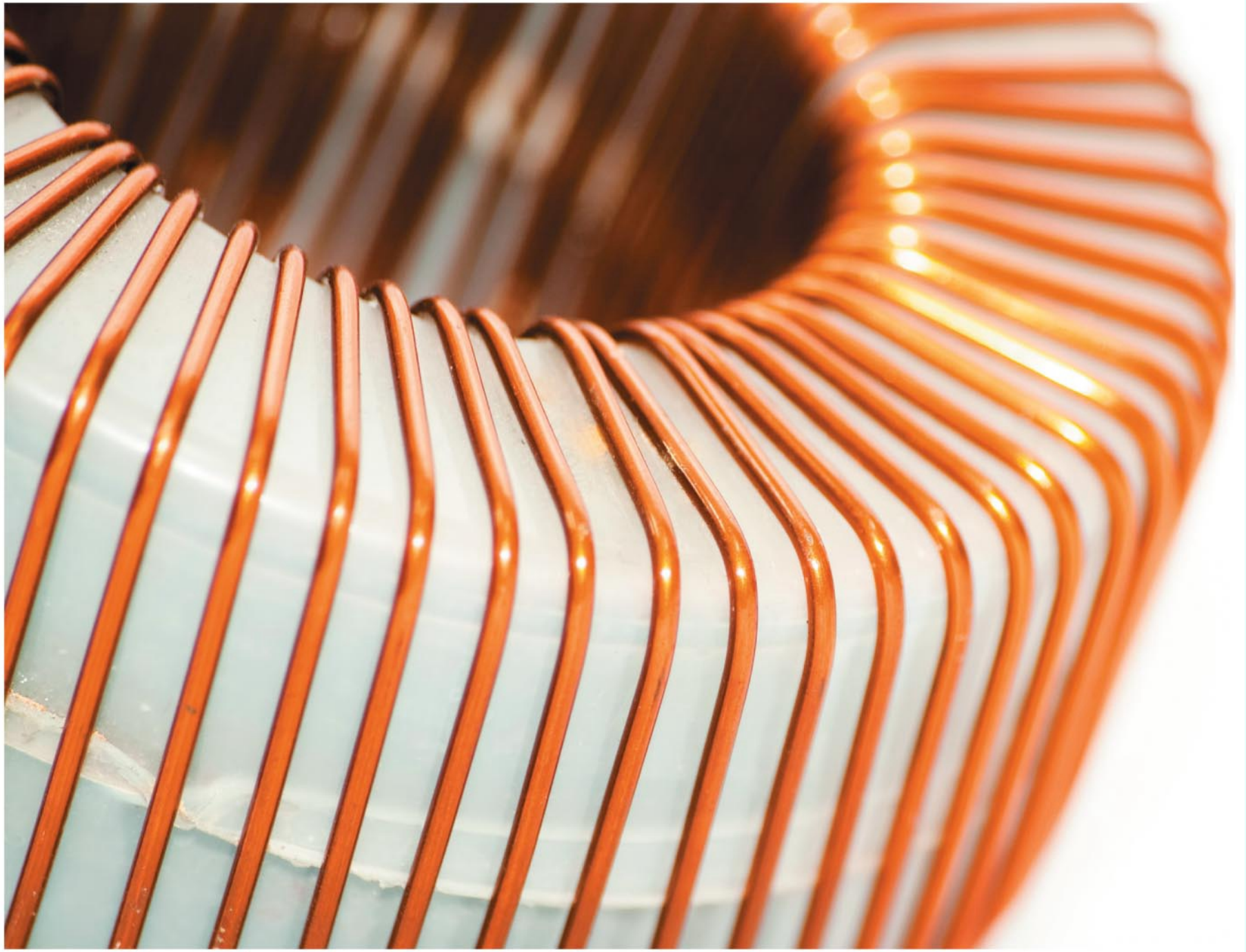
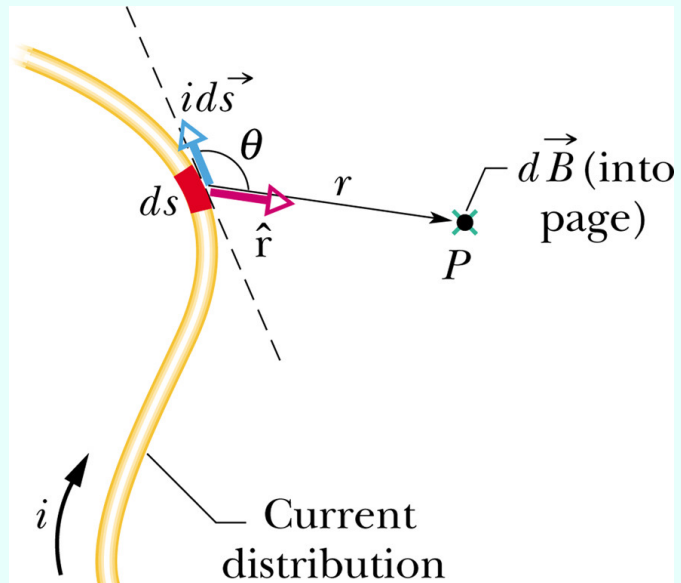
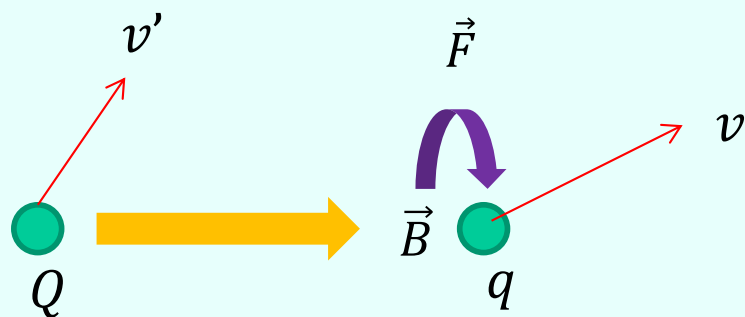




Biot-Savart Law



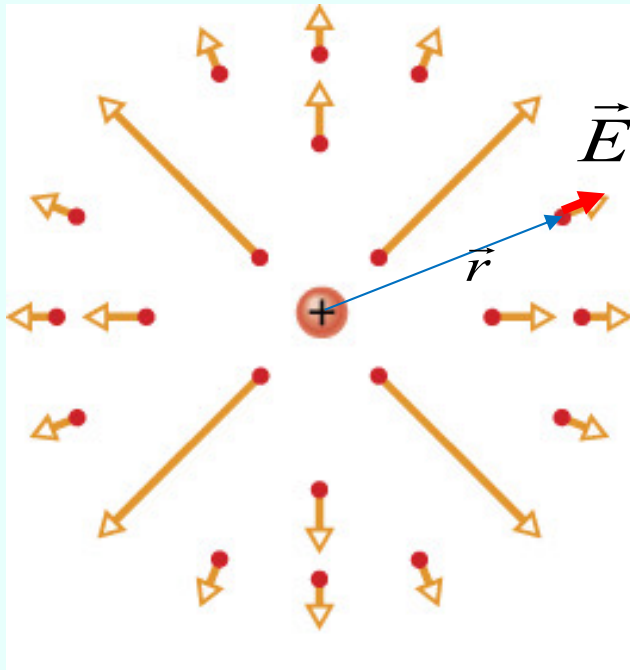
移動的電荷在周圍產生磁場，磁場對當地的移動電荷施磁力！



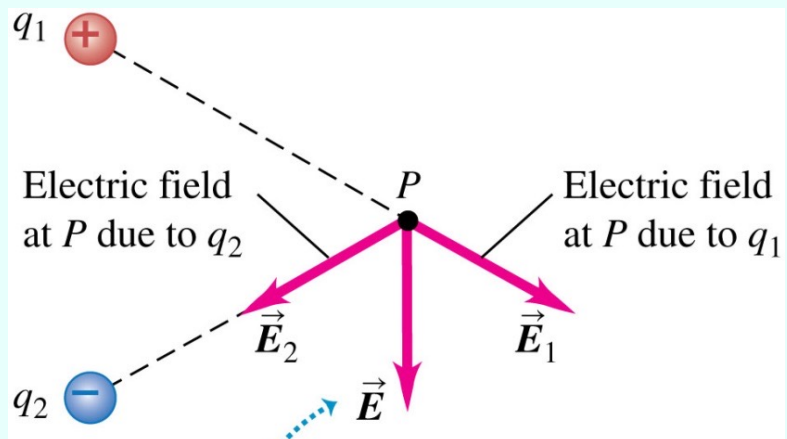
已經討論了磁場對移動電荷所施磁力！

現在計算移動的電荷即電流所產生的磁場。

庫倫定律：單一個點電荷周圍的電場



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

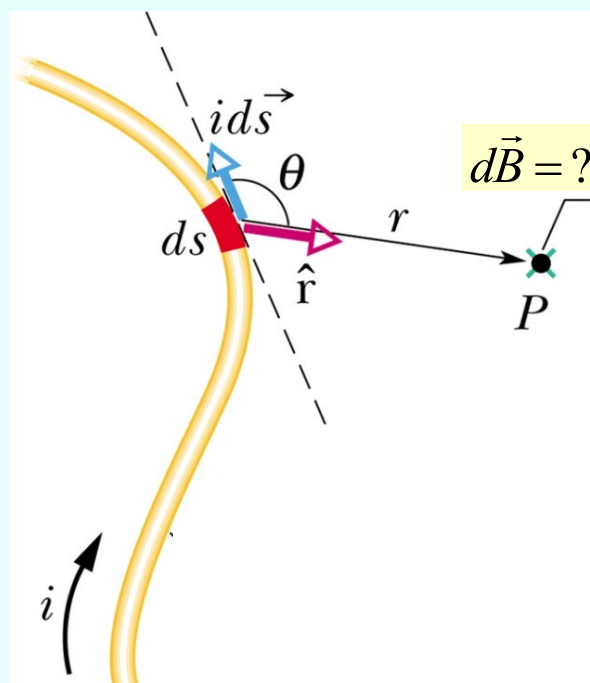


$$\vec{E} = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

磁學中的庫倫定律？單獨的移動電荷有電場，一般會以電流來討論磁場。

小電荷 dQ 在磁學中就對應一小段導線的電流： $I \cdot d\vec{s}$ ，

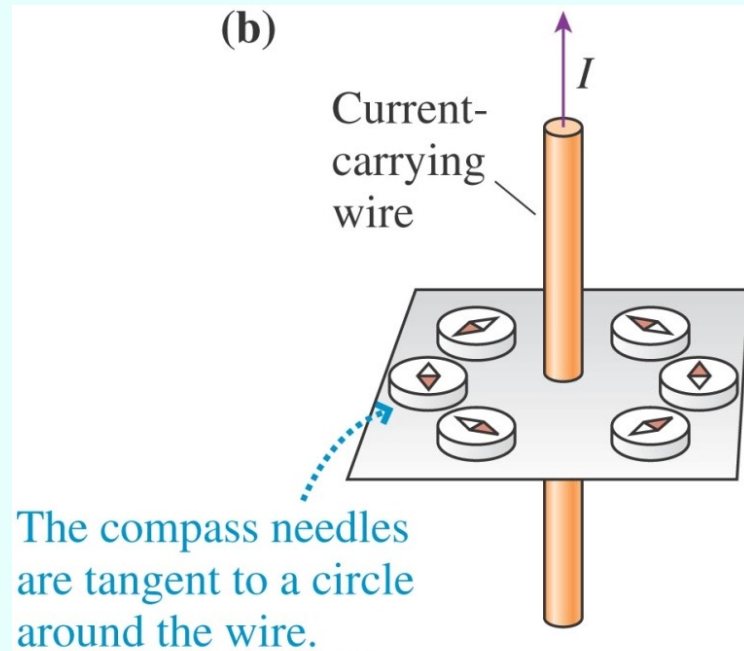
$d\vec{s}$ 是該小段導線對應的位移，代表電荷運動的方向。



磁學中的庫倫定律應該預測一小段電流在周圍產生的磁場 $d\vec{B}$

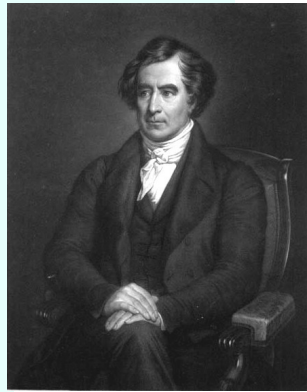
不幸的是，一小段電流的磁場是無法像一小顆電荷的電場那樣單獨測量！

實驗上能測量的是一條導線周圍的磁場。

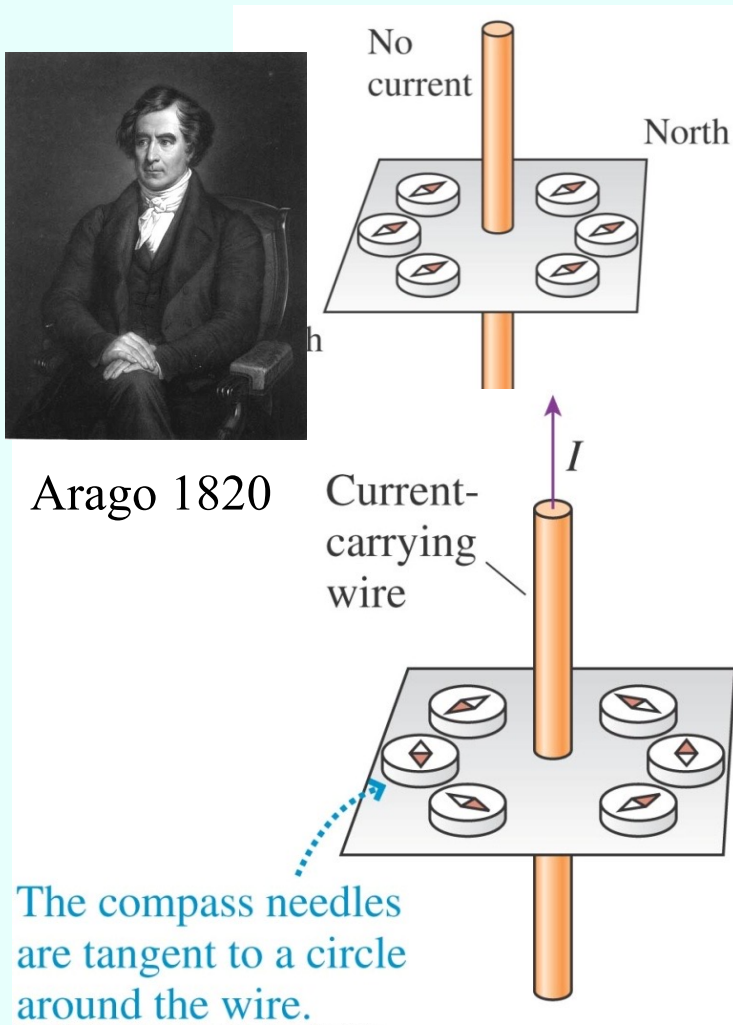


歷史上最早進行測量的電流磁場是長直導線電流周圍的磁場。

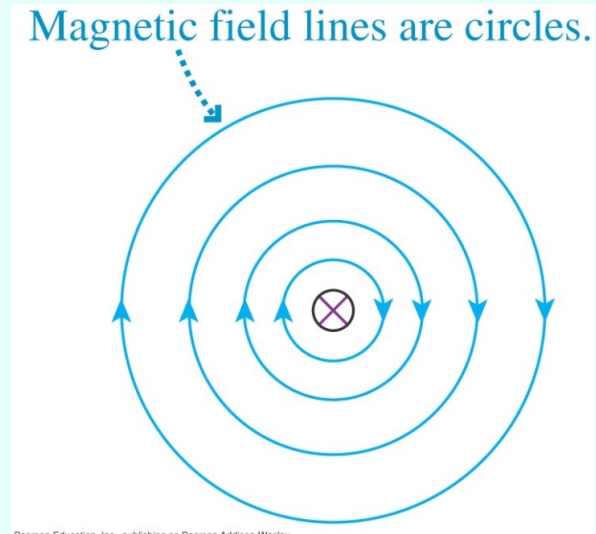
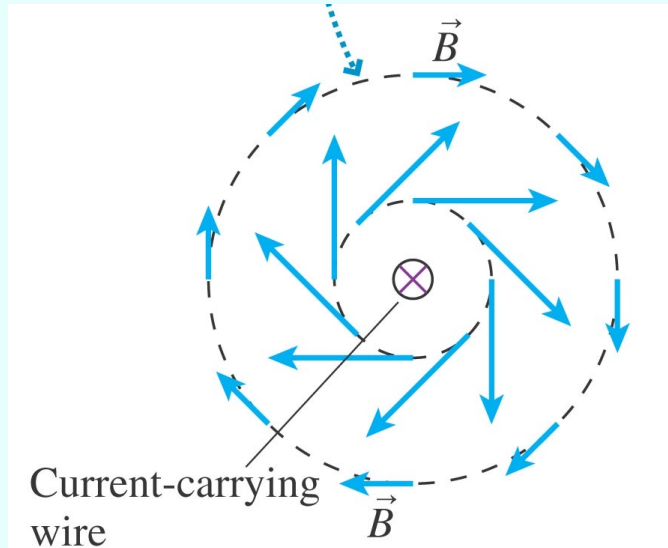
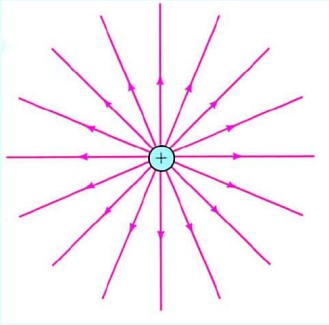
物理學家由這個測量結果，倒推分析出一小段導線電流產生的磁場。



Arago 1820

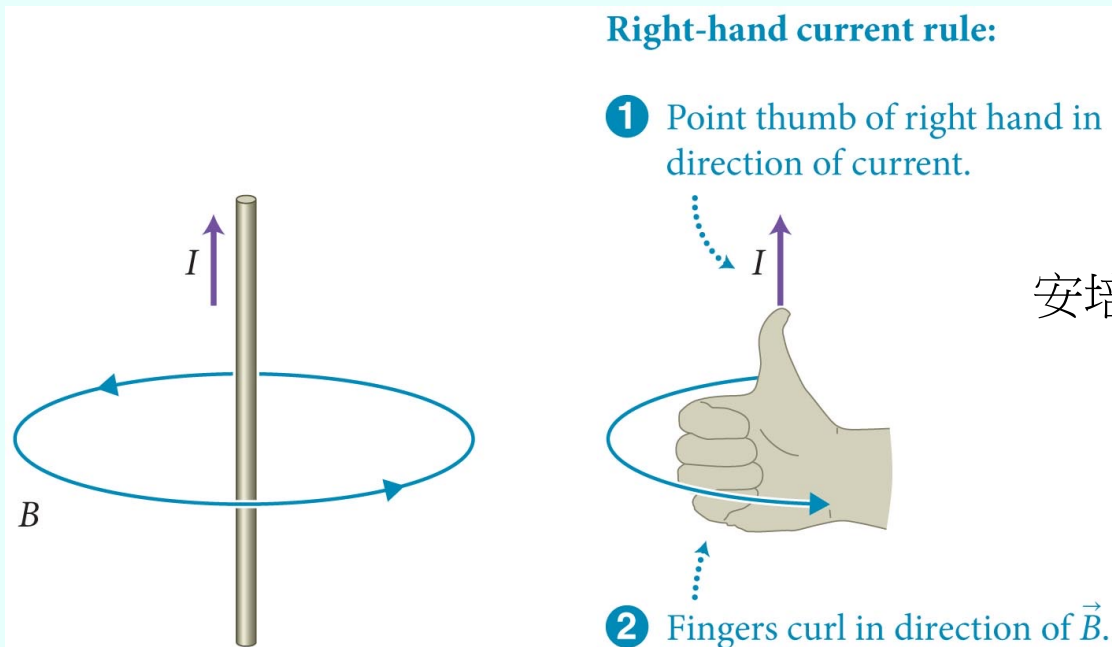


長直導線電流周圍的磁力線是環繞該電流！



磁力線是無起點與終點的封閉的漩渦狀場線。
這是磁的高斯定律的結果！

Right-hand current rule:

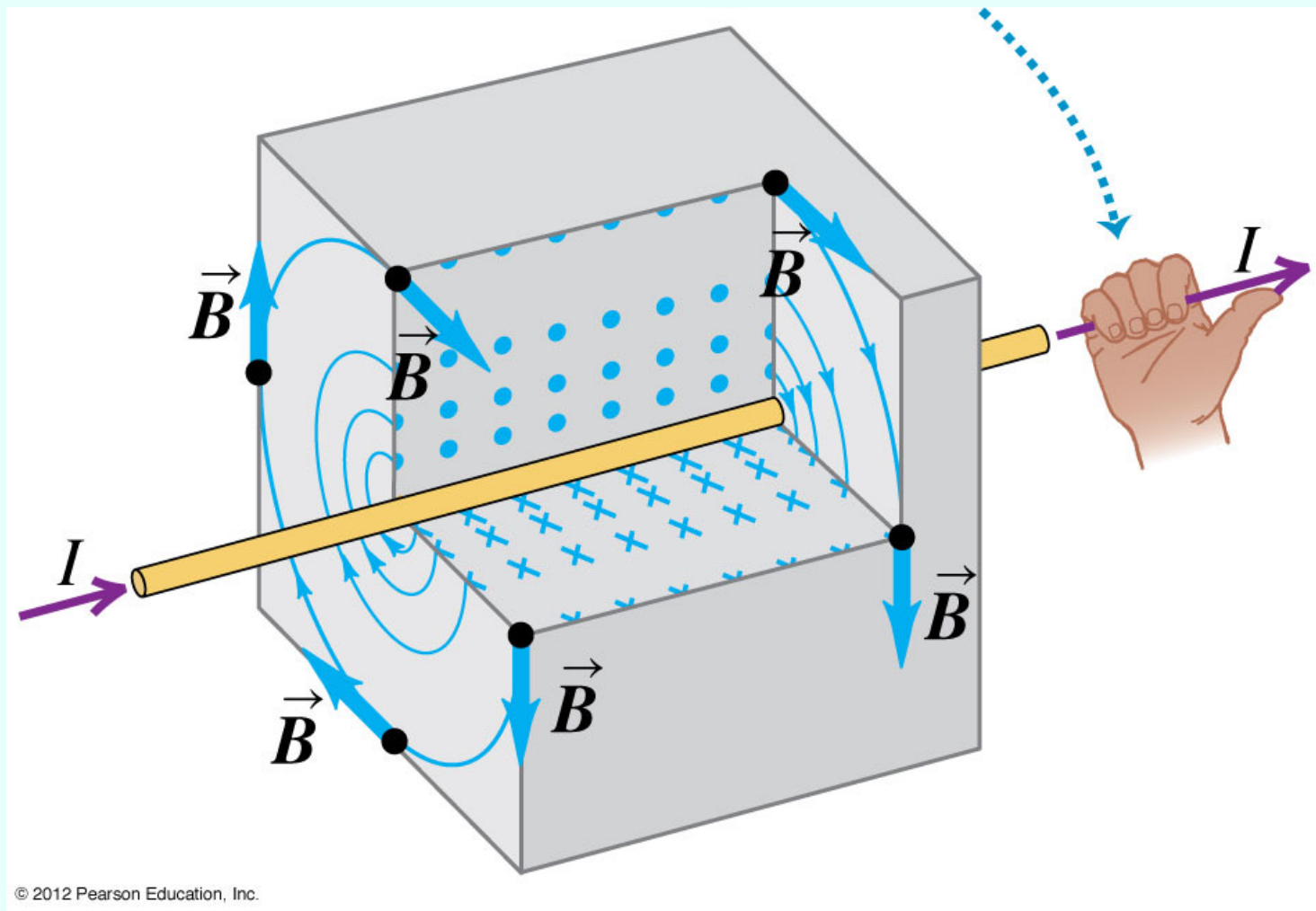


安培右手定則

1 Point thumb of right hand in direction of current.

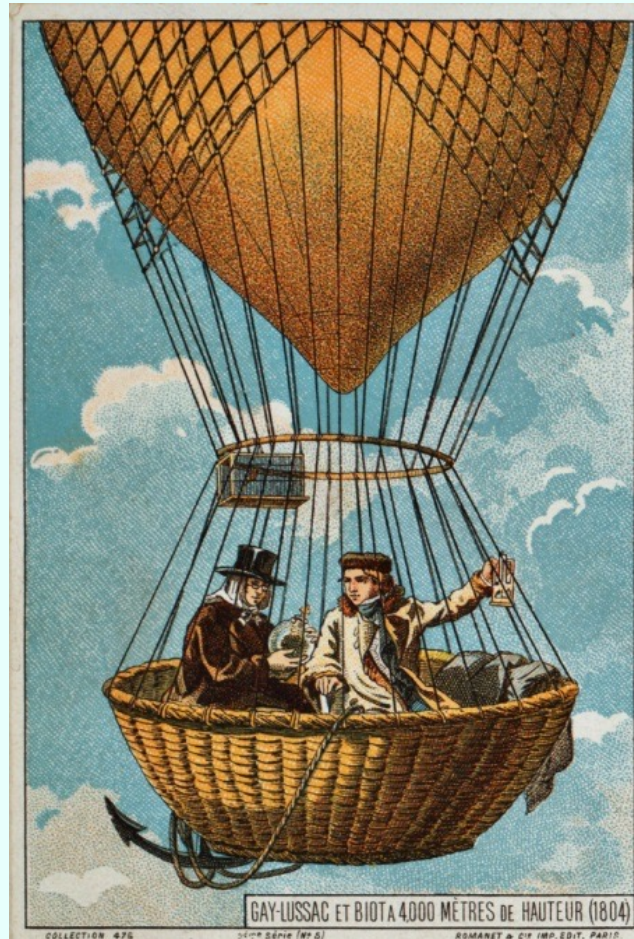
2 Fingers curl in direction of $\vec{B}$.

立體圖

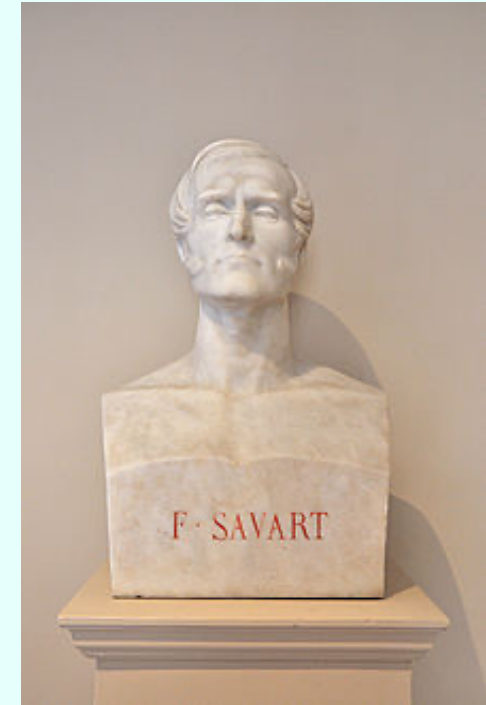




Jean-Baptiste Biot (1774 –1862)
隕石、光的偏振

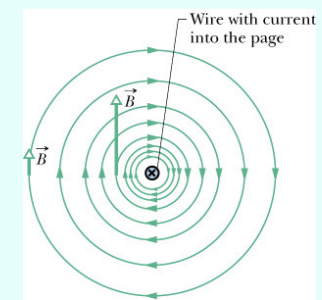


Biot 與Gay-Lussac乘熱氣球到
達7016m，研究地球的大氣
組成 (1804)。

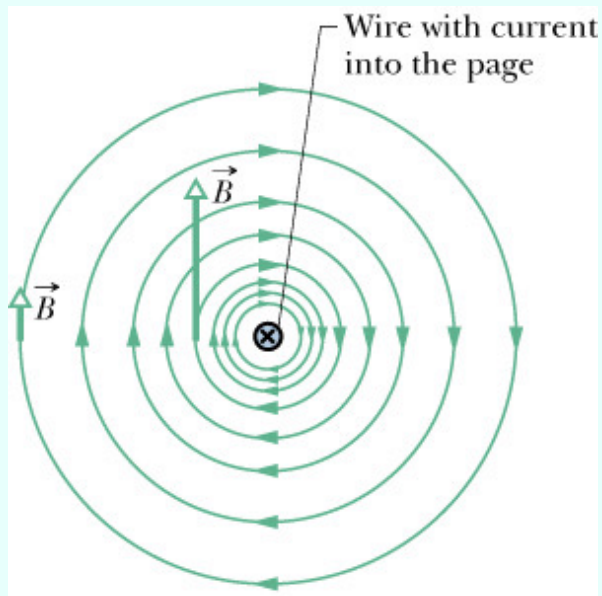


Felix Savart (1791-1841)
聲學、音階

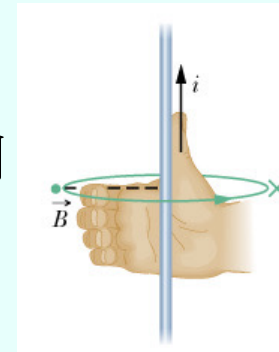
Biot與Savart測量長直導線周圍的磁場大小與距離一次方成反比！



長直導線周圍的磁場



方向：安培右手定則

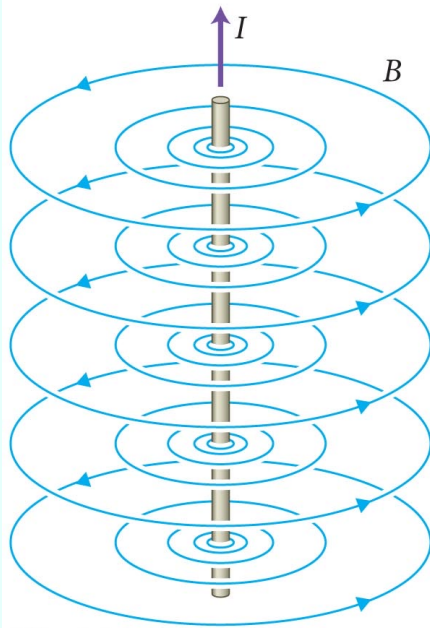


大小：

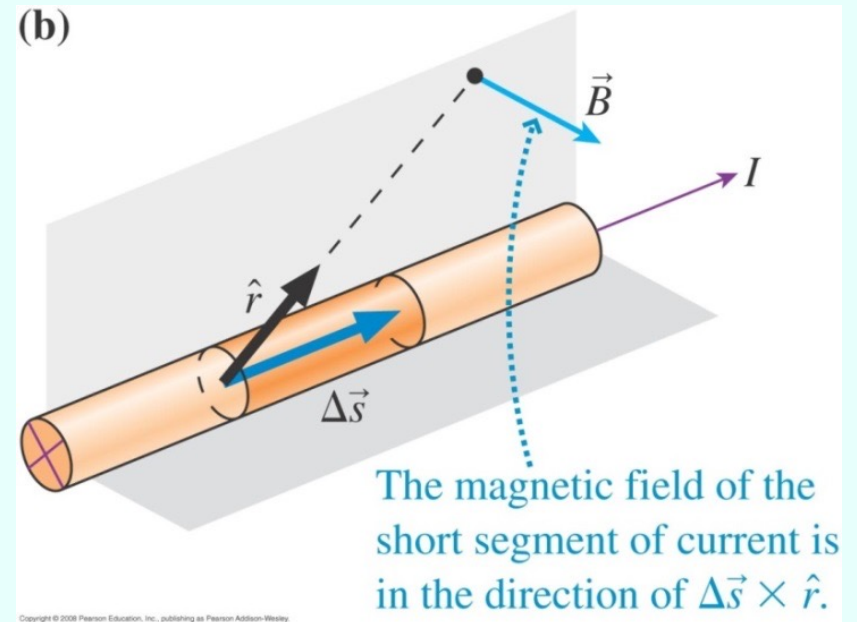
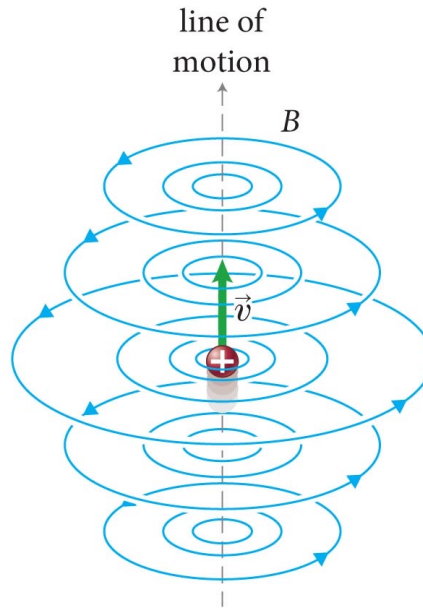
$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

物理學家由長直導線電流的磁場測量結果，倒推分析出一小段導線電流產生的磁場。

(a) Magnetic field of a wire carrying a constant current



(b) Magnetic field of a moving charged particle

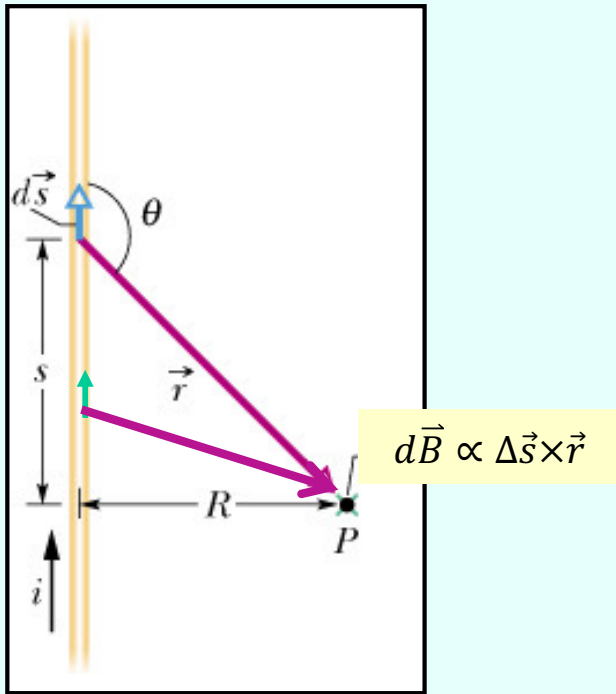


由長直導線電流的磁場，可以大致猜出一小段電流所產生的磁場的方向。

磁場 $\vec{B}$ 的方向，與電流流動方向 $I \cdot \Delta\vec{s}$ ，及該小段與測量位置間的位移 $\vec{r}$ 皆垂直。

因此可以猜想一小段電流所產生的磁場向量 $d\vec{B}$ 正比於 $\Delta\vec{s} \times \vec{r}$

如果長直導線周圍的磁場大小與距離一次方成反比，
那麼構成導線的一小段電流的磁場大小，與距離是何關係？



Pierre-Simon Laplace (1749–1827)

沿導線所有小段電流 $I \cdot \Delta\vec{s}$ 產生的小磁場 $d\vec{B} \propto \Delta\vec{s} \times \hat{r}$ 都是同方向。
所以總磁場 B 是小電流 $I \cdot \Delta\vec{s}$ 產生的小磁場 dB 的總和即積分！
如果已知 B 與距離一次方成反比！ dB 應該與二次方成反比！

$$dB \propto \frac{1}{r^2}$$

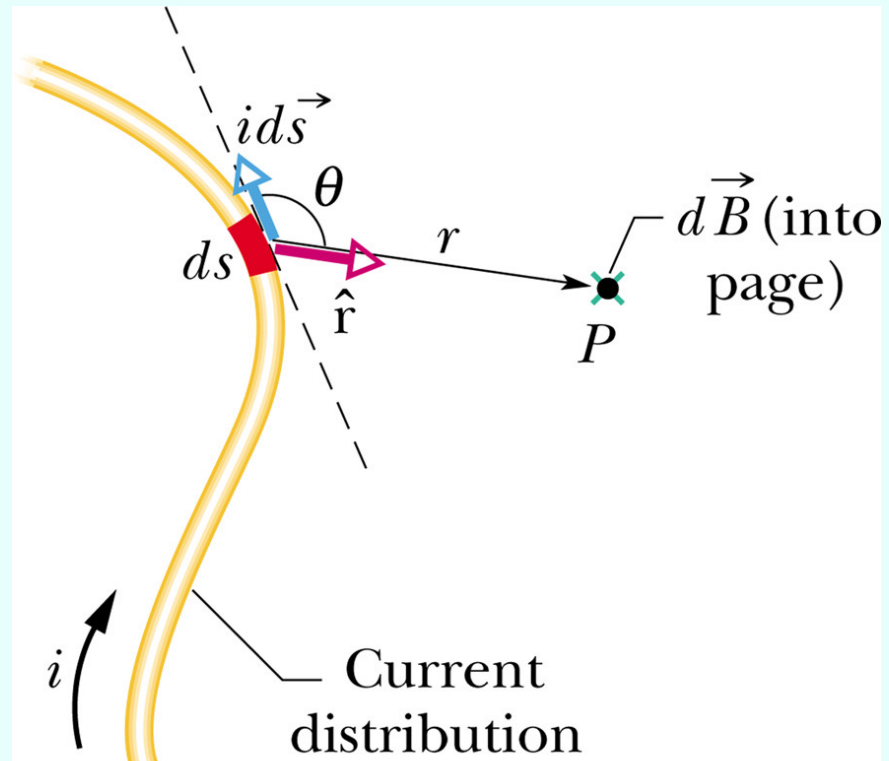
數學家 Laplace 寫下，能導出長直導線正確磁場的小段電流磁場公式。

一小段導線電流在周圍產生的磁場

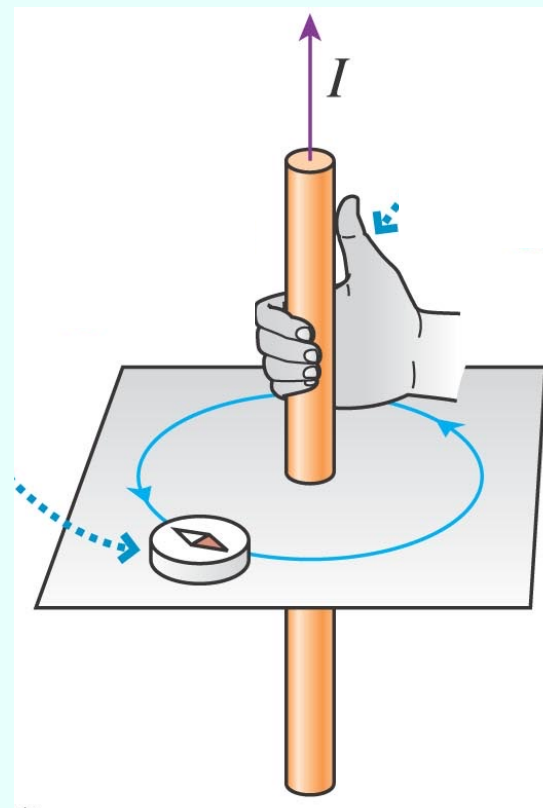
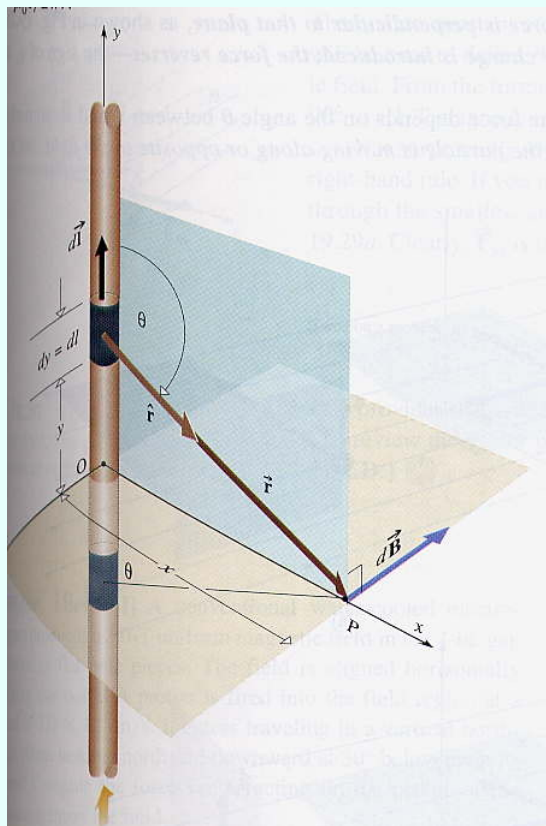
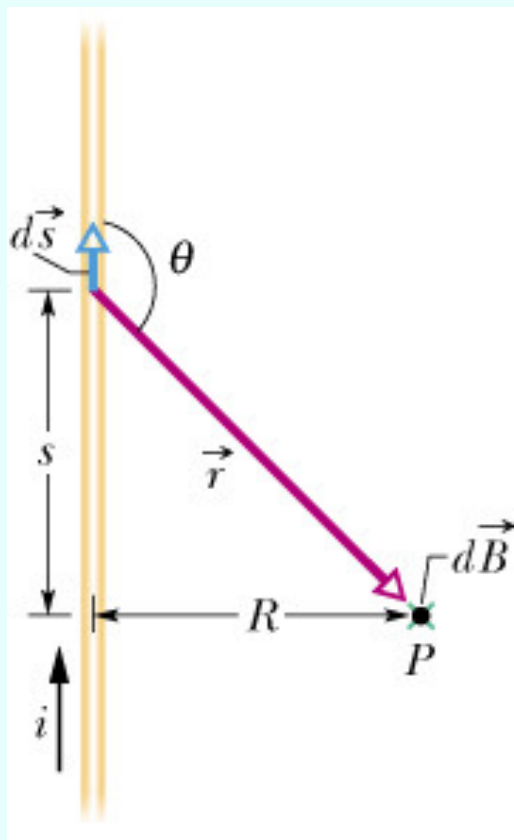
Biot-Savart Law

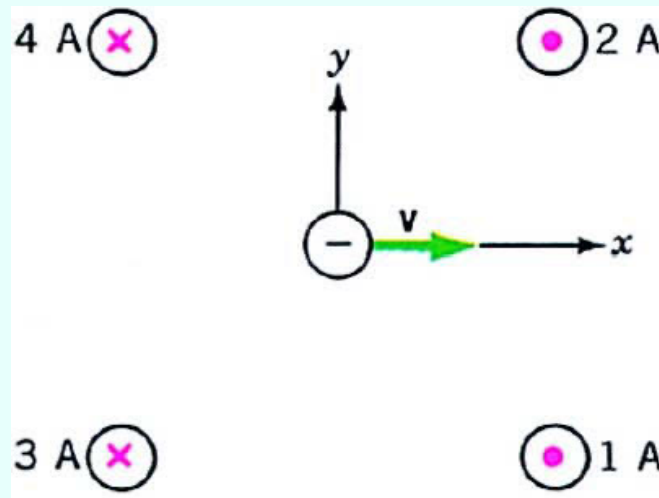
磁學中的庫倫定律

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^2} d\vec{s} \times \hat{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^3} d\vec{s} \times \vec{r}$$



定量驗證：長直導線電流所產生磁場可以由 Biot-Savart Law 計算



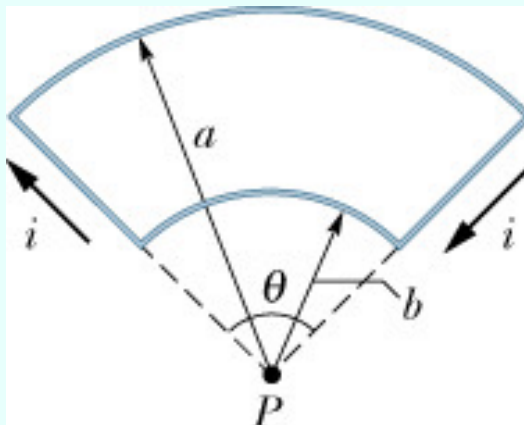


$$(a) B_0 = \mu_0 I / 2\pi r \text{ where } I = 1 \text{ A and } r = L/\sqrt{2}$$

$$B_x = 0 \text{ and } B_y = 10B_0 \cdot \cos 45^\circ$$

$$B = -1.33 \times 10^{-5} \hat{j} \text{ T}$$

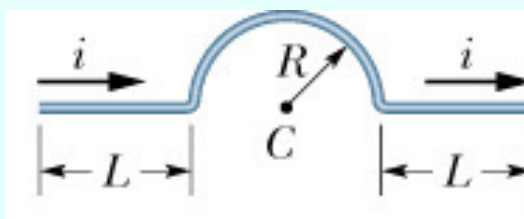
$$(b) \vec{F} = -e\vec{v} \times \vec{B} = 8.53 \times 10^{-18} \hat{k} \text{ N}$$



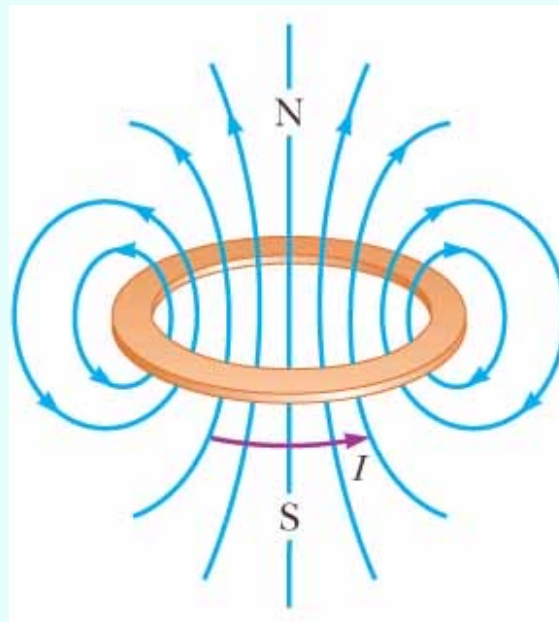
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^2} d\vec{s} \times \hat{r}$$

計算點 P 處的磁場：

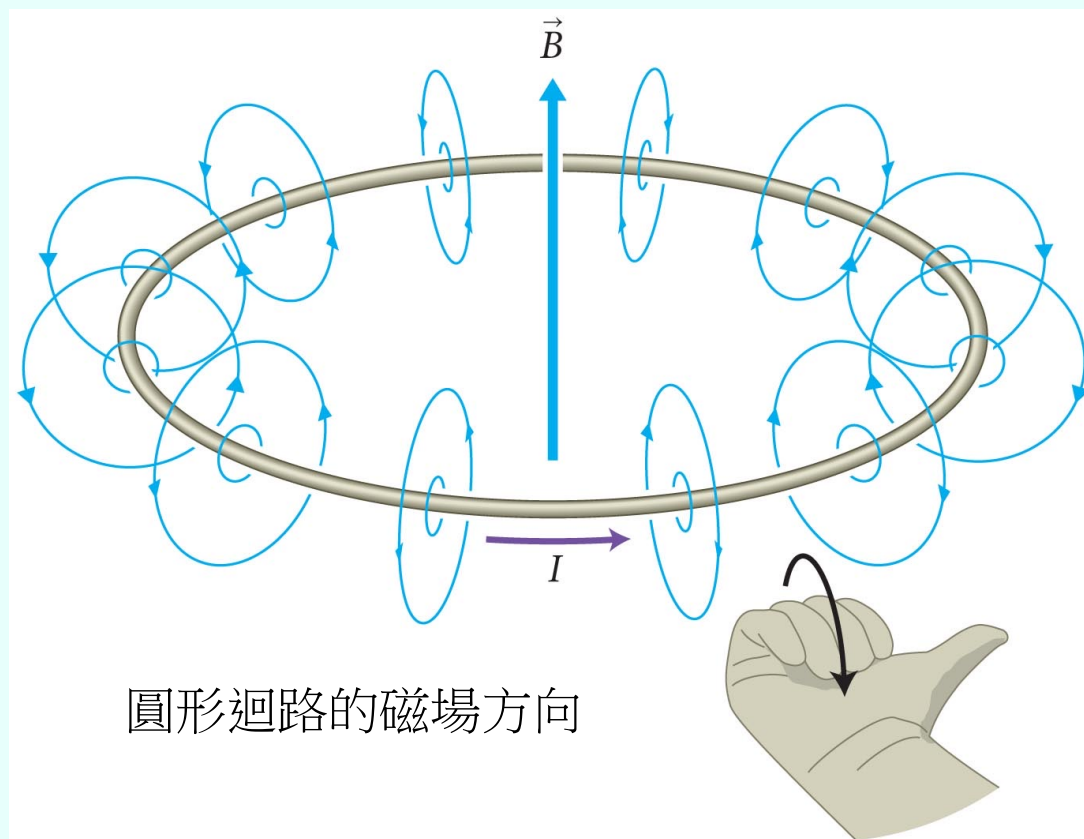
$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \left[0 + \left(\frac{s}{r^2} \right)_{r=a} + 0 - \left(\frac{s}{r^2} \right)_{r=b} \right] = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \left[\left(\frac{a\theta}{a^2} \right) - \left(\frac{b\theta}{b^2} \right) \right] = \frac{\mu_0 i \theta}{4\pi} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)$$



圓形電流迴路（磁偶極）

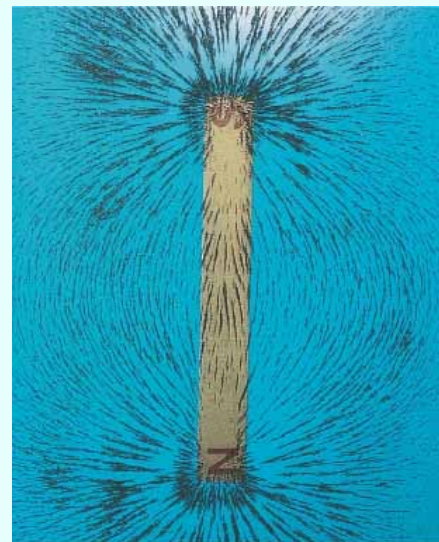
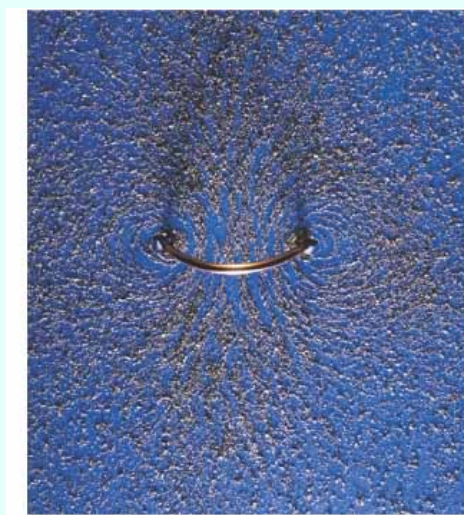
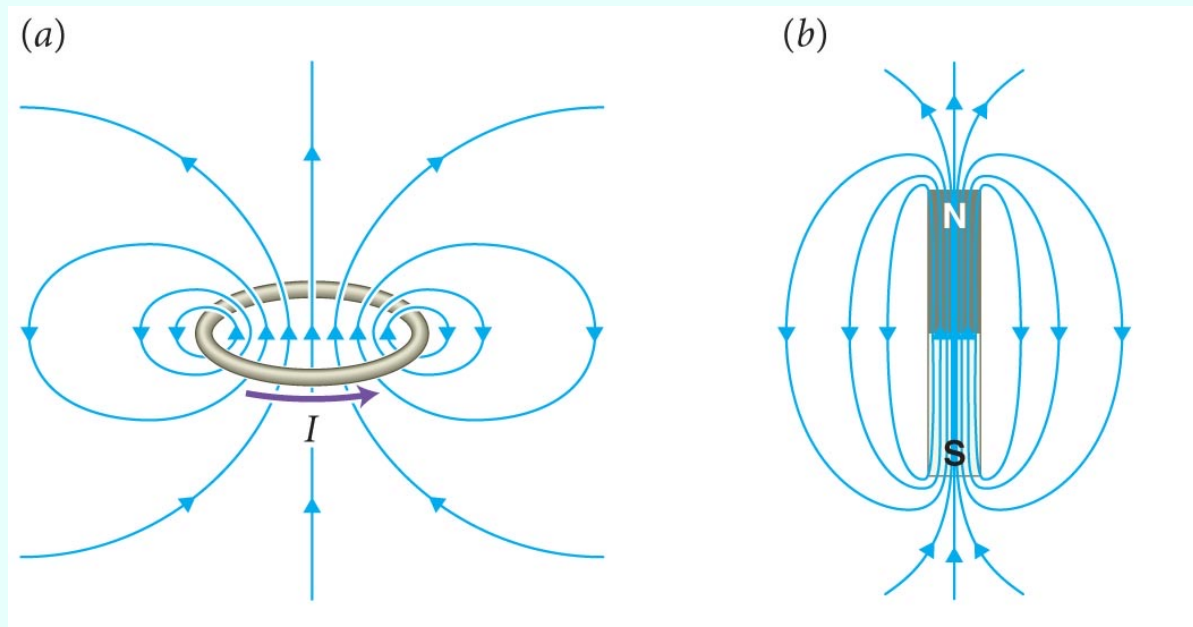


圓形迴路與磁偶極



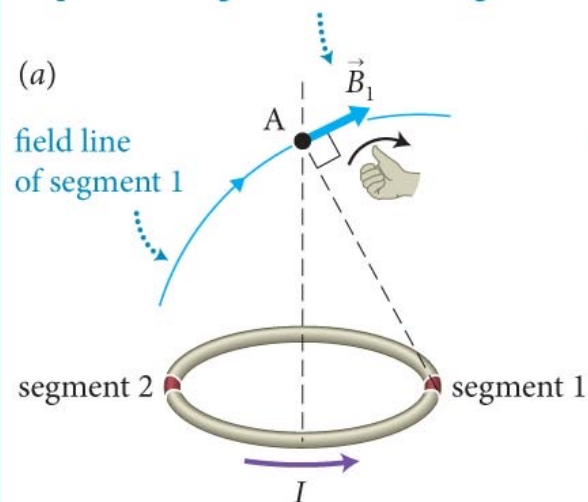
圓形迴路的磁場方向

如果非常靠近迴路，迴路感覺近似長直導線。



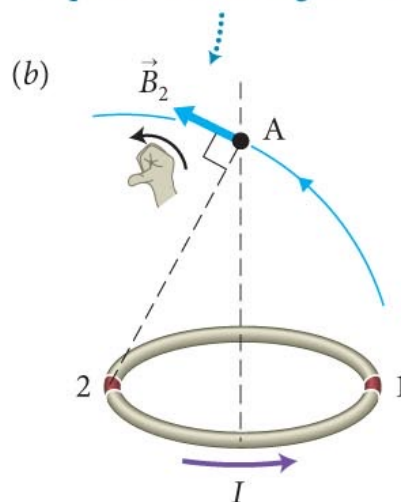
電流迴路的磁力線與磁鐵內外的磁力線都相同！

At point A, magnetic field from segment 1 . . .



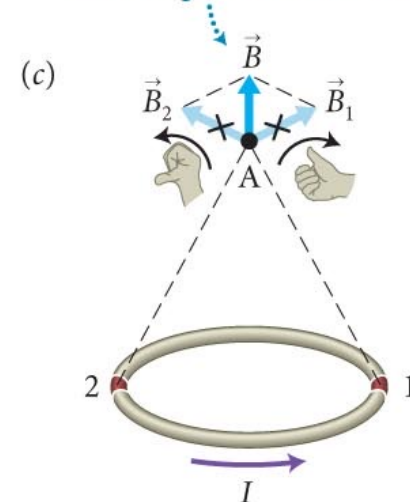
+

. . . plus that from segment 2 . . .

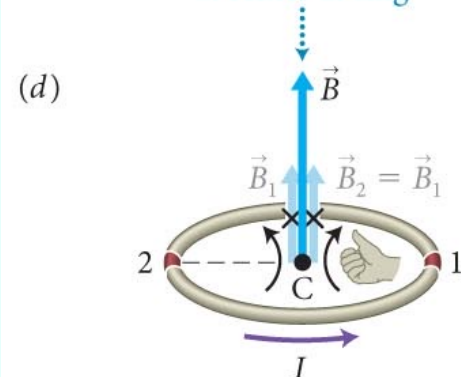


=

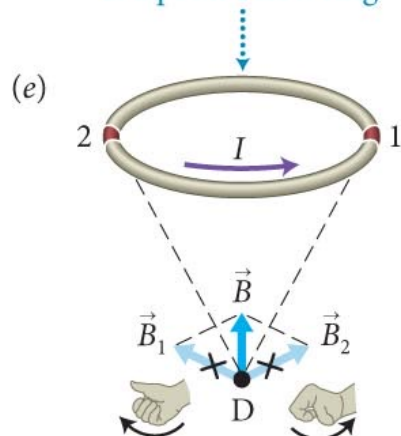
. . . add up to a vertical field.



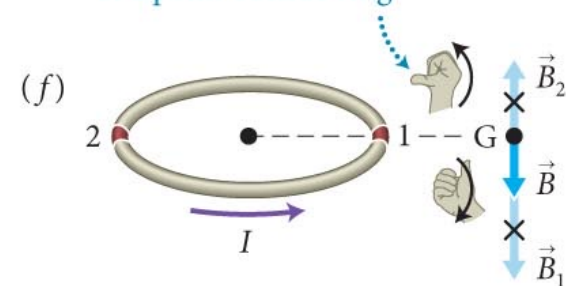
Magnetic field from segments 1 and 2:
at center of ring



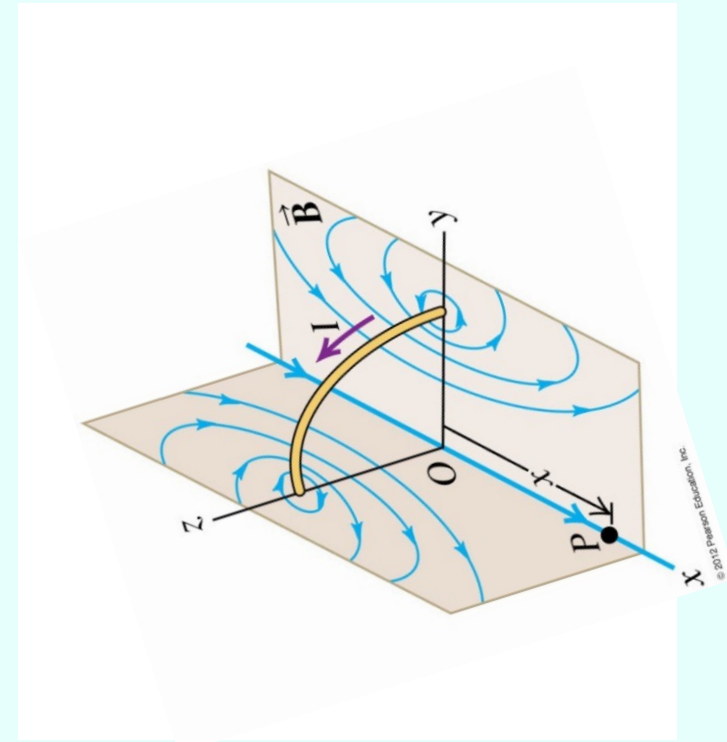
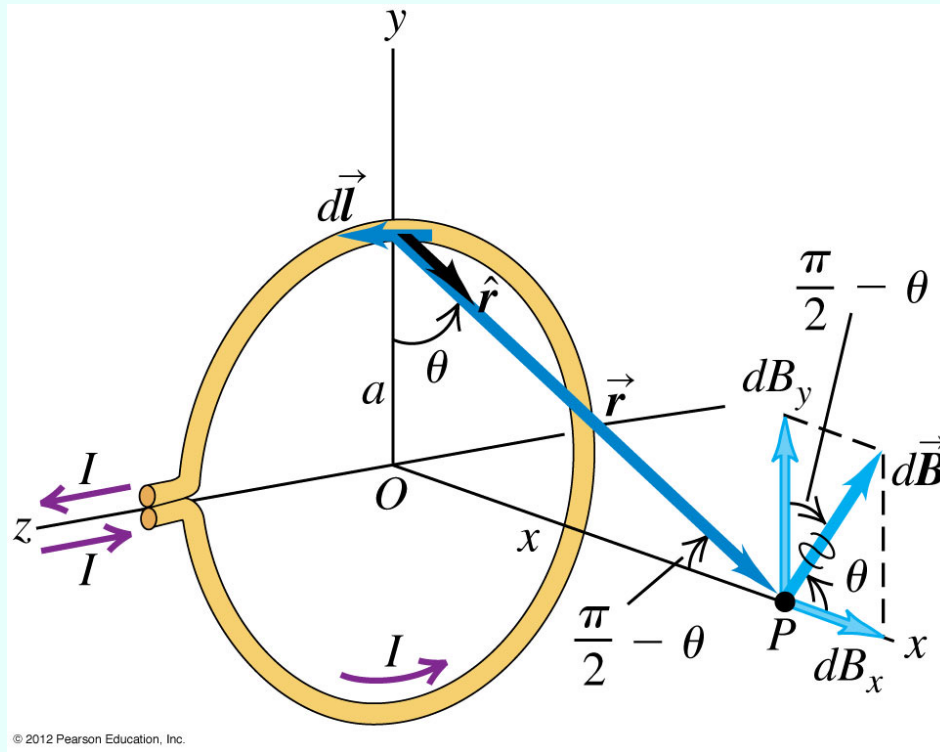
at a point below ring



at a point outside ring



圓形迴路的磁場



在x軸上的一個點

$$B_y = B_z = 0$$

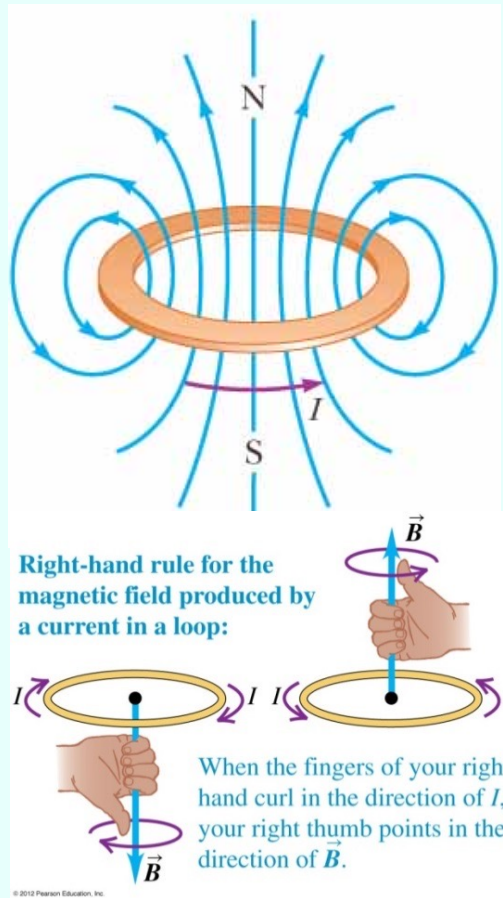
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^2} d\vec{s} \times \hat{r}$$

$$B_x = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^2} \right) \frac{a}{r} \cdot 2\pi a = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i\pi a^2}{r^3}$$

當 $x \gg a$
 $r \rightarrow x$

$$B_x \sim \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i\pi a^2}{x^3} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mu}{x^3}$$

$$\mu \equiv i\pi a^2 = iA$$



在軸上的一個點

$$B_x \sim \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mu}{x^3}$$

$$\mu \equiv i\pi a^2 = iA$$

B 隨距離的三次方成反比

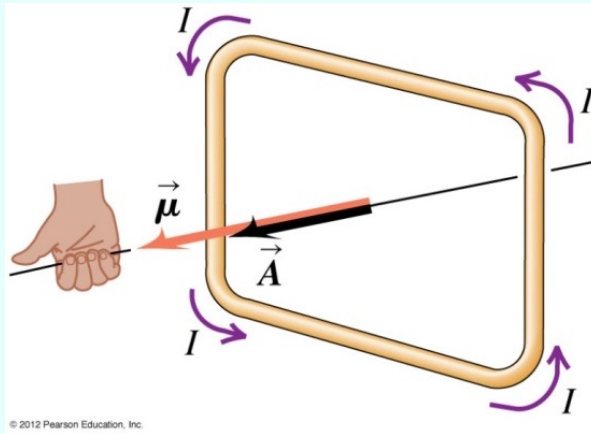
磁場只和磁偶極矩 μ 有關

一個封閉迴路稱為磁偶極 Magnetic Dipole

我們可以為磁偶極矩 Dipole Moment 設定一個方向：

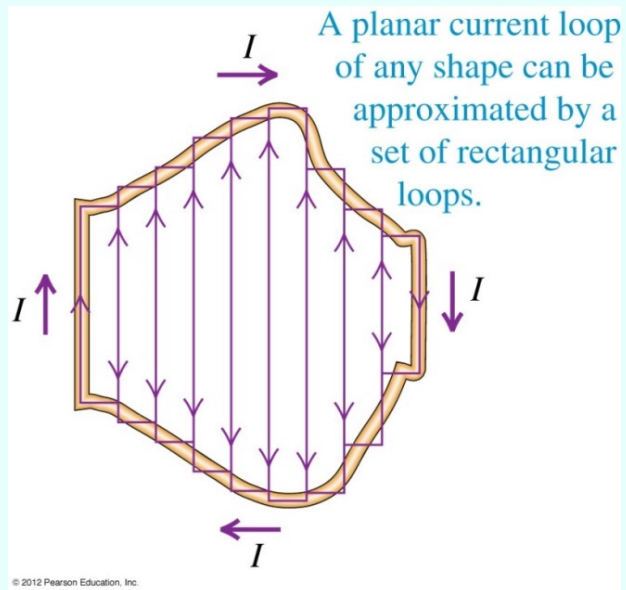
$$\vec{\mu} = i\vec{A}$$

此式不只適用於圓形迴路

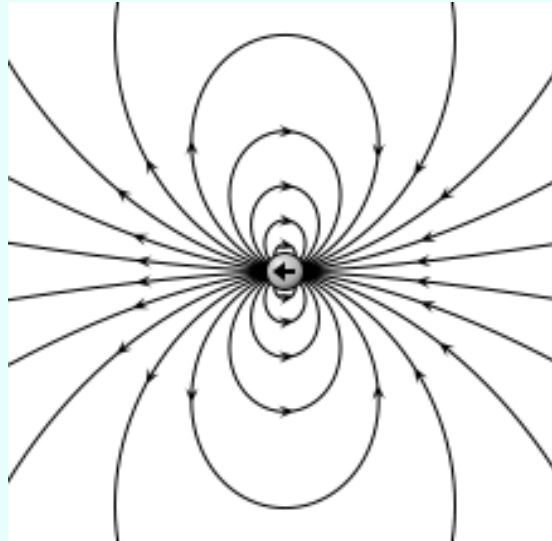


$$\vec{\mu} = i\vec{A}$$

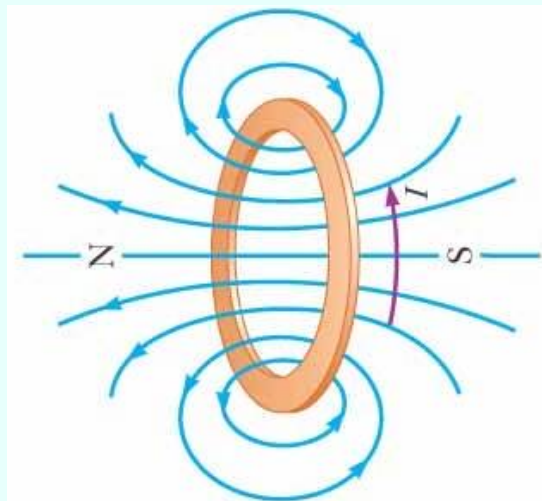
此式適用於任何形狀的迴路。



而且磁偶極矩可以疊加。



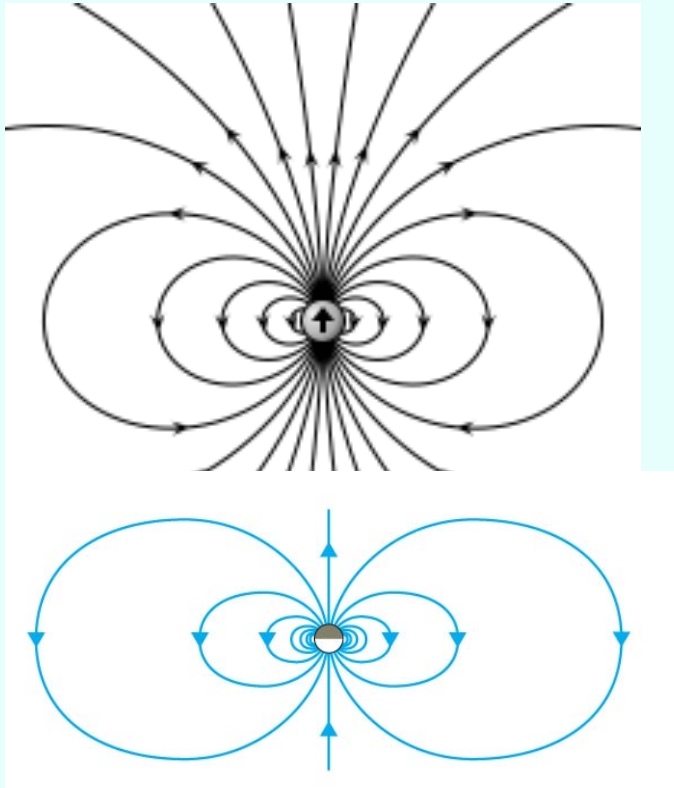
$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p}{z^3}$$



$$B_x \sim \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mu}{x^3}$$

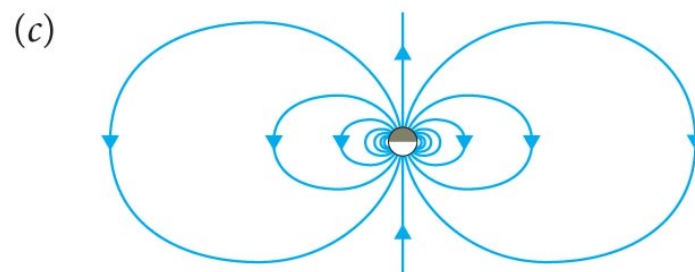
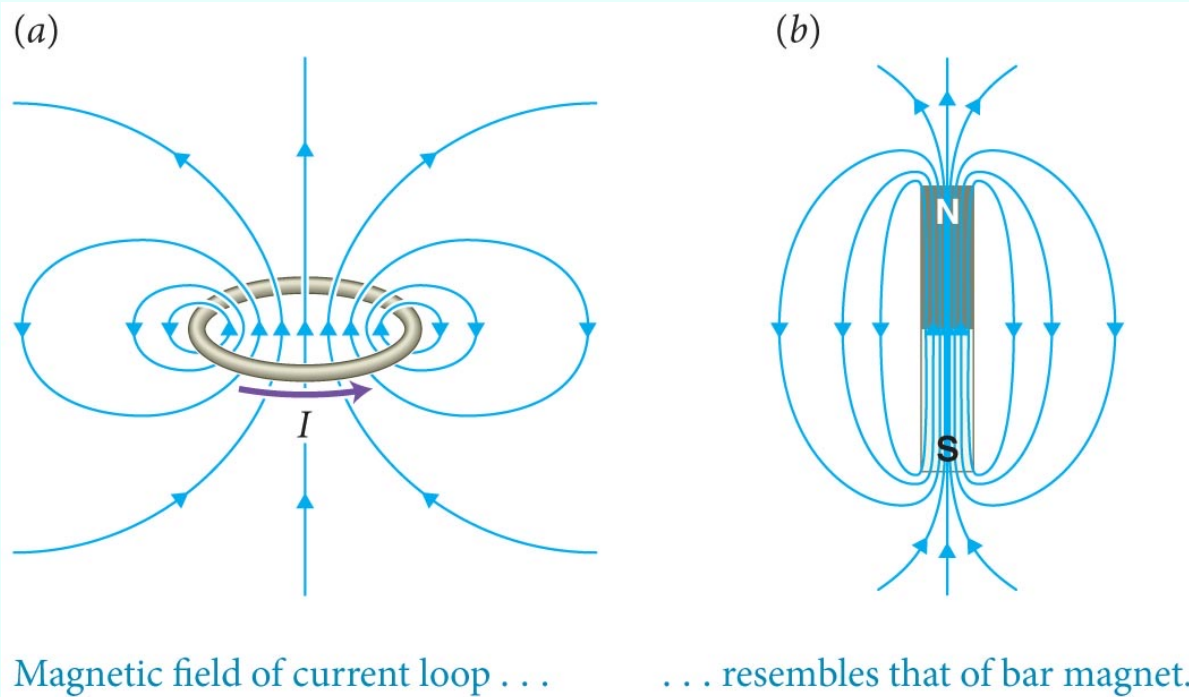
磁偶極遠方的磁場與電偶極遠方的電場完全一樣！

電偶極周圍的電場



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [3(\vec{p} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{p}]$$

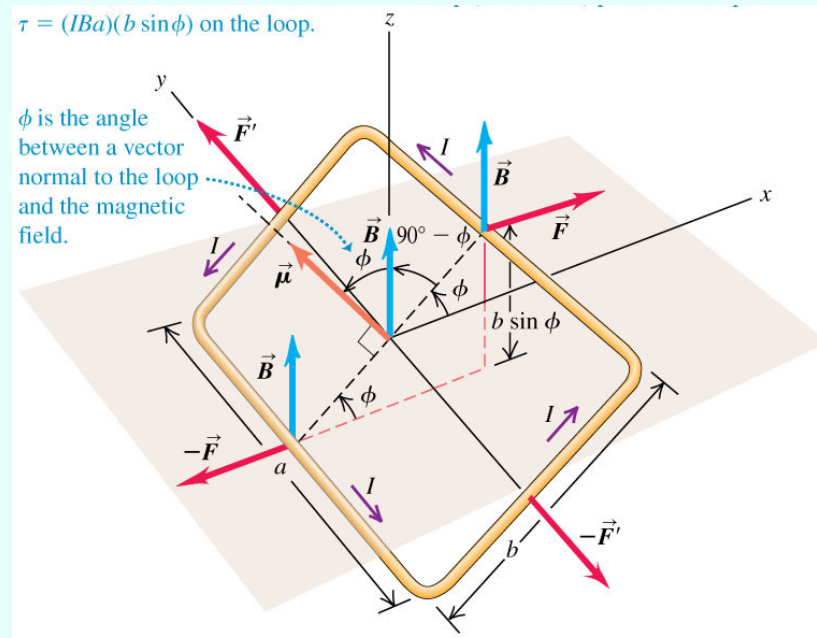
$$\vec{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [3(\vec{\mu} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{\mu}]$$



Shrinking either one yields field of infinitesimally small magnetic dipole.

電流迴路的磁力線與磁鐵相同，他們都是磁偶極！

磁偶極在均勻磁場中所受的磁效應



受力為零，力矩不為零：

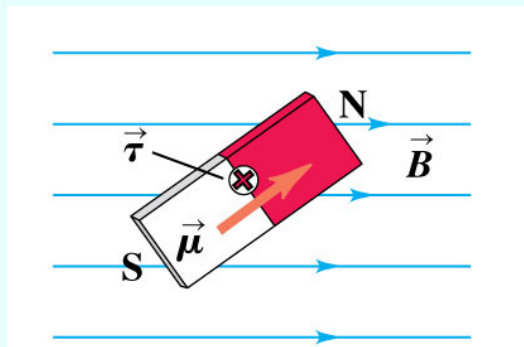
$$\tau = F \cdot \frac{b}{2} \sin \theta \cdot 2 = iaB \cdot b \sin \theta = \mu B \sin \theta = |\vec{\mu} \times \vec{B}|$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

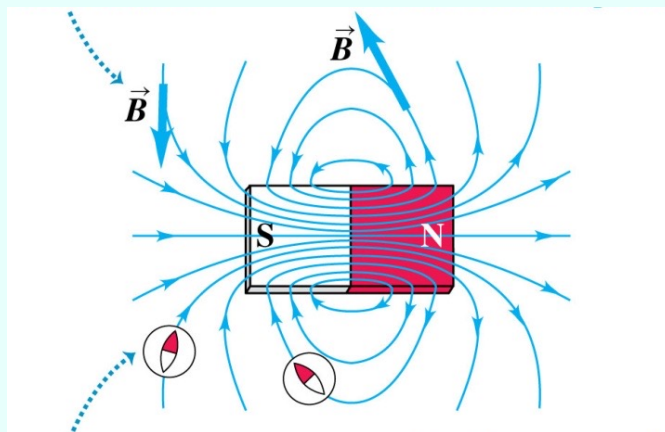
所受力矩只由磁偶極矩向量決定。

力矩會推動磁偶極至平行磁場的方向！

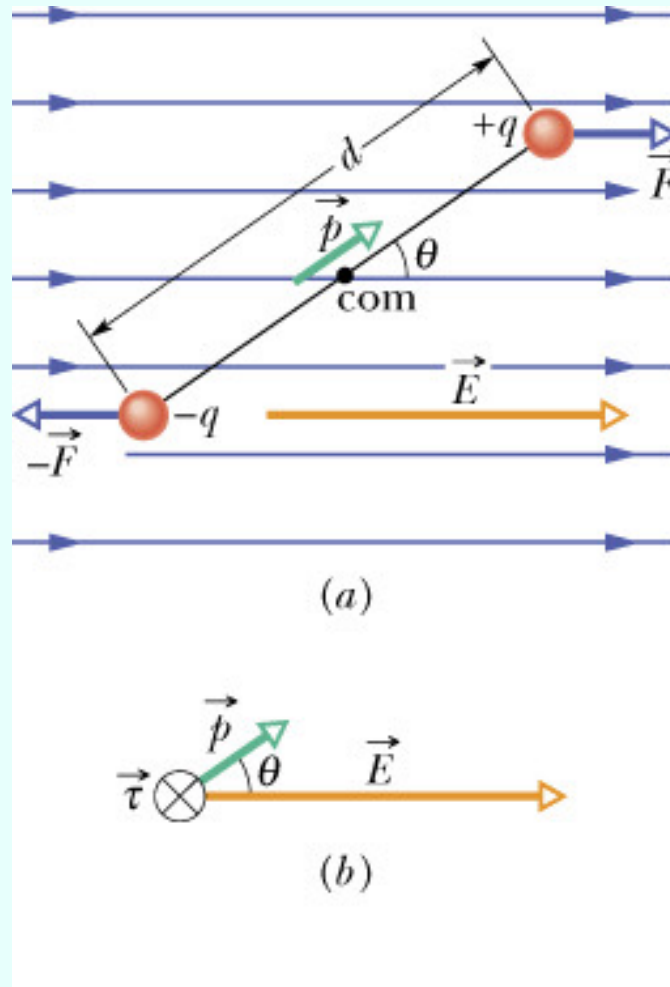
在磁場中，磁偶極會趨向與磁場同向！



這就是為什麼可以以磁鐵指向來定義磁場方向



在均勻電場中的電偶極



$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$

磁偶極在磁場中的效應與電偶及在電場中一模一樣！

角度改變時，此力矩會做功，

我們可以用位能來討論磁場中的磁偶極：

$$\Delta U = -W = - \int_{\theta_1}^{\theta_2} (-d\theta) \cdot \tau = - \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \cdot \mu B \sin \theta = -\mu B \cos \theta_2 + \mu B \cos \theta_1 = -\Delta(\vec{\mu} \cdot \vec{B})$$

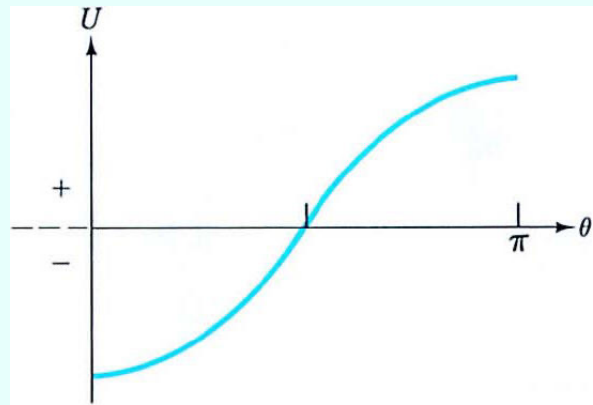
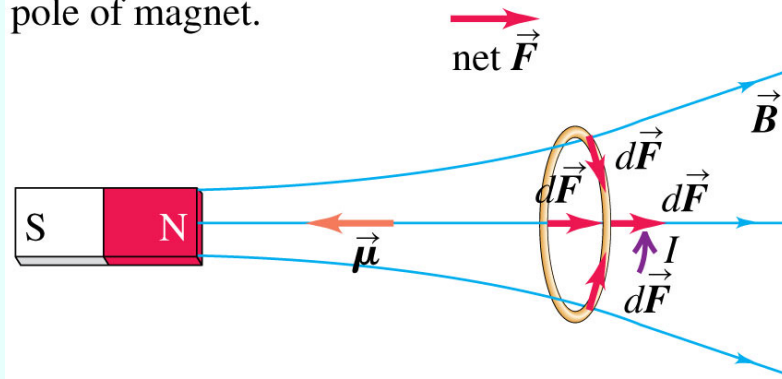


圖 23.28

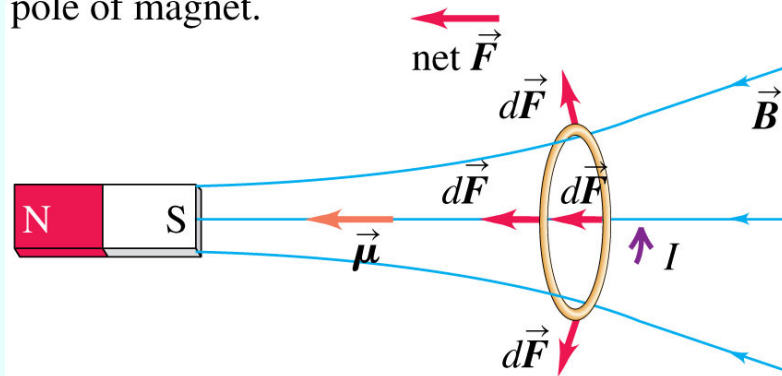
電偶極的位能為其方向角度的函數

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

(a) Net force on this coil is away from north pole of magnet.



(b) Net force on same coil is toward south pole of magnet.



© 2012 Pearson Education, Inc.

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

此式在不均勻磁場中也成立。

在不均勻磁場中，合力不為零，力的方向傾向使能量 U 降低。

磁偶極在磁場中的受力矩：

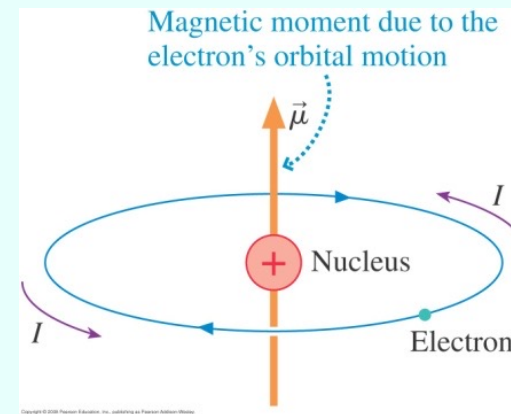
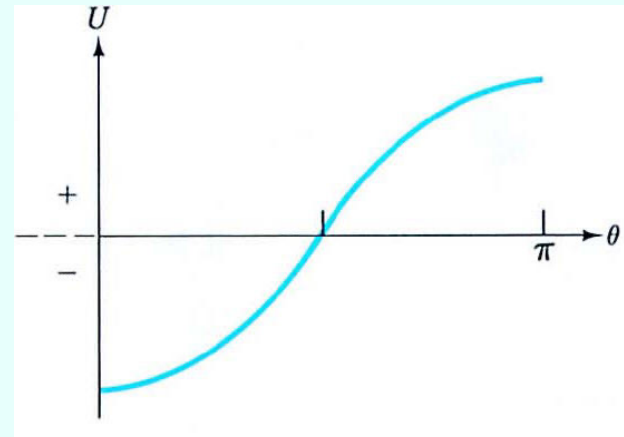
$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

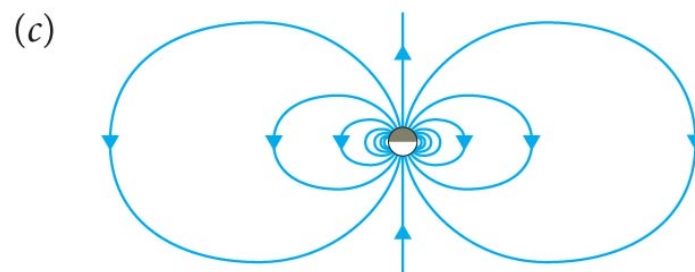
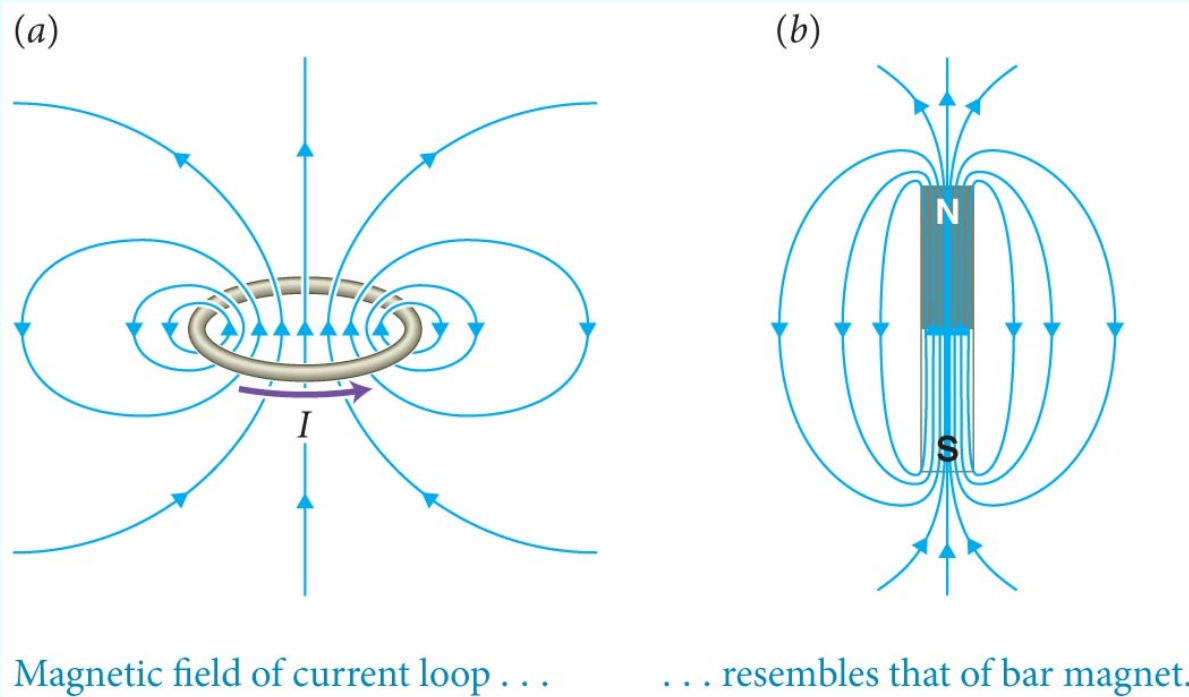
磁偶極在磁場中的能量：

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

力矩傾向使磁偶極旋轉至與磁場同向。

旋轉的帶電粒子是一個磁偶極。



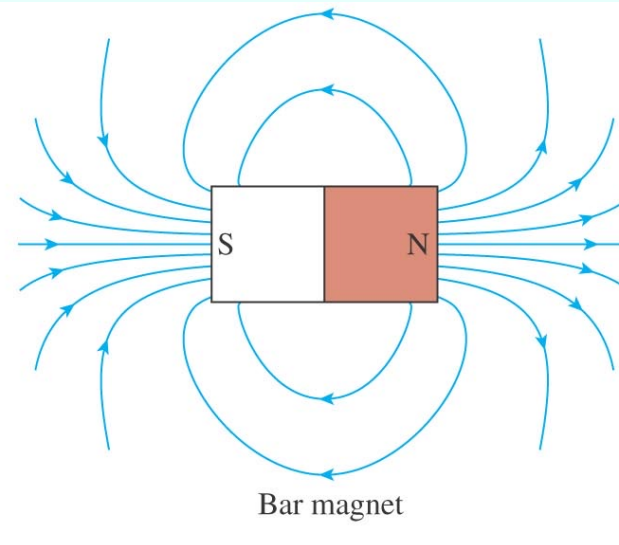
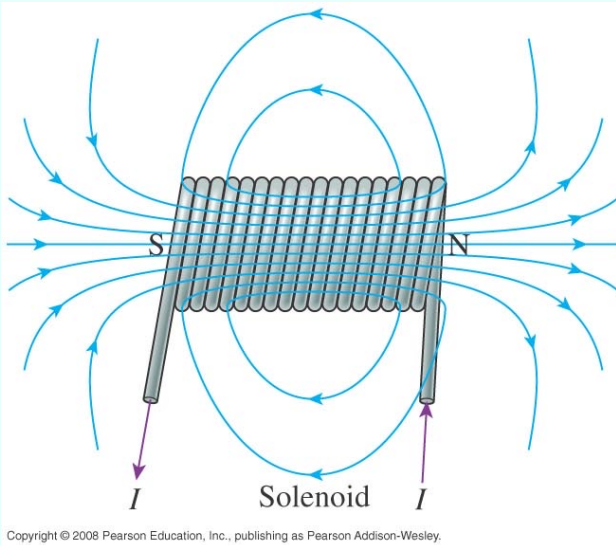
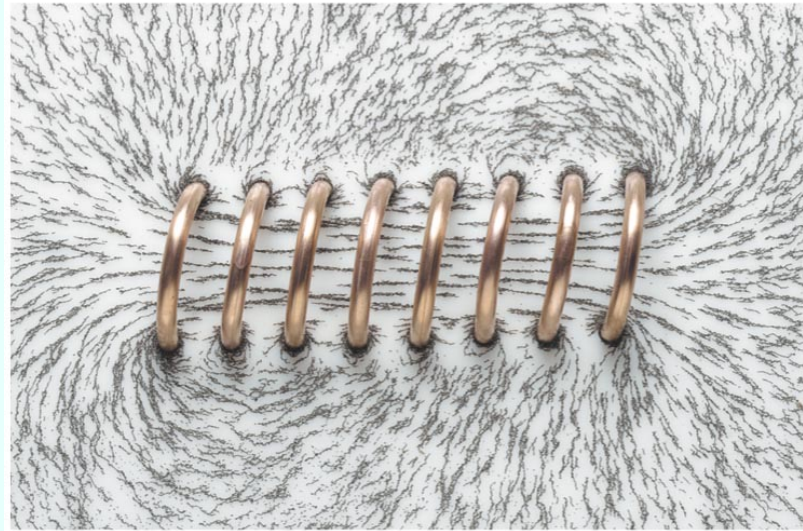


Shrinking either one yields field of infinitesimally small magnetic dipole.

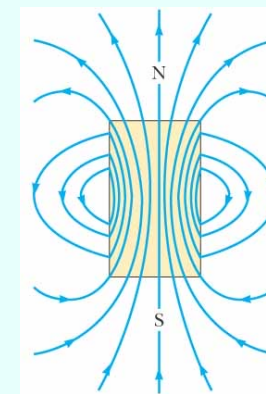
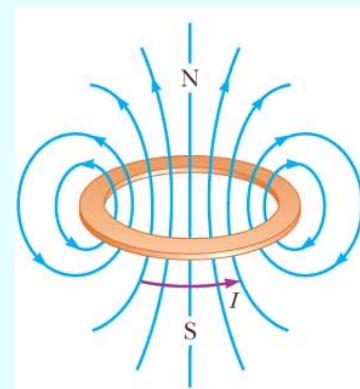
電流迴路的磁力線與磁鐵相同，他們都是磁偶極！



(a) A short solenoid



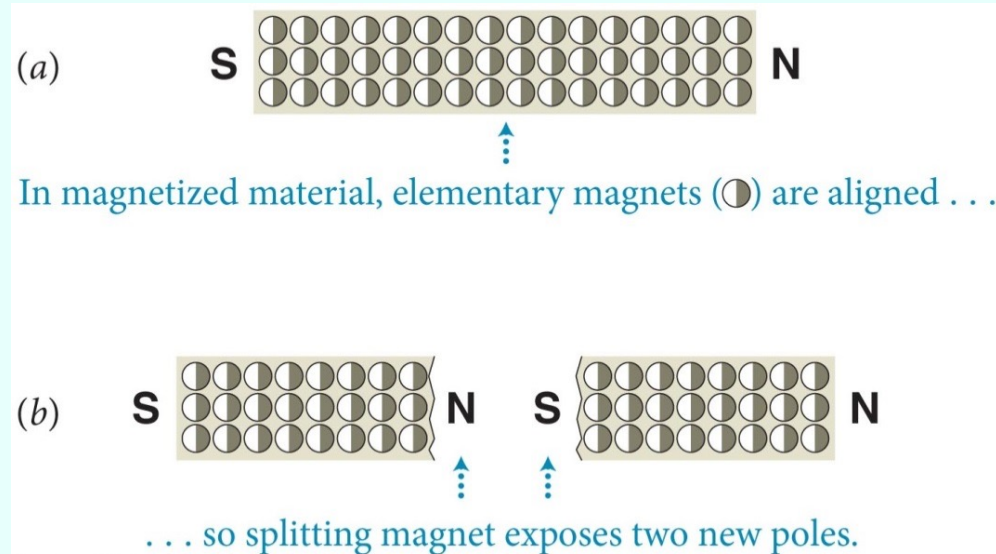
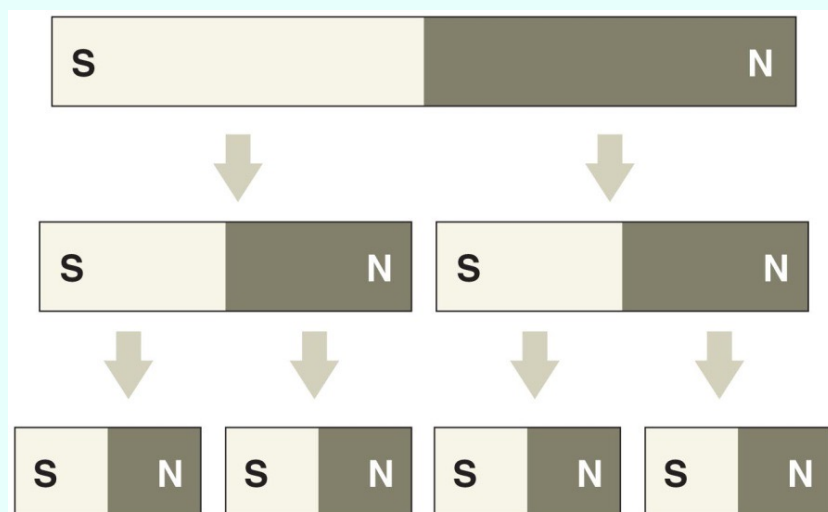
螺線管的磁場也與磁鐵的磁場相同！

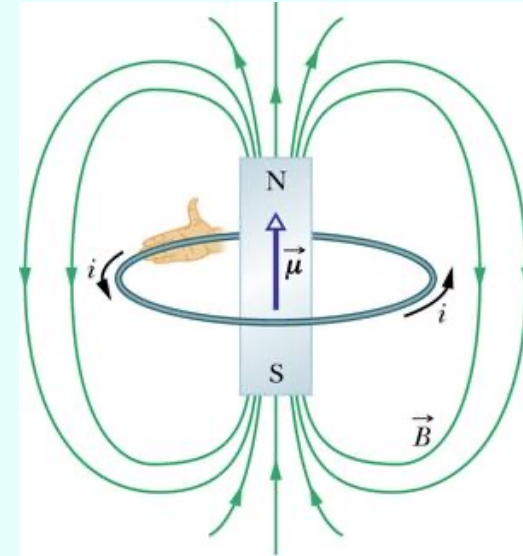
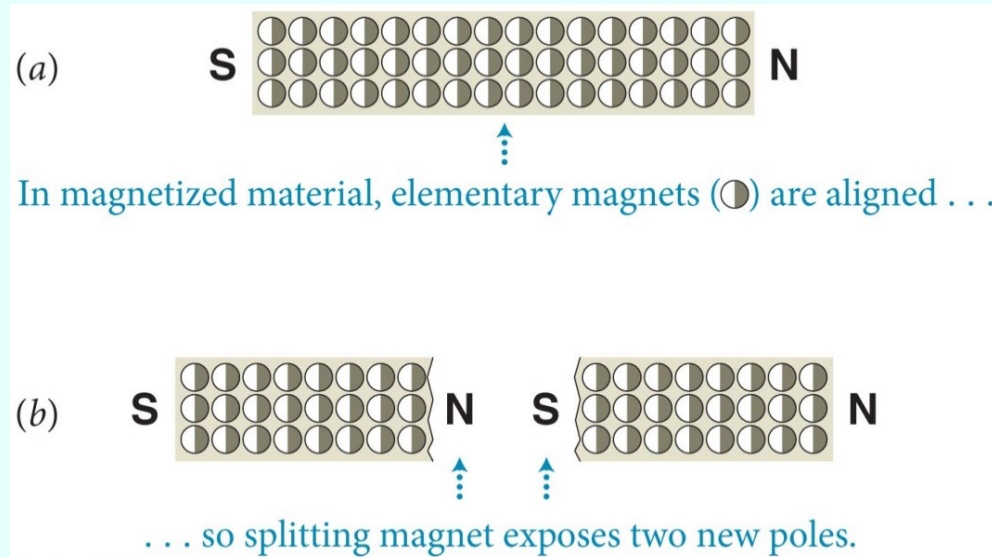


安培提出假設：磁鐵其實是一群封閉迴路組成

所以磁鐵切開後，依舊是封閉迴路的群組（原來群組的子群）

每一個群還是有南北極！

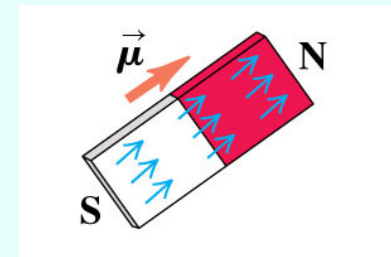




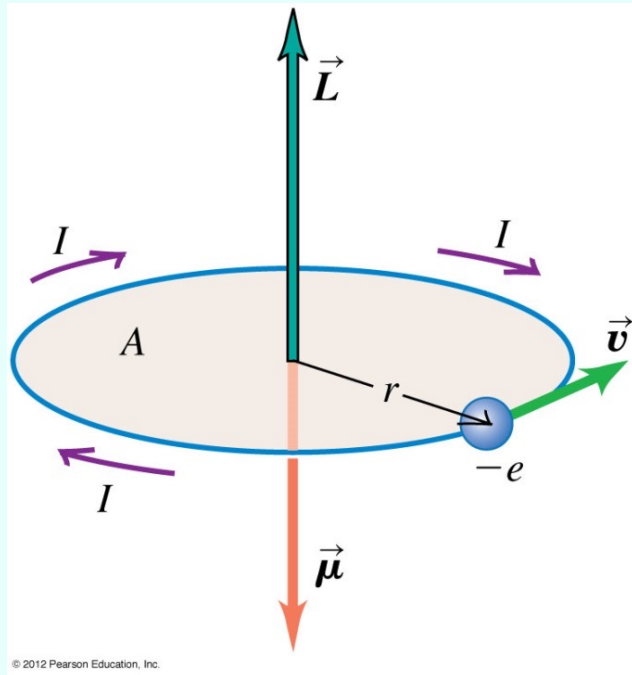
磁鐵是一個由許多磁偶極組成的磁偶極。

磁鐵的性質由它的磁偶極矩 $\vec{\mu}$ 完全決定。

磁偶極矩由南極指向北極！



旋轉的帶電粒子就是一個磁偶極，



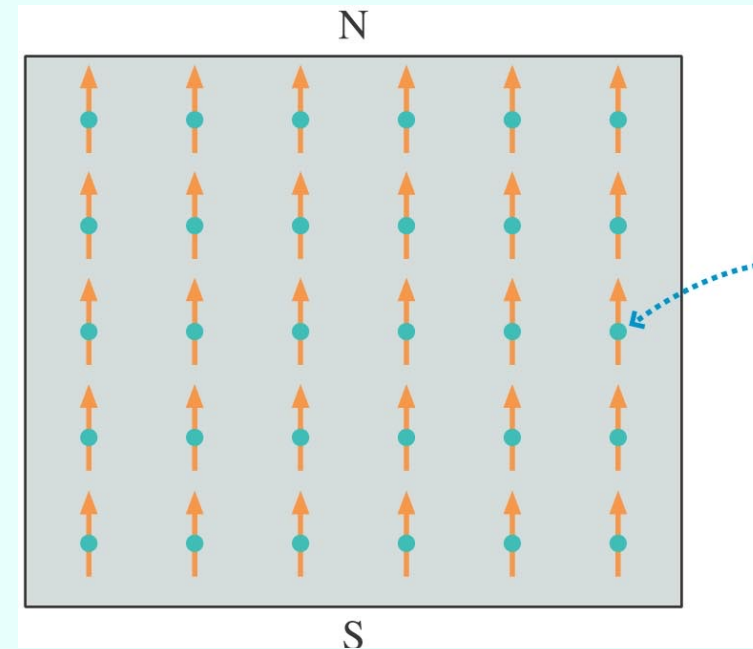
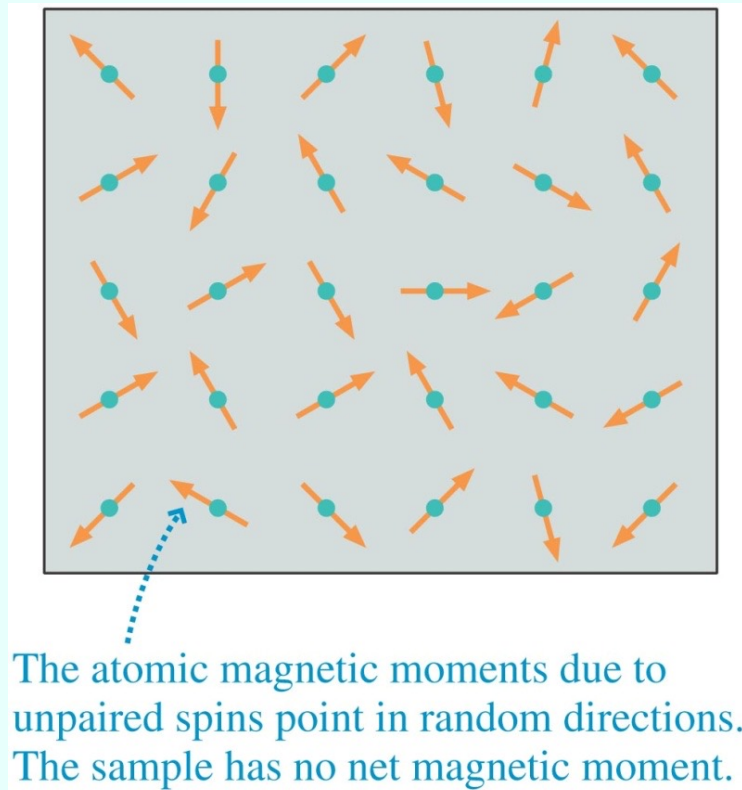
$$\mu = iA = i\pi r^2 = \frac{e}{\frac{2\pi r}{v}} \cdot \pi r^2 = \frac{erv}{2} = \frac{e}{2m} rp = \frac{e}{2m} L$$

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2m} \vec{L} \quad \text{磁偶極矩與角動量成正比}$$

此式對電子波也成立！

有角動量的帶電粒子是一個磁偶極！

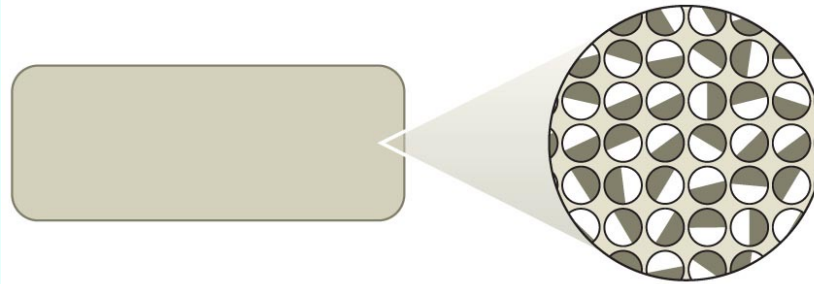
原子中有許多有角動量的電子，因此原子常是磁偶極。



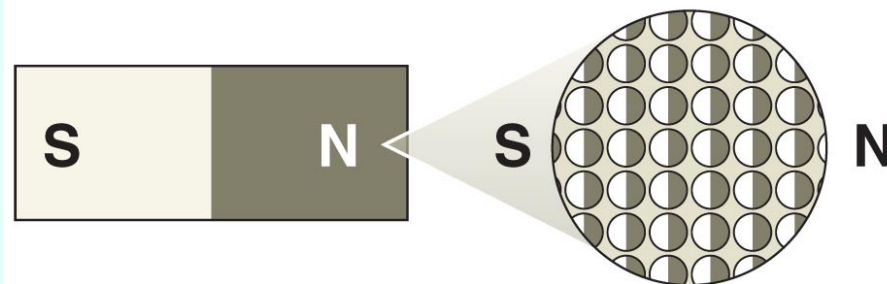
物質中本來就有許多磁鐵（磁偶極） 外加磁場可能使磁偶極排列同向（磁化）

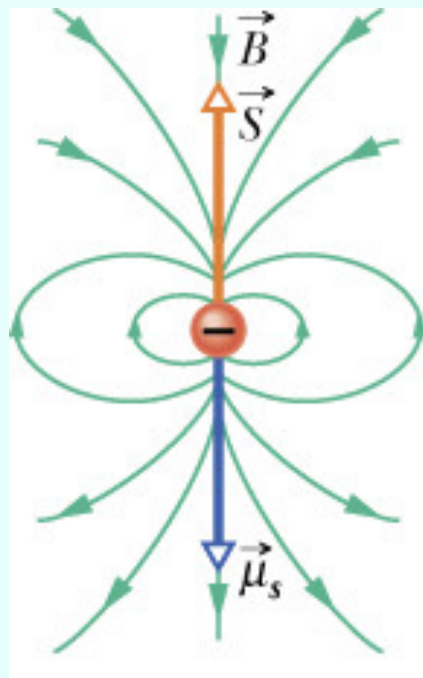
如果外加磁場消失後，磁偶極的排列（磁化）還能維持，這就形成磁鐵。

(a) Unmagnetized material: atoms oriented randomly



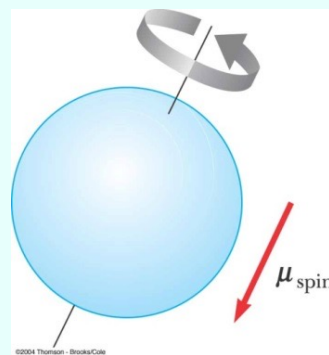
(b) Magnetized material: atoms aligned

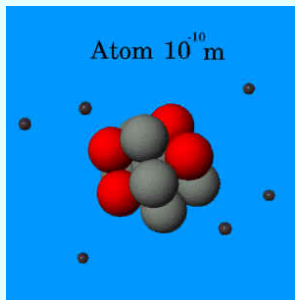




帶電粒子自旋也會形成的磁偶極

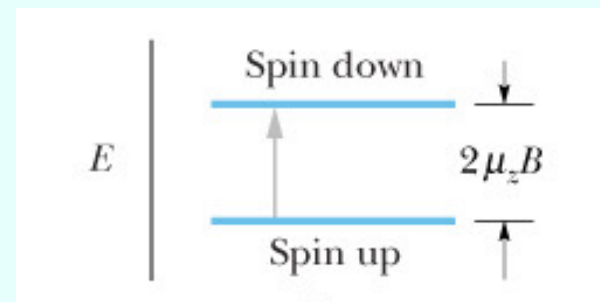
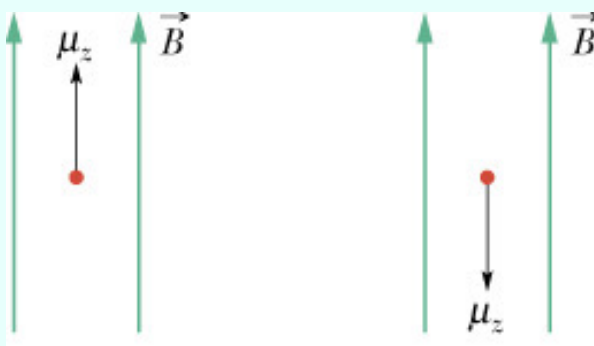
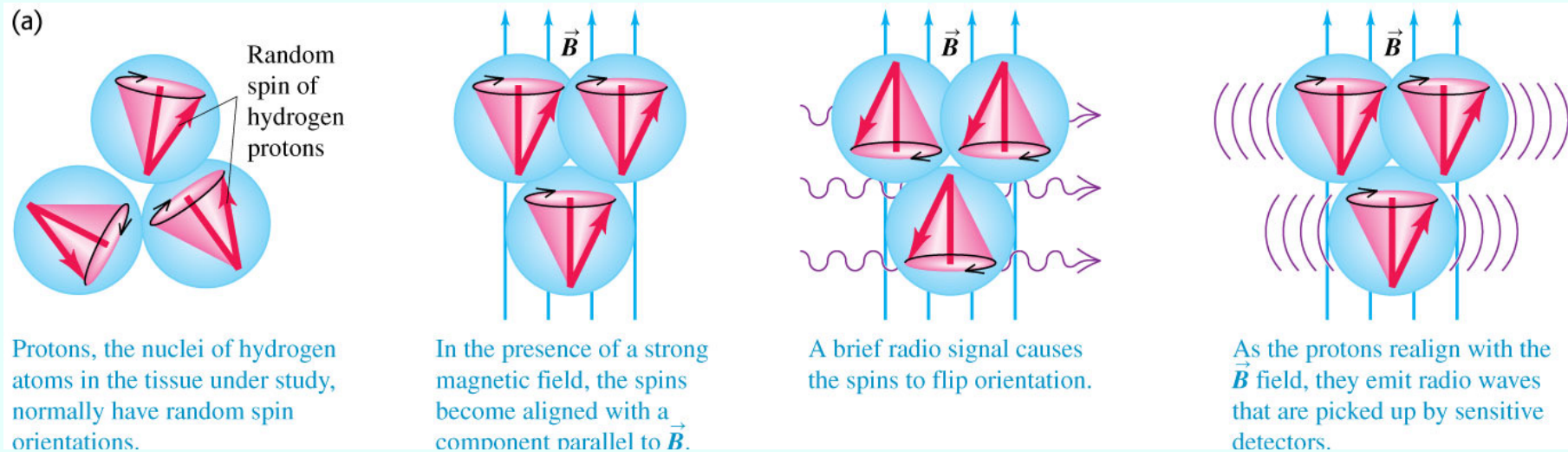
$$\vec{\mu} = -\frac{e}{m}\vec{S}$$





NMR 核磁共振

氫原子核（質子）的自旋 $s = 1/2$



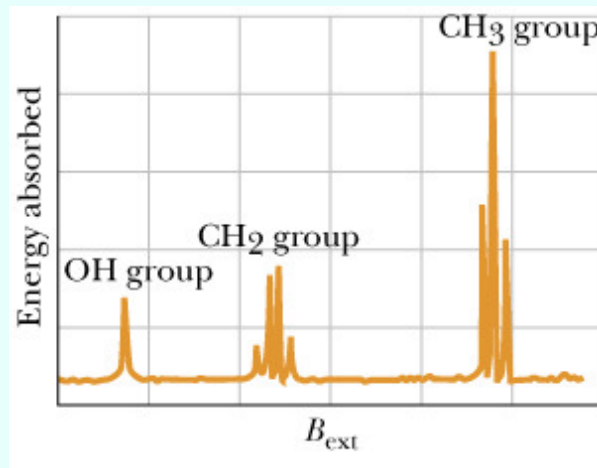
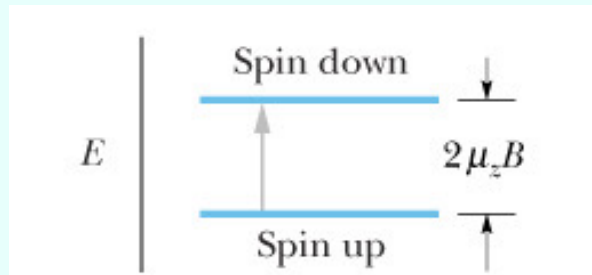
放出的光子大約在無線電波的頻率範圍

NMR 核磁共振

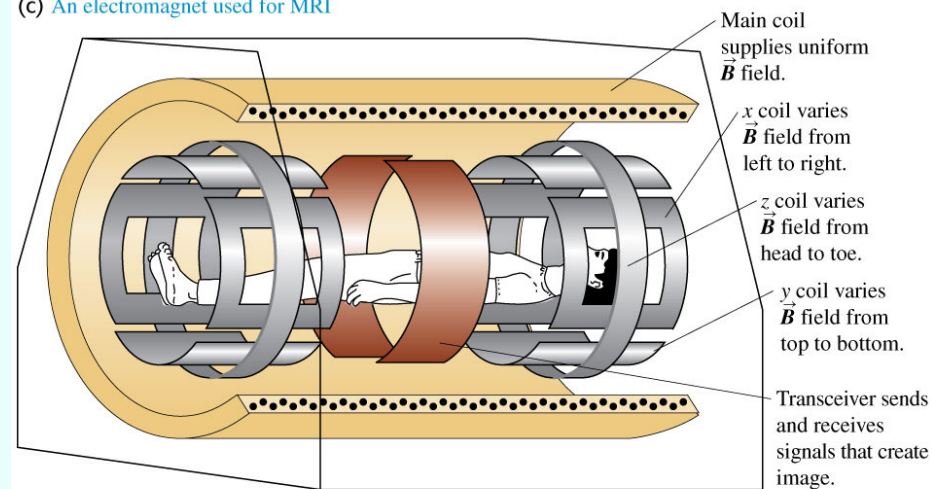
氫原子核所受磁場會被周圍原子輕微改變

能階差也會被周圍原子輕微改變

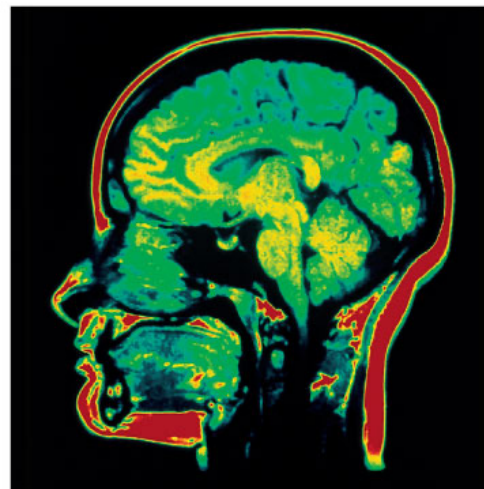
測放出的微波頻率可了解氫原子周圍的環境。



(c) An electromagnet used for MRI



© 2012 Pearson Education, Inc.



© 2012 Pearson Education, Inc.

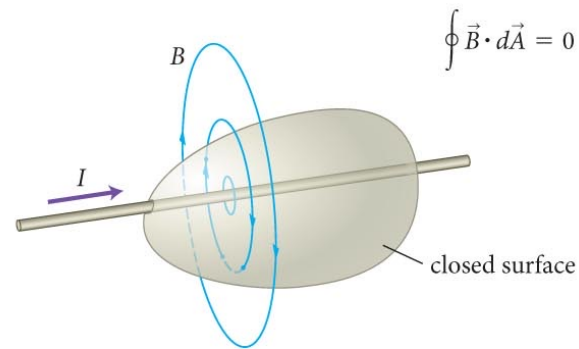
安培定律

磁場 B 是由電流 i 所產生。

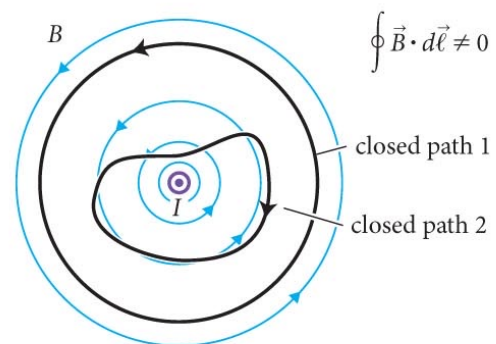
我們能不能為磁場找一個如高斯定律一樣的定律，

連接磁場 B 與它的源頭：電流 i ？

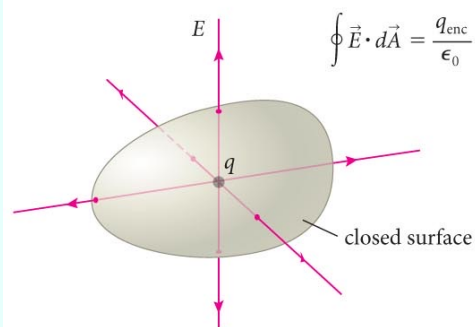
(b) Surface integral of magnetic field (Gauss's law for magnetism)



(d) Line integral of magnetic field



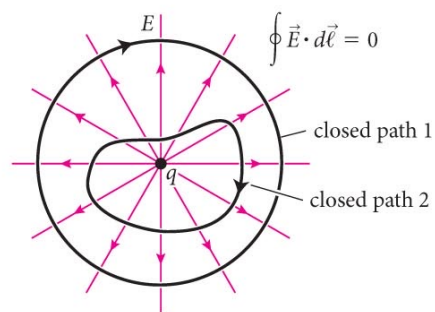
(a) Surface integral of electric field (Gauss's law)



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

這個面積分會挑選出放射狀的場線！

(c) Line integral of electric field



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

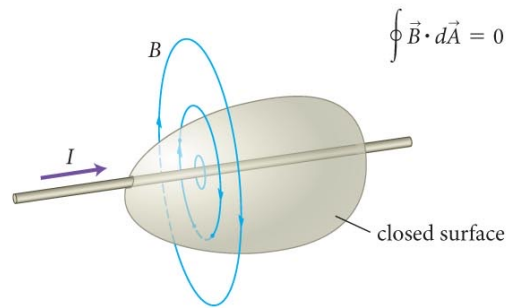
這個線積分會挑選出漩渦狀的場線！

電荷是放射狀電場的來源，挑出放射狀電場的面積分與電荷成正比： $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$

電荷的電場不是迴旋狀，挑出迴旋狀電場的線積分恆為零：

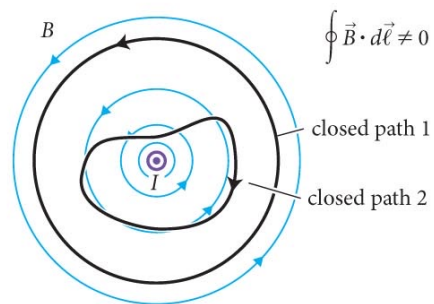
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

(b) Surface integral of magnetic field (Gauss's law for magnetism)



電流的磁力線非放射狀，磁通量恆為零。

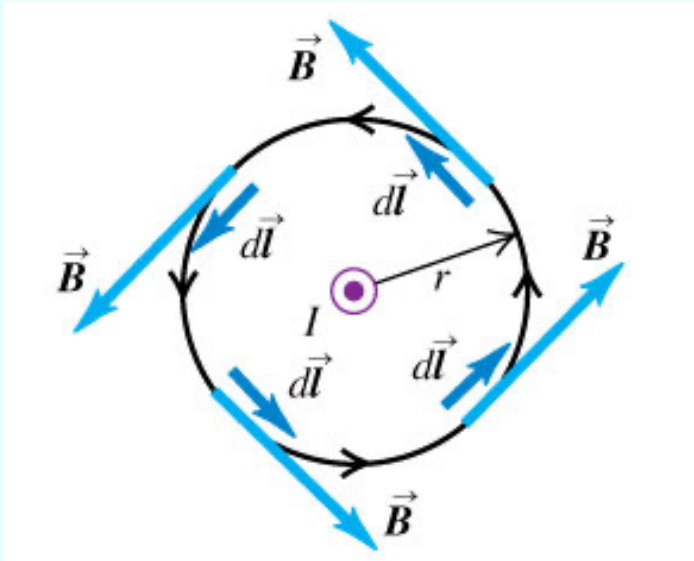
(d) Line integral of magnetic field



既然電流是漩渦狀磁場的來源，

那麼挑出漩渦狀磁場的線積分是否與電流成正比？

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \sim i$$



對於長直導線，取以導線為圓心的圓形路徑，計算磁場線積分。

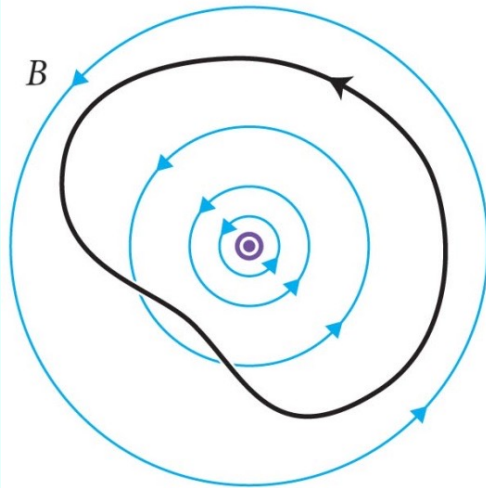
沿著整個路徑，磁場都與路徑同向，而且磁場大小是一個常數： $B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B \cdot dl = B \oint dl = B \cdot 2\pi r = \mu_0 i$$

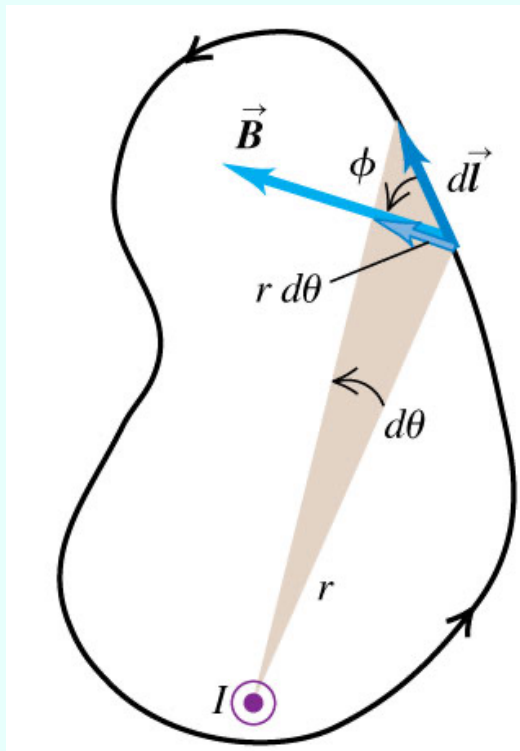
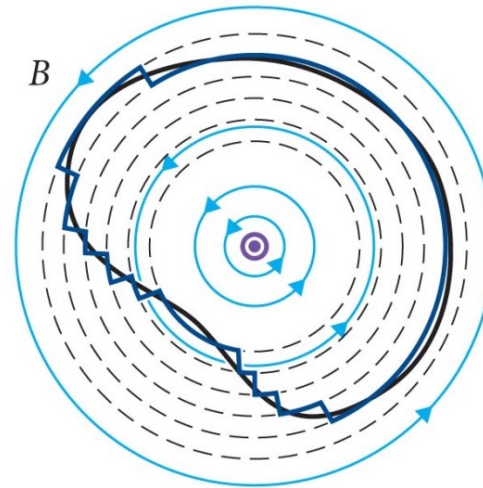
線積分與封閉圓路徑的大小 r 無關！

線積分與產生磁場的電流 i 成正比！

(a)



(b)



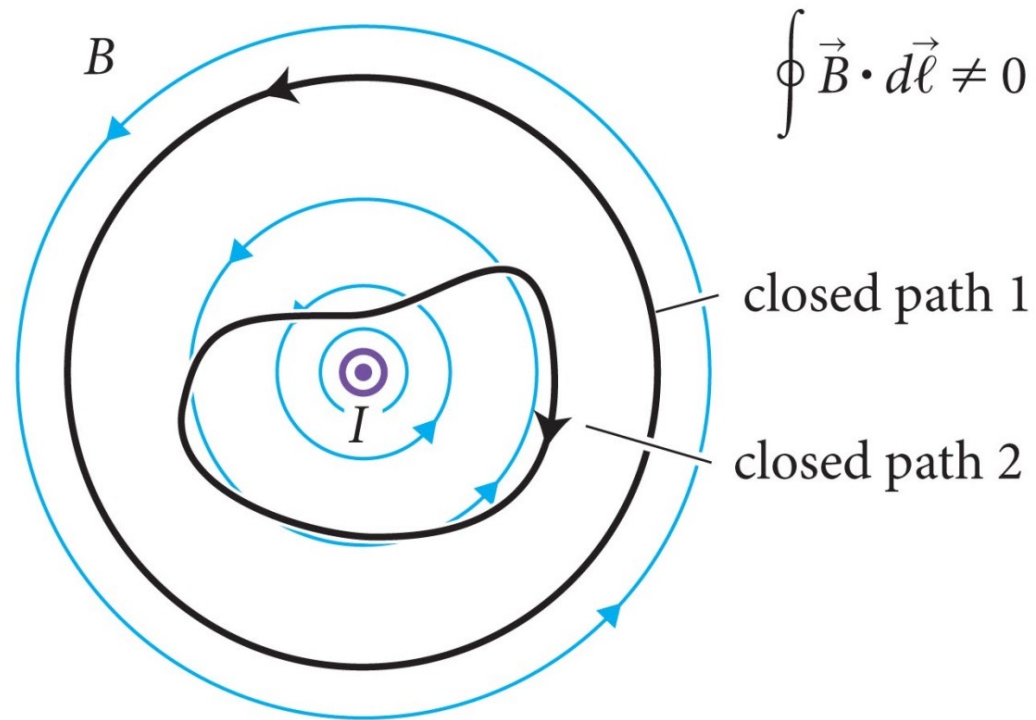
進一步考慮包圍此電流的任一封閉曲線：

線積分即以小位移 $d\vec{l}$ 近似封閉曲線，再加總 $\vec{B} \cdot d\vec{l}$ ：

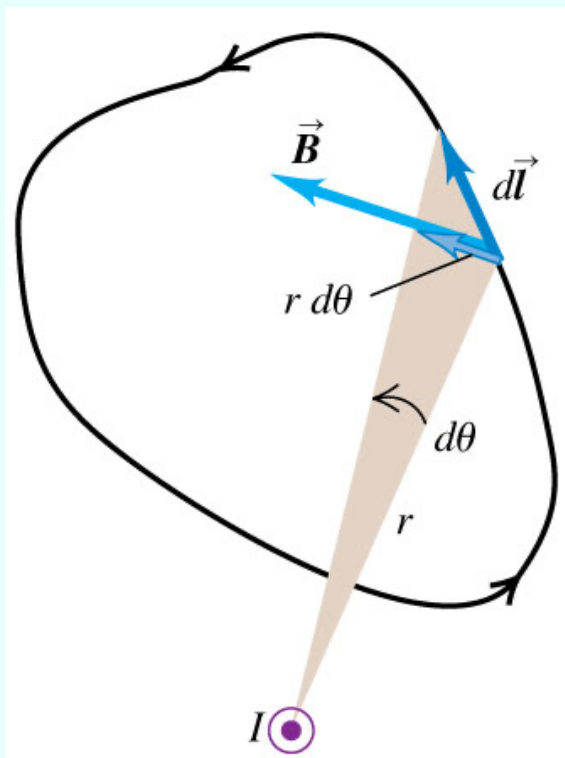
$\vec{B} \cdot d\vec{l}$ 的計算可將 $d\vec{l}$ 投影於圓周方向，即弧長 $r d\theta$ ！
而弧角 $d\theta$ 的和永遠是 2π ！

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \cdot (r d\theta) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \oint d\theta = \mu_0 i$$

(d) Line integral of magnetic field



包圍此電流的任一封閉曲線磁場線積分都相等，
與產生磁場的電流成正比！



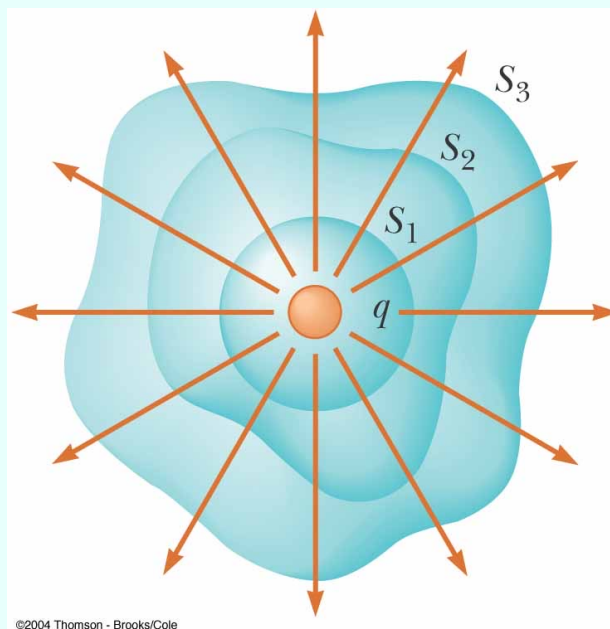
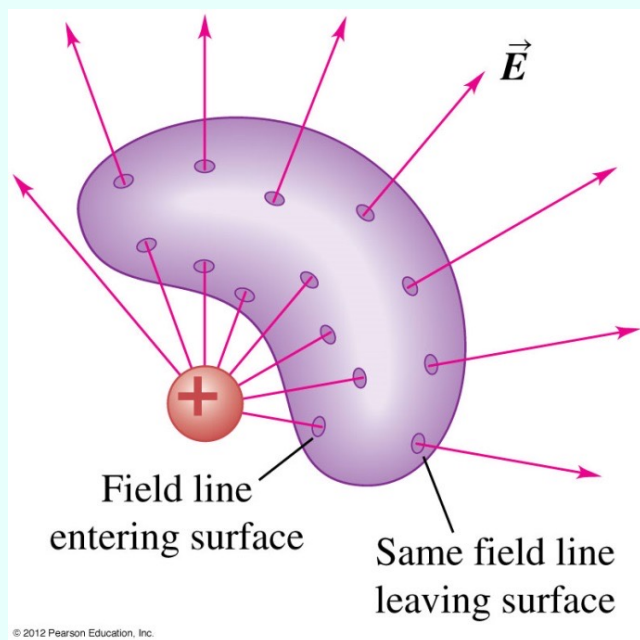
考慮任意不包圍此電流的封閉曲線：

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \cdot (r d\theta) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \oint d\theta = 0$$

沿不包圍此電流的封閉曲線，弧角 $d\theta$ 的和永遠是0！
線積分為零！注意：此曲線所包圍的電流為零。

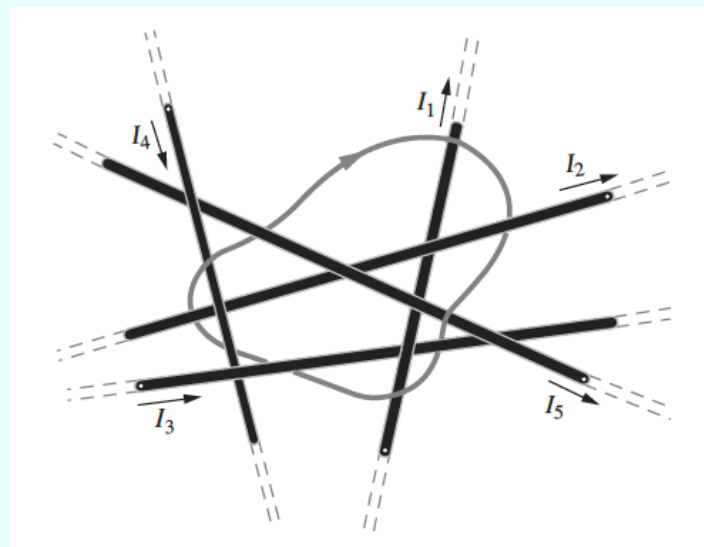
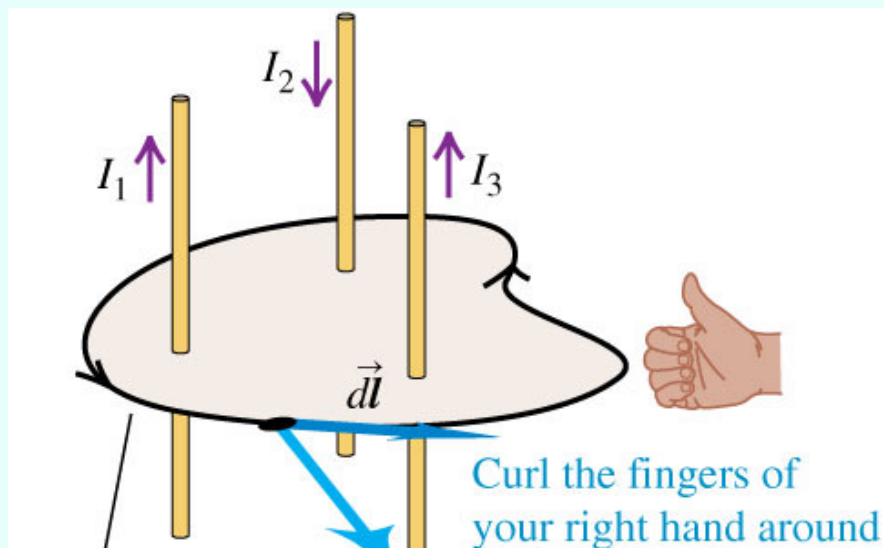
綜合以上，對任一封閉曲線，磁場的線積分正比於該曲線所包圍的總電流。

以上磁場線積分的結果，與電場面積分的高斯定律非常類似！



對任一包圍 q 的高斯面：

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$



當有一條以上電流通過時，個別電流產生的磁場（因此磁場線積分）可以疊加。
對任一封閉曲線，磁場的線積分正比於該曲線所包圍的總電流（電流疊加）。

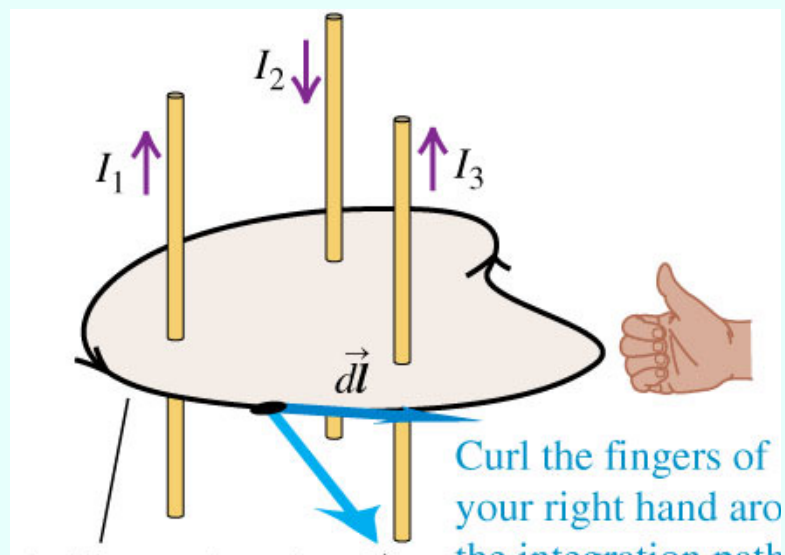
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i \quad \text{安培定律}$$

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$ ，Magnetic (Permeability) Constant

這個結果，即使導線不是直的，只要被該曲線包圍，上式都成立。

我們為磁場找到了一個如高斯定律一樣的定律，

連接迴旋狀磁場 $\vec{B}$ 與產生此磁場的源頭電流 i 。



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i$$

安培定律的方向

路徑有一個方向，此方向與通過曲面的正向電流方向以右手定則規定！

安培定律加上磁場的高斯定律，就等於Biot-Savart Law。

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i$$

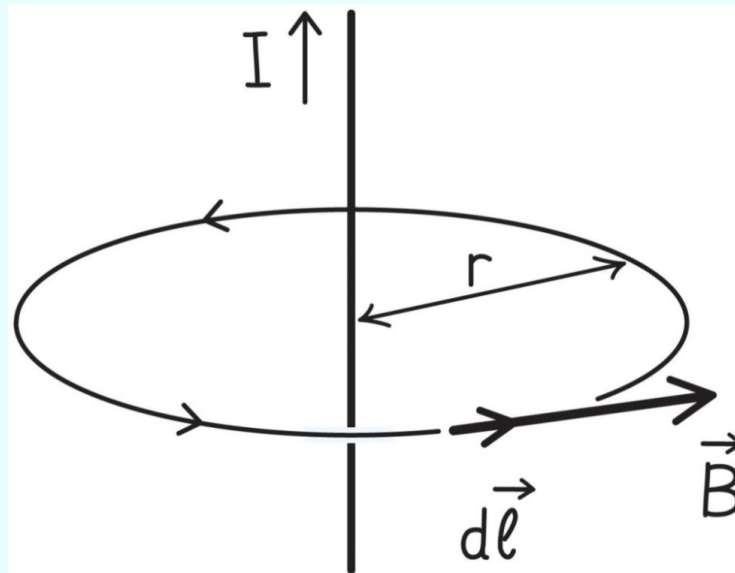


$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^2} d\vec{s} \times \hat{r}$$

靜磁學的Maxwell Equations

安培定律的應用

倒過頭來，以安培定律來推導長直導線周圍，距導線為 r 處的磁場。



磁場的方向是繞著導線的圓！而且是圓柱對稱。

以導線為圓心，取半徑 r 的圓形路徑為安培圈。

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint B \cdot dl = B \oint dl = B \cdot 2\pi r = \mu_0 i$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

磁場方向的討論：

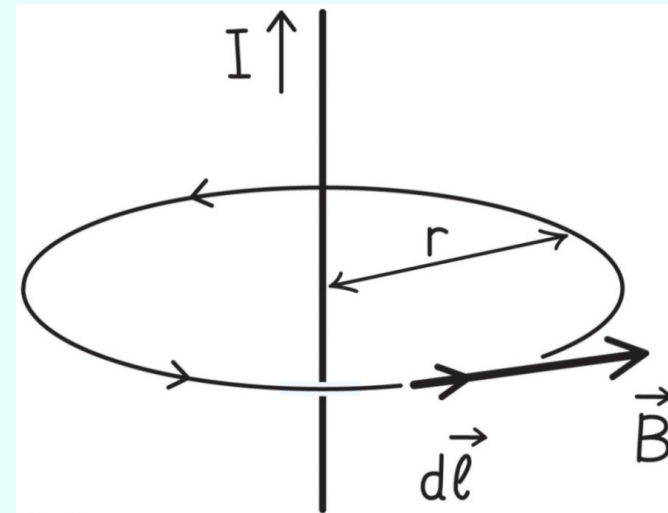
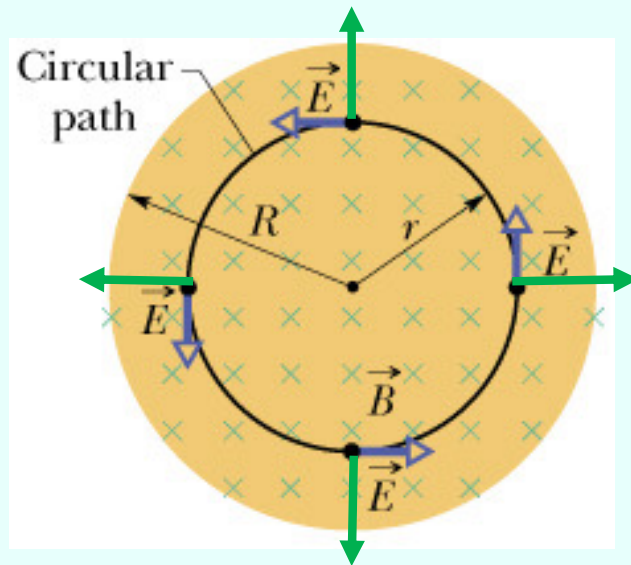
沿導線方向的磁場為零，否則必須由下方磁荷發出。

長直導線是圓柱對稱的。

因此產生的磁場也必須是圓柱對稱！

如下圖，圓柱對稱的磁場只可能是放射狀或漩渦狀

但磁場不能是放射狀。



因此磁場的方向是繞著導線的圓！

長直粗電流導線周圍距導線軸為 r 處的磁場
以導線軸為圓心，取半徑 r 的圓形路徑為安培圈：
在導線外：

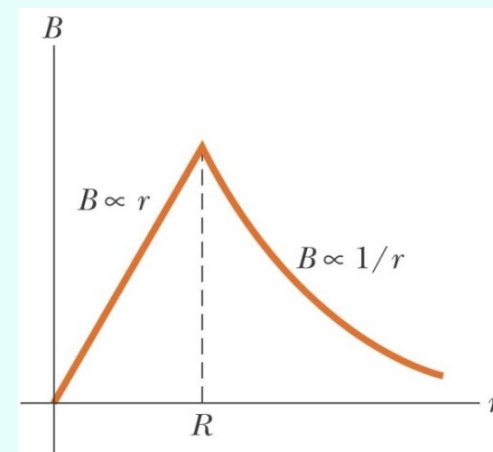
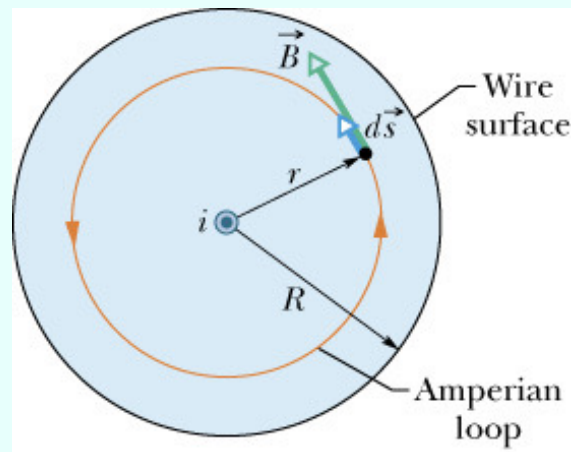
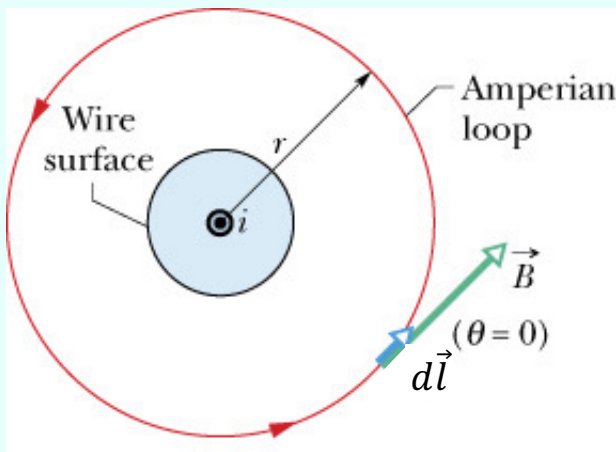
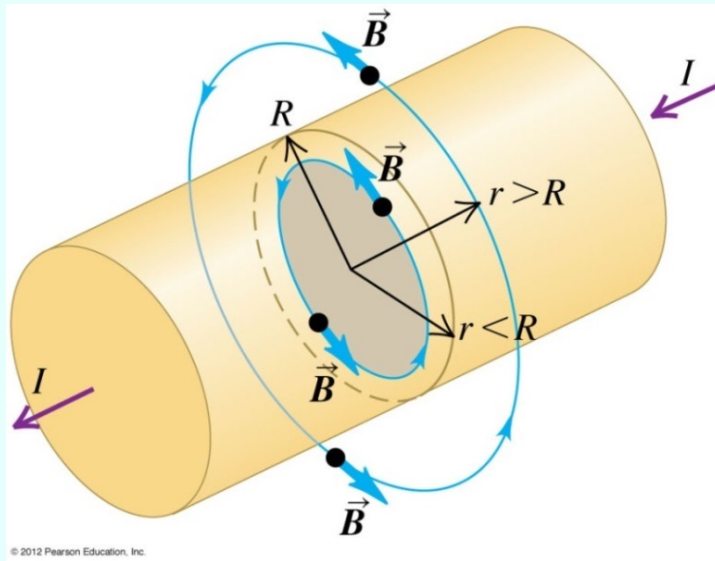
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B \cdot dl = B \oint dl = B \cdot 2\pi r = \mu_0 i$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \quad \text{導線外磁場如同電流集中於無限細的軸上}$$

在導線內：

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot \pi r^2 \frac{i}{\pi R^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R^2} r$$



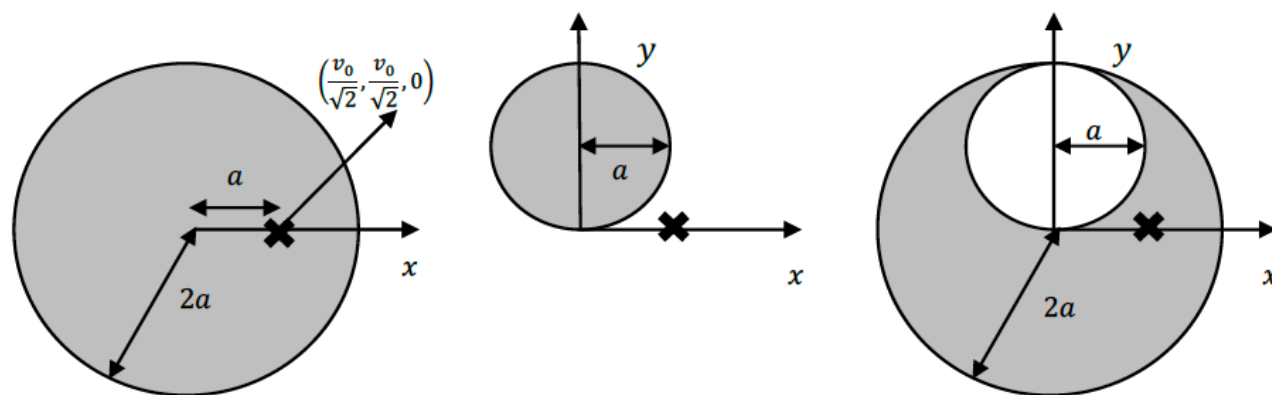
2. 考慮三條無限長的粗直導體電纜：

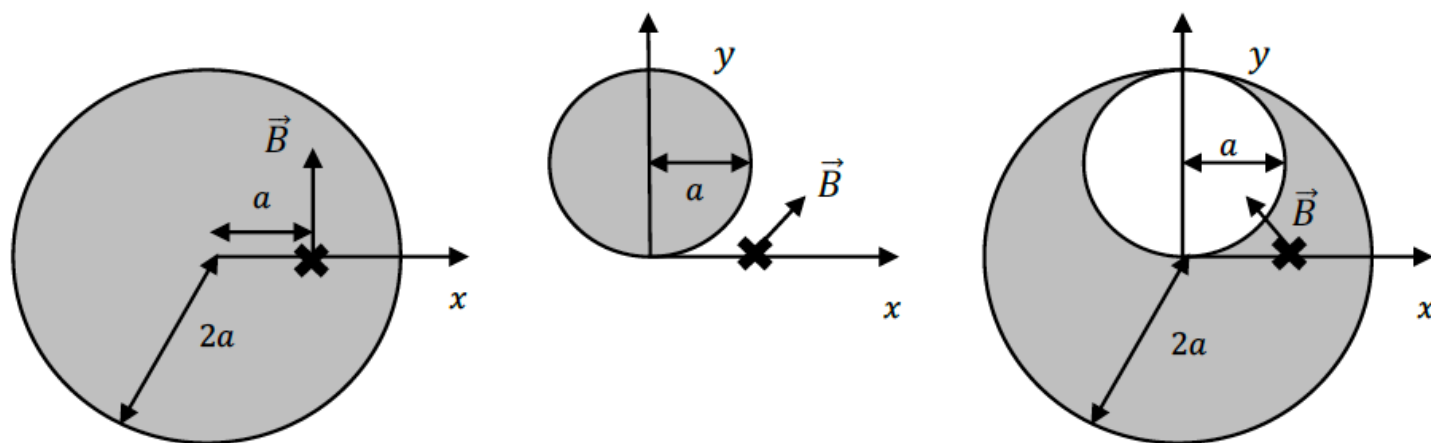
A. 第一條電纜為一長直導體圓柱，半徑為 $2a$ ，橫切面如下圖左所示，以軸心為原點。

設圓柱軸的方向射出紙面為 z 軸，橫切面上均勻電流密度大小是常數 j ，方向沿 z 軸方向。計算在 $(x, y) = (a, 0)$ 處，磁場的 x 分量及 y 分量。(10)

B. 設電纜導體之 resistivity 電阻率為常數 ρ ，寫下電纜導體內的電場大小，及通過電纜截面的電流大小。此電纜長度為 l ，寫下兩端的電位差。(10)

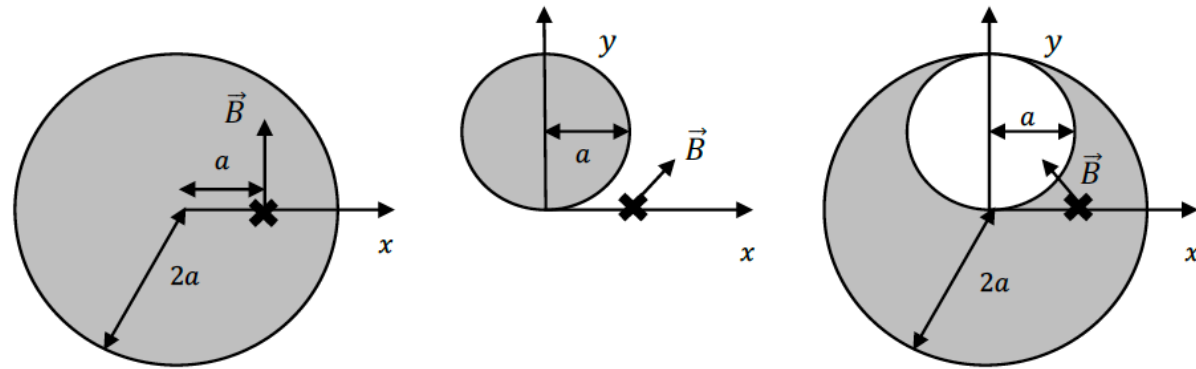
C. 若在 $(a, 0)$ 處有一正電荷 q ，以速度 $\vec{v} = \left(\frac{v_0}{\sqrt{2}}, \frac{v_0}{\sqrt{2}}, 0\right)$ 移動，計算此電荷所受的磁力大小及方向。(10)





- D. 移除此電纜，考慮第二條無限長的粗直導體電纜，半徑為 a ，軸同樣沿 z 軸，軸心置於 $(0, a)$ ，電流密度大小同樣是常數 j ，沿 z 軸方向。位置與橫切面如下圖中所示，同樣計算在 $(a, 0)$ 處的磁場的 x 分量及 y 分量。(5)
- E. 移除電纜，重新置入第三條電纜，此電纜為一類似 A 題中半徑為 $2a$ 的長直導體圓柱，但此導體圓柱內有一中空半徑為 a 的圓柱空間，當導電圓柱的軸心在 $(0, 0)$ ，中空圓柱的軸心在 $(0, a)$ ，導電圓柱與中空圓柱的軸都同樣沿 z 軸，位置與橫切面如下圖右所示，橫切面上的電流密度大小還是常數 j ，沿 z 軸方向。注意中空部分無電流通過。同樣計算在 $(a, 0)$ 處的磁場的 x 分量及 y 分量。(5)

解答：取一半徑為 a 之圓形安培圈，磁場的線積分等於圓所包圍的電流。



A. 沿此安培圈磁場與 $d\vec{l}$ 平行，而安培圈所包圍電流與所包圍面積成比例：

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2\pi a = \mu_0 j \pi a^2$$

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 j a$$

在 $x = a$ 處，磁場指向 y 方向，因此 $B_x = 0, B_y = \frac{1}{2} \mu_0 j a$ 。

B. $E = \rho j$ ， $I = j \pi a^2$ 。 $V = \rho j l$ 。

C. $\vec{B}$ 與電荷速度夾 45° ， $F = q v_0 B_y \sin 45^\circ = \frac{1}{2\sqrt{2}} q v_0 \mu_0 j a$ ，方向為沿 z 軸方向。

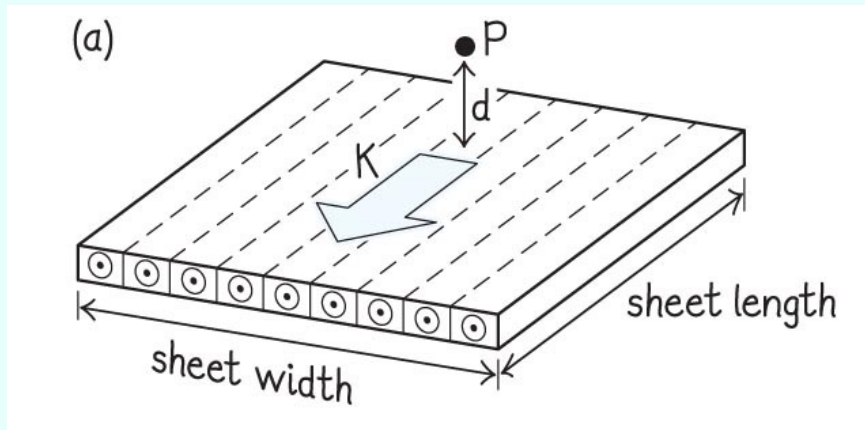
D. 計算類似 A，此時安培圈包圍所有電流，電流量與 A 相同，但測量點距離軸心為

$\sqrt{2}a$ ，因此在 $x = a$ 處的磁場 $B = \frac{1}{2\sqrt{2}} \mu_0 j a$ ，磁場方向與軸夾角為 45° ，因此 $B_x =$

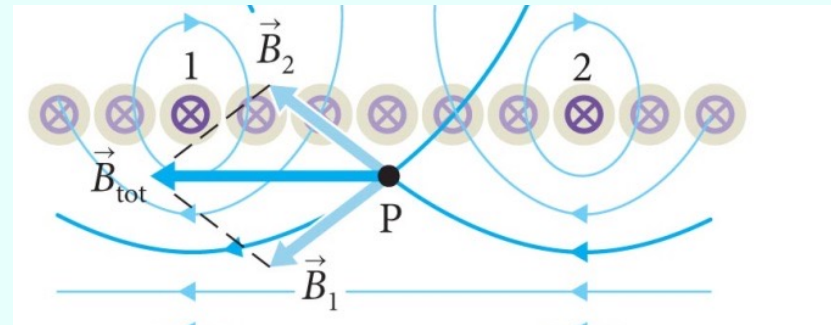
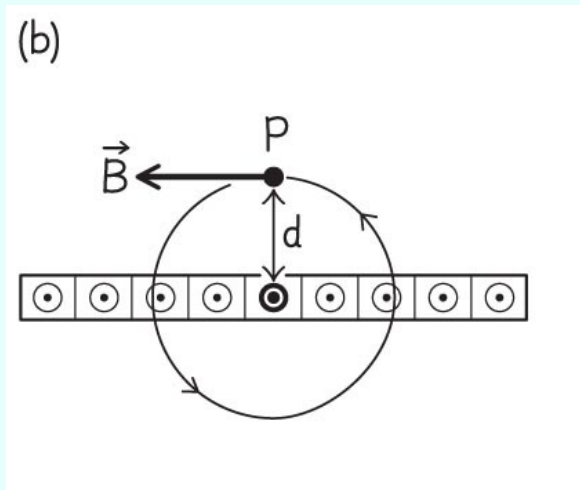
$$\frac{1}{4} \mu_0 j a, B_y = \frac{1}{4} \mu_0 j a。$$

E. 右圖即為左圖減去中圖， $B_x = -\frac{1}{4} \mu_0 j a, B_y = \frac{1}{4} \mu_0 j a$ 。

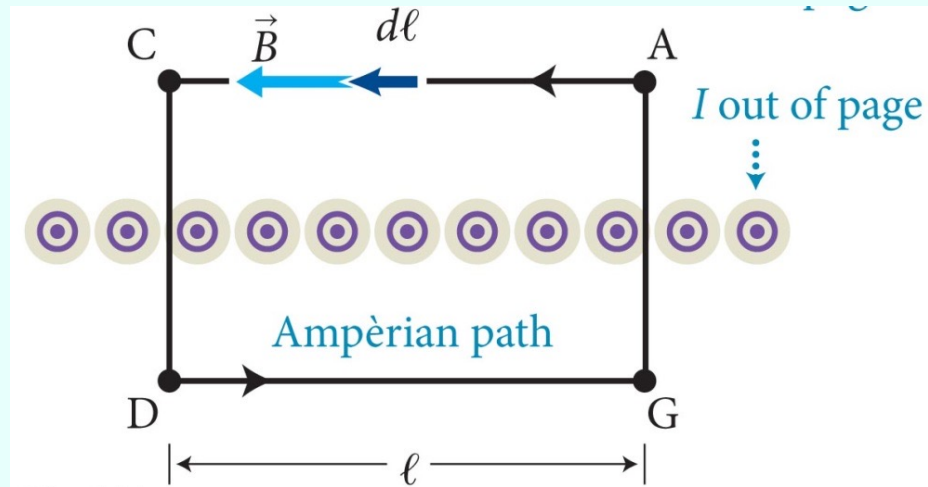
平面電流板周圍的磁場



磁場的方向為平行於平板，而垂直於電流方向。



取上下對稱的長方形路徑為安培圈：

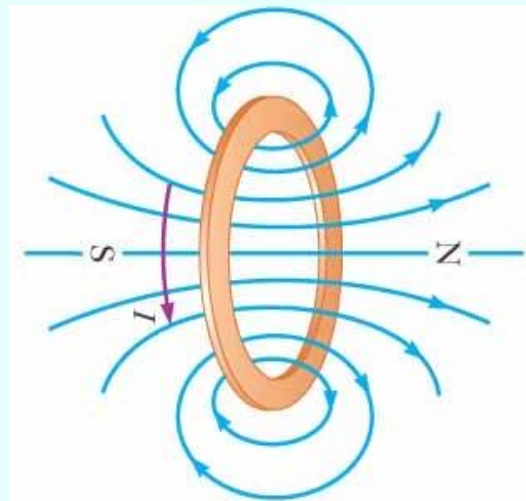
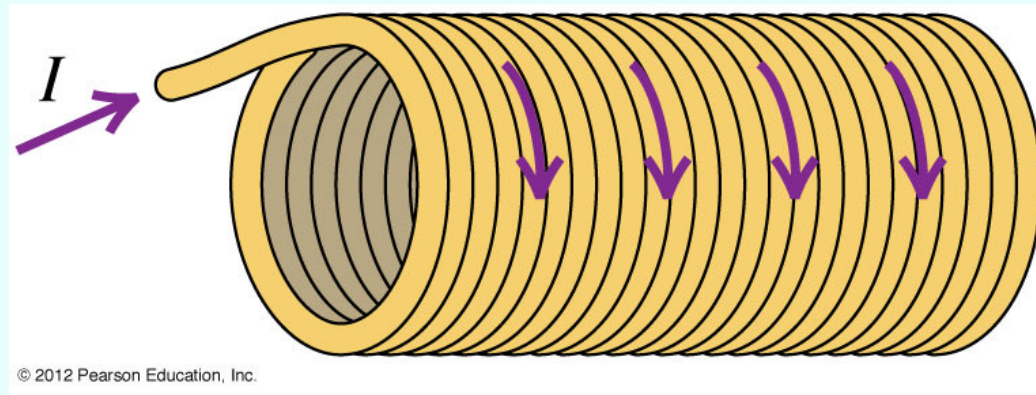


$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 2Bl = \mu_0 iN$$

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 i \cdot \frac{N}{l} = \frac{1}{2} \mu_0 n \cdot i$$

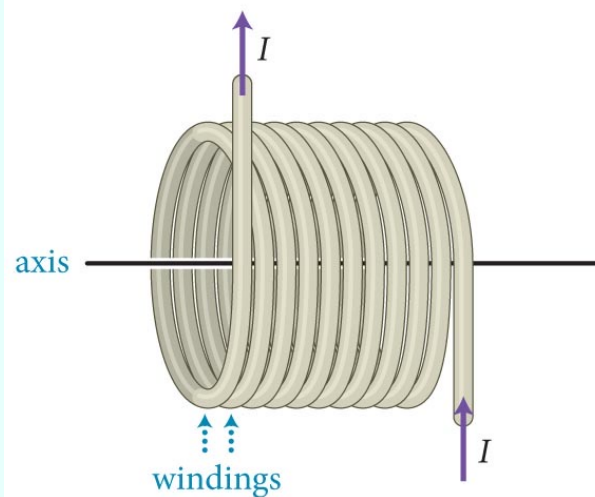
平面電流板周圍的磁場是均勻的！

Solenoid 螺線管

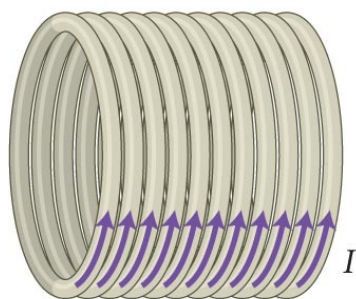


螺線管是許多圓形迴路Coil 的組合

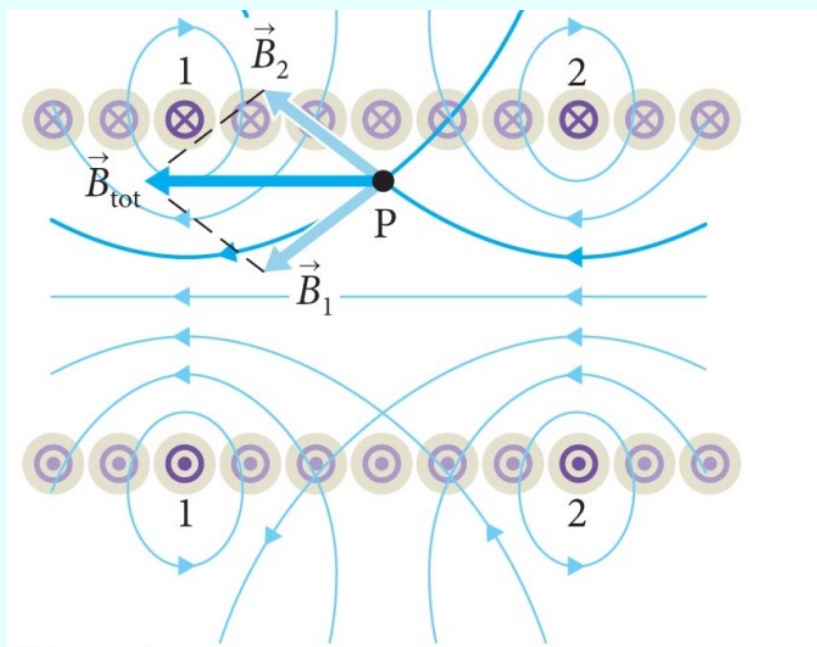
(a) A solenoid



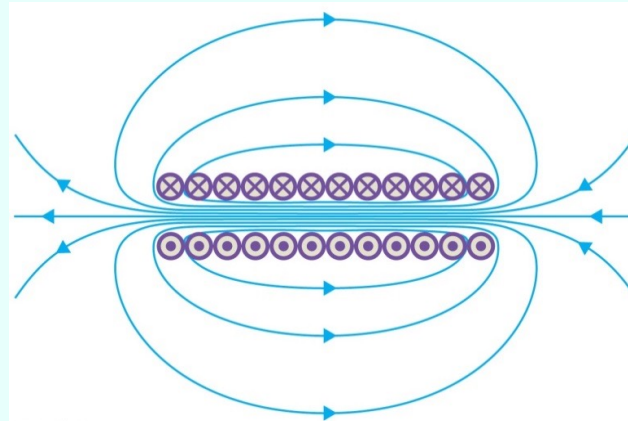
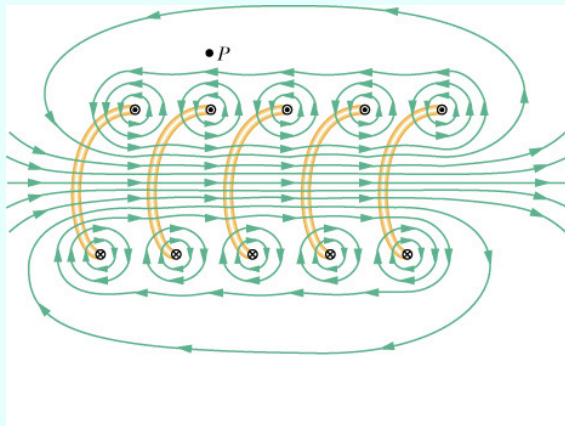
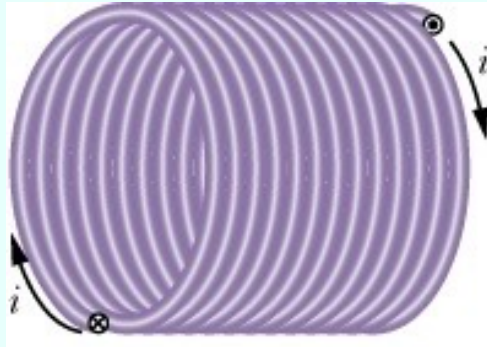
(b) A solenoid approximated as a stack of parallel current loops



若螺線管夠密，可以一系列線圈近似！

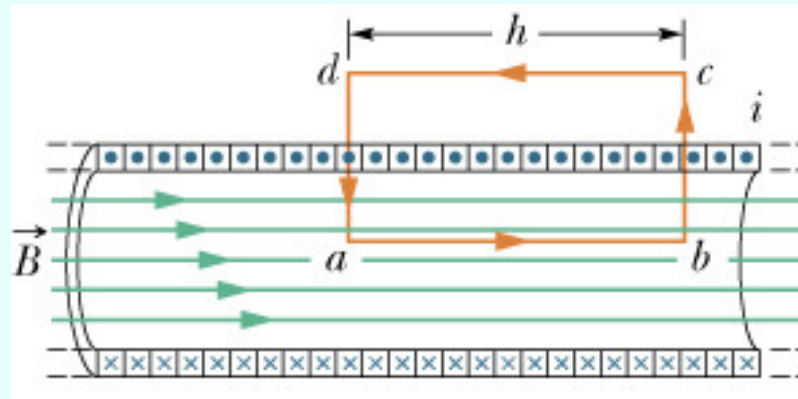


管內磁場方向為平行於軸的方向。



當管很長時，管外的磁力線分布會極稀疏，
可以零磁場近似。

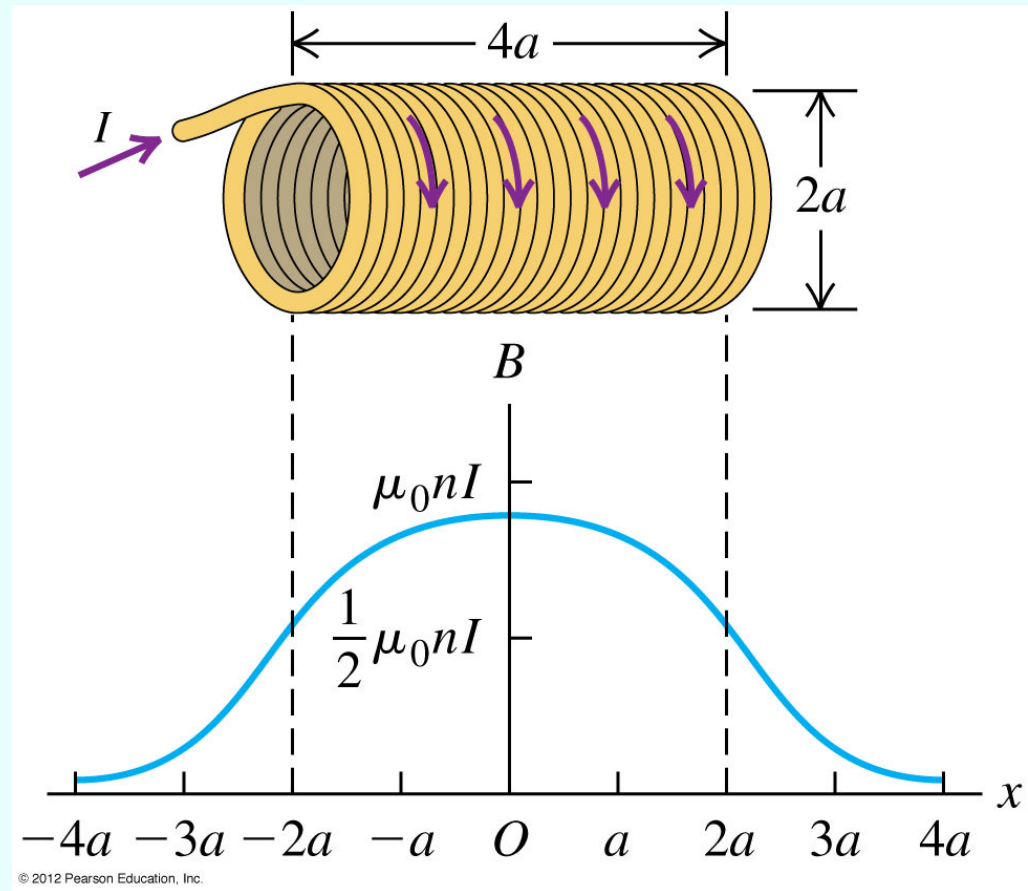
管內磁力線近似緊密分佈，可以看成均勻磁場。



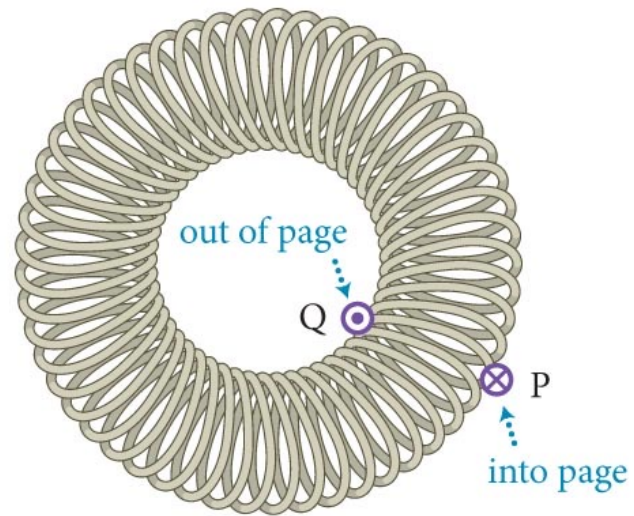
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = Bh = \mu_0 iN$$

單位長度的圈數： n

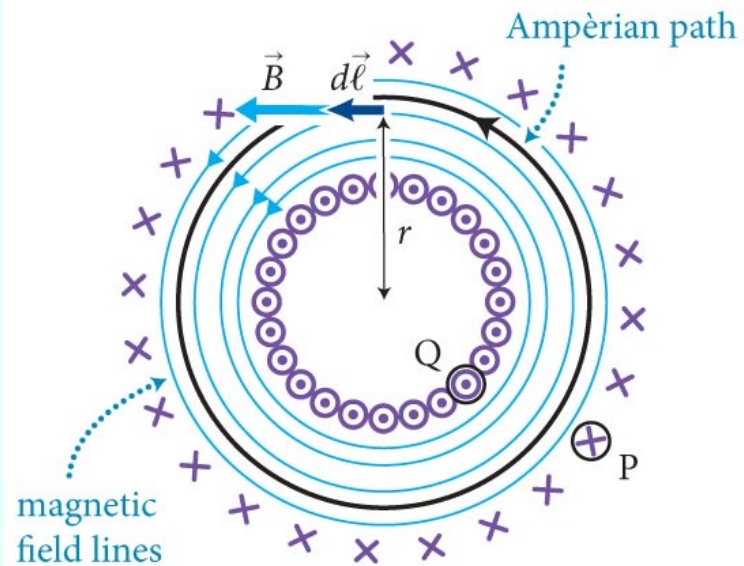
$$B = \mu_0 i \cdot \frac{N}{h} = \mu_0 n \cdot i$$



(a) Toroid



(b) Cross section showing magnetic field and a choice of Ampèrian path



我們得到兩個有關磁場的方程式：

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i$$

電流是磁場的基本來源，而且產生的磁場是漩渦狀的，不是放射狀的。

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

電荷是電場的基本來源，而且產生的磁場是放射狀的，不是漩渦狀的。

靜電磁學的Maxwell Equations

等一下，這方程式好像有一點問題！

人類思想史最精彩的一頁！



James Clerk Maxwell (1831-1879)



Maxwell's birthplace at 14
India Street, Edinburgh

Glenlair House Corsock Scotland





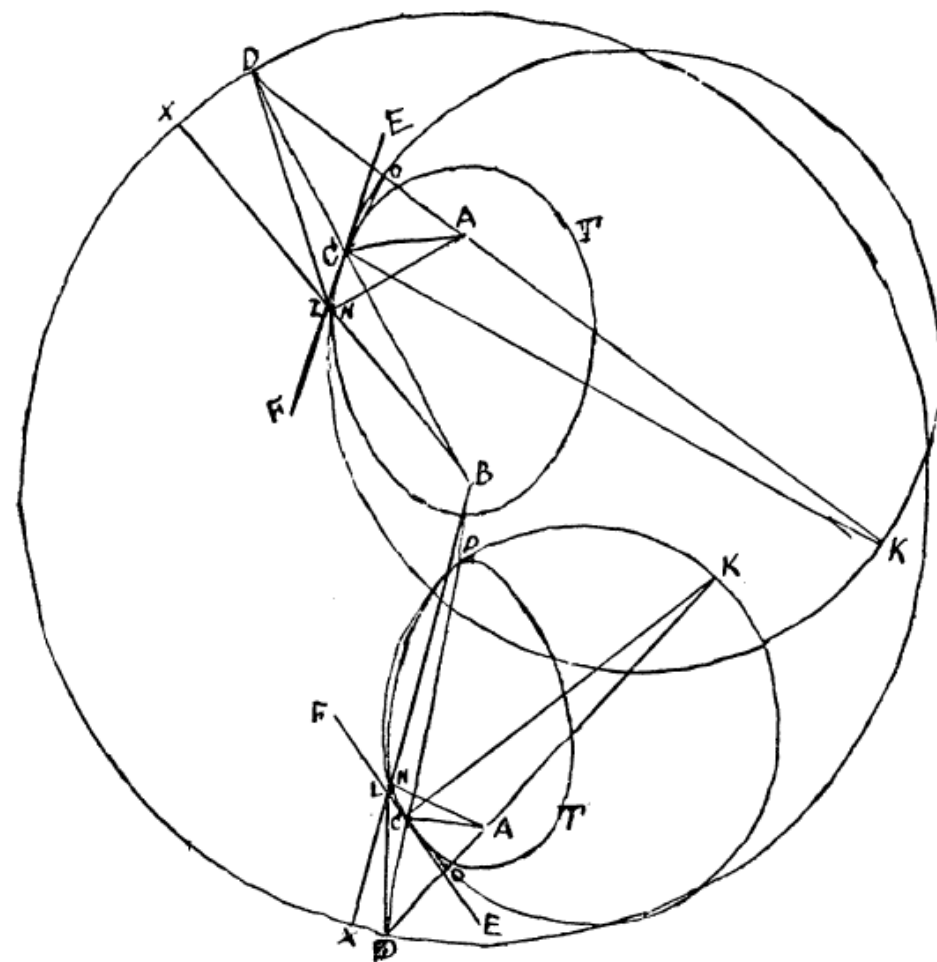
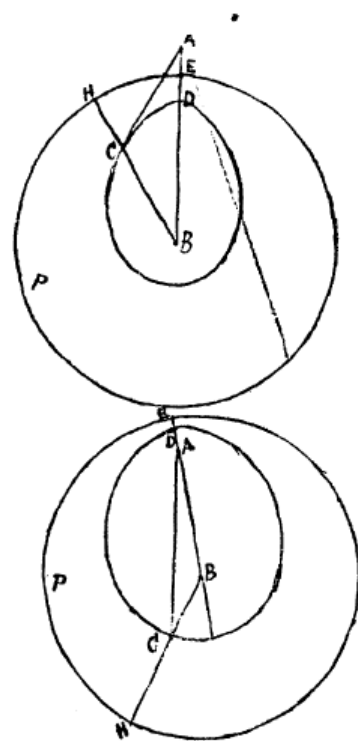
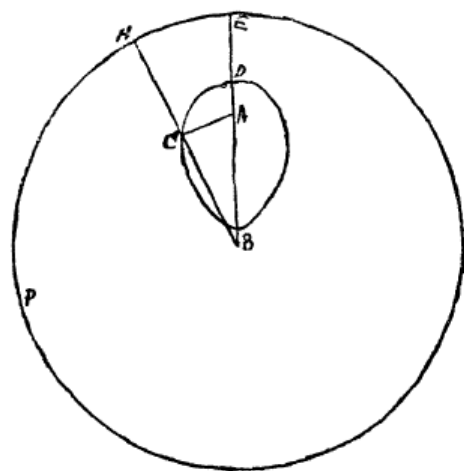
Glenlair
1841





*The Vampyre,
Compyst into Meter, by
Jas(berk) Macswell.*

*Thair is a Knicht's rydir through the wood,
And a douchty Knicht is he;
And rare he is on a message sent,
He rydis as hartilie.
He passit the aik, and he passit the birch,
And he passit monie a tree,
Bot pleasant to him was the sough as s'lim,
For beneath it he did see*



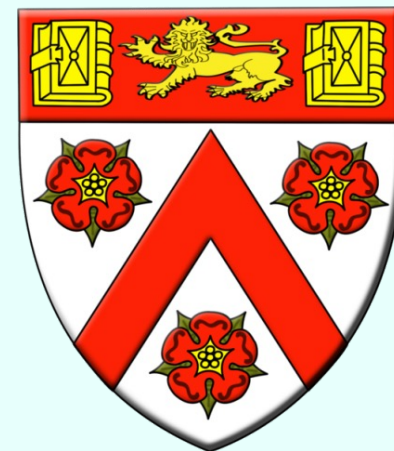
Edinburgh Academy



Edinburgh University

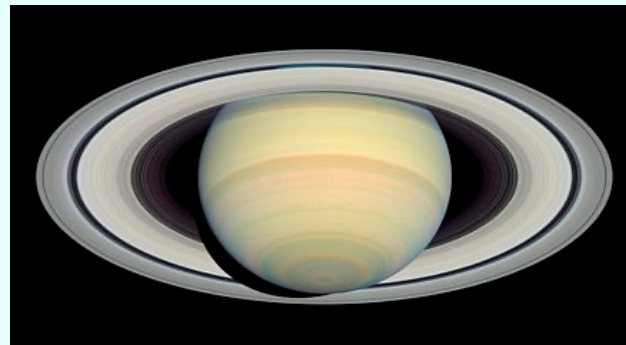
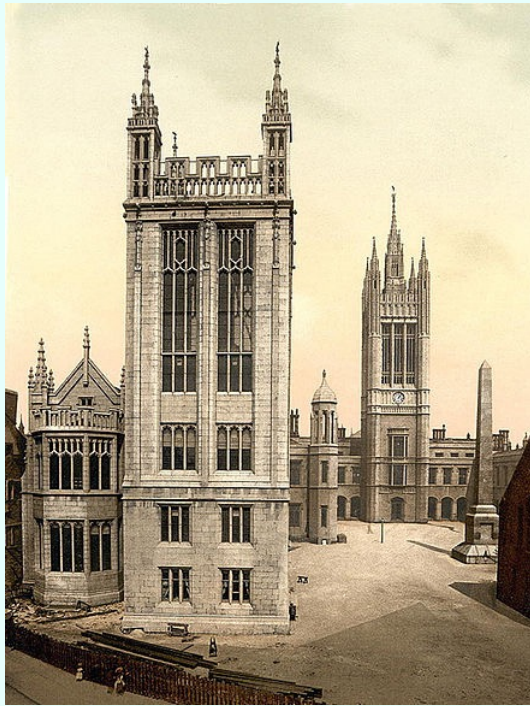


Trinity College, Cambridge





Marischal College, University of Aberdeen, 1856–60

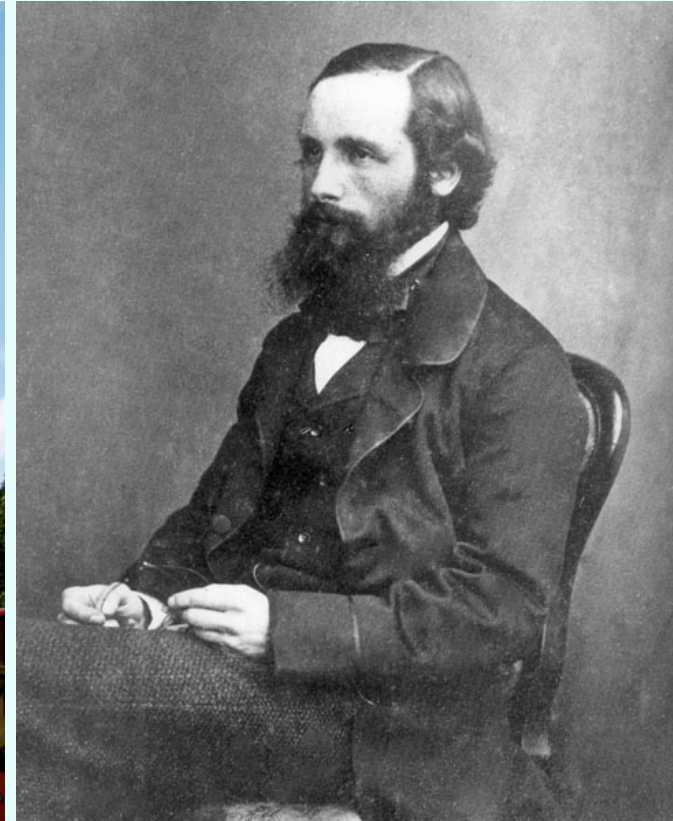


Maxwell was laid off after Marischal merged with neighboring King's College.

King's College London 1860

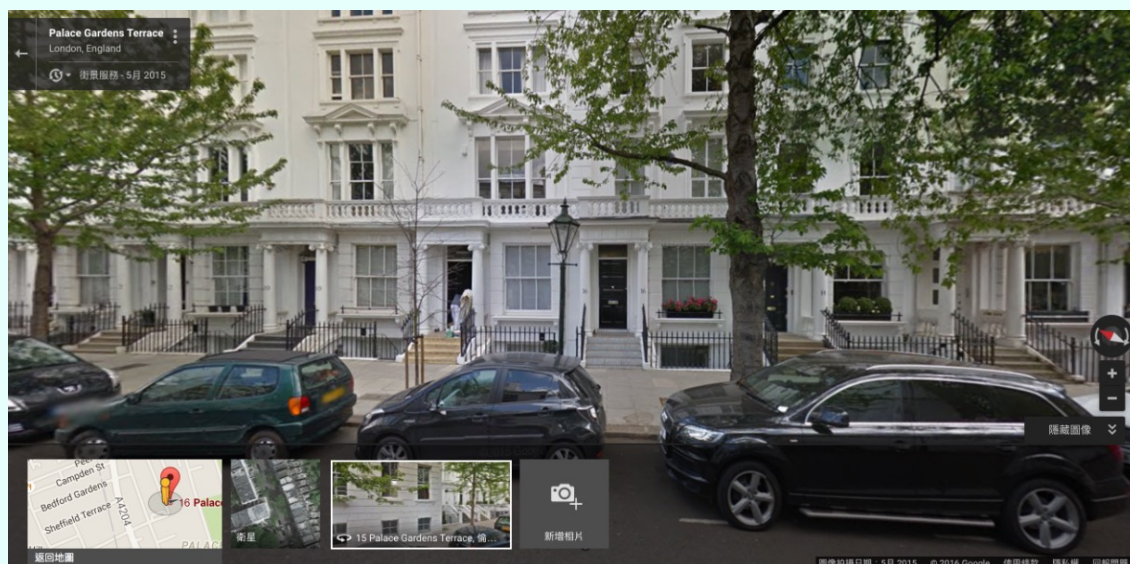
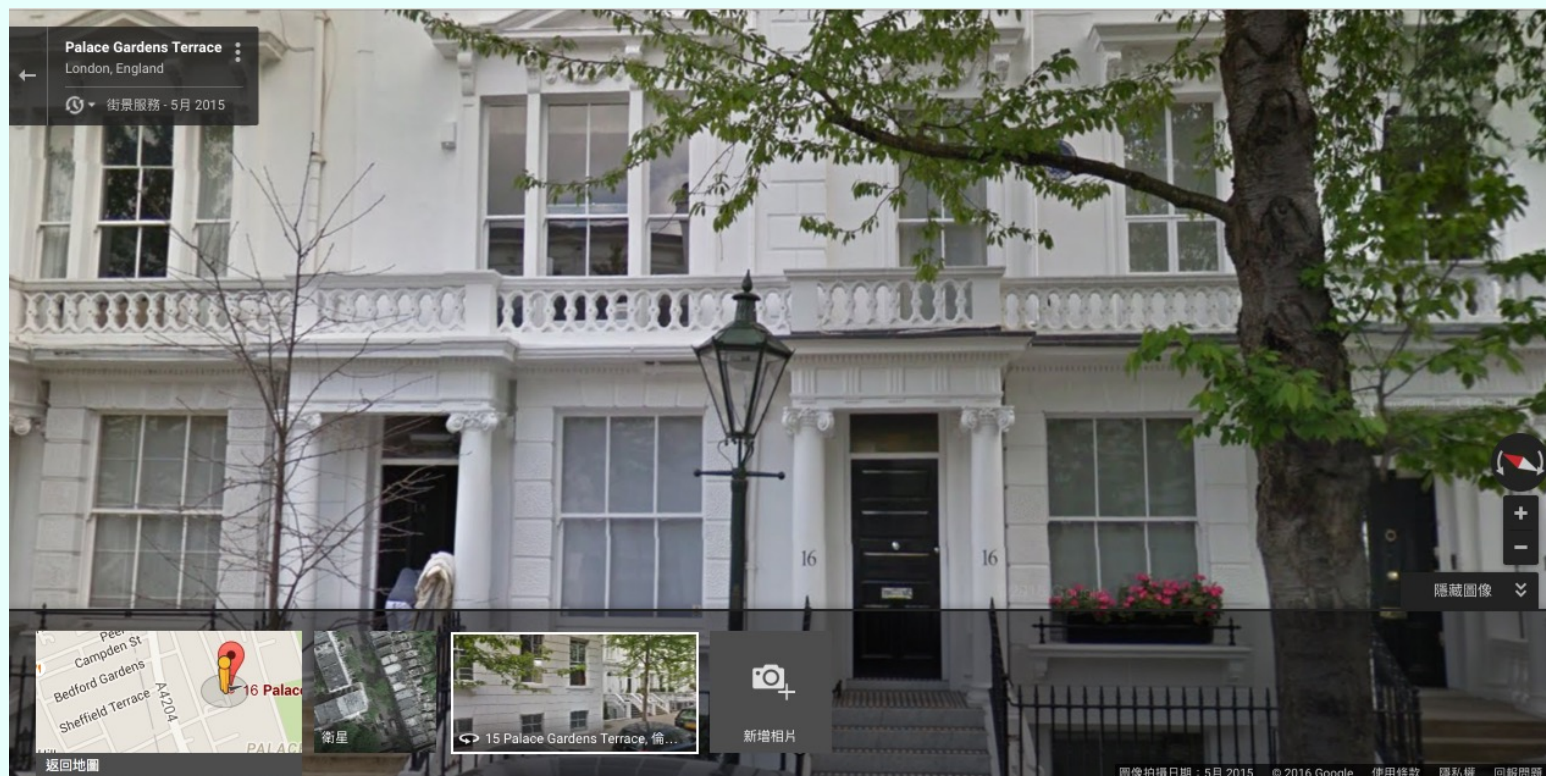


James Clerk Maxwell Building, King's College London





16 Palace Gardens Terrace, Kensington, London



XXV. *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field.*

(Received October 27,—Read December 8, 1864.)

PART I.

INTRODUCTORY.

(1) THE most obvious mechanical phenomenon in electrical and magnetical experiments is the mutual action by which bodies in certain states set each other in motion while still at a sensible distance from each other. The first step, therefore, in reducing these phenomena into scientific form, is to ascertain the magnitude and direction of the force acting between the bodies, and when it is found that this force depends in a certain way upon the relative position of the bodies and on their electric or magnetic condition, it seems at first sight natural to explain the facts by assuming the existence of something either at

Maxwell是第一個把電磁學的定理寫成數學表示式的。

有許多抽象的物理量，與這些量滿足的方程式！

(70) In these equations of the electromagnetic field we have assumed twenty variable quantities, namely,

For Electromagnetic Momentum	F	G	H
„ Magnetic Intensity	α	β	γ
„ Electromotive Force	P	Q	R
„ Current due to true Conduction	p	q	r
„ Electric Displacement	f	g	h
„ Total Current (including variation of displacement)	p'	q'	r'
„ Quantity of Free Electricity	e		
„ Electric Potential	Ψ		

Between these twenty quantities we have found twenty equations, viz.

Three equations of Magnetic Force	(B)
„ Electric Currents	(C)
„ Electromotive Force	(D)
„ Electric Elasticity	(E)
„ Electric Resistance	(F)
„ Total Currents	(A)
One equation of Free Electricity	(G)
„ Continuity	(H)

These equations are therefore sufficient to determine all the quantities which occur in them, provided we know the conditions of the problem. In many questions, however, only a few of the equations are required.

(65) The complete equations of electromotive force on a moving conductor may now be written as follows:—

Equations of Electromotive Force.

$$\left. \begin{aligned} P &= \mu \left(\gamma \frac{dy}{dt} - \beta \frac{dz}{dt} \right) - \frac{dF}{dt} - \frac{d\psi}{dx} \\ Q &= \mu \left(\alpha \frac{dz}{dt} - \gamma \frac{dx}{dt} \right) - \frac{dG}{dt} - \frac{d\psi}{dy} \\ R &= \mu \left(\beta \frac{dx}{dt} - \alpha \frac{dy}{dt} \right) - \frac{dH}{dt} - \frac{d\psi}{dz} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (D).$$

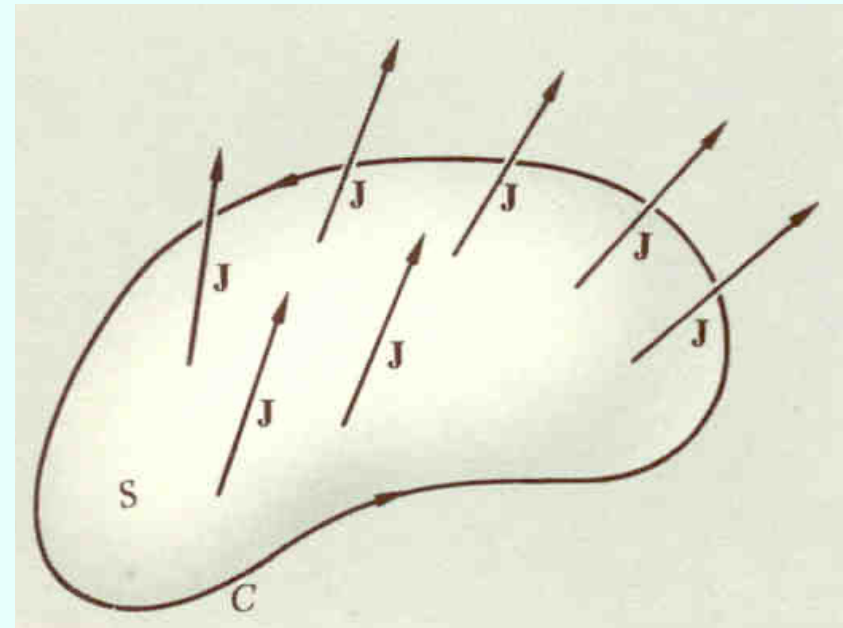
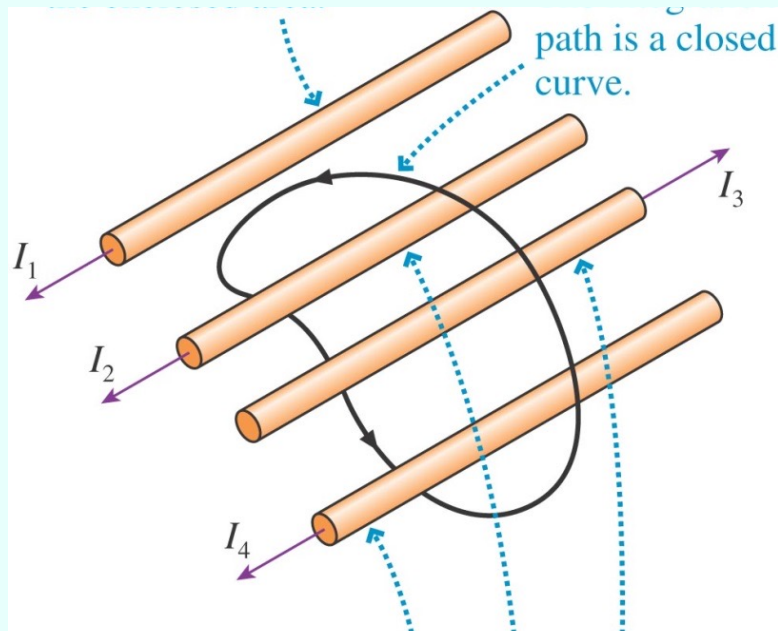
(61) Expressing the electric momentum of small circuits perpendicular to the three axes in this notation, we obtain the following

Equations of Magnetic Force,

$$\left. \begin{aligned} \mu\alpha &= \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \\ \mu\beta &= \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \\ \mu\gamma &= \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (B).$$

當這些物理被第一次寫成清楚的數學公式，Maxwell發現其中一個有問題。

安培定律中，曲線所包圍的總電流這句話在數學上不是非常精確！



取一個以安培圈曲線為邊界的曲面，
通過此曲面的電流就視為被此安培圈所包圍。這是比較精確的定義。
這樣的定義適用於如右圖任意連續分布的電流。

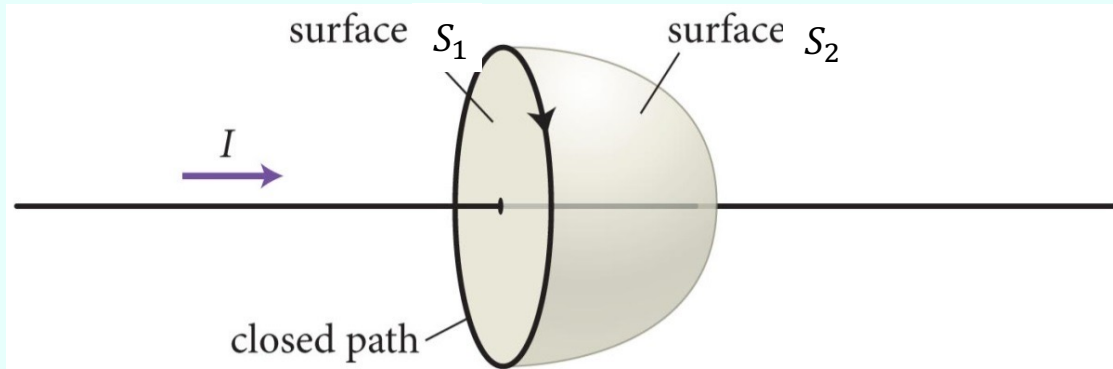
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i$$

安培定律

對任一封閉曲線，磁場的線積分正比於，通過以該曲線為邊界的曲面的總電流。

這樣的定理有一個問題！

但以一條曲線為邊界的曲面有無限多個。

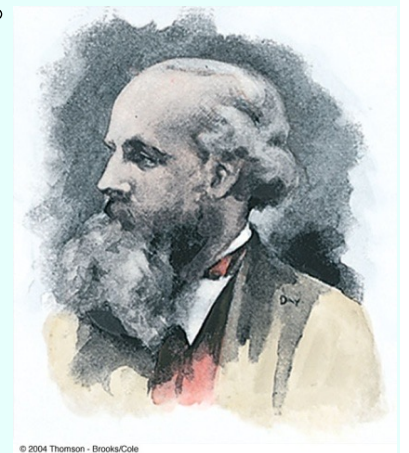
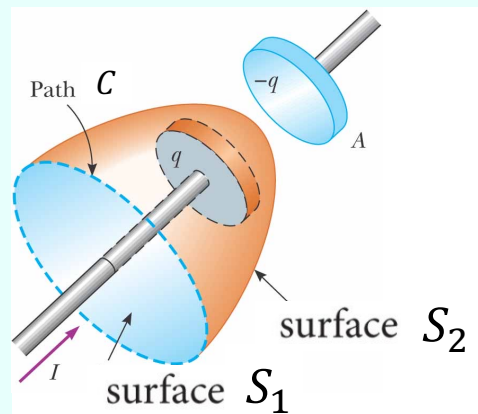


安培可能會說：因為電荷守恆，通過這些平面的電流正好都相等！
所以似乎選任何一個來算總電流都一樣！

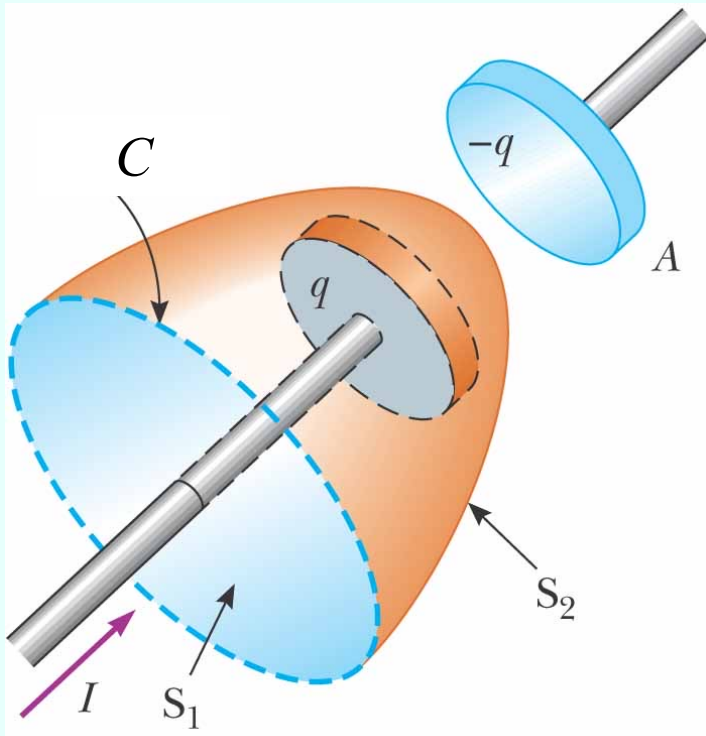
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{S_1} = \mu_0 i_{S_2}$$

?

但如果電流可以在某處累積呢？如此通過A的電流不一定通過B。



© 2004 Thomson - Brooks/Cole



如果電流連上一個電容（兩平行平面帶電板）
電荷會堆積在電容上，不會流過電容

考慮安培圈C，計算磁場的線積分。

S_1 及 S_2 是兩個以路徑C為邊界的曲面

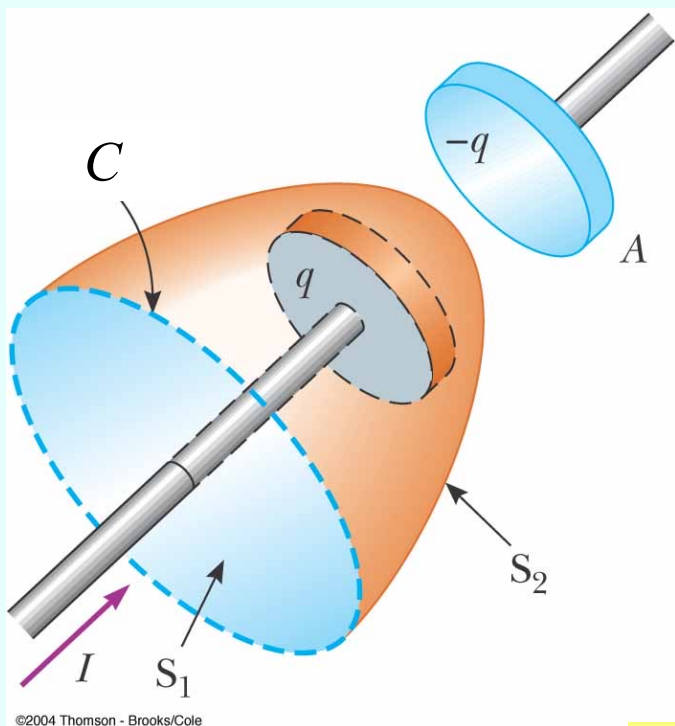
根據安培定律，磁場線積分等於通過 S_1 的電流乘 μ_0
但如果選 S_2 ，通過的電流為零！

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{S_1} (\neq 0) \neq \mu_0 I_{S_2} (= 0)$$

現在公式右手邊不同的曲面選擇，會得到出不同的結果！

但左手邊的線積分是對同一條路徑積分，只有一個值。

安培定律的方程式是不一致的！需要修正！



修改安培定律，在右邊加上一個新的項 X：

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i + X$$

要求：X在 S_2 上不為零，(但在 S_1 上為零)。

安培定律右手邊

$$\mu_0 I_{S_1} + X_{S_1} \Leftrightarrow \mu_0 I_{S_2} + X_{S_2}$$

選擇 X使

$$\mu_0 I_{S_1} = X_{S_2}$$

問題就解決了！

S_1 上的電流會等於 S_2 上的什麼？

$$\mu_0 I_{S_1} = \mu_0 \frac{dq}{dt} = \mu_0 \frac{d(\sigma A)}{dt} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d(EA)}{dt} \Big|_{S_2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \Big|_{S_2}$$

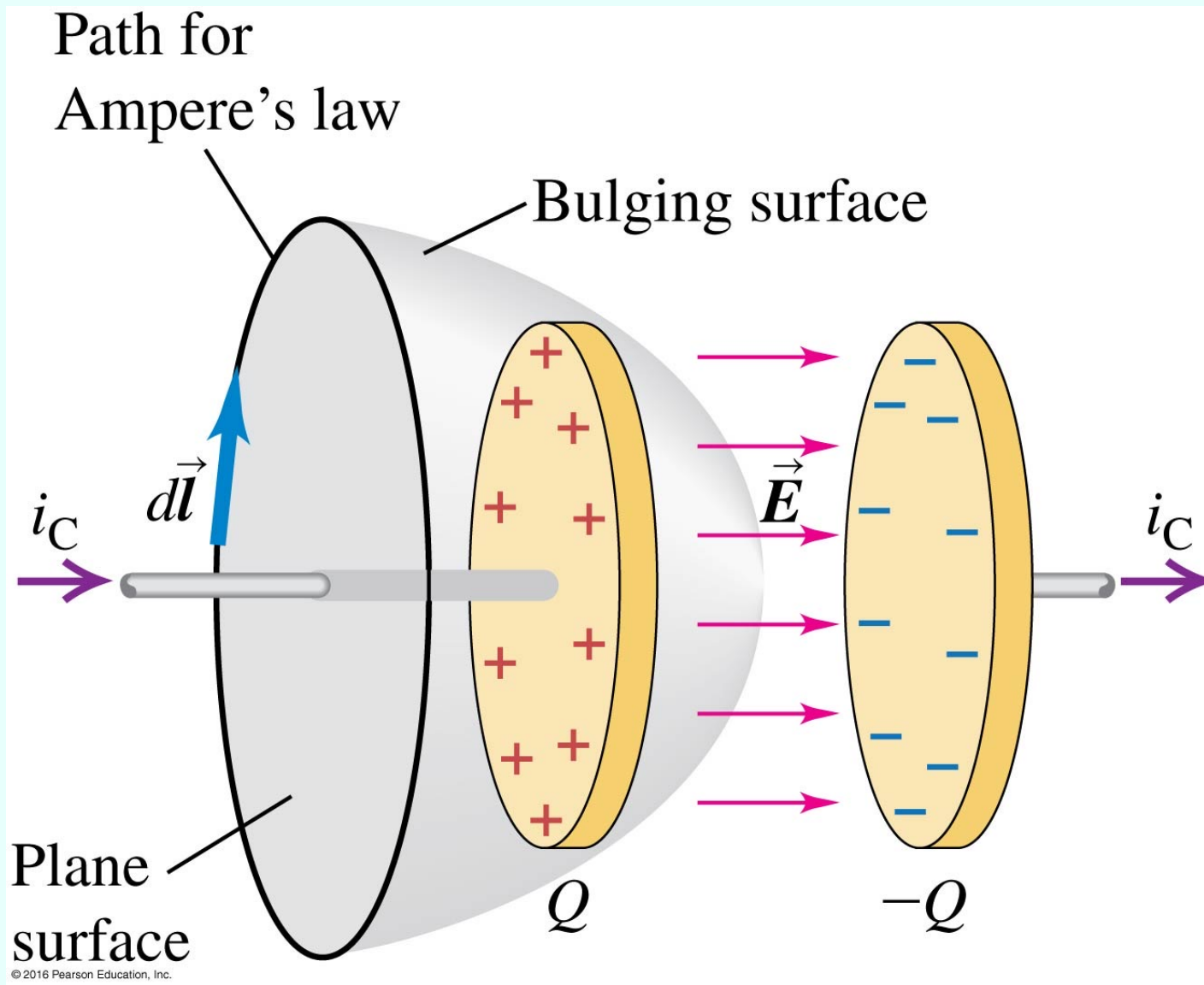
電荷堆積在電容上，改變了電容內的電場，電場會變化。

S_1 上的電流剛好等於 S_2 上的電場通量的變化率！

若取新項X為電場通量的變化率：則安培定律的右手邊在兩個曲面上就會相等！

$$X = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

$$\mu_0 I_{S_1} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \Big|_{S_1} = \mu_0 I_{S_2} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \Big|_{S_2}$$



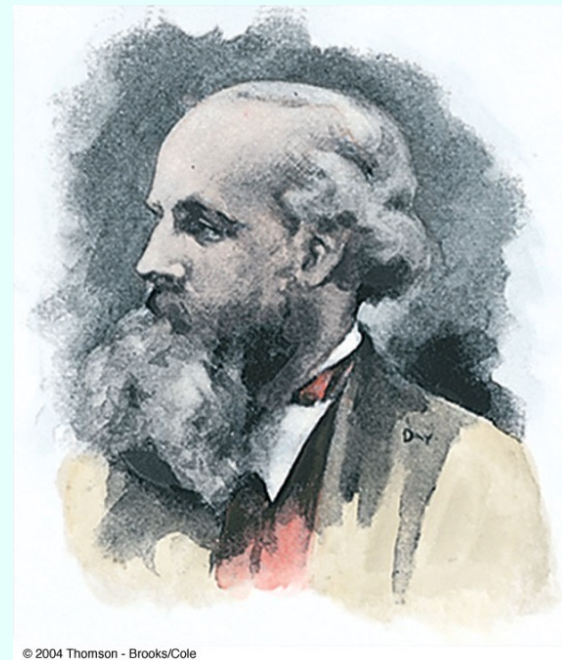
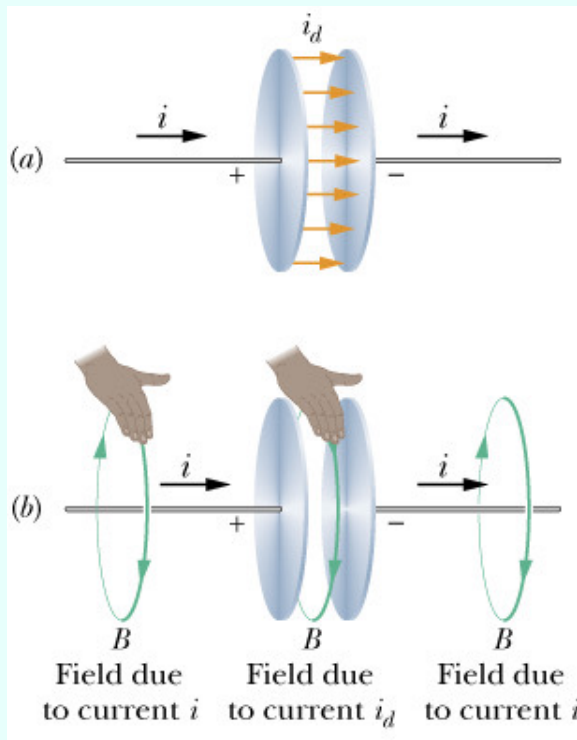
變化的電通量，在產生磁場效果上猶如電流！

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

← i_d 位移電流

Ampere-Maxwell Equation

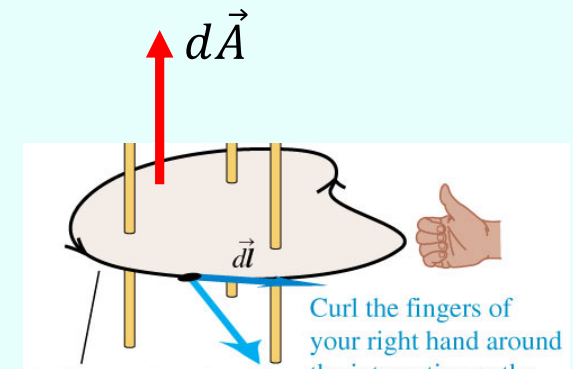
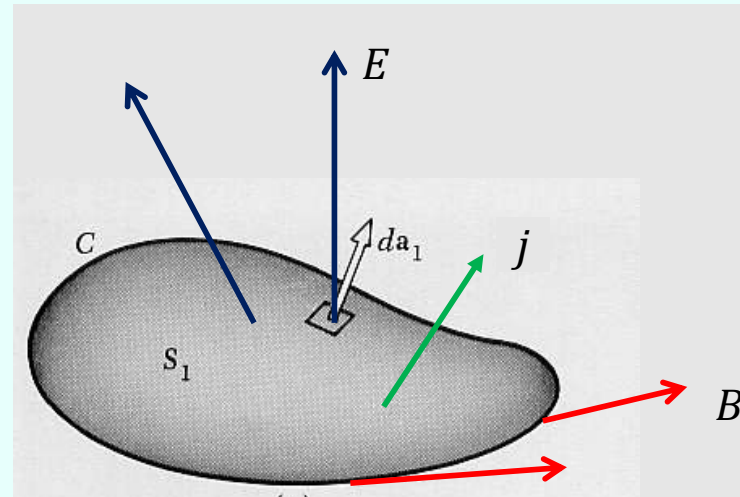
若電場通量有變化，周圍一定有電流。
位移電流的效應很難獨立地被觀察。



除了電流，磁場還有其他的來源！電場隨時間變化也可以產生磁場！

Ampere-Maxwell Equation

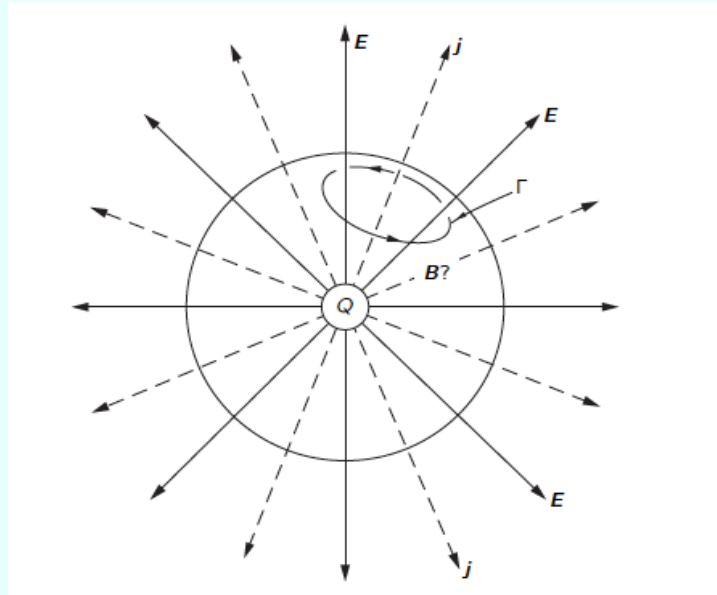
通過曲線內的電通量，精確地說即是以此曲線為邊界的曲面的電通量。



感應電場沿封閉曲線 C 的線積分等於以此曲線為邊界的曲面 S 的磁通量的變化率！

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

路徑的方向，與曲面上正向電流及中向電場的方向以右手定則規定！



考慮一個很小的球型電荷，我們知道它在周圍會產生放射狀的庫倫電場。假設它的電荷向著所有方向，以球對稱的方式逐漸流走，形成放射狀的電流。在一個以此電荷為球心的假想球上，向外流動的電流，會垂直通過球面。已知磁場由電流產生，那麼圍繞著此電流，沿著球面，應該會產生磁場。但整個裝置是球狀對稱，所以對球面上任一點來說，沿球面的所有方向必須都相同，那麼如果沿球面方向有磁場存在，那麼就有一特別的方向了。可見磁場為零。

要使磁場為零，必定有另一種磁場的來源，來抵消電流所產生的磁場。注意這時因電荷量減少，球面上的庫倫電場恰好正逐漸減小。馬克斯威爾的發現，就是隨時間改變的電場，會感應產生磁場。計算可得，隨時間變化的電場正好產生一個沿球面的磁場，抵消了電流原來應該產生的磁場，使得球面上的磁場恰好為零。

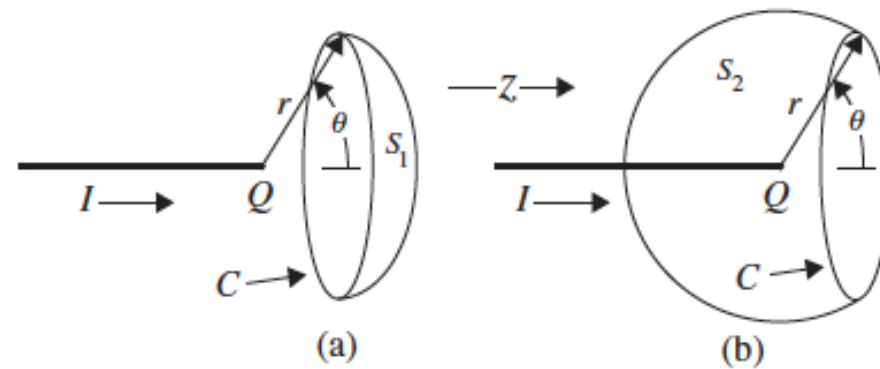
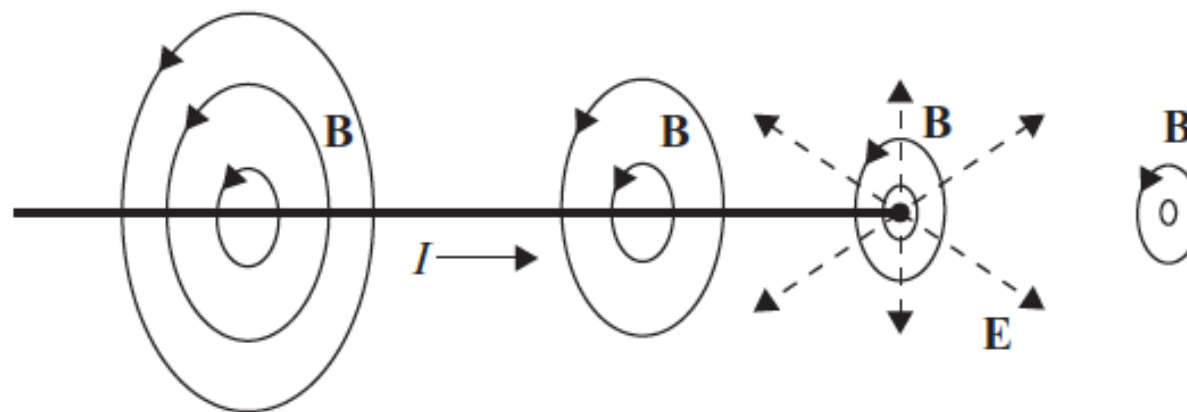


Figure 14.1: A straight-line current I terminates at the origin. Panels (a) and (b) show two choices for an integration surface to evaluate the Ampère-Maxwell equation in integral form.



The displacement current plays a prominent role in situations like the one shown in Figure 14.1, where the steady current I carried by a long and straight wire abruptly terminates at a point of charge accumulation. Subject to later confirmation, we suppose that the sole source of $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ is the time-varying charge $Q(t) = It$ at the origin of coordinates. The integral form of Gauss' law then gives

$$\mathbf{E}(r, t) = \frac{Q(t)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (14.10)$$

Our strategy to find $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ exploits the integral form of the Ampère-Maxwell law,

$$\oint_C d\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \int_S d\mathbf{S} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (14.11)$$

$\mathbf{B} = B(r, \theta)$ by symmetry, so we need only the direction of $\mathbf{B}$ to guide our choice for the Ampèrian circuit C . For this purpose, we consider the problem from the Biot-Savart point of view, where the source current is $\mathbf{j}$ from the wire plus $\mathbf{j}_D = \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$.² The latter has zero curl and thus contributes nothing to the Biot-Savart integral (see Section 10.1). Previous work (see Chapter 10) showed that the magnetic field produced by a straight wire of any length has the form $\mathbf{B} = B_\phi(r, \theta) \hat{\boldsymbol{\phi}}$.

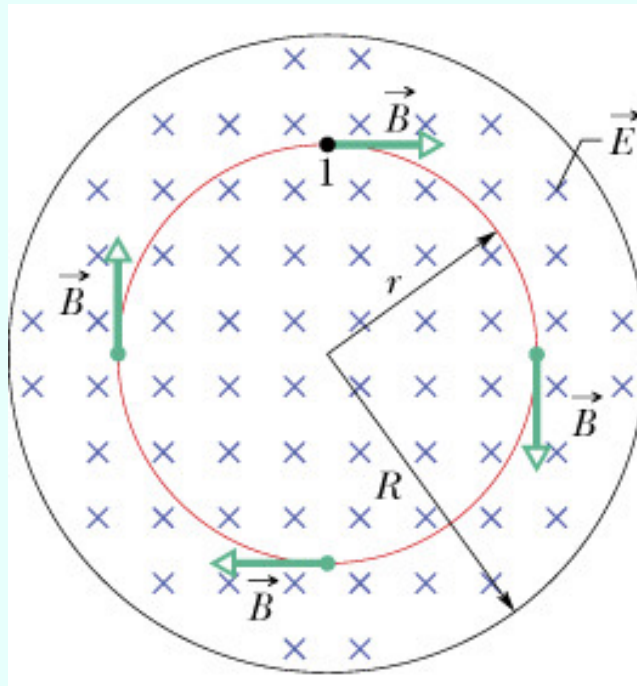
The just-deduced form of $\mathbf{B}$ suggests we choose C as a circle of radius $r \sin \theta$ concentric with the z -axis. Figure 14.1 shows two possible choices for the capping surface S for an observation point with $\theta < \pi/2$. Each is a portion of a sphere of radius r centered on Q . The current in the wire contributes to (14.11) when we use S_2 , but not when we use S_1 . The displacement current contributes in both cases, but unequally. Carrying out the line integral over C and the two surface integrals over both S_1 and S_2 gives

$$B_\phi 2\pi r \sin \theta = \begin{cases} 0 + \mu_0 \frac{I(1 - \cos \theta)}{2} & S = S_1, \\ \mu_0 I - \mu_0 \frac{I(1 + \cos \theta)}{2} & S = S_2. \end{cases} \quad (14.12)$$

The total magnetic field is static (so Faraday's law does not alter our calculation of $\mathbf{E}$) and independent of the choice of S , as it must be:

$$\mathbf{B}(r, \theta) = \frac{\mu_0 I (1 - \cos \theta)}{4\pi r \sin \theta} \hat{\boldsymbol{\phi}}. \quad (14.13)$$

電場變化時會感應產生磁場！



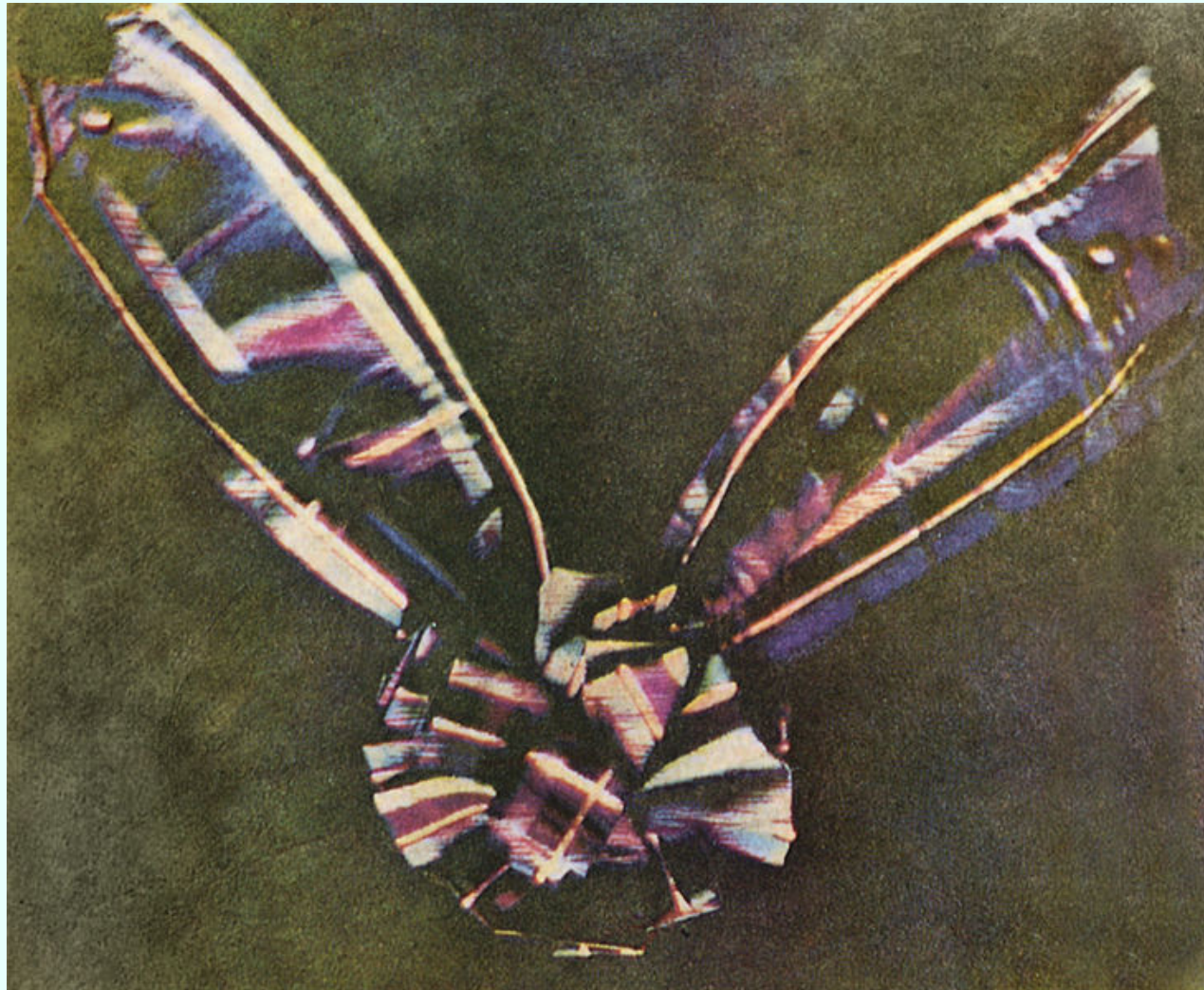
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Maxwell Magnetic Induction

感應磁場與變化的電場大致垂直！

這是一個時變電動力學的現象，我們必須立刻進入電動力學的領域。

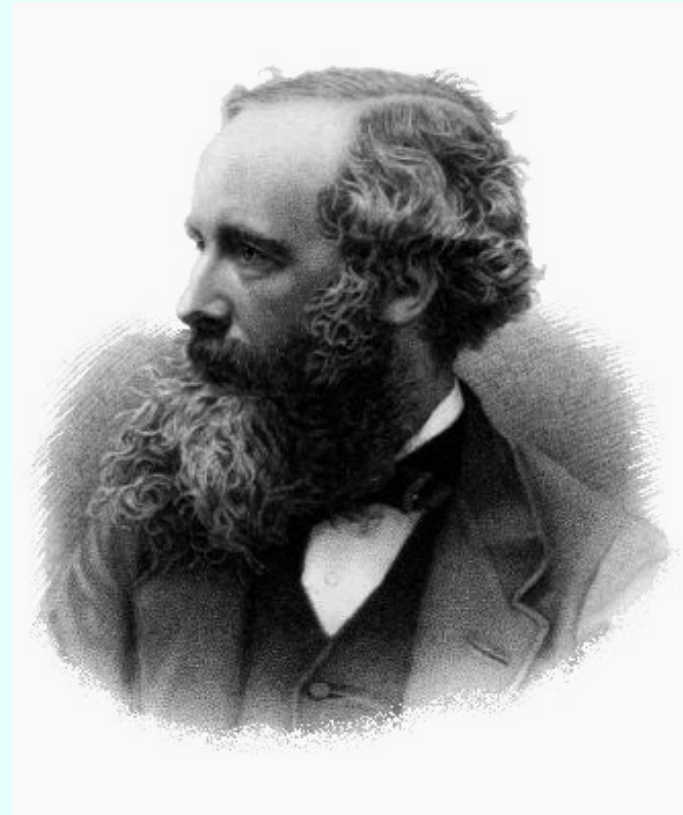
First Colored Picture By Maxwell





Maxwell 1871-1879

1871 first Cavendish Professor of Physics at Cambridge

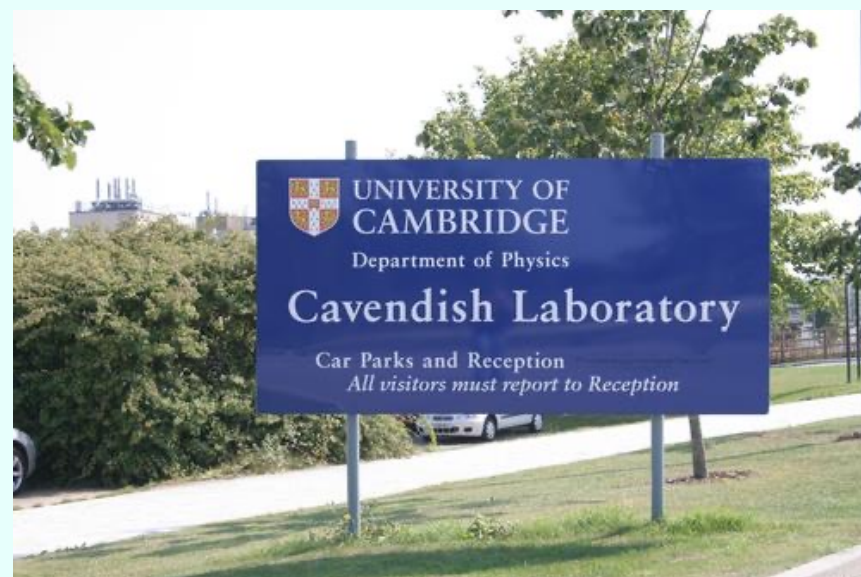


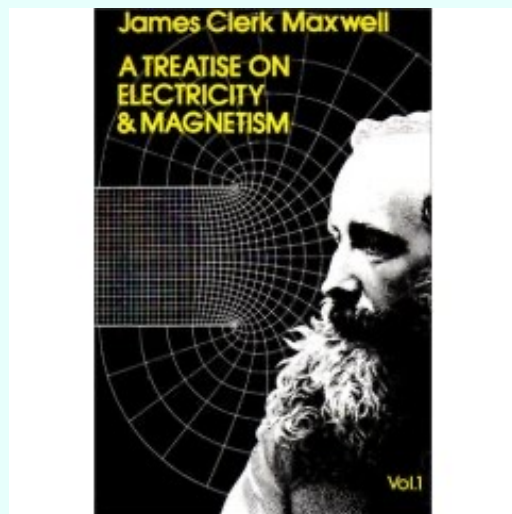
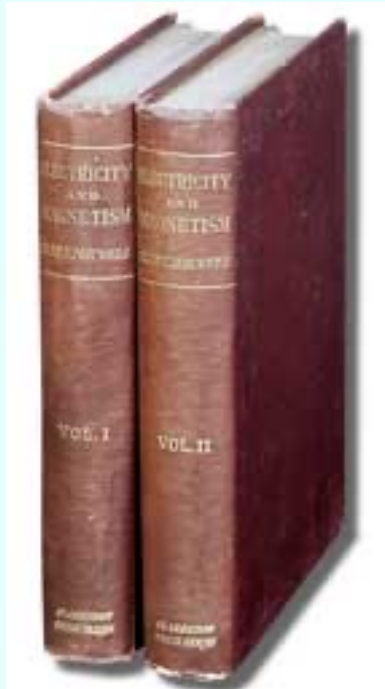
Cavendish Laboratory in the University of Cambridge

CAVENDISH LABORATORY

1874-1974

*Established by the Duke of Devonshire
and extended by Lord Rayleigh (1908) and
Lord Austin (1940), the Cavendish Laboratory
housed the Department of Physics
from the time of the first Cavendish Professor,
James Clerk Maxwell, until its move to
new laboratories in West Cambridge*





James Clerk Maxwell (1831-1879)



Maxwell Equations, almost!

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

電流是磁場的基本來源，而且產生的磁場是漩渦狀的，不是放射狀的。

電荷是電場的基本來源，而且產生的電場是放射狀的，不是漩渦狀的。

電場變化時會感應產生磁場，感應產生的磁場是漩渦狀，大致與變化的電場方向垂直。