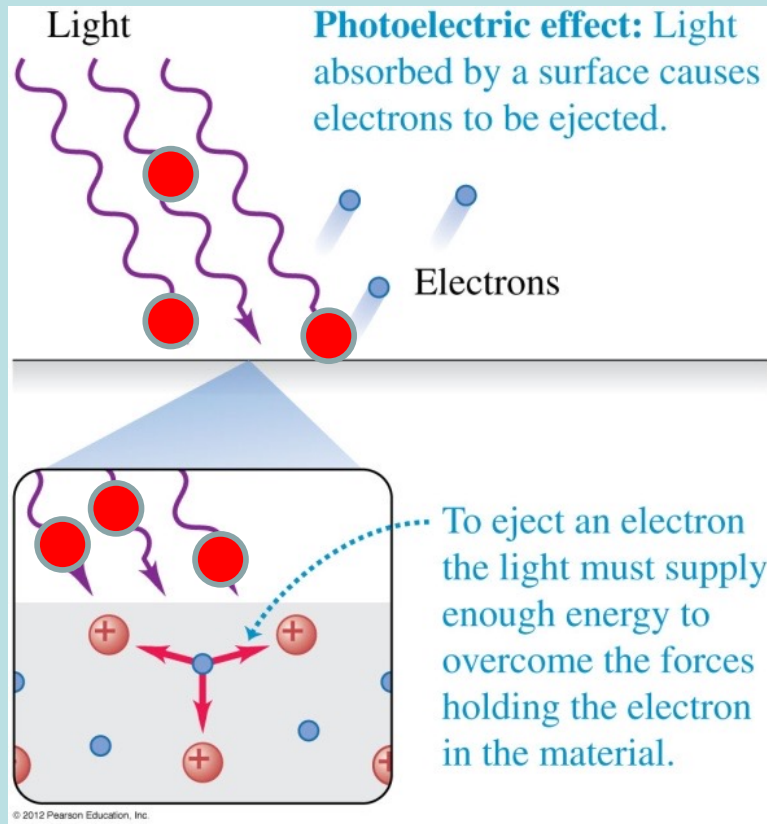
光的能量被電子吸收後，用來克服固體中固定的束縛能。

實驗結果顯示光電流是否出現，與光強度無關，只和頻率有關，

若 $\nu < \nu_0$ ，再強的光都無法產生光電流！

這樣的結果，連續的波動理論是很難解釋的，畢竟連續能量可以累積。





但如果假設光與物質交換能量時是以一次一顆固定量子的形式進行：

當一個光量子的能量不足以克服離開固體的束縛能，能量就完全不被吸收。

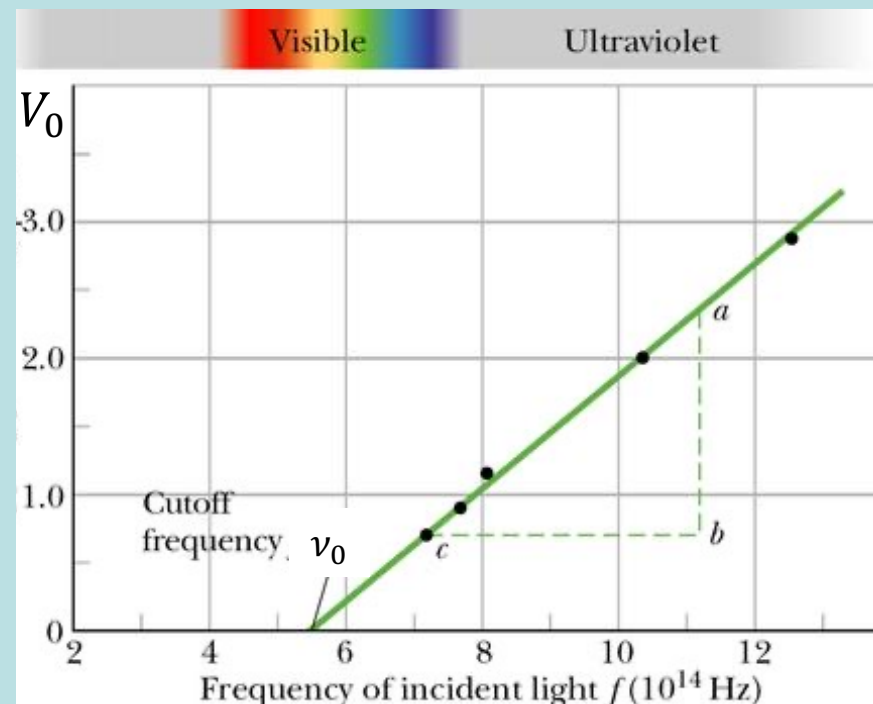
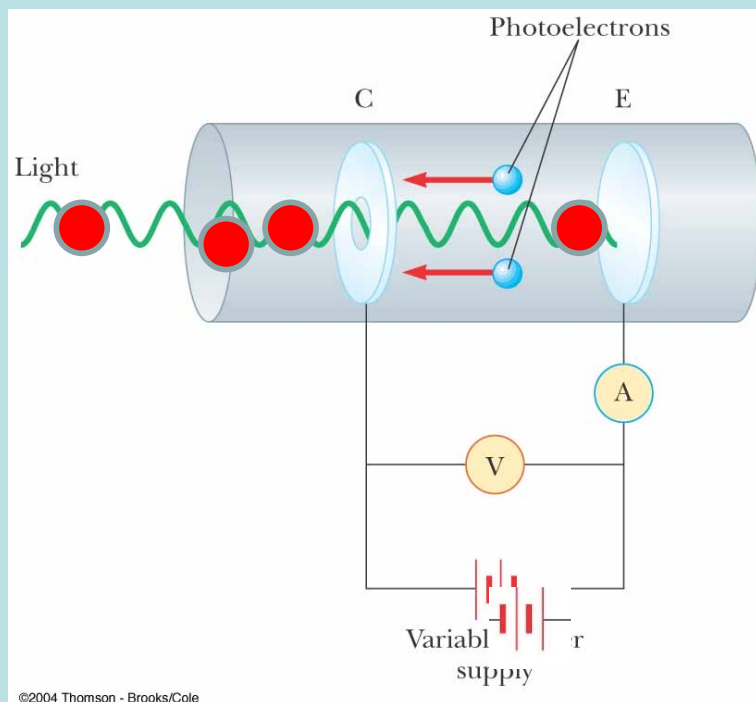
這是零或一的選擇，不能累積的，難怪有時光即使再強，都無法產生電流。

若再設一個光量子的能量由頻率 ν 決定，光電流是否出現，自然只和頻率有關。

正好已知空腔電磁輻射粒子的能量： $E = h\nu$

光強度只決定光粒子數量，即交換發生機會，只影響光電流一旦出現時的大小。

若有光電流時，將測得的截止電壓 V_0 對光的頻率作圖，呈線性關係！



這是因為 eV_0 即是光電子的最大動能。右圖的實驗結果顯示：

$$eV_0 = K_e = h\nu - W$$

$$V_0 = \frac{h}{e}\nu - \frac{W}{e}$$

光交給電子的能量就是光量子 $E = h\nu$

W 是光電子離開電極所需克服的束縛能：Work Function： $W = h\nu_0$

光量子能量 $h\nu$ 低於 W ， $\nu < \nu_0$ ，即無法打出電子。

直線的斜率即是Planck常數 h/e 。這是最容易測蒲朗克常數的辦法。

