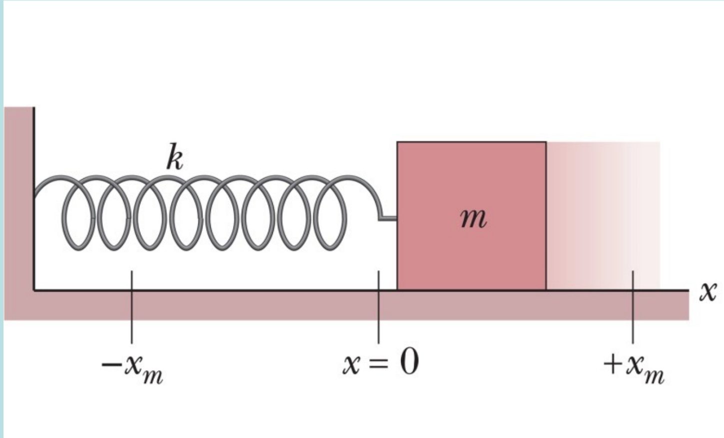
簡諧運動的運動方程式



$$F = -kx$$

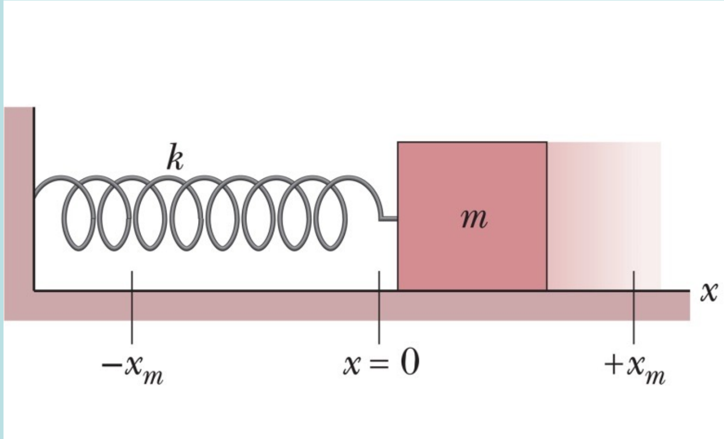
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x = -\omega^2 x$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

一個簡諧運動，只由一個特徵常數 ω（角頻率）決定！

簡諧運動的解

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$



正弦函數與餘弦函數的兩次微分都和負的自己成正比！

因此很容易就找到兩個解 $x_1 = \sin \omega t$ $x_2 = \cos \omega t$

那麼任一線性組合 $x = a \cos \omega t + b \sin \omega t$ 也是解！

我們得到無限多個解！

微分方程式的解需要讓自己挪出足夠的空間，才能滿足起始條件。

$$x = a\cos\omega t + b\sin\omega t$$

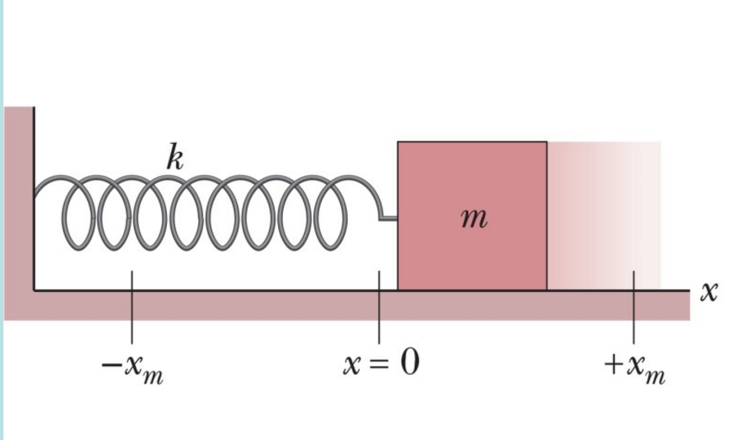
$$v = -\omega a\sin\omega t + \omega b\cos\omega t$$

a, b由起始條件決定

$$x(0) = a = x_0$$

$$v(0) = \omega b = v_0$$

$$b = \frac{v_0}{\omega}$$



$$x = x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$$

這個函數同時滿足運動方程式以及兩個起始條件，因此是唯一的解！

不用再找了！

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

這個式子較適合運動方程式求解。

較容易明瞭其物理意義的表示式是：

$$x = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

這兩個數學式是一樣的，因為：

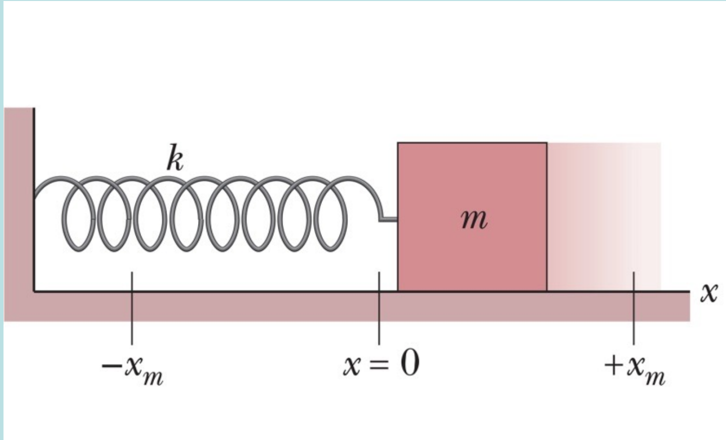
$$x = x_m \cos(\omega t + \phi) = x_m \cos \phi \cos \omega t - x_m \sin \phi \sin \omega t$$

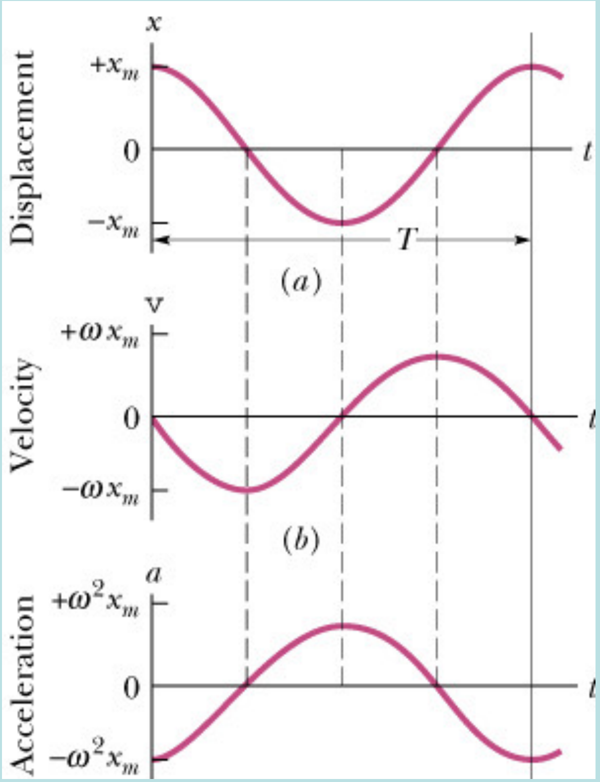
兩組常數之間的關係：

$$x_0 = x_m \cos \phi \,, \frac{v_0}{\omega} = -x_m \sin \phi$$

$$x_m = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$

$$\tan \phi = -\frac{v_0}{\omega x_0}$$





$$x = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi)$$

x_m 及 ϕ 兩個常數是由起始條件決定：

對個別的運動，所取的值不同。

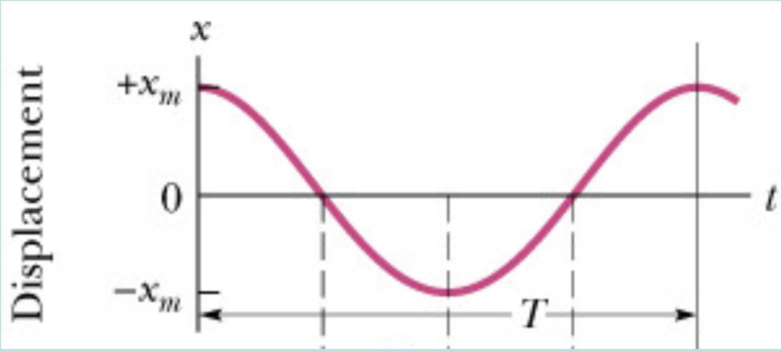
$$x_m = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$

ω是由簡諧振盪子的性質決定：

同一個彈簧組，只有一個值。

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$x = x_m \cos(\omega t + \phi)$ 三角函數是一個週期函數。 ω 決定了振盪的週期 T。



$x(t) = x(t + T)$ $\rightarrow \cos(\omega t + \phi) = \cos(\omega t + \omega T + \phi)$

三角函數一個週期後，角度增加2π。 $\omega T = 2\pi$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ω稱為角頻率 Angular Frequency。

簡諧運動的週期 T 等於

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

頻率Frequency: $f = 1/T$ 每秒進行了幾個周期。單位 s^{-1} = Hz。

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

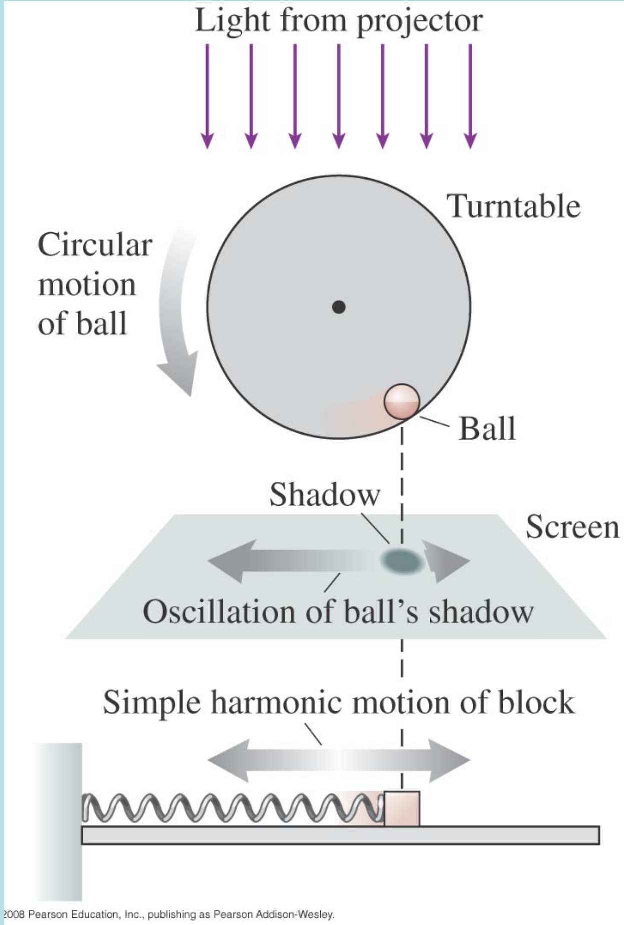
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

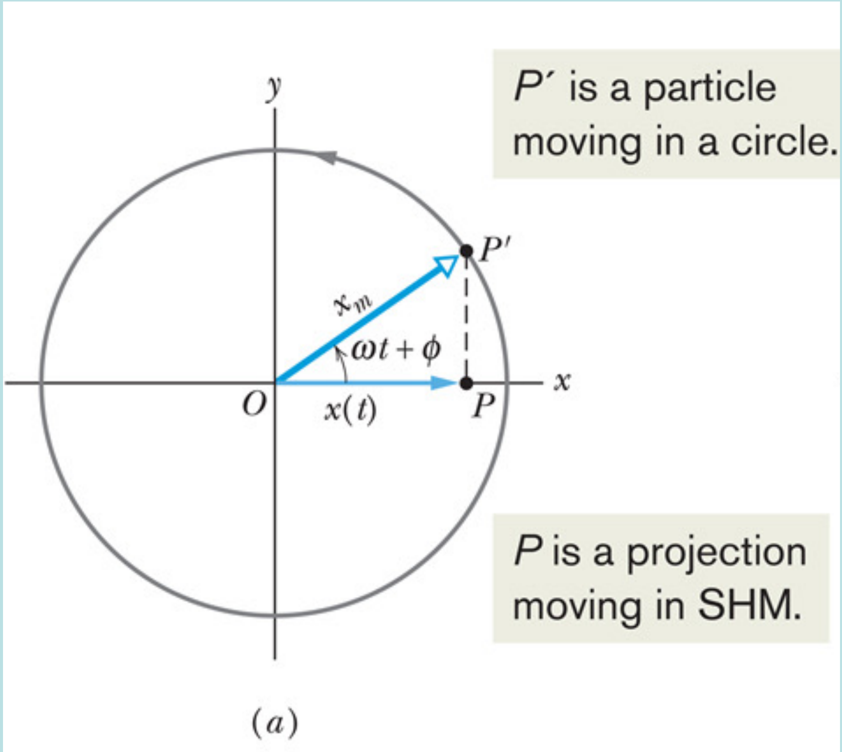
$$x = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

正好是一個半徑為x_m的等速圓周運動的水平分量。

此等速圓周運動的速度與加速度的水平分量也好與簡諧運動相等。

一個等速圓周運動位置的水平投影就等於一個簡諧運動。





假想圓是一個很好的工具，但不是真的有一個圓！

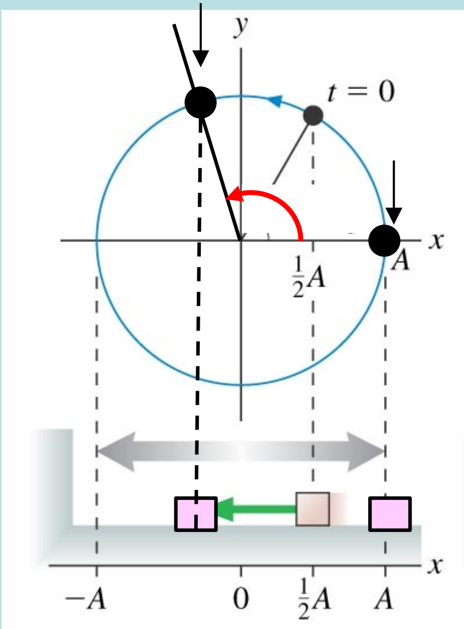
14.66 ••• An object is undergoing SHM with period 0.300 s and amplitude 6.00 cm. At $t = 0$ the object is instantaneously at rest at $x = 6.00$ cm. Calculate the time it takes the object to go from $x = 6.00$ cm to $x = -1.50$ cm.

SET UP: $x = A$ at $t = 0$, so $\phi = 0$. $A = 6.00$ cm. $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.300\text{ s}} = 20.9$ rad/s, so

$x(t) = (6.00\text{ cm})\cos)([20.9\text{ rad/s}]t)$.

EXECUTE: $t = 0$ at $x = 6.00$ cm. $x = -1.50$ cm when $-1.50\text{ cm} = (6.00\text{ cm})\cos((20.9\text{ rad/s})t)$.

$$t = \left(\frac{1}{20.9\text{ rad/s}}\right)\cos^{-1}\left(-\frac{1.5}{6.0}\right) = 0.0872\text{ s}.$$ It takes 0.0872 s.



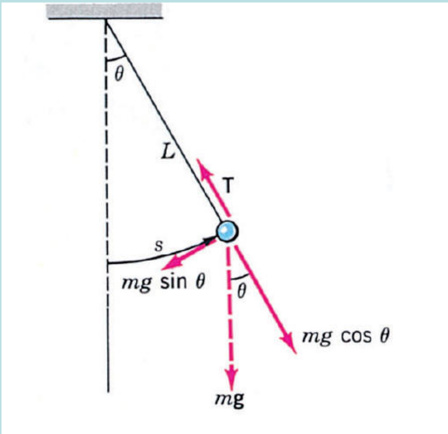
相角差等於：$\Delta\phi = \frac{\pi}{2} + \cos^{-1}\frac{1.5}{6.0}$

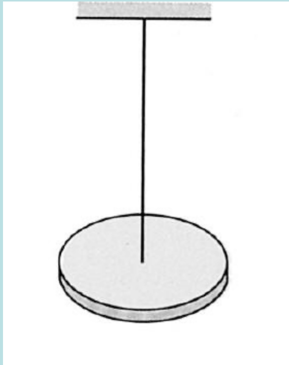
or $\cos^{-1}\left(-\frac{1.5}{6.0}\right)$

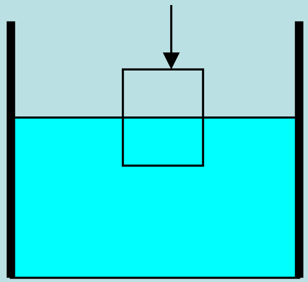
需要時間：$\frac{\Delta\phi}{\omega}$

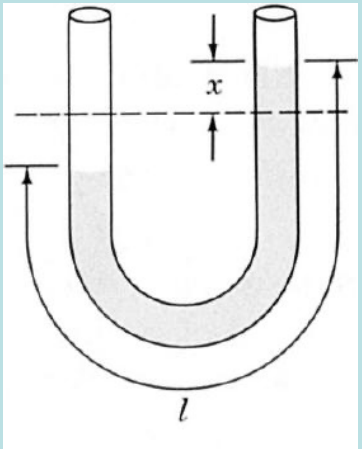
一個粒子在平衡點附近的小規模運動都是簡諧運動！

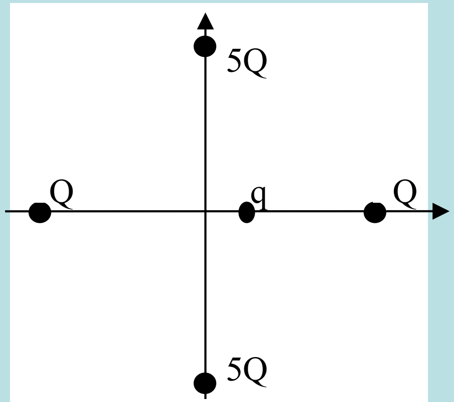
對彈簧的討論結果可以適用所有在平衡點附近的小規模運動。

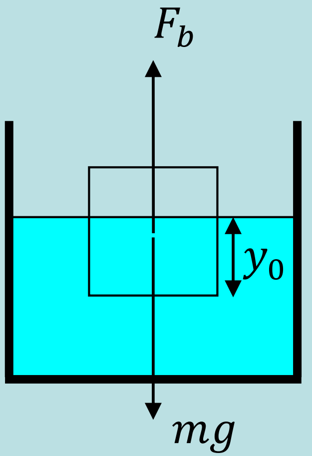


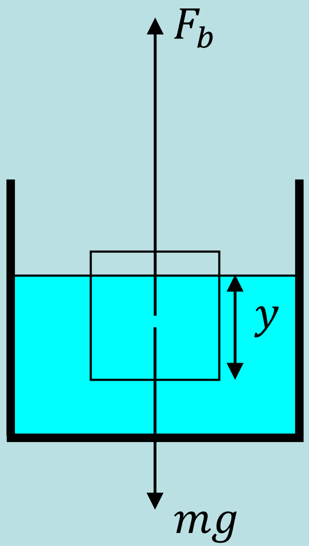












$$\rho A y_0 g = mg$$

$$F = -\rho A y g + mg = -\rho A g(y - y_0)$$

$$F = -\rho A g \cdot \Delta y = -k \cdot \Delta y$$

$$k = \rho A g$$

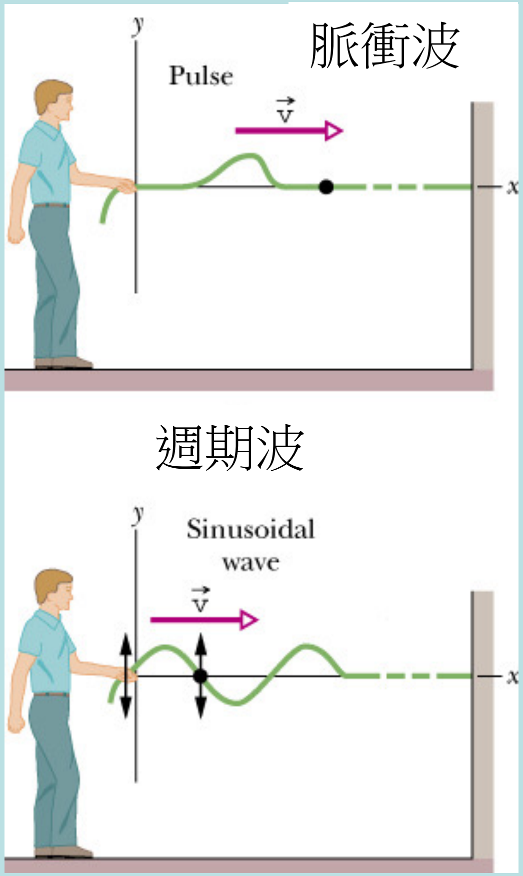
力與距平衡點的位移成正比，即簡諧運動！

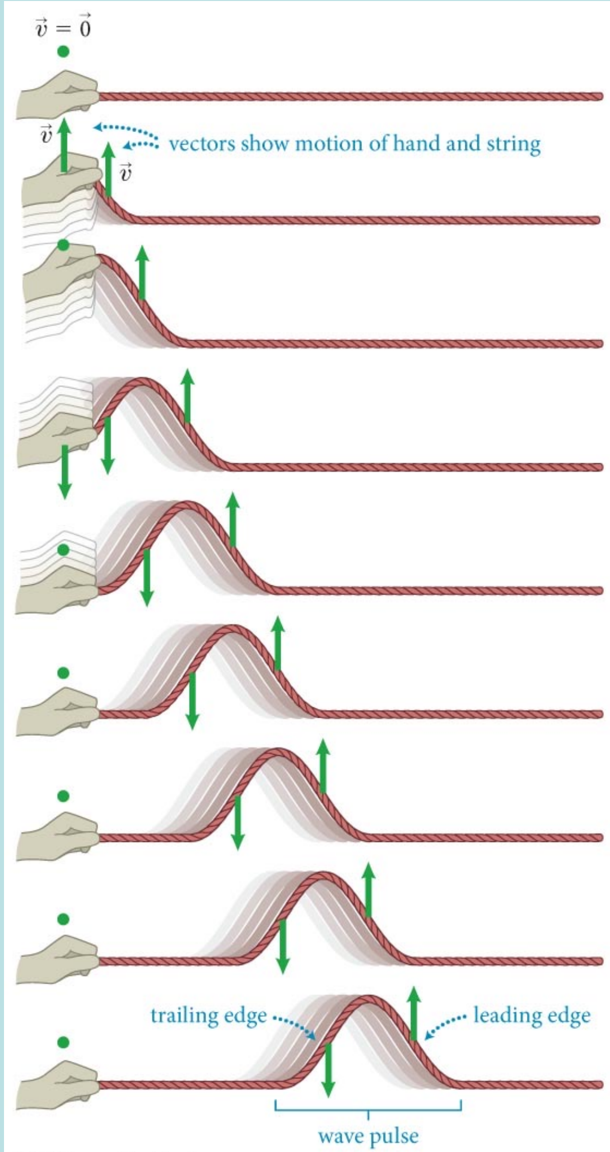
對彈簧的討論結果就可以直接適用。

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho A g}}$$

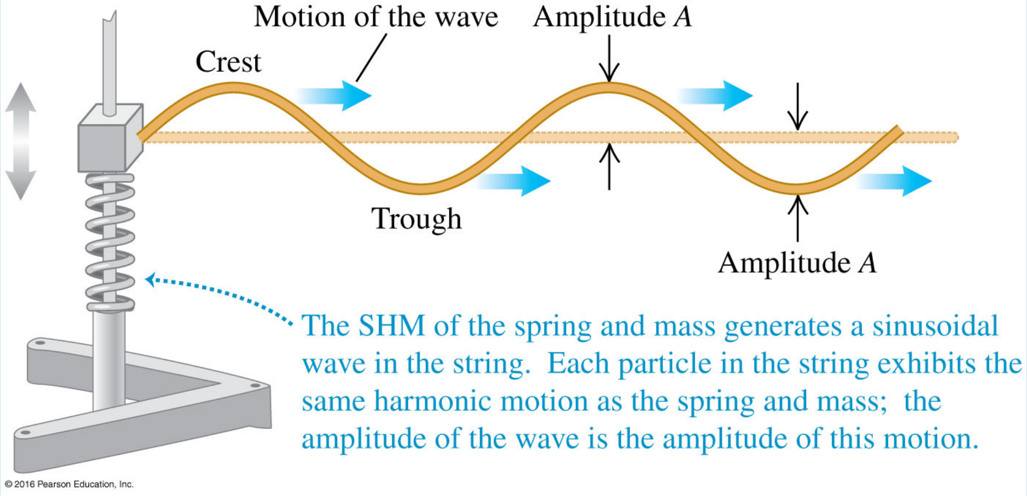
$$y = y_0 + y_m \cos\left(\sqrt{\frac{\rho A g}{m}}\,t\right)$$

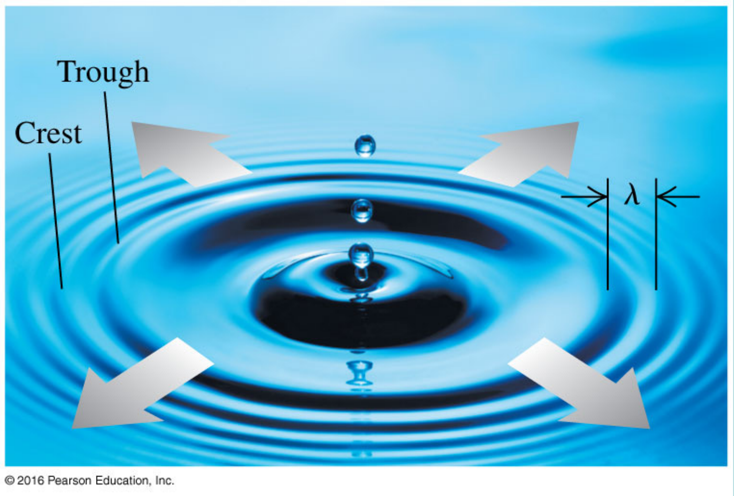
波動：介質離開平衡狀態的小範圍擾動在空間中的傳播。



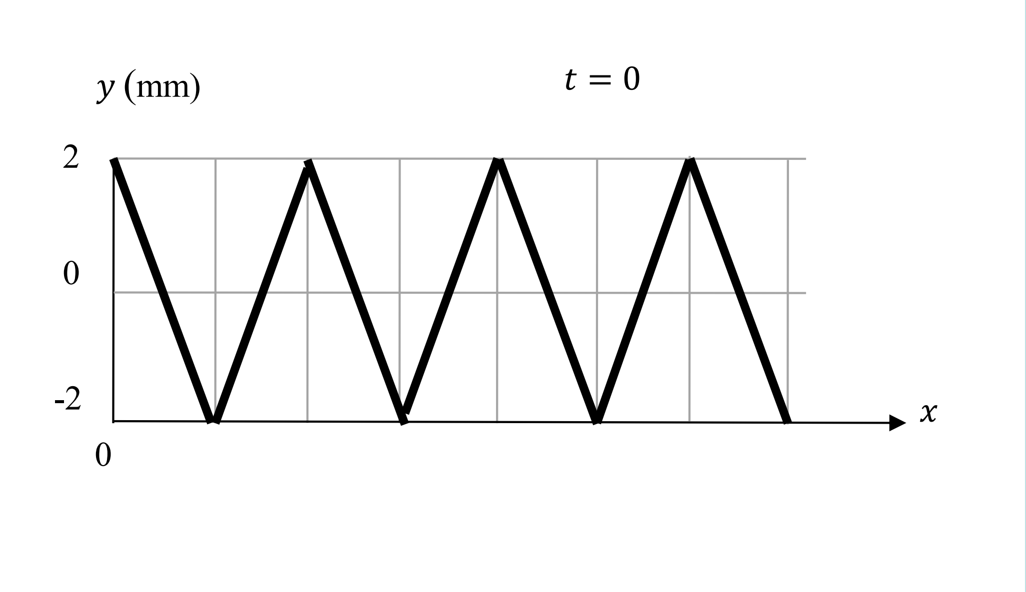


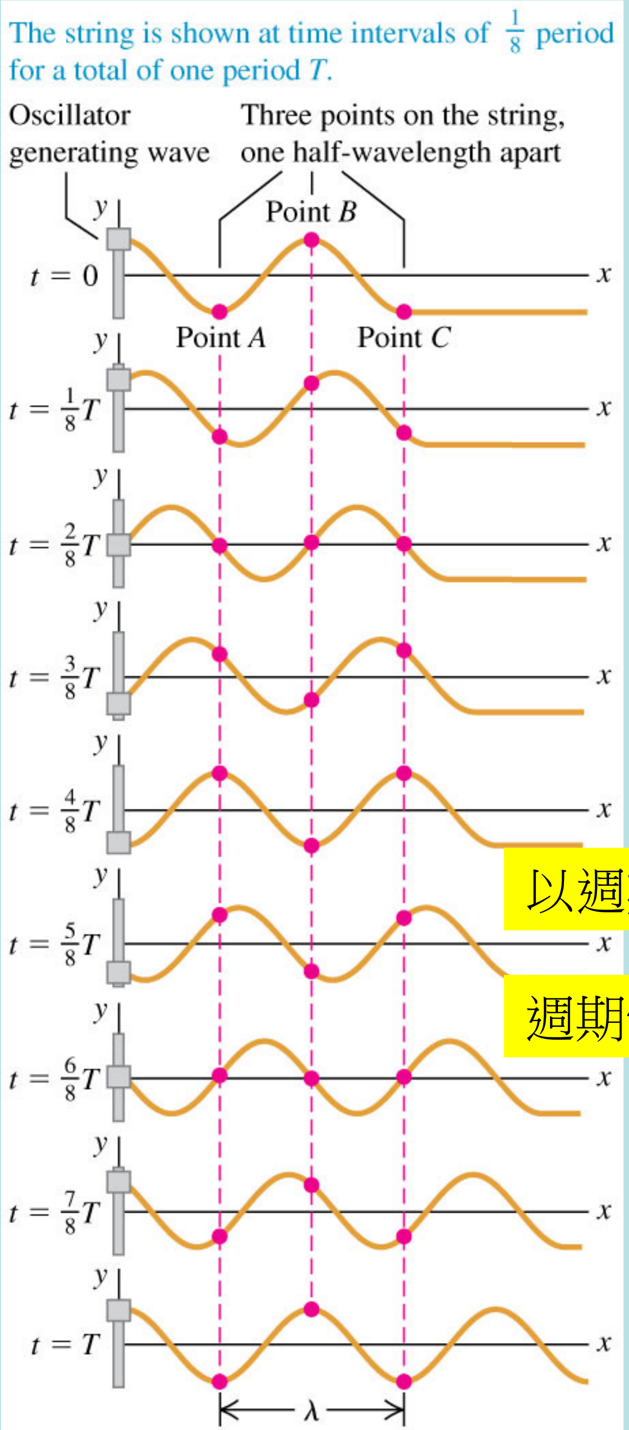
週期波有波峰與波谷，兩個波峰間的距離稱為波長。





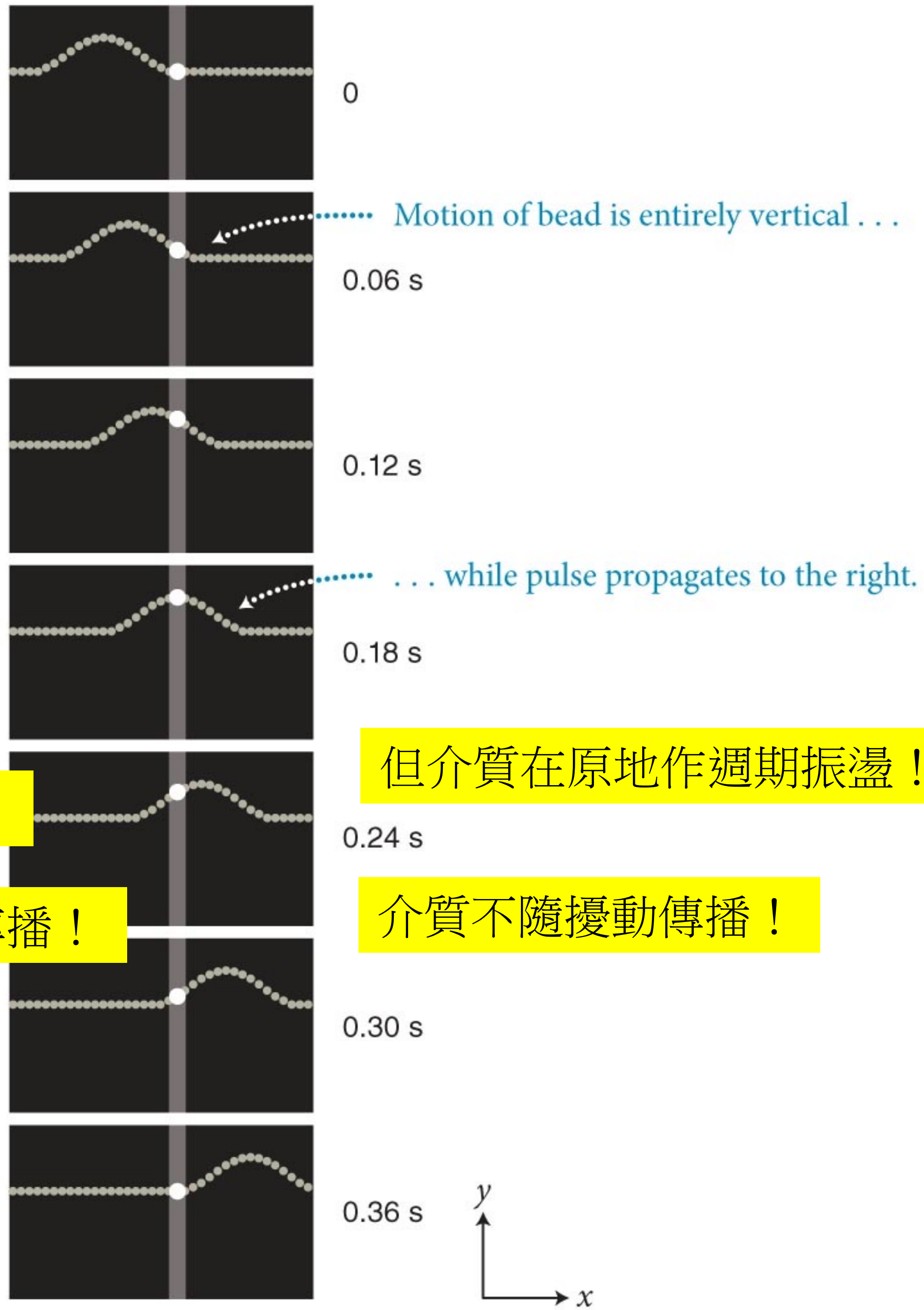
正弦波是最典型最有用的週期波，但也可以是其他形狀，也可定義波長。





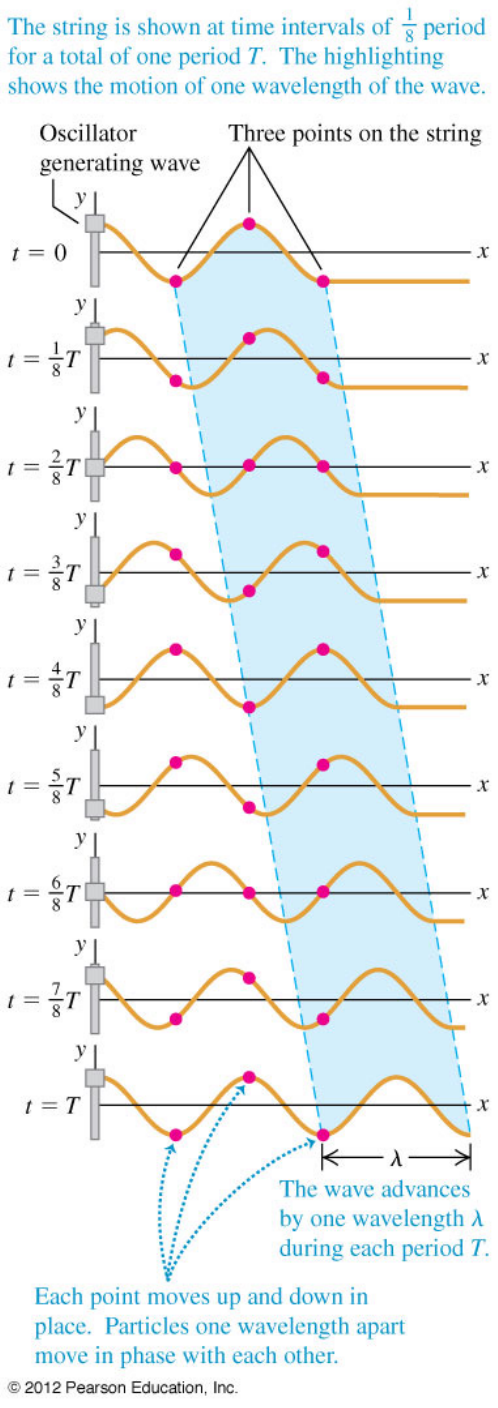
以週期波為例。

週期性擾動會傳播！



但介質在原地作週期振盪！

介質不隨擾動傳播！

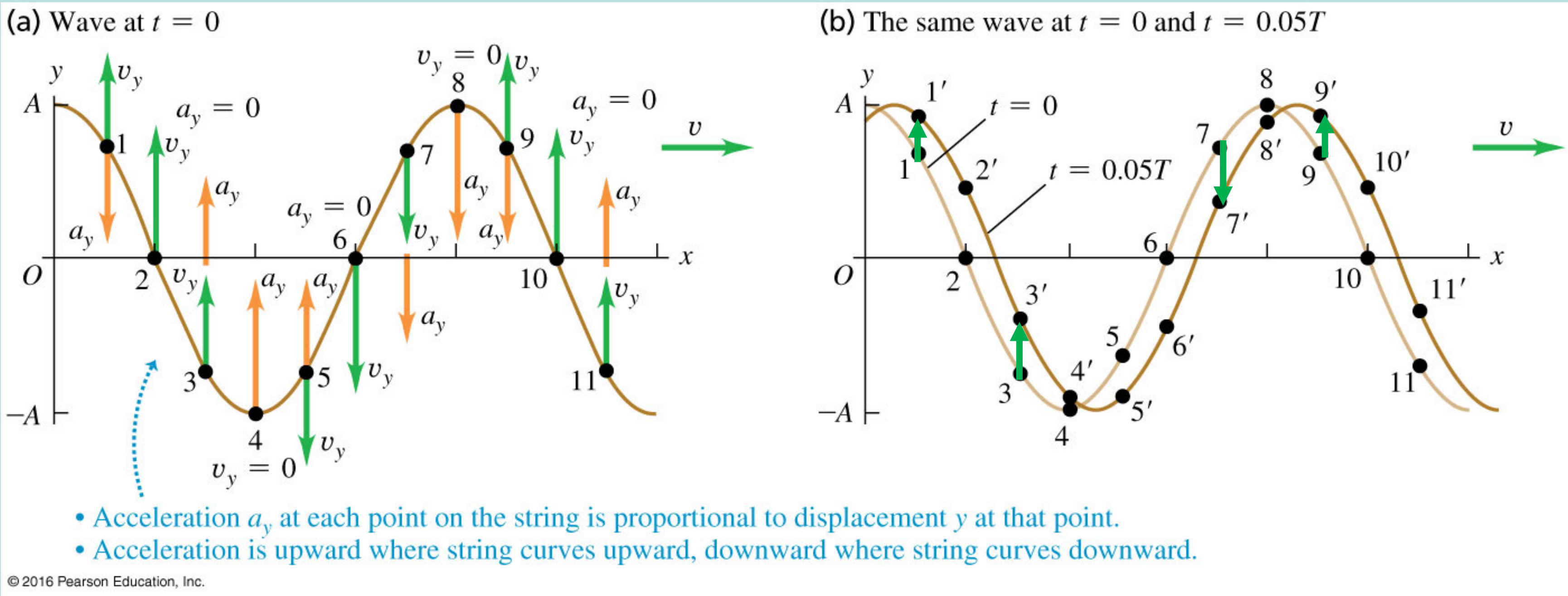


波擾動每一瞬間有一波型。

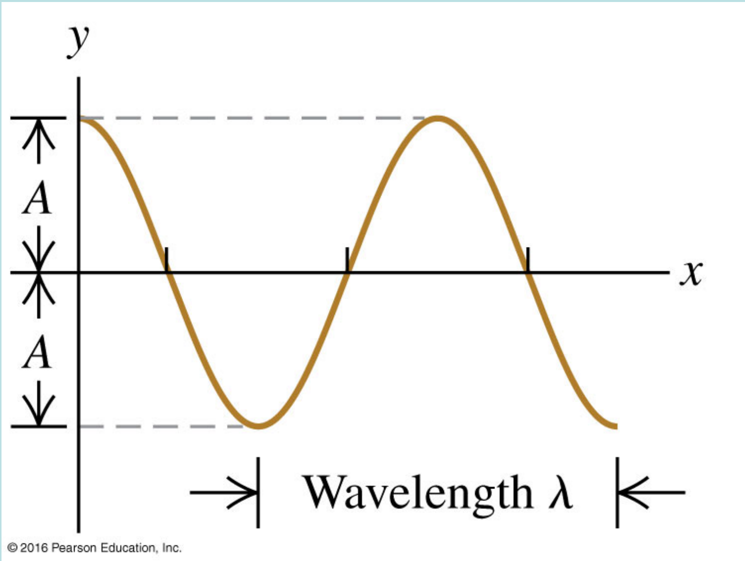
波擾動的波型以定速v在空間中傳播！v稱為波速。

波型本身是不變的。

如此你可以看出弦上各個段落的運動速度，與加速度。



若是正弦波，我們還可以有更多資訊！



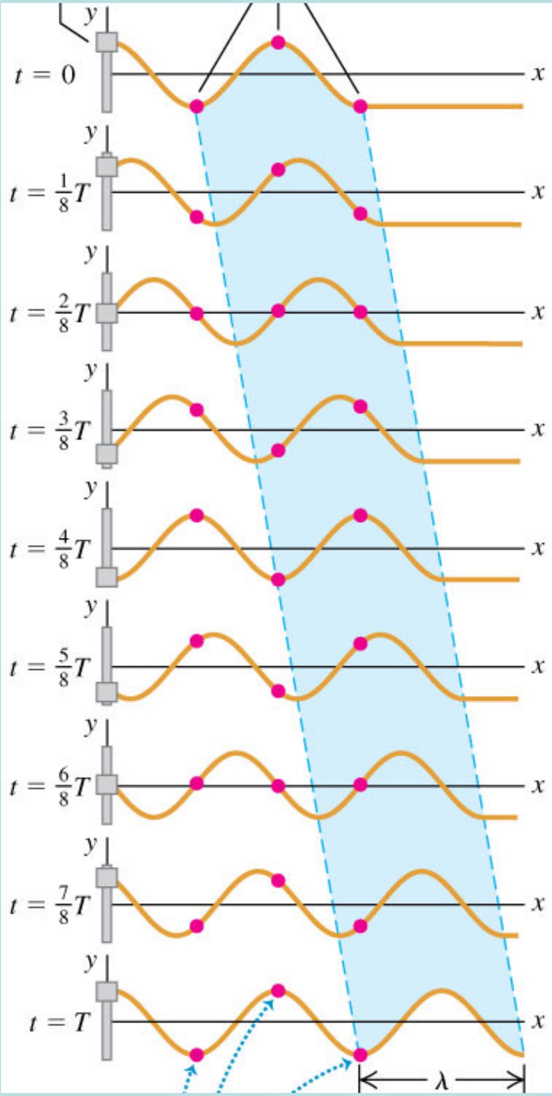
瞬間波型是正弦週期函數，有一個波長λ，波型在位置增加λ後會重覆！

$$y(x) = y_m \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right)$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x'\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x' + \frac{2\pi}{\lambda} \lambda\right)$$

定義角波數k $$k \equiv \frac{2\pi}{\lambda}$$ 每單位長度x的變化造成的相角變化！

$$y(x) = y_m \sin(kx + \phi)$$



弦上每一個弦段運動都如簡諧運動：

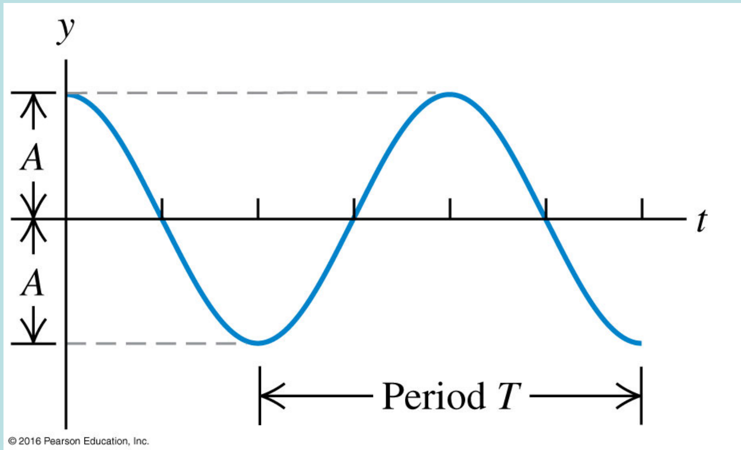
$$y(t) = y_m \cos(\omega t + \phi)$$

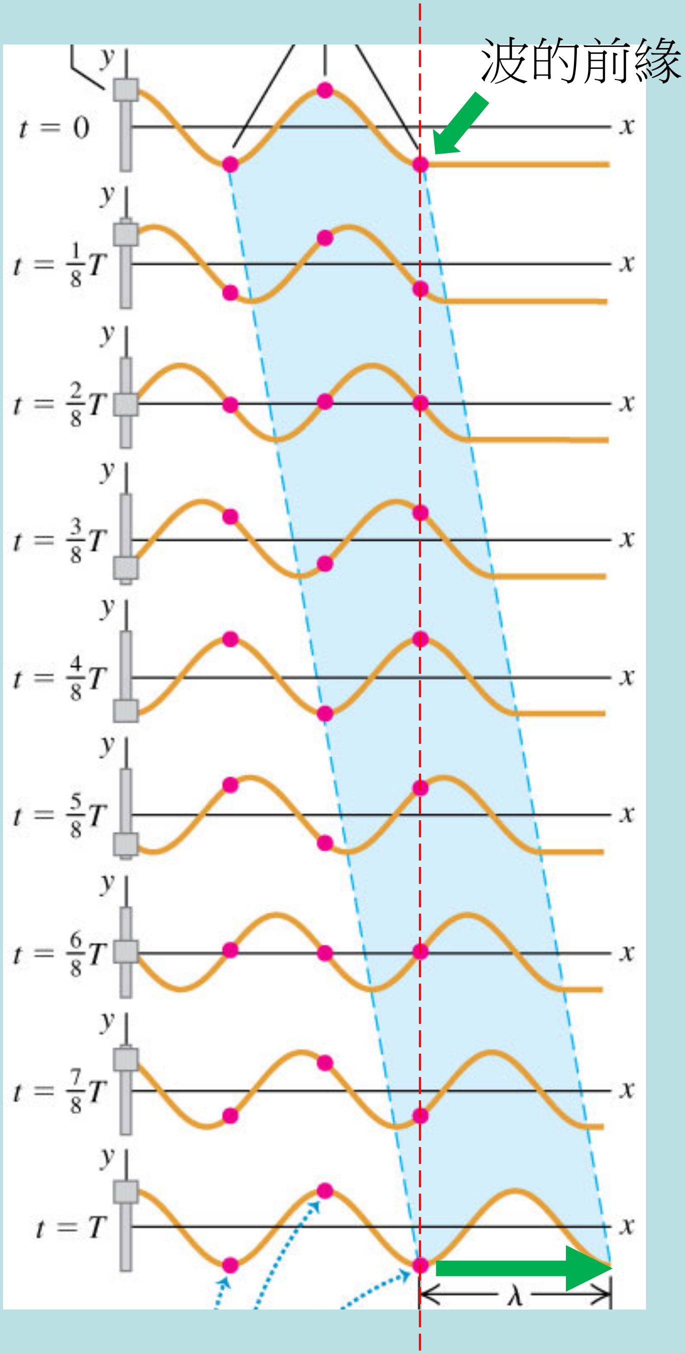
$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \qquad f = \frac{1}{T}$$

角頻率ω：每單位時間t造成的相角變化！

弦上每一個弦段的角頻率ω都一樣！

頻率 $f\,(\mathrm{s^{-1}}: \mathrm{Hz})$ ：每單位時間的振動次數。





經過一個週期T後，圖中紅點回到原來y位置。

可見在這段一個週期T的時間內，

波型在空間中移動了一個波長λ！因此：

$$\lambda = vT$$

$$v = \frac{\lambda}{T} = f\lambda = \frac{\omega}{k}$$

色散關係　頻率與波長不是獨立的

正弦波的波函數可以被完整寫下：

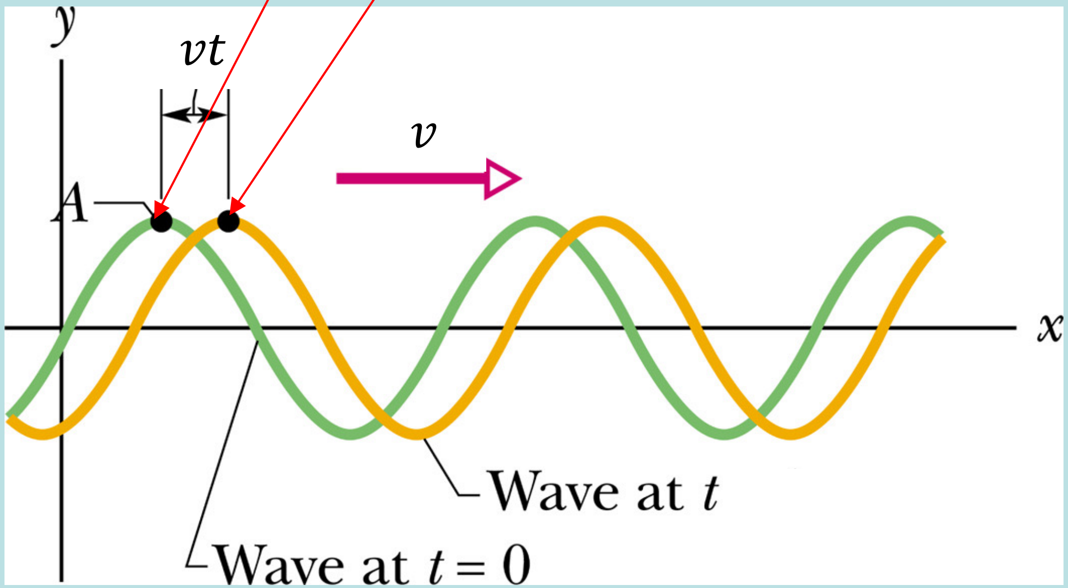
已知時間為零時的波型向右平移vt，即時間t時的波型。

弦上位置為x一段弦在時間t時的垂直位置，

等於時間為零時位置在$x - vt$的弦的垂直位置

$$y(x,t) = y(x - vt, 0) = y_m \sin(kx - kvt + \phi)$$

$$y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t + \phi)$$



熱平衡時兩個物體應該冷熱相當！若溫度是冷熱公共的標準，那麼：

兩物體熱平衡時，溫度應該相等。

兩物體溫度相等時，即達熱平衡。

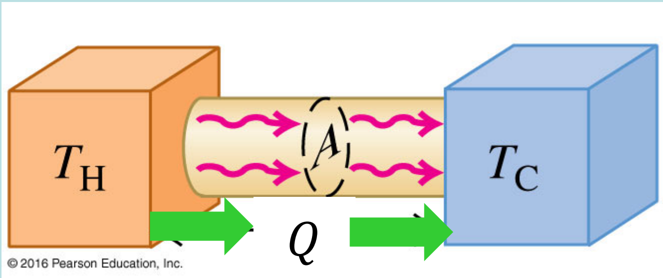
這稱為：熱力學第零定律！

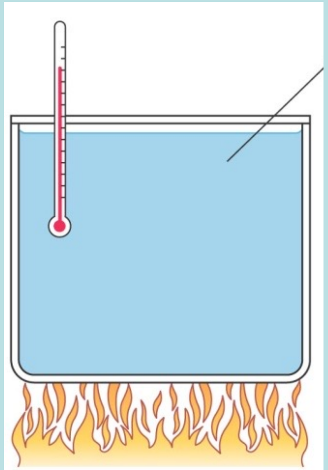
$\boxed{\text{熱作用會自動趨向作用的系統溫度彼此相等的狀態！}}$

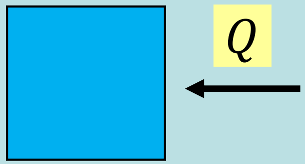
物體溫度變化時，對應吸收或放出的要素，就稱熱量 Heat。

在熱交互作用時，交換的熱量是守恆的。

吸收或放出熱量 Q 溫度變化 ΔT







$Q \propto \Delta T$

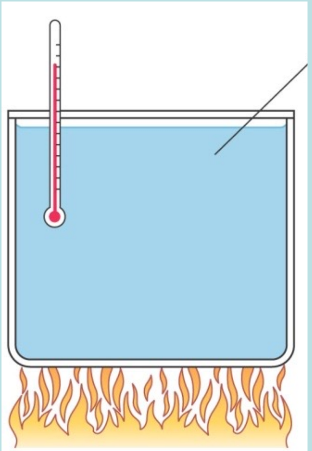
系統吸收的熱量Q與造成的系統溫度變化ΔT，通常成正比。

$$Q = C\Delta T = mc\Delta T$$

熱容量，與系統大小有關。比熱，只由材質決定，與大小無關。

若Q為負值，物體放出熱量，溫度變化ΔT亦為負。

熱量守恆與物質守恆類似，因此早期認為熱量是一種物質。



溫度變化對應的是物體的內在能量變化！

因此每一個溫度必定對應一個內在能量！

Internal Energy 內能是溫度的函數。

狀態 $E_{\text{int}}(T)$

L, T

稱為熱力學第一定律

熱量就是在熱交互作用中傳遞的一種能量！熱量守恆原來就是能量守恆。

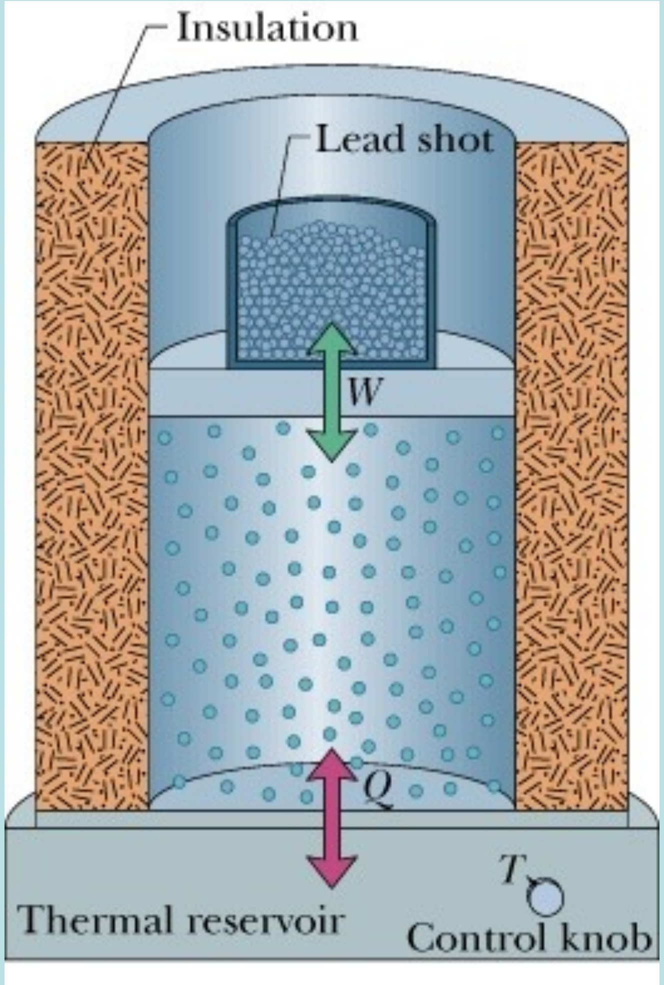
熱量交換造成內能變化，內能與溫度相關，因此就產生溫度變化。

$\Delta E_{\text{int}} = Q$ 對於固體，已知：$Q = mc\Delta T$

ΔE_{int}正比於ΔT，內能是溫度的線性函數！

$$\Delta E_{\text{int}} = mc\Delta T$$

$$E_{\text{int}}(T) = mc(T - T_0) + E_{\text{int}}(T_0)$$



氣體可與外界同時有熱交互作用及力學交互作用。

可同時交換熱量並作功

如圖上方有可調壓力活塞的引擎 Engine，就是理想且有用的討論情境！

定溫熱庫 Thermal Reservoir，使熱量交換在定溫下進行！

氣體需要兩個物理量來描述標定它的狀態。

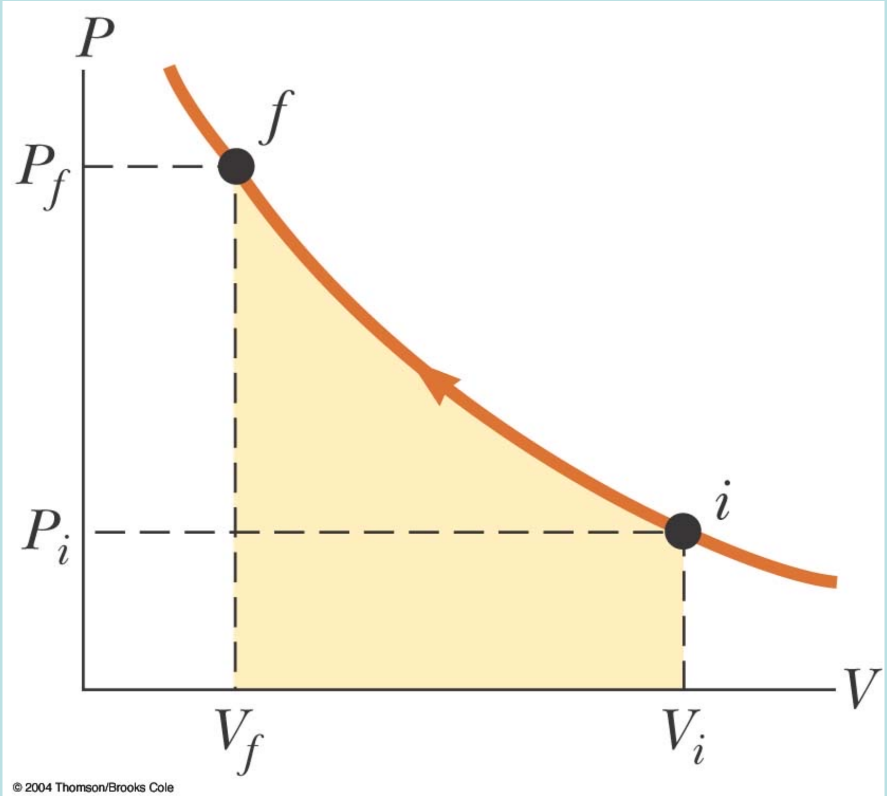
氣體有兩個熱座標

若選擇壓力 P 和體積 V 作為熱座標：

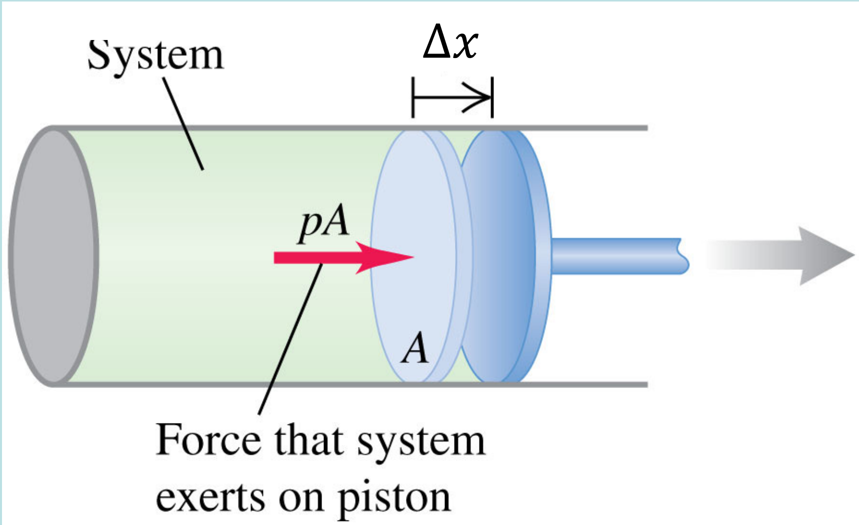
一個 PV 圖上的點代表一個狀態。

一個過程對應一條路徑。

右圖即為理想氣體的定溫過程。



在 PV 圖上計算氣體對外所作的功W：

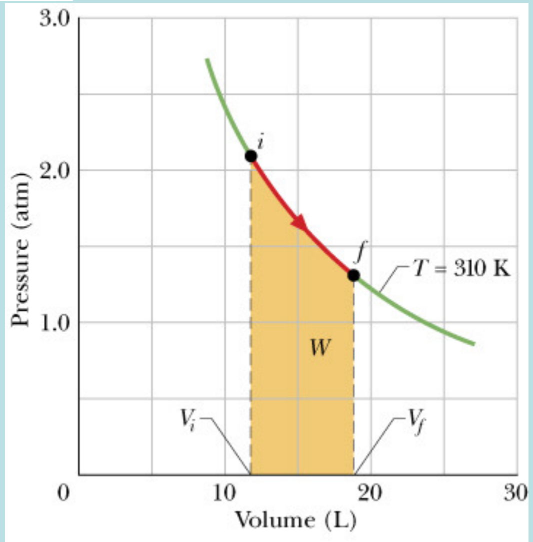


在無限小過程，氣體對外所作的功：

$$W = P\Delta V = PA\Delta x = P\Delta V$$

有限的過程是無限多段、無限小過程的和：

$$W = \int_{V_i}^{V_f} P(V)\cdot dV \quad \Delta V \xrightarrow[\substack{\Delta V\to 0\\ N\to\infty}]{\lim} \int_{V_i}^{V_f} P(V)\cdot dV$$



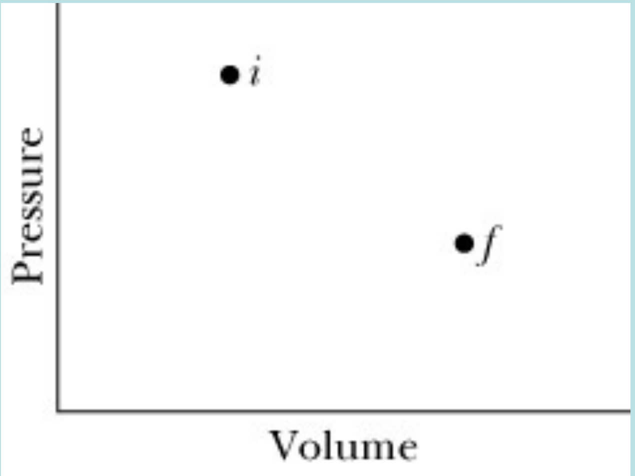
氣體所作的功即為壓力函數對體積的積分！

一個過程所作的功即該過程所對應的路徑下所包圍的面積。

氣體的熱力學第零定律

兩個熱座標決定狀態，一個狀態只有一個溫度

T 溫度 ⟵ 狀態 ⟷ 熱座標 (P,V)



每一個點必定有一個確定的、特定的溫度！

兩個熱座標的組合(P,V)對應一溫度。 $(P,V) \rightarrow T$

因此溫度T是壓力與體積的函數。

$T = f(P,V)$ 狀態方程式 Equation of State

溫度函數控制了氣體與其他系統的熱平衡關係！

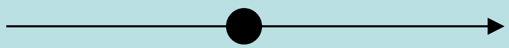
狀態方程式　Equation of State

$$T = f(P, V)$$

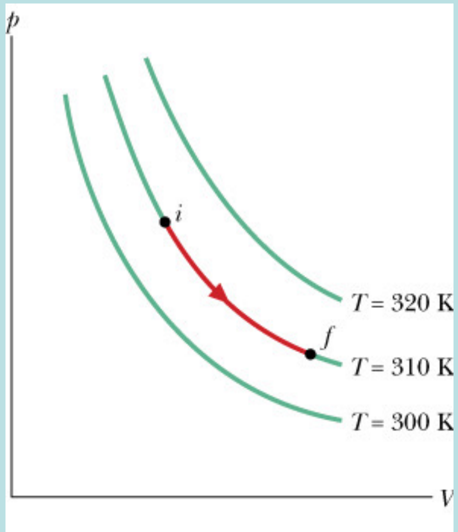
$$PV = nRT$$　　理想氣體

$$\left(P + \frac{an^2}{V}\right)(V - nb) = nRT$$　　Van der Waals 氣體

定溫狀態



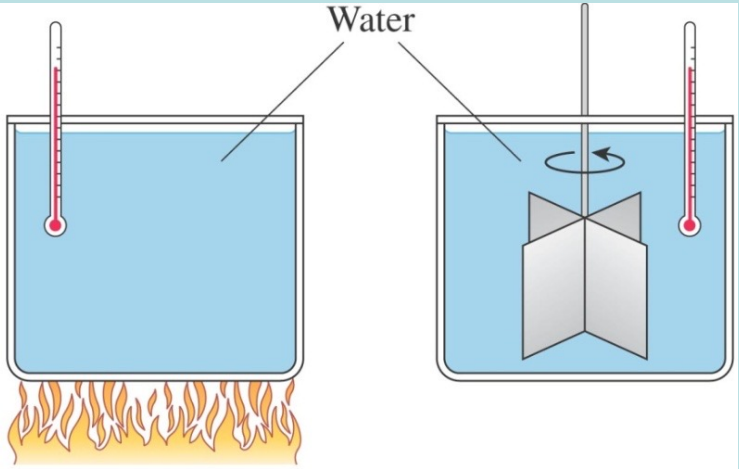
L, T



固體的定溫狀態就一個點，沒有可以變化的！

氣體的定溫狀態形成一條一條的等溫線！
壓力與體積可以連動變化的！

固體的熱力學第一定律



$$Q = \Delta E_{\text{int}}$$

在熱過程中，系統進行熱量交換，熱量的進出造成內能的變化。

每一個狀態只有一個內能！內能是溫度的函數。

T 溫度 $\longleftrightarrow$ E_{int} 內能

狀態

L, T

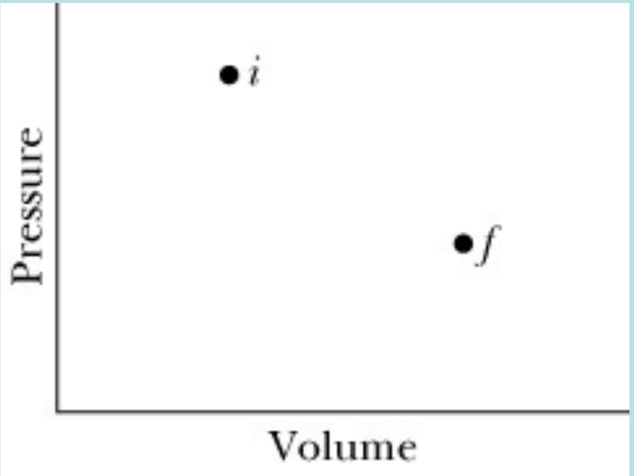
$$E_{\text{int}}(T)$$

因此在熱過程中，熱量交換會造成溫度的變化。

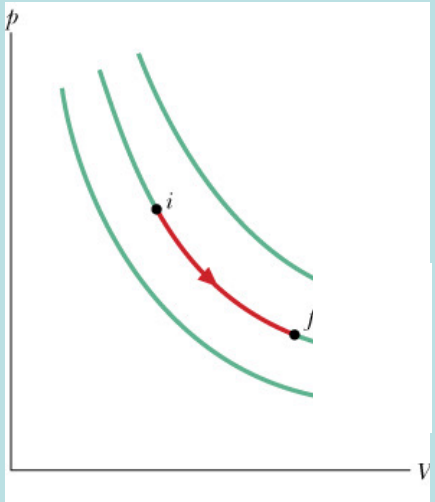
氣體的熱力學第一定律

兩個熱座標決定狀態，一個狀態必定只有一個確定的、特定的內能值！

E_{int} 內能 ⟵ 狀態 ⟷ 熱座標 (P, V)



每一個點必定有一個確定的、特定的內能！



$(P, V) \rightarrow E_{\text{int}}$ 兩個熱座標的組合(P, V)對應一內能。

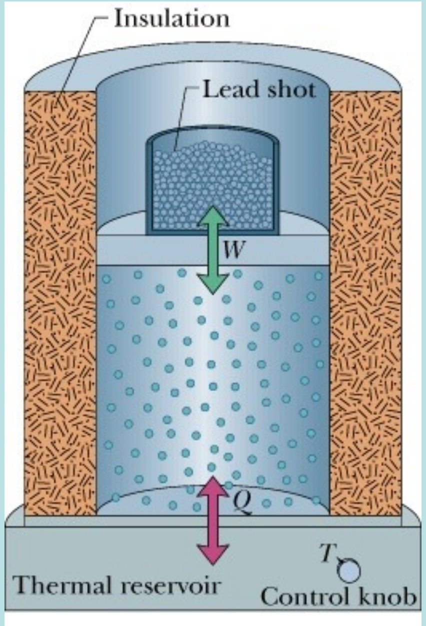
内能為壓力與體積的一個函數。 $E_{\text{int}} = g(P, V)$

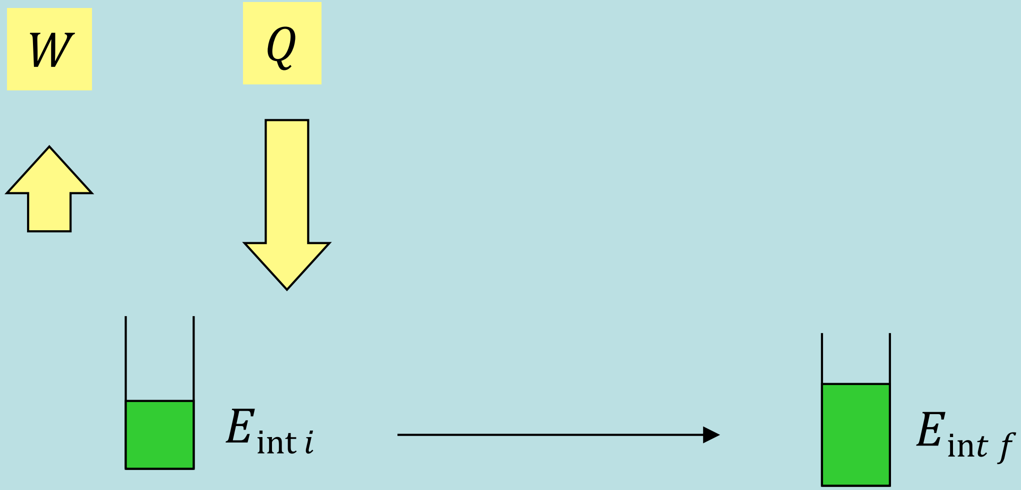
內能函數控制了氣體在達到熱平衡的過程中的熱量交換！

(P, V)圖上可以畫出等內能線。

氣體與固體($Q = \Delta E_{\text{int}}$)不同：

熱與功都會造成內能的變化！兩者本質相同，可以加總！





$$\Delta E_{\text{int}} = Q - W$$

氣體的熱力學第一定律

在熱過程中，系統進行的熱量交換，及所作的功，造成內能的變化。

吸熱後如果有作等值的功，內能不會變，溫度就可能不變。

W可以表示為PdV，此式可以以微分形式表示為：

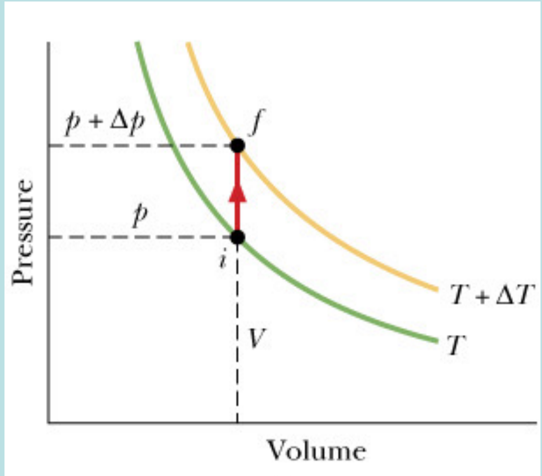
$$dE_{\text{int}} = đQ - PdV$$

注意$đQ$如同$đW = PdV$，並不是一個狀態物理量函數的差，只是微小熱量交換！

定容過程的熱交換：

$$Q = \Delta E_{\text{int}}$$

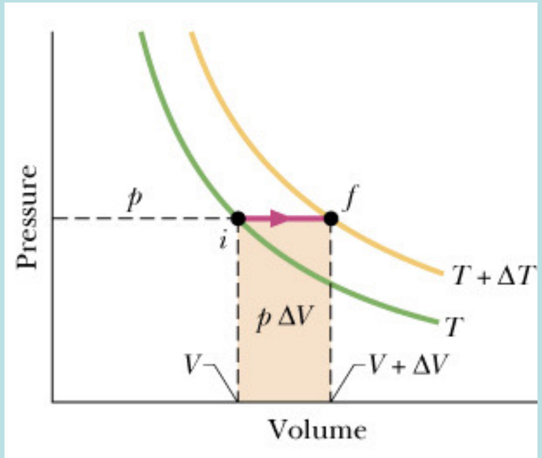
定容的熱交換即是內能差！



定壓過程的熱交換：

$$Q = \Delta(E_{\text{int}} + PV) \equiv \Delta H$$

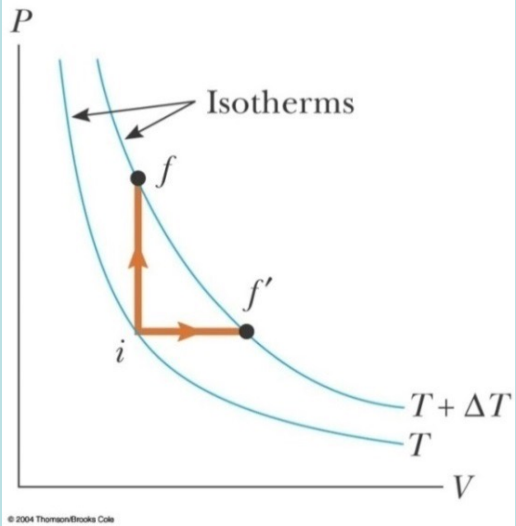
定壓的熱交換即是焓差！



氣體也可以定義莫耳比熱 c。

單位莫耳數氣體，單位溫度變化對應的熱量。

$$Q = nc\Delta T$$



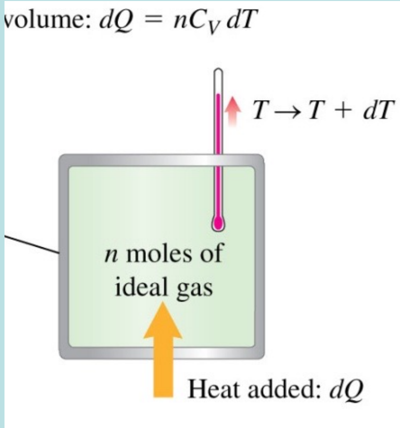
但比熱與路徑有關。同樣溫度變化對應不同熱量。

有兩個比熱特別有用。

定容過程

定容比熱 c_V $Q = nc_V\Delta T$

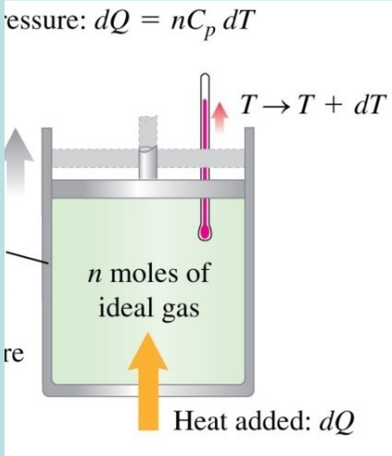
每莫耳氣體，經定容過程，每單位溫度增加所吸收的熱量。



定壓過程

定壓比熱 c_P $Q = nc_P\Delta T$

每莫耳氣體，經定壓過程，每單位溫度增加所吸收的熱量。



對於理想氣體：

熱力學第零定律　　熱力學第一定律

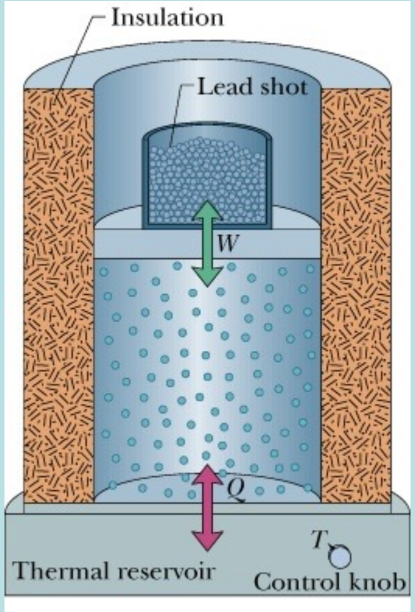
$$T = \frac{PV}{nR}$$

$$E_{\text{int}} = \frac{3}{2}nRT, \frac{5}{2}nRT, 3nRT$$

$$E_{\text{int}} = nc_V T$$

利用這兩個式子，即能判斷氣體與外界是否達到熱平衡，

以及計算在達到熱平衡的熱過程中進行的、見不到的熱量交換Q。



測量得到定容比熱c_V是一個常數，與溫度無關。

Type of Gas	Gas	C_V (J/mol · K)
Monatomic	He	12.47
	Ar	12.47
Diatomic	H_2	20.42
	N_2	20.76
	O_2	20.85
	CO	20.85
Polyatomic	CO_2	28.46
	SO_2	31.39
	H_2S	25.95

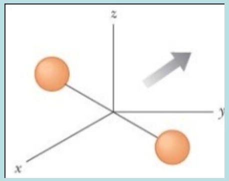
$R \sim 8.31\ \mathrm{J/mol \cdot K}$

單原子分子組成的理想氣體

$$c_V = \frac{3}{2}R$$

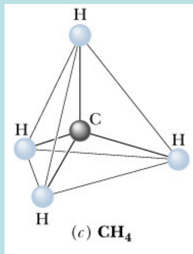
雙原子分子組成的理想氣體

$$c_V = \frac{5}{2}R$$



多原子分子組成的理想氣體

$$c_V = 3R$$



預測一：計算定壓過程的吸放熱，得出定壓比熱。

在定壓下，熱等於焓差。

$$Q = \Delta H = \Delta(E_{\text{int}} + PV) = \Delta(nc_V T + nRT) = n(c_V + R)\Delta T$$

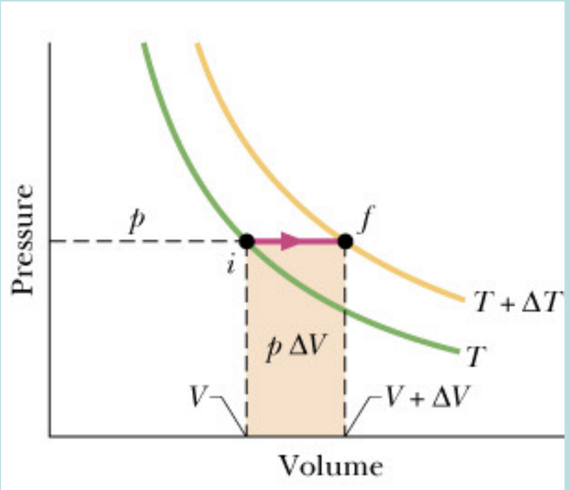
或：

$$Q = \Delta E_{\text{int}} + P\Delta V = nc_V\Delta T + \Delta(PV) = nc_V\Delta T + \Delta(nRT) = n(c_V + R)\Delta T$$

根據定義

$$Q = nc_P\Delta T$$

因此 $c_P = c_V + R$



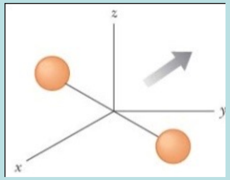
$$c_P = c_V + R$$

單原子分子組成的理想氣體

$$c_V = \frac{3}{2}R \qquad c_P = \frac{5}{2}R$$

雙原子分子組成的理想氣體

$$c_V = \frac{5}{2}R \qquad c_P = \frac{7}{2}R$$



多原子分子組成的理想氣體

$$c_V = 3R \qquad c_P = 4R$$

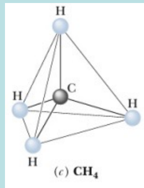


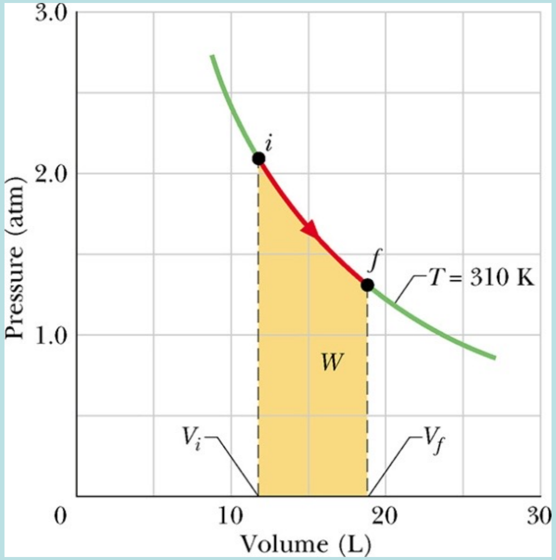
Table 19.1 Molar Heat Capacities of Gases at Low Pressure

Type of Gas	Gas	C_V (J/mol · K)	C_p (J/mol · K)	$C_p - C_V$ (J/mol · K)	$\gamma = C_p/C_V$
Monatomic	He	12.47	20.78	8.31	1.67
	Ar	12.47	20.78	8.31	1.67
Diatomic	H_2	20.42	28.74	8.32	1.41
	N_2	20.76	29.07	8.31	1.40
	O_2	20.85	29.17	8.31	1.40
	CO	20.85	29.16	8.31	1.40
Polyatomic	CO_2	28.46	36.94	8.48	1.30
	SO_2	31.39	40.37	8.98	1.29
	H_2S	25.95	34.60	8.65	1.33

預測二：定溫過程的吸放熱

T 是常數 $\quad PV = nRT = \text{常數}$

$\Delta E_{\text{int}} = nc_V \Delta T = 0$ 內能不變



$$Q = W = \int_{V_i}^{V_f} P(V) \cdot dV = \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V} dV = nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{1}{V} dV$$

$$= nRT\,(\ln V)\Big|_{V_i}^{V_f} = nRT\left(\ln V_f - \ln V_i\right) = nRT \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

$$Q = nRT \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

和固體液體非常不同，氣體溫度不變時亦可吸熱而不相變，

所吸收熱量轉化為對外界做功。

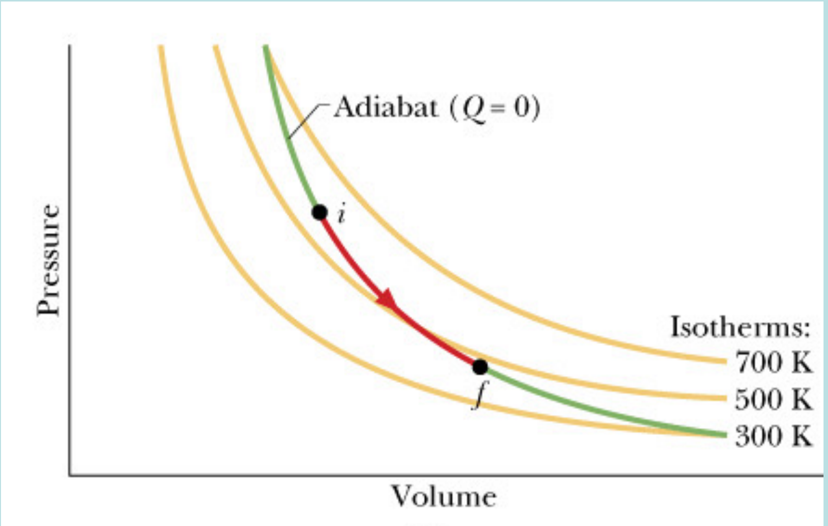
絕熱曲線

在絕熱過程中：

PV^{γ}是一個常數

$P \sim V^{-\gamma}$

$\gamma > 1$



當體積增加時，壓力的下降 $P \sim V^{-\gamma}$ 要比定溫過程 $P \sim V^{-1}$ 要來得快！

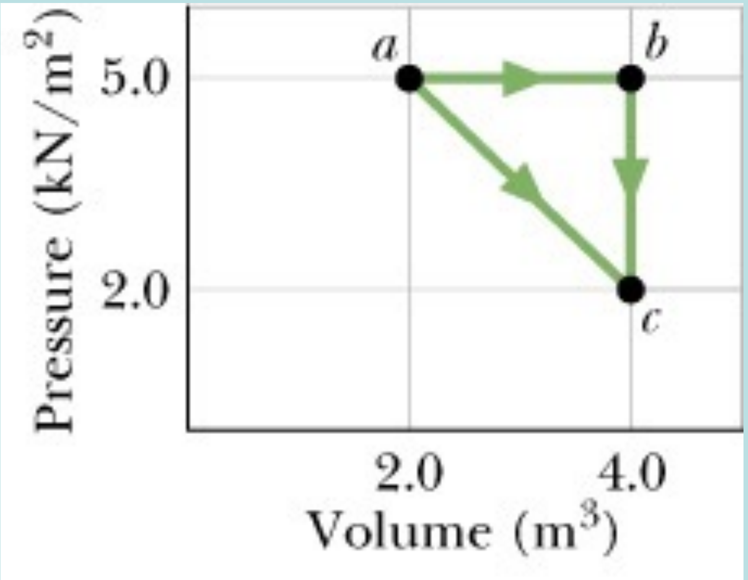
絕熱膨脹時，溫度下降，(膨脹對外作功，故內能下降)。

絕熱壓縮，溫度上升。

$$P_f V_f \cdot V_f^{\gamma-1} = P_i V_i \cdot V_i^{\gamma-1}$$

$$T_f V_f^{\gamma-1} = T_i V_i^{\gamma-1}$$

一莫耳理想氣體：雙原子分子組成



計算$Q_{\mathrm{ab}}, Q_{\mathrm{bc}}$。

由各個狀態的壓力與體積即可算出其溫度 $T = \dfrac{PV}{nR}$

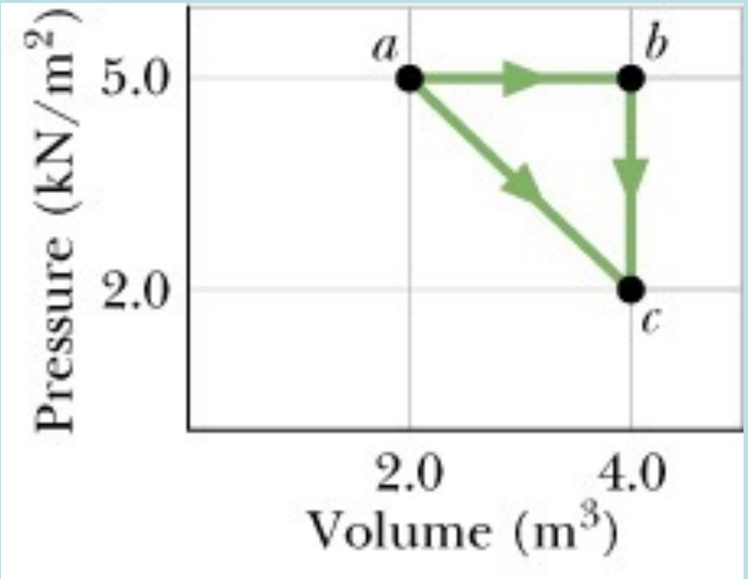
$$T_a = \frac{5000\times2}{1\times R} = 1203\mathrm{K} \qquad T_c = \frac{2000\times4}{1\times R} = 962\mathrm{K} \qquad T_b = \frac{5000\times4}{1\times R} = 2406\mathrm{K}$$

$a \to b$是定壓過程：熱量由定壓比熱算，內能差由定容比熱算！

$$Q_{\mathrm{ab}} = nc_P\Delta T = \frac{7}{2}nR\Delta T = \frac{7}{2}\times8.31\times1203\sim35\mathrm{KJ} \qquad \Delta E_{\mathrm{ab}} = \frac{5}{2}nR\Delta T\sim25\ \mathrm{KJ}$$

$b \to c$是定容過程：熱量、內能差都由定容比熱算。

$$Q_{\mathrm{bc}} = nc_V\Delta T = \frac{5}{2}nR\Delta T = \frac{5}{2}\times8.31\times1544\sim-30\ \mathrm{KJ} = \Delta E_{\mathrm{bc}}$$



計算Q_{ac}。

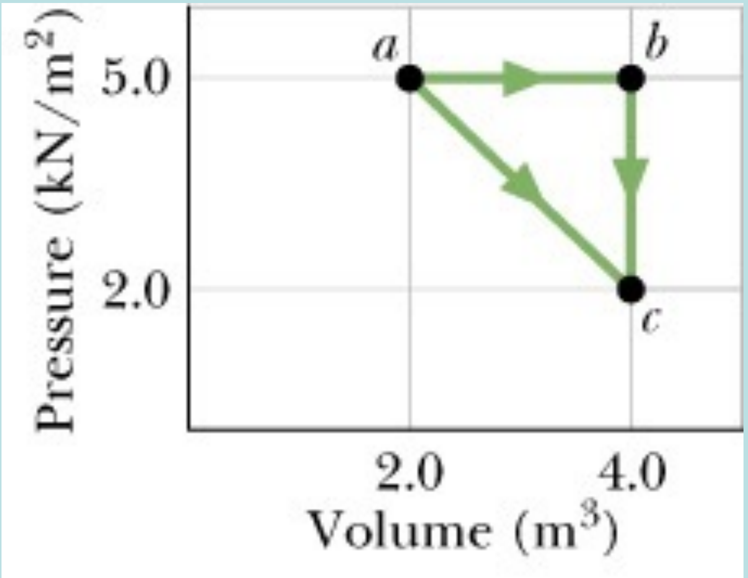
由各個狀態的壓力與體積即可算出其溫度 $T = \dfrac{PV}{nR}$

$$T_a = \frac{5000 \times 2}{R} = 1203\text{K} \qquad T_c = \frac{2000 \times 4}{R} = 962\text{K}$$

由溫度即可算出內能！ $E_{\text{int}} = nc_V T = \dfrac{5}{2} nRT$ $\Delta E_{\text{ac}} = \dfrac{5}{2} nR\Delta T \approx -5000\text{J}$

$$Q_{\text{ac}} = \Delta E_{\text{ac}} + W_{\text{ac}} = -5000 + \underbrace{\frac{5000 + 2000}{2} \times 2}_{\text{梯形面積}} = 2000\text{J}$$

計算一個$a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$循環後氣體所作的功$W$。



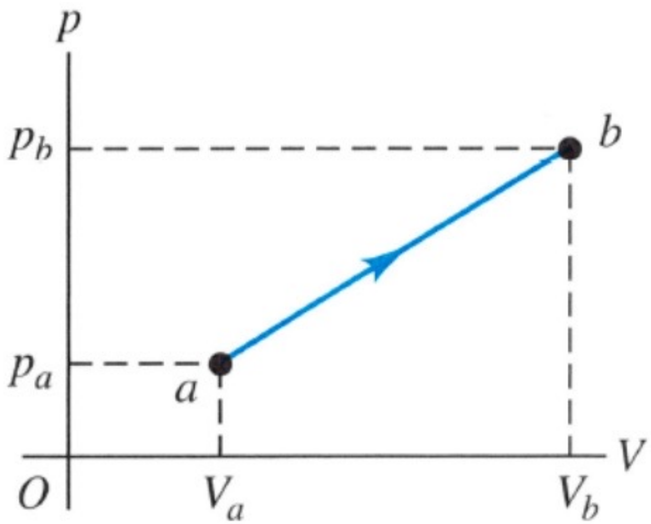
$$W = 三角形面積 = (5000 - 2000) \times 2 \times 0.5 = 3000\text{J}$$

另一算法：

$$Q = \Delta E + W = W = Q_{\text{ca}} + Q_{\text{ab}} + Q_{\text{bc}} = -2000 + 35000 - 30000 = 3000\text{J}$$

此循環將熱Q變為功W，這就是一個引擎。

5. 考慮一缸 4.0 莫耳的氦氣。由狀態 a 膨脹至狀態 b，過程在 PV 圖上是一條直線，如圖所示。已知 $P_a = 1.00\times10^5\,\mathrm{Pa}$，$V_a = 0.10\,\mathrm{m}^3$，$P_b = 1.50\times10^5\,\mathrm{Pa}$，$V_b = 0.15\,\mathrm{m}^3$。

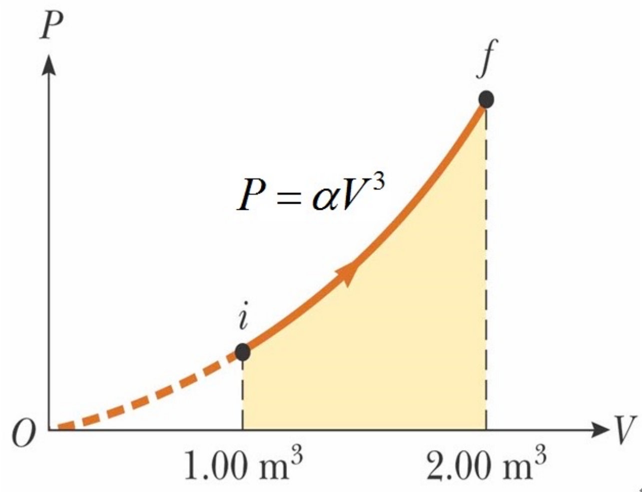


A. 計算此氣體前後的溫度 T_a, T_b 分別是多少 K。(10)

B. 在這個過程中，氣體對外所作的功是多少 J？(10)

C. 在這個過程中，氣體的內能變化是多少 J？吸熱（或放熱）是多少 J？(5)

3. 考慮一缸一莫耳的氦氣，從原來體積 1.00m^3，擴張為原來體積的兩倍，在此過程中壓力與體積維持以下的關係：$P = \alpha V^3$，其中 $\alpha = 1010$ Pa/m^9。



A. 問起始態以及末態的氦氣溫度各是多少？在此過程中內能增加多少？(8)

B. 在此過程中，外界對氣體做功多少？(7)

C. 在此過程中，氣體吸熱或放熱多少？(5)

解答：

A. $P_i = \alpha V_i^3 = 1.01 \times 10^3$ Pa，$T_i = \dfrac{P_i V_i}{nR} = 121.5$ K。$T_f = 16T_i = 1944$K。$\Delta E = \dfrac{3}{2} R \Delta T = 22.7$kJ。

B. $W = \int P\,dV = \int \alpha V^3\,dV = \dfrac{\alpha}{4} V^4 \Big|_{1.00}^{2.00} = 3.79$kJ。

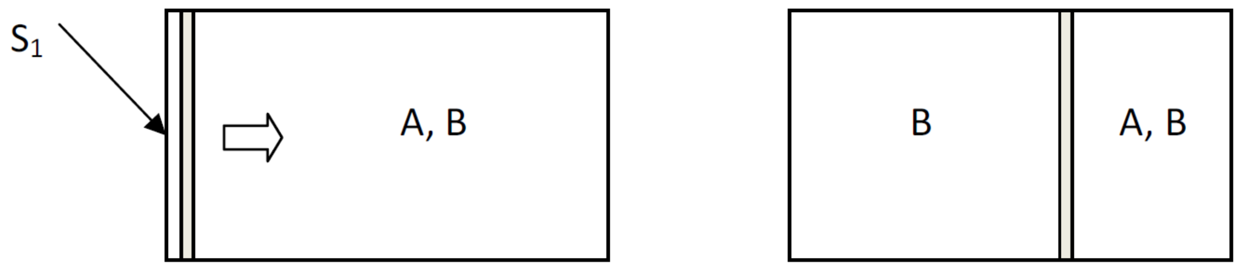
C. $Q = \Delta E + W = 22.7 + 3.79 = 26.5$kJ。

2. （熱學）考慮一長方體容器，容器中有 A,B 兩種由單原子分子組成的理想氣體，容器體積為 10.0 l。在左方垂直的長方形器壁 S_1 右邊有一相同形狀大小的半透膜，膜與器壁 S_1 之間的體積可以忽略。此膜能讓 B 氣體分子自由通過，但完全不能讓 A 氣體分子通過。已知 B 氣體的莫耳數為 1 mol，溫度為 27°C，A 氣體的莫耳數未知。

由此狀態開始，施力使半透膜緩慢向右移動（過程緩慢到每一瞬間都可視為一平衡態），直到膜左右兩邊的體積比為 2:1，此時測得半透膜上來自右氣室內氣體的壓力增加為原來的四倍。假設過程中膜不變形，與上下前後的器壁密合如同一個活塞。在過程中熱量可以進出容器。 $R = 8.31\ \mathrm{J/mol \cdot K}$ ，

$1\ \mathrm{atm} = 1.01 \times 10^5\ \mathrm{Pa}\ (\mathrm{N/m^2})$。

提示：因為半透膜能讓 B 氣體分子自由通過， B 氣體對半透膜的壓力很小，假設可以忽略。



A. 此時（右圖）A 氣體的溫度是多少 K？(4)

B. 此時左方器壁 S_1 上的壓力為多少 Pa？(4)

C. 在這過程中，B 氣體分子的總動能增加多少 J？(4)

解答：

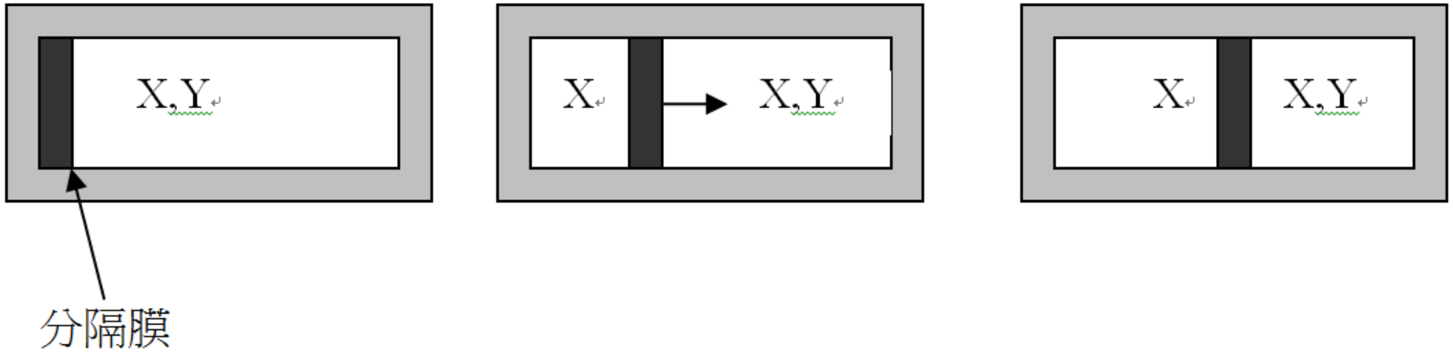
A. 在過程中 A 氣體體積變化：$\frac{V_f}{V_i}=\frac{1}{3}$，壓力變化$\frac{P_f}{P_i}=\frac{4}{1}$，溫度的前後比為：

$$\frac{T_f}{T_i}=\frac{P_fV_f}{P_iV_i}=\frac{4}{3}\text{，}T_f=300\cdot\frac{4}{3}=400\text{K}$$ 。

B. 因為 B 氣體在膜右方與 A 氣體處於熱平衡，因此所有 B 氣體也隨之增加至 400K。$P_B=\frac{nRT}{V}=\frac{1\cdot 8.31\cdot 400}{10\times 10^{-3}}=3.32\times 10^{5}\,\text{Pa}$ 。

C. $\Delta E_{\text{int}}=\frac{3}{2}nR\Delta T=\frac{3}{2}\cdot 1\cdot 8.31\cdot 100=1246.5\text{J}$ 。

4. 考慮一個容器，周圍完全隔熱，裏面充滿 X 氣體及 Y 氣體各一莫耳，兩者都是單原子分子所構成。容器內總壓力為 2.0 atm，溫度為 27˚C，(X 與 Y 氣體的分壓各是 1.0 atm)。在容器內有一可左右活動的分隔過濾半透膜，此膜 X 氣體可以自由通過，Y 氣體則完全不能通過。此膜一開始位於左方器壁上，然後實驗者施力將它慢慢向右移動，在此過程中，膜將 Y 氣體壓迫至容器右方，如圖所示，X 氣體則不受影響。最後施力使該膜固定於容器的中央，使左右兩室的體積皆為整個容器的 1/2，此時半透膜上來自右室的壓力是 2.5 atm (提示:這表示 Y 氣體的壓力是 2.5 atm，因為 X 氣體不會感覺膜的存在)。假設此過程發生夠慢，Y 氣體與 X 氣體一直處於**熱平衡狀態**。本題中所有氣體皆可視為理想氣體。



A. Y 氣體的末溫度是多少 K？半透膜右方及左方的 X 氣體的末溫度各是多少 K？ (10)

B. 氣體的總內能（X 氣體加 Y 氣體）變化是多少？實驗者對膜施力所作的功是多少？(10)

提示：注意各個氣體的莫耳數。

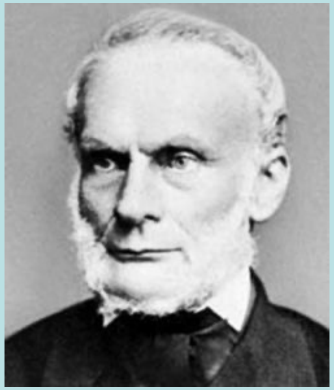
解答：根據熱力學第零定律，在左室中達成熱平衡的氣體溫度相等，而分隔膜對 X 氣體無影響，因此左右兩室的 X 氣體溫度與壓力皆相等。

A. 對 Y 氣體來說：$\frac{T_f}{P_f V_f} = \frac{T_i}{P_i V_i}$，$\frac{T_f}{2.5\times 0.5V} = \frac{300}{1.0\times V}$，因此 $T_f = 375\text{K}$。右方 X 氣體與 Y 氣體處於熱平衡，故溫度也是 375K，右方 X 氣體與左方 X 氣體液處於熱平衡，故溫度也是 375K。注意此時 X 的壓力已經改變，而不再是原來的 1.0atm。

B. $\Delta E_{\text{int}} = nc_V(T_f - T_i) = 2\frac{3}{2}R\cdot 75 = 1.87\text{kJ}$。因為隔熱：實驗者對膜施力所作的功等於內能變化1.87kJ。

克勞修斯建議有一個新的狀態性質，稱為熵：

對於一個無限小的過程，定義熵的變化為：



$$\Delta S \equiv \frac{Q}{T}$$

熵 Entropy

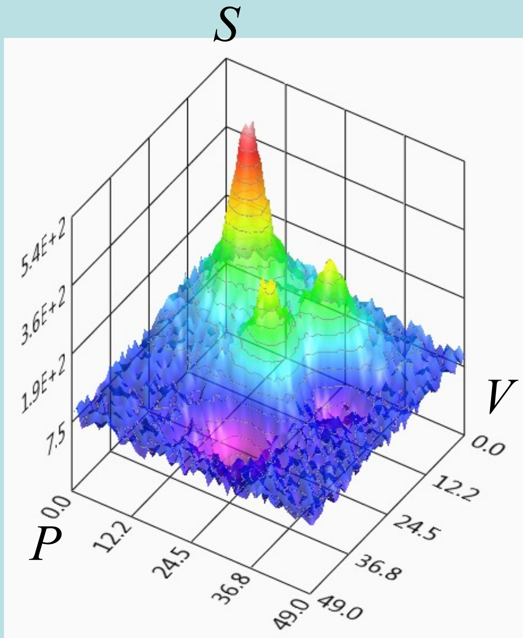
熵如同內能、溫度等，是冷熱狀態的性質，一個狀態對應一個熵值。

因此同內能、溫度也是壓力與體積等熱座標的函數！

$$S = S(P, V)$$

若是固體：

$$S = S(T)$$



這個函數一找到，如同地圖上的高度標示，對此系統，就永久可重複使用！

熵有甚麼用處？

熵是決定一個過程可逆與否的物理量！

對於包含所有參與者的孤立系統：

所有的可逆過程：

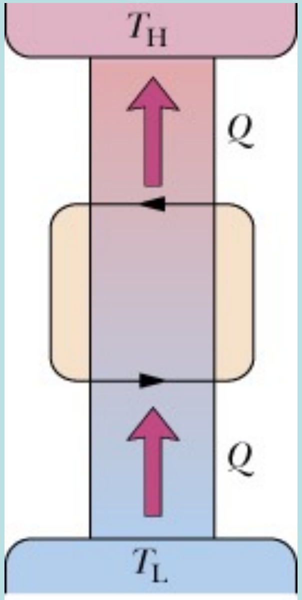
$$\Delta S = 0$$

所有的不可逆過程：

$$\Delta S > 0$$

熱力學第二定律

熱流動



若熱由低溫流向高溫

$$\Delta S = \frac{Q}{T_H} + \frac{-Q}{T_L} < 0$$

這是熱力學第二定律不允許的！

因此熱量總是由高溫系統流向低溫系統。

$$\Delta S > 0$$

根據熵的定義，溫度高低唯一決定了熱的流向。

熱力學第二定律2.0：導出熱力學第二定律1.0！

20.21 • A sophomore with nothing better to do adds heat to 0.350 kg of ice at 0.0°C until it is all melted. (a) What is the change in entropy of the water? (b) The source of heat is a very massive body at 25.0°C. What is the change in entropy of this body? (c) What is the total change in entropy of the water and the heat source?

兩個等溫的狀態： $\Delta S = S_2 - S_1 \equiv \dfrac{Q}{T}$

SET UP: For water, $L_f = 3.34 \times 10^5$ J/kg.

EXECUTE: **(a)** The heat flow into the ice is $Q = mL_f = (0.350\text{ kg})(3.34 \times 10^5\text{ J/kg}) = 1.17 \times 10^5$ J. The heat flow occurs at $T = 273$ K, so $\Delta S = \dfrac{Q}{T} = \dfrac{1.17 \times 10^5\text{ J}}{273\text{ K}} = 429$ J/K. Q is positive and ΔS is positive.

(b) $Q = -1.17 \times 10^5$ J flows out of the heat source, at $T = 298$ K. $\Delta S = \dfrac{Q}{T} = \dfrac{-1.17 \times 10^5\text{ J}}{298\text{ K}} = -393$ J/K. Q is negative and ΔS is negative.

(c) $\Delta S_{tot} = 429\text{ J/K} + (-393\text{ J/K}) = +36$ J/K.

EVALUATE: For the total isolated system, $\Delta S > 0$ and the process is irreversible.

普物下期中考

Apr. 2010

1. 這次冰島 Eyjafjallajokull 火山的爆發之所以造成空運的停擺，其中一個重要的原因是火山上方原來堆積著厚重的冰河，爆發後大量的冰，被高熱的熔岩，溶解後更汽化為水蒸氣，而熔岩在此激烈過程中形成細密的火山灰，在較輕的水蒸氣分子攜帶下，衝上了較原來更高的高空，而被氣流吹到更廣的區域。假設熔岩的溫度大約是 1000℃，而且在地心供熱下，大致並未因接觸冰河而改變溫度。假設冰河的冰原來溫度是 0℃。
   A. 考慮 1.0 公噸的冰被熔岩融化為 0℃ 水的過程中，熔岩的熵變化是多少 J/K？冰溶為水後熵的變化是多少 J/K？冰的溶解熱是 333 kJ/kg。(10)
   B. 承上題，該 1.0 公噸的水繼續被熔岩加溫置沸點 100℃，在此過程中水的熵變化是多少 J/K？水的比熱以 4.18 kJ/kg·K 來近似。(10)

1. 這次冰島 Eyjafjallajokull 火山的爆發之所以造成空運的停擺，其中一個重要的原因是火山上方原來堆積著厚重的冰河，爆發後大量的冰，被高熱的熔岩，溶解後更汽化為水蒸氣，而熔岩在此激烈過程中形成細密的火山灰，在較輕的水蒸氣分子攜帶下，衝上了較原來更高的高空，而被氣流吹到更廣的區域。假設熔岩的溫度大約是 1000℃，而且在地心供熱下，大致並未因接觸冰河而改變溫度。假設冰河的冰原來溫度是 0℃。

A. 考慮 1.0 公噸的冰被熔岩融化為 0℃ 水的過程中，熔岩的熵變化是多少 J/K？冰溶為水後熵的變化是多少 J/K？冰的溶解熱是 333 kJ/kg。(10)

解答

1. A. $\Delta S = \dfrac{Q}{T}$，對岩漿：$\Delta S = \dfrac{-333\times1000\times1000}{1273} = -2.61\times10^{6}\ \mathrm{J/K}$。對冰水：

$$\Delta S = \frac{333\times1000\times1000}{273} = 1.22\times10^{7}\ \mathrm{J/K}$$。

$$\Delta S = S_2 - S_1 \equiv \frac{Q}{T}$$

兩個等溫的狀態：