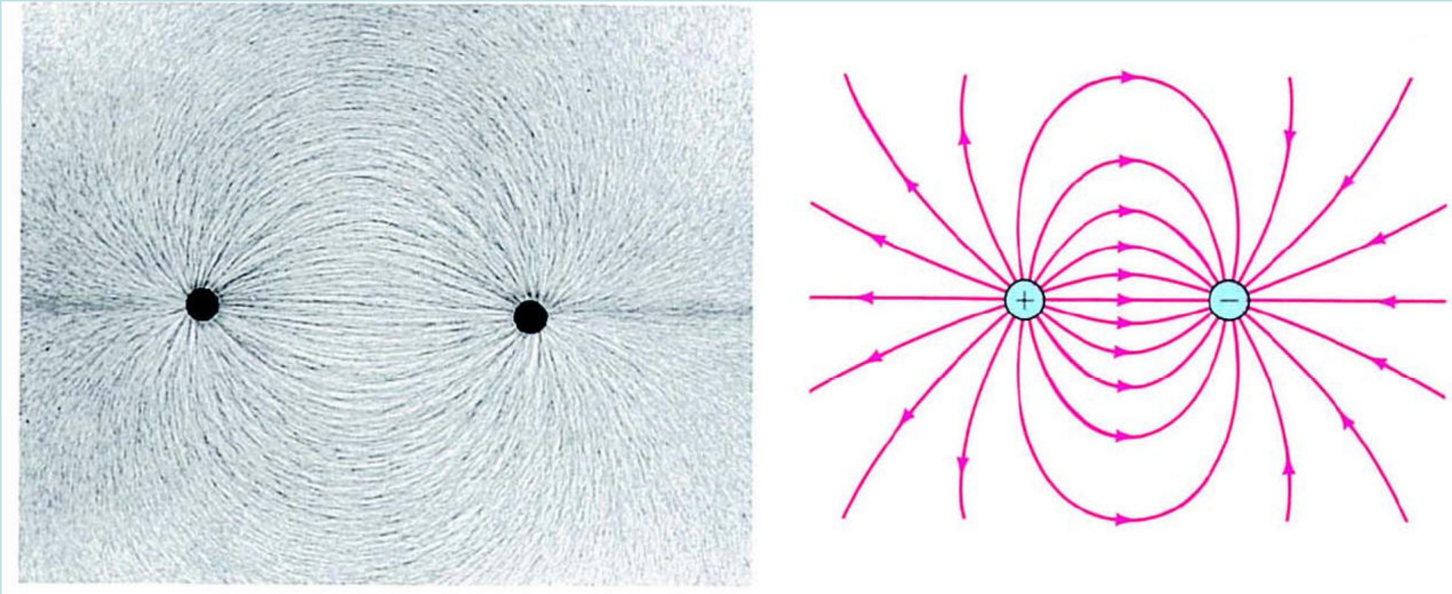


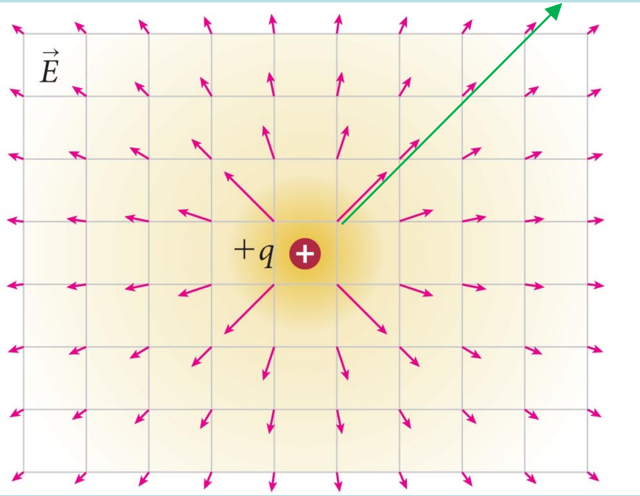
電磁作用乍看是電荷與電荷之間的超距力。

但超距力是不可能的，中間必須有電磁場的仲介。

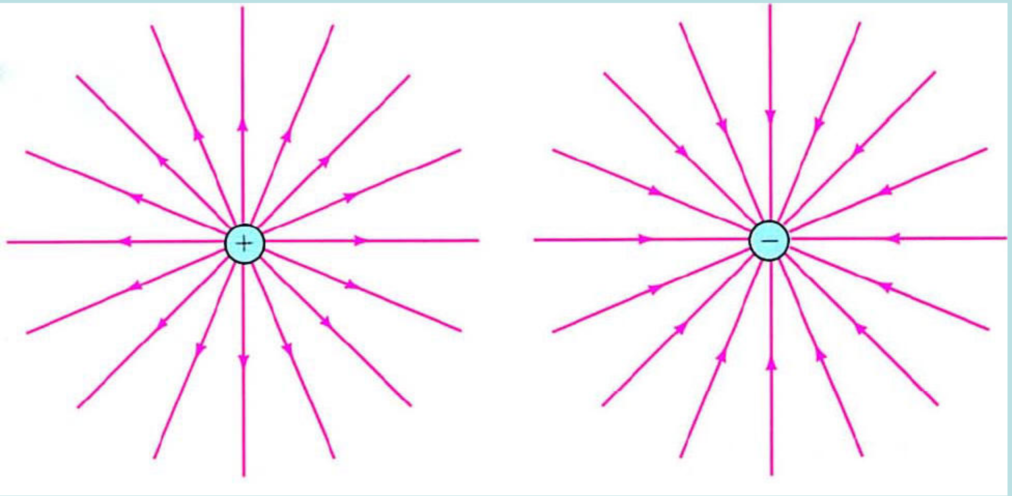
電磁場才是我們討論的主角（而不是電荷與電流）。

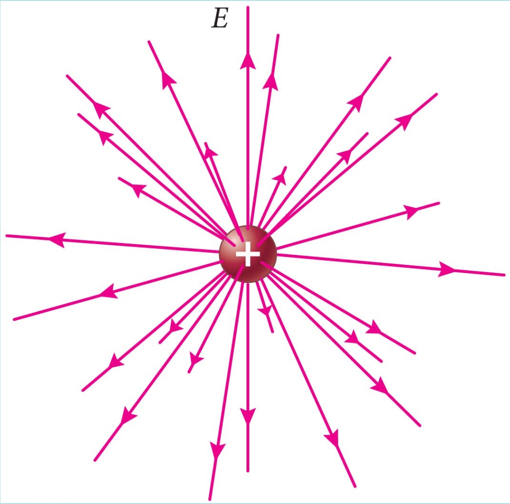
$$\vec{E}(\vec{r},t),\vec{B}(\vec{r},t)$$

有沒有辦法將場的抽象概念圖像化？

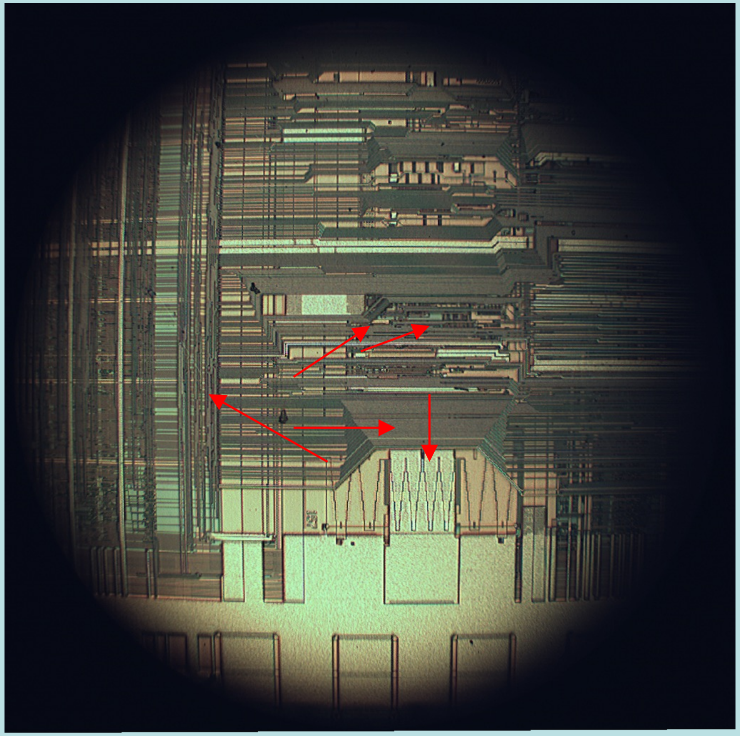


將單一電荷周圍的電場的方向聯接起來，竟然可以連成連續的線！





$\vec{E}(\vec{r},t), \vec{B}(\vec{r},t)$



電場向量在各地都有一個方向，有時很難用！

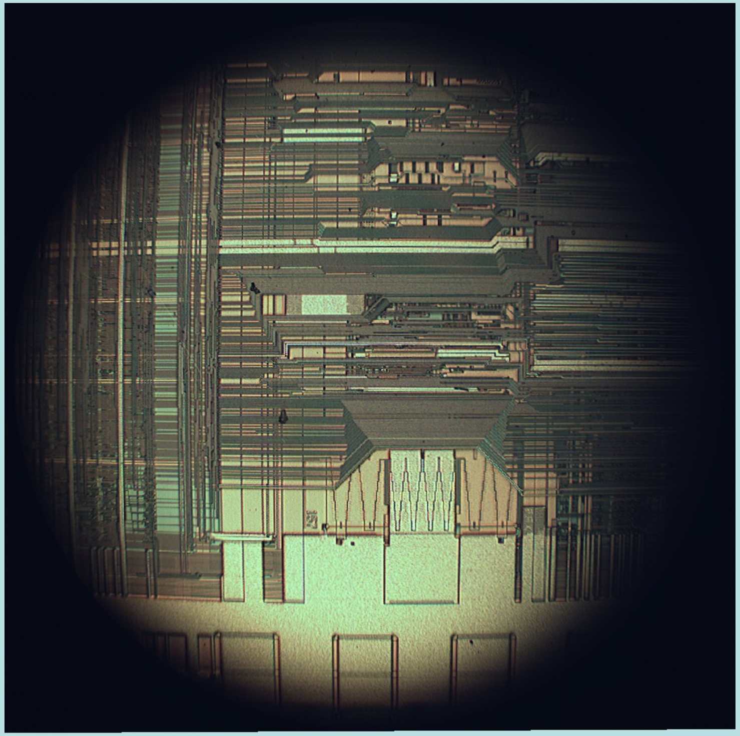
想像微小的積體電路內有大堆的箭頭。

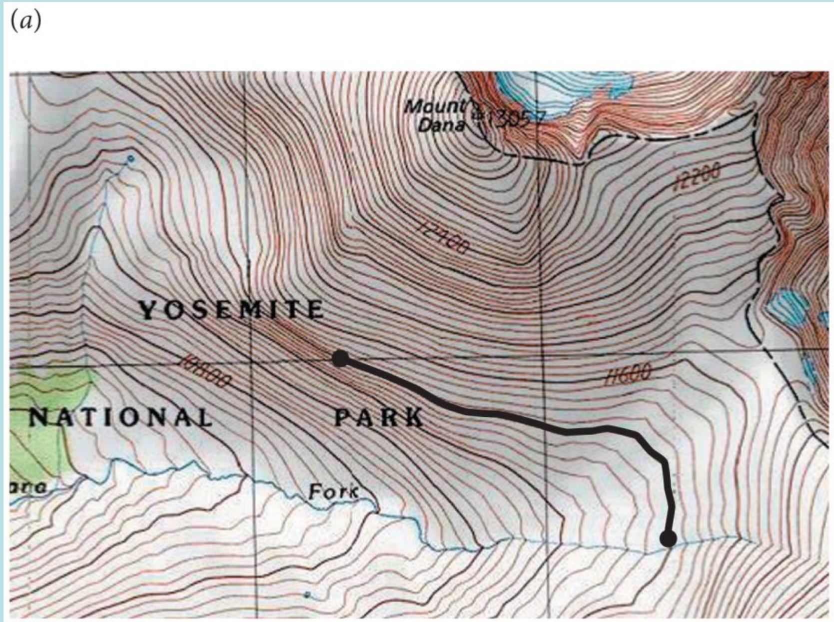
電位 Electric Potential 電壓

資訊相當於電場的一個空間中與位置有關的純量！

把電位看成高度，積體電路就能畫成如有等高線的地圖，

在導體、例如電路中特別有用。



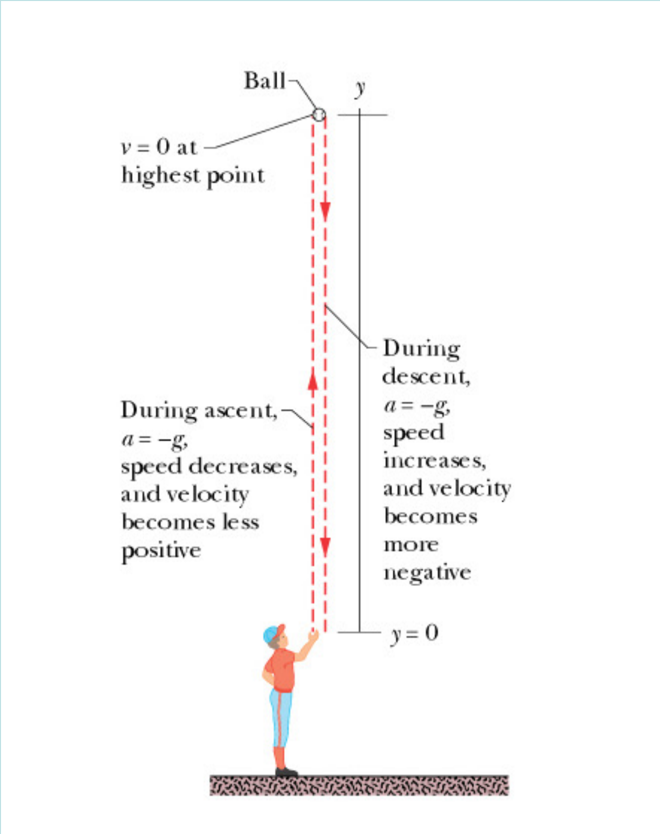


先回到靜電力，

力是向量，但空間中的力場可以用純量的位能描述，稱保守力。

庫倫靜電力可不可以用位能描述？是不是保守力？

電位能 Electric Potential Energy to 電位 Electric Potential



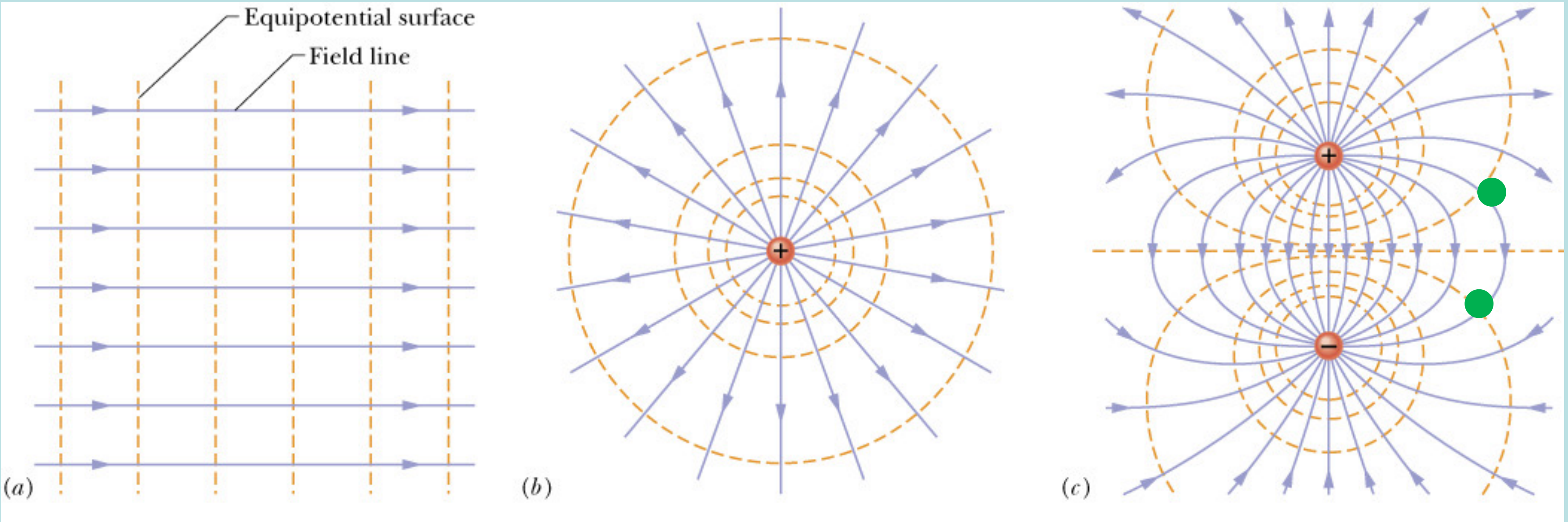
最典型的位能就是重力位能mgy：

自由拋體

$$mgy + \frac{1}{2}mv^2 = E$$

重力位能就是物體在特定位置上，存在潛在能力可以轉化為運動。

期待靜電力也有個位能的描述法！



均勻電場靜電力就像地表重力，有重力位能！

點電荷電場靜電力就像星球的萬有引力，也有位能！

右圖電場中，綠色點電荷順這電力線移動，就由一個位能，到達另一個較小的位能！

力學中有位能的概念 Potential Energy $U(\vec{r})$

$$W=\int_{\vec{a}}^{\vec{b}}\vec{F}\cdot d\vec{s}=\Delta K$$

$$W=\int_{\vec{a}}^{\vec{b}}\vec{F}\cdot d\vec{s}=-\Delta U=-U(\vec{b})+U(\vec{a})$$

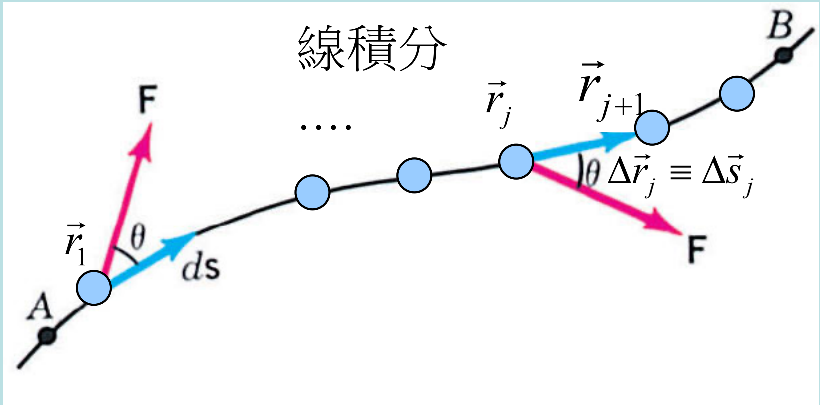
$$\Delta K+\Delta U=0$$

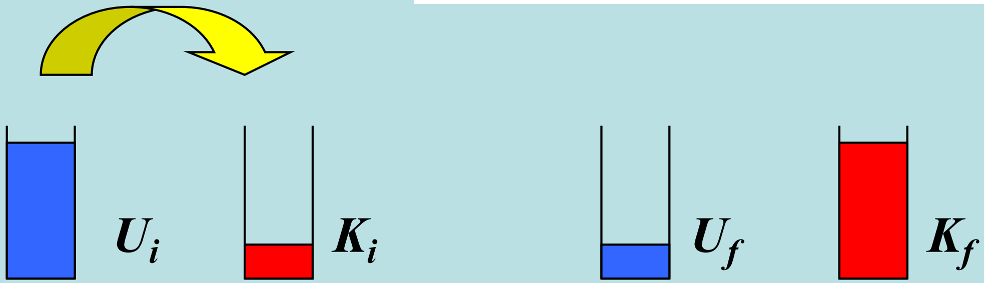
功等於動能變化

功若能寫成一位置函數：位能的變化

機械能守恆

$$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}}\vec{F}\cdot d\vec{s}=\lim_{\substack{N\to\infty\\ \Delta s\to 0}}\sum_{j=0}^{N}(\vec{F}_j\cdot\Delta\vec{s}_j)$$



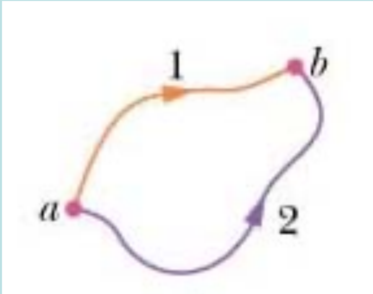


若是功要等於位能的變化：

$$\Delta U = -W = -\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

由不同的路徑計算線積分的值必須相同！

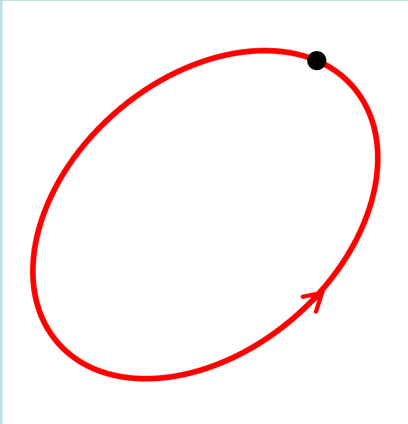
$$W_1 = W_2$$



或者：

繞著一個封閉曲線計算，因為起點與終點相同，

位能差必須為零

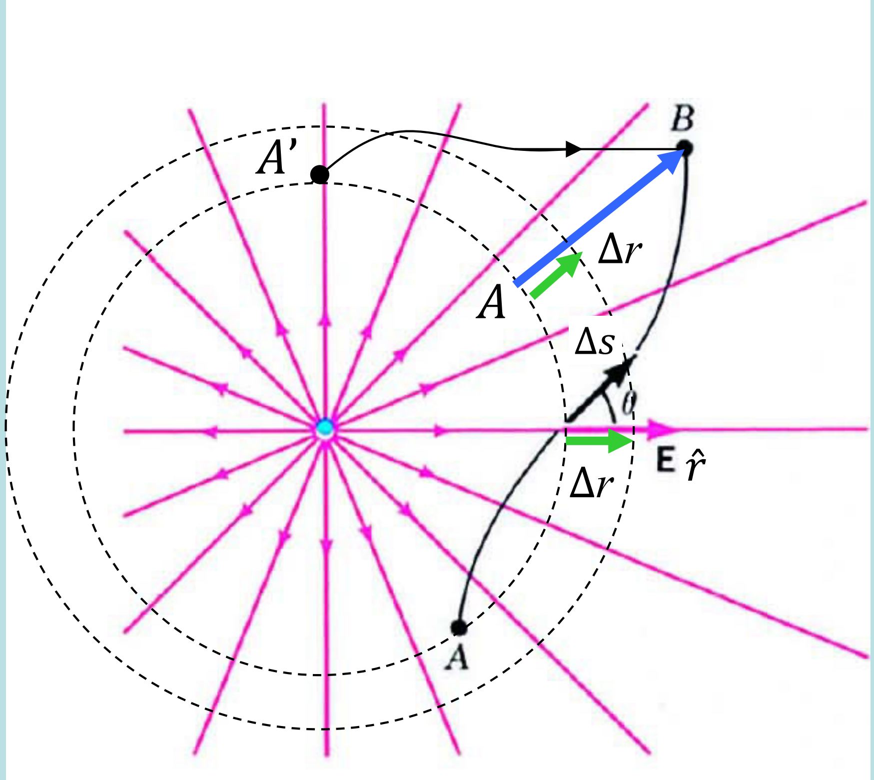


$$\Delta U = 0 = -\oint \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

保守力 對保守力才能定義位能！

靜電力是不是保守力？　考慮一固定電荷 Q 旁一可運動的小電荷 q



$$W = \int \vec{F}_E \cdot d\vec{s}$$

$$\vec{F}_E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\hat{r}$$

$$= \lim_{\Delta r \to 0}\sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r_i^2}\hat{r}_i \cdot \Delta\vec{s} = \lim_{\Delta r \to 0}\sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r_i^2}\Delta r_i$$

垂直於 r 的運動不作功　$\hat{r} \cdot \Delta\vec{s} = \Delta r$

沿此路徑$\Delta\vec{s}$所作功與完全沿徑向的路徑Δr相等！

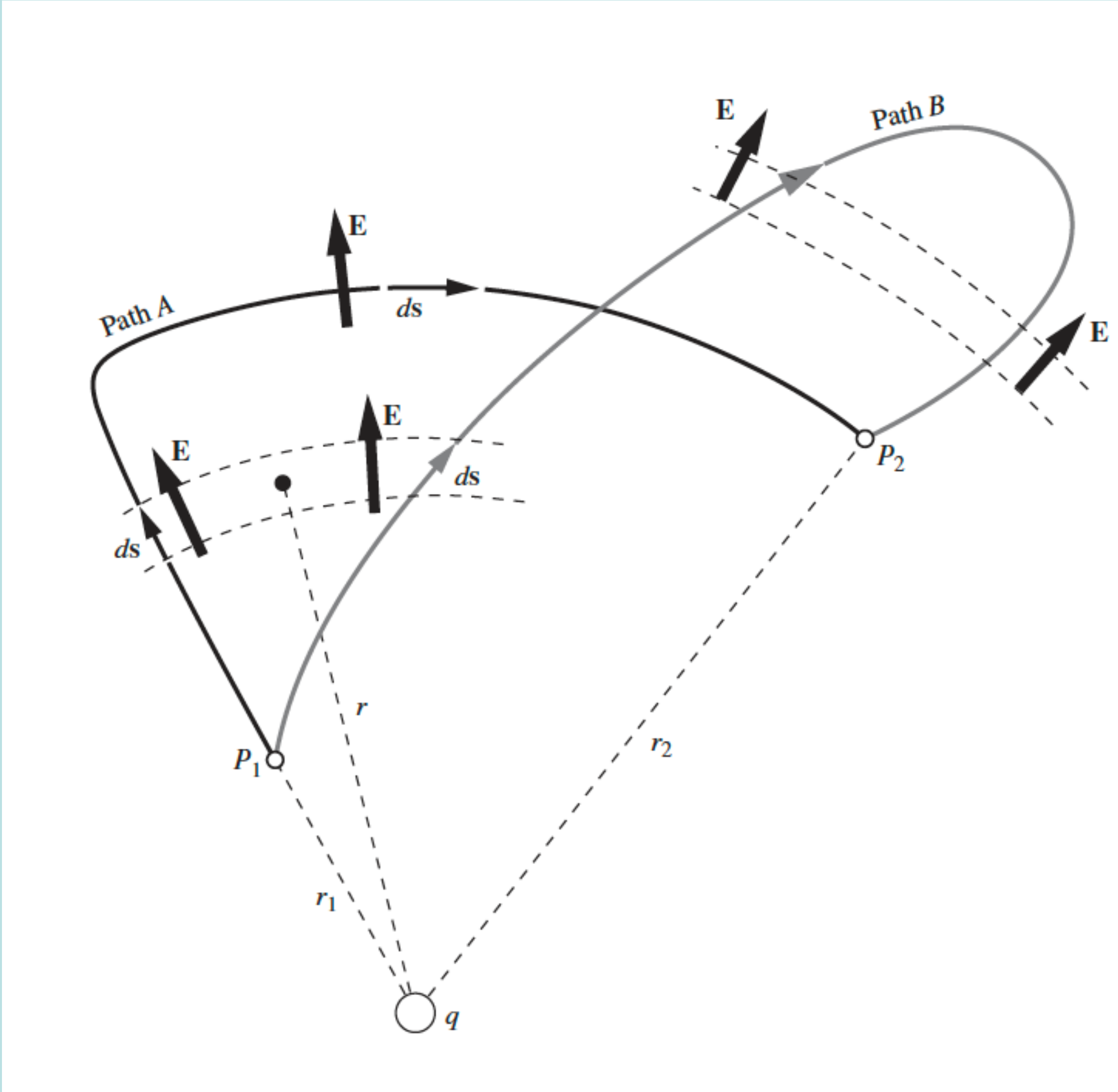
$$= \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2} \cdot dr$$

與 A、B 的方向無關

$$= -\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) \equiv -\Delta U = -U(r_B) + U(r_A)$$

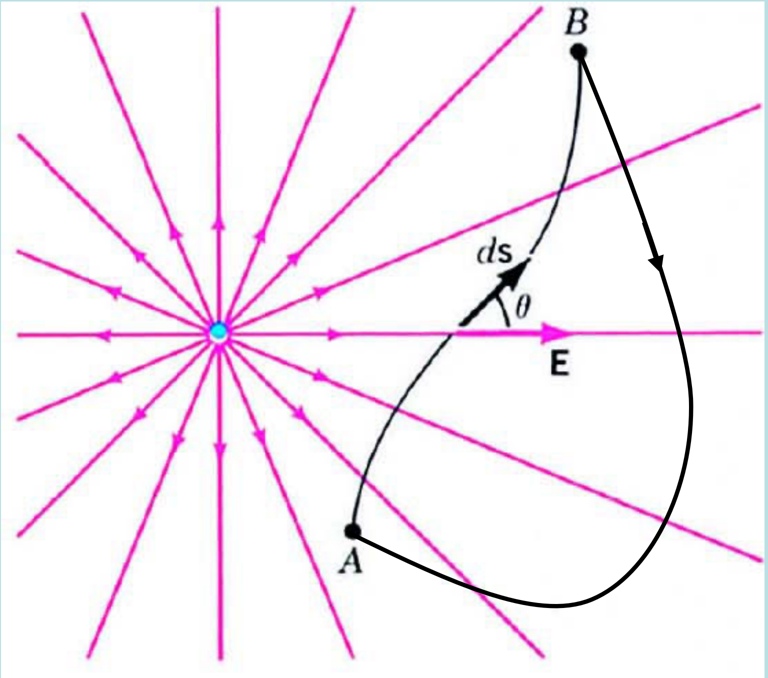
靜電力可以定義電位能：

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r}$$



$W_A = W_B = -U(r_2) + U(r_1)$ 與路徑無關！

從A出發再回到A，形成一封閉曲線。

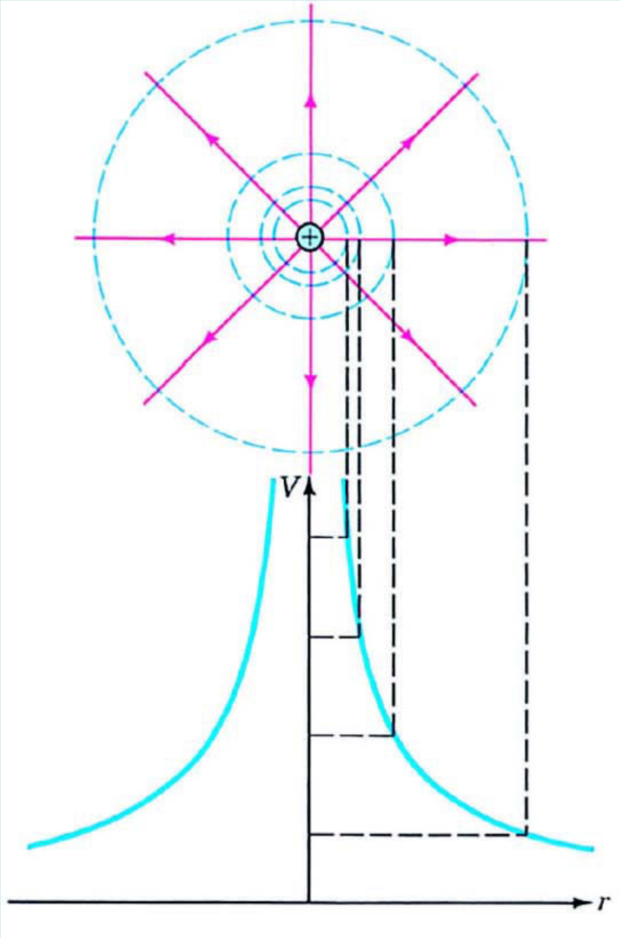


$$\oint \vec{F}_E \cdot d\vec{s} = -\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_A}\right) = 0$$

沿任一封閉曲線，庫倫靜電力所作的功必為零！

靜電力為保守力，可以定義電位能。

一固定電荷Q旁一可運動的小電荷q的電位能

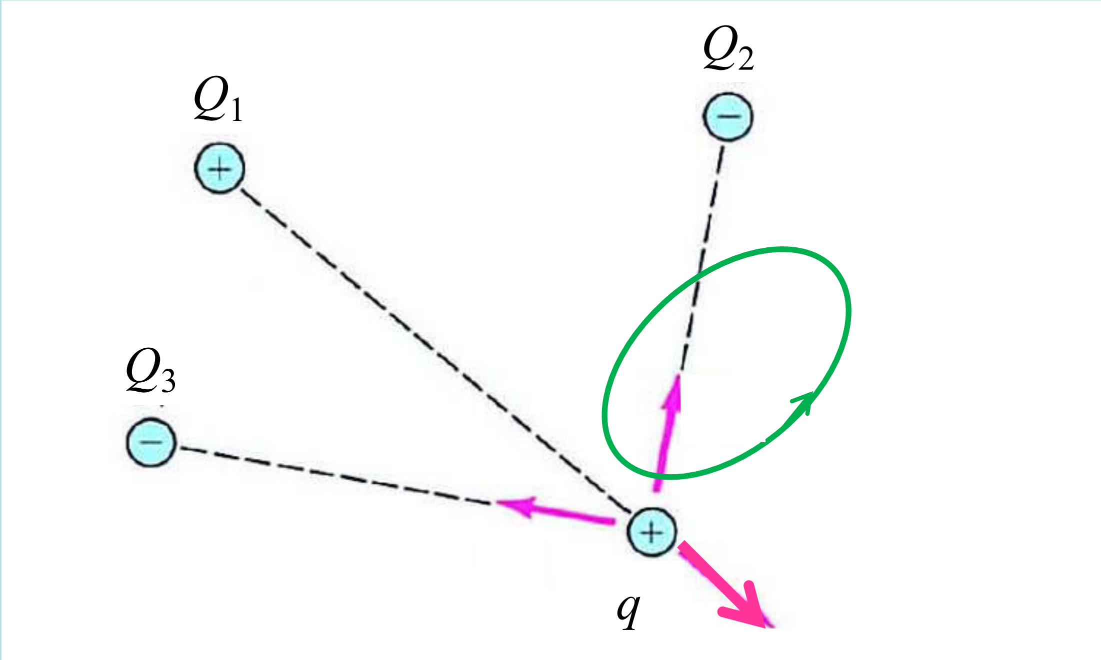


$$U(\vec{r}) = -\int_{\vec{c}}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{s} = -\int_{r_c}^{r} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\cdot dr = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_c}\right)$$

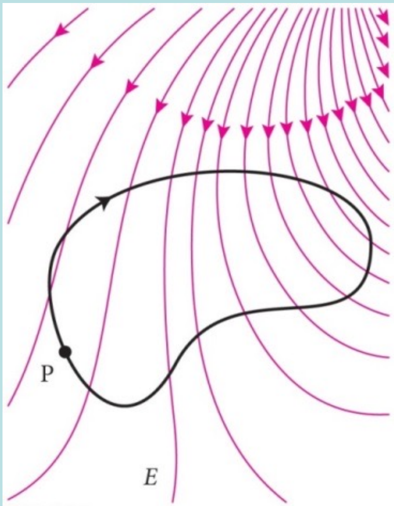
選擇 $U(\infty) = U(c) = 0$

$$U(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r}$$

若有一個以上的固定電荷Q，靜電力可以疊加：



$$\oint \vec{F}_E \cdot d\vec{s} = \oint (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots) \cdot d\vec{s} = \oint \vec{F}_1 \cdot d\vec{s} + \oint \vec{F}_2 \cdot d\vec{s} + \oint \vec{F}_3 \cdot d\vec{s} + \cdots = 0$$

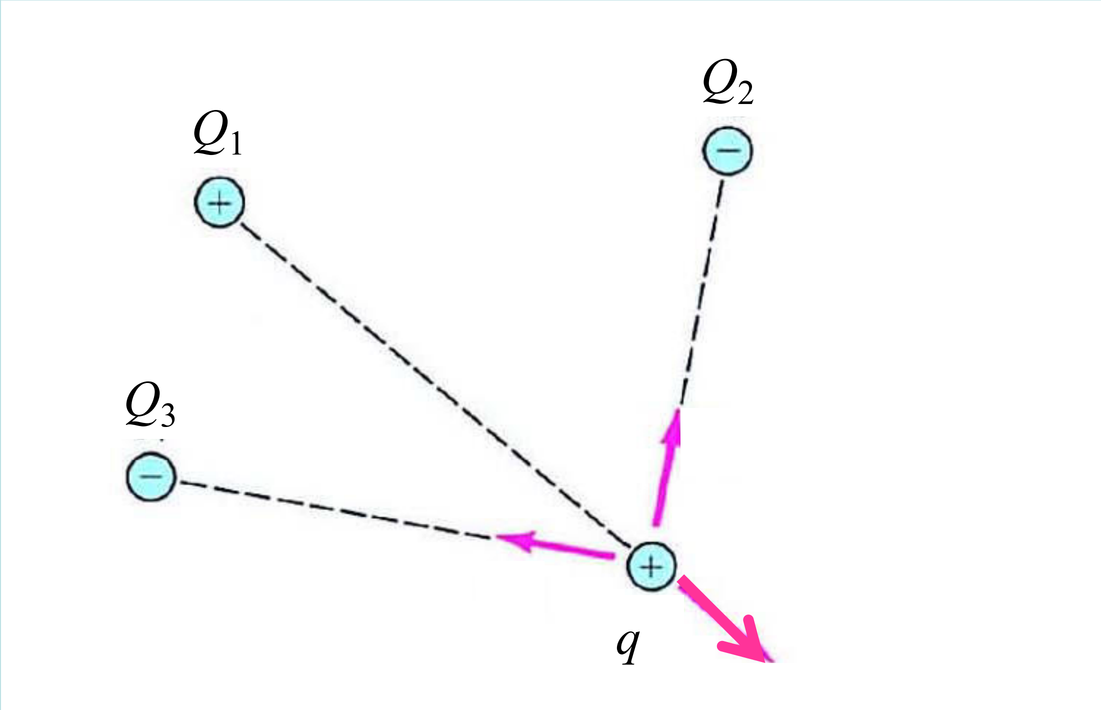


$$\oint \vec{F}_E \cdot d\vec{s} = 0$$

因此還是保守力。

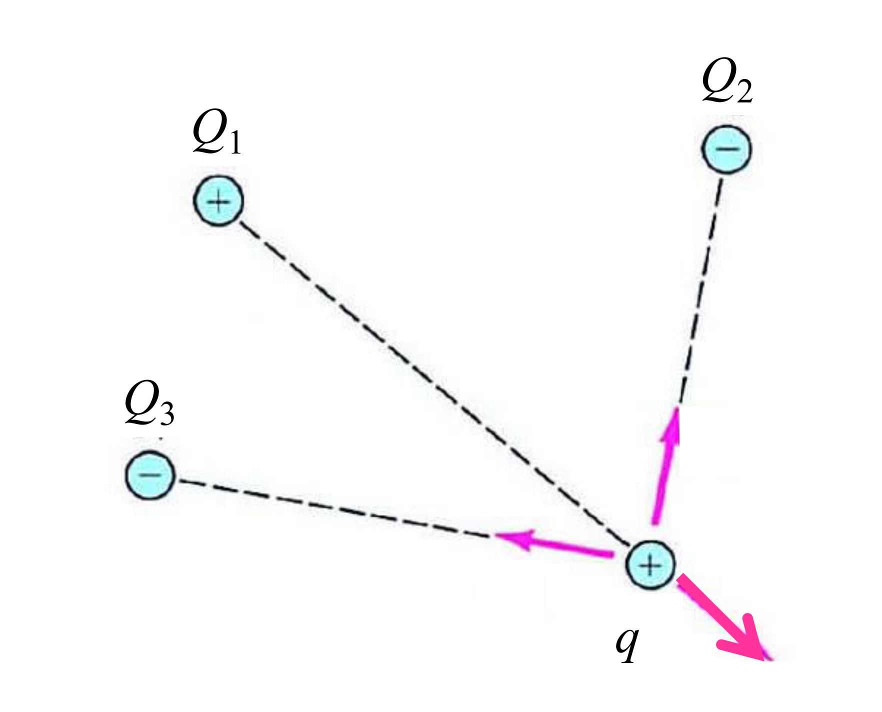
任何靜電力都是保守力！

若有一個以上的固定電荷Q，電位能可以以一個點電荷的電位能疊加：



$$U = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_i q}{r_i}$$

但電位能還是屬於一個帶電粒子的性質，但我們很容易把電荷分離開來。



注意這個電位能表示式中，q可以提出！

$$U=\sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_i q}{r_i}$$

$$=\left(\sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_i}{r_i}\right)\cdot q \equiv Vq$$

$$V=\frac{U}{q}$$

電位V只與 q 的位置相關，與 q 的電荷無關

想像 q 漸漸趨近於零....電位依舊存在吧！

$$q\to 0$$

$$\vec{F}=\sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_i q}{r_i^2}\hat{r}_i$$

$$=\left(\sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_i}{r_i^2}\hat{r}_i\right)\cdot q=\vec{E}\cdot q$$

電位是會讓位於當地的電荷得到電位能的空間性質。

因此電位$V(\vec{r})$遍佈整個空間。

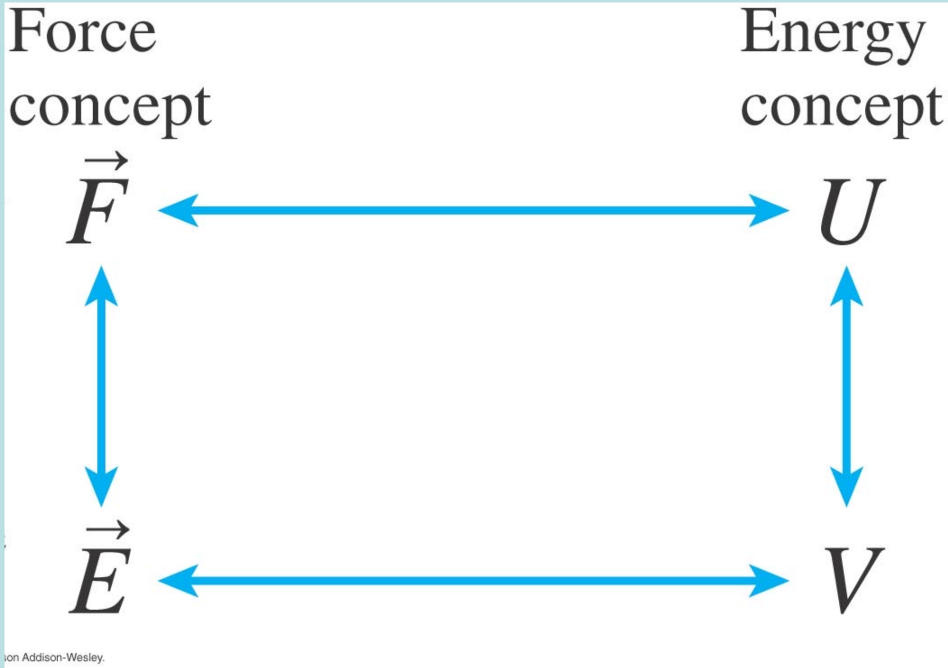
電場就是會讓位於當地的電荷 q 得到靜電力 $q\cdot\vec{E}$ 的空間的物理性質。

每一點都有$\vec{E}(\vec{r})$，電場遍佈整個空間。

與向量的電場$\vec{E}$不同，電位V是一個純量。

$$\Delta U = -\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{F}\cdot d\vec{s}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

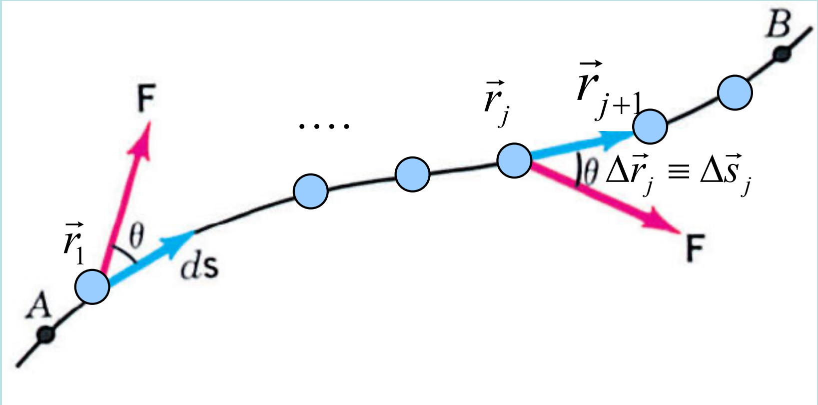


$$V = \frac{U}{q}$$

$$\Delta V = -\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

$$U = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_i q}{r_i}$$

$$V = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_i}{r_i}$$



$$W = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta s\to 0}} \sum_{j=0}^{N} \Delta W_j \equiv \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta s\to 0}} \sum_{j=0}^{N} \left(\vec{F}_j \cdot \Delta\vec{s}_j\right) \equiv \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_j} \vec{F}\cdot d\vec{s}$$

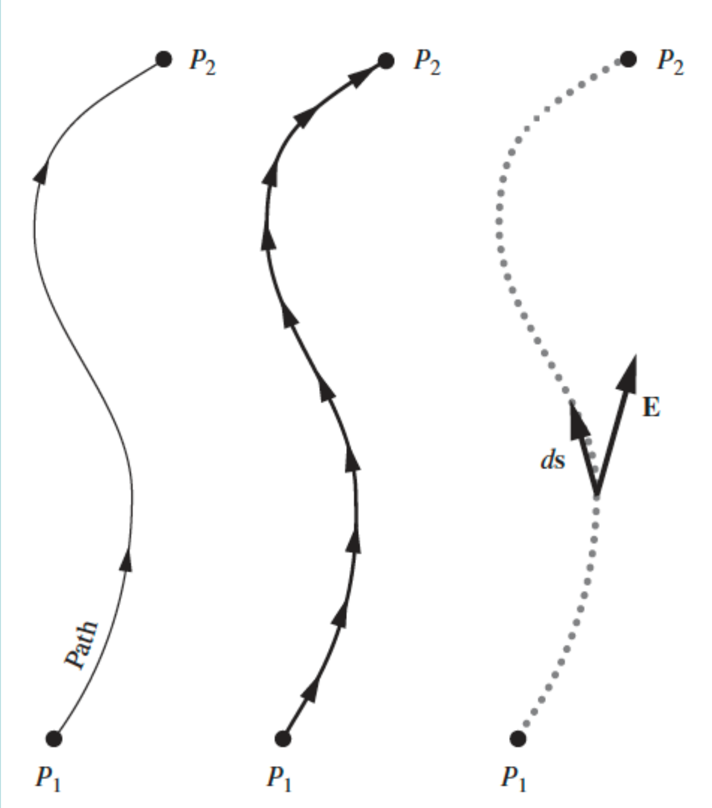
功是力的線積分。

$$\Delta V = -\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta s\to 0}} \sum_{j=0}^{N} \left(\vec{E}_j \cdot \Delta\vec{s}_j\right)$$

電位差ΔV是電場$\vec{E}$的線積分！

$$\Phi_E = \lim_{\substack{\delta A\to 0 \\ N\to\infty}} \sum_{i} \vec{E}_i \cdot \delta\vec{A}_i = \int_{\text{surface}} \vec{E}\cdot d\vec{A}$$

電通量Φ_E是電場$\vec{E}$的面積分。



$$\Delta V = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta s\to 0}} \sum_{j=0}^{N} \left(\vec{E}_j \cdot \Delta\vec{s}_j\right)$$

電位差ΔV是電場$\vec{E}$的線積分！

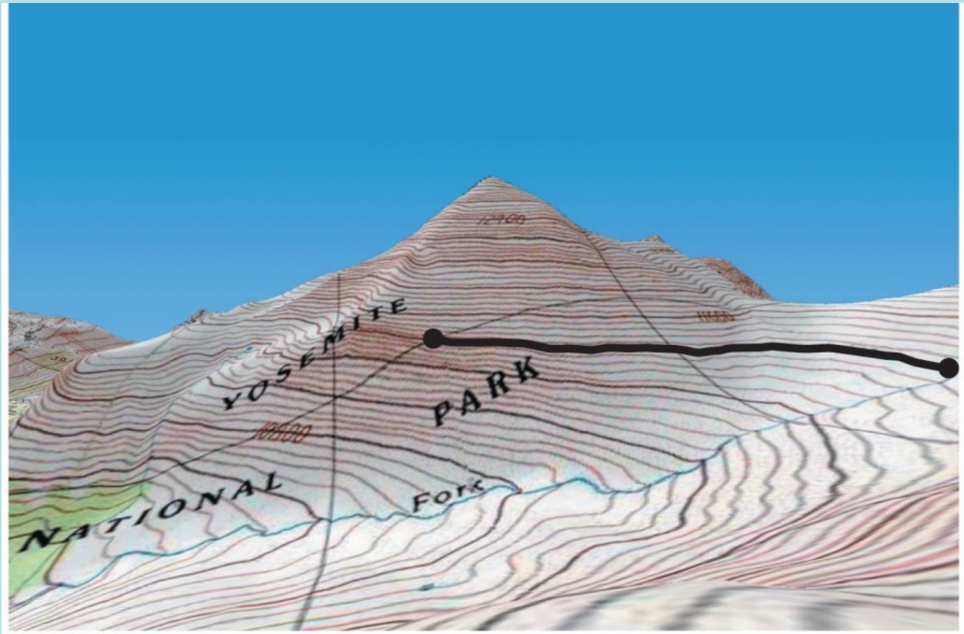
路徑可以任選，而且不需要在一個平面上。

電位$V(\vec{r})$ 在空間中的每一點有一個數值。如同地面上每一個位置有一個高度值。

電位$V(\vec{r})$是一個空間的純量函數。

空間中所有的靜電性質就記錄在這個函數中，可由此函數推導出來。

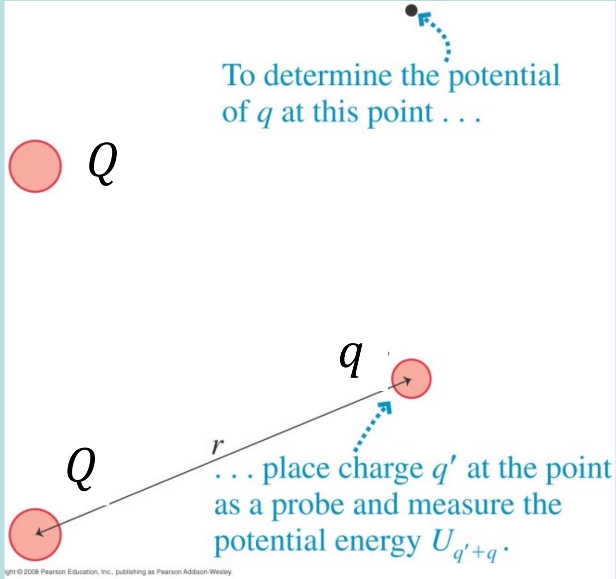
相對的，電場$\vec{E}(\vec{r})$是一個向量函數。實用上圖像化上都困難的多。



電位的計算與圖像化

點電荷的電位能

$$U(\vec{r}) = -\int_{\vec{c}}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r}$$



點電荷的電位

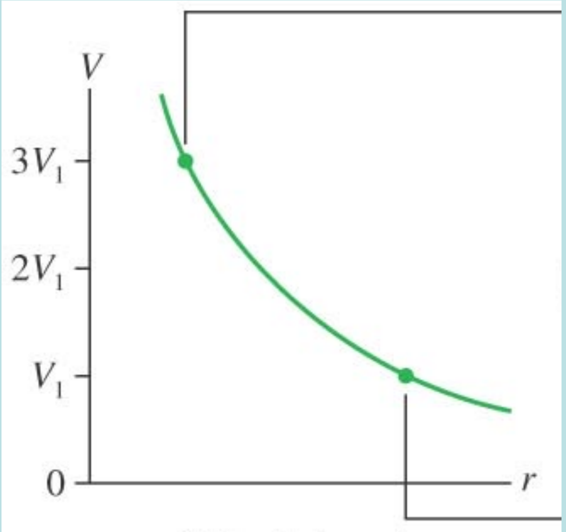
$$V = \frac{U}{q}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$$

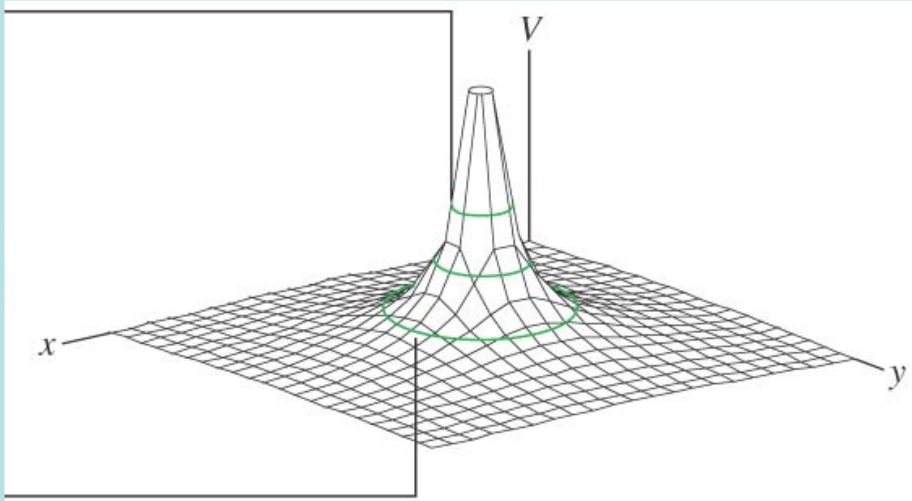
庫侖電位

如同位能可以任意加上一個常數，電位也是如此。

此公式是設無限遠處電位為零。這樣設一般就很好用。

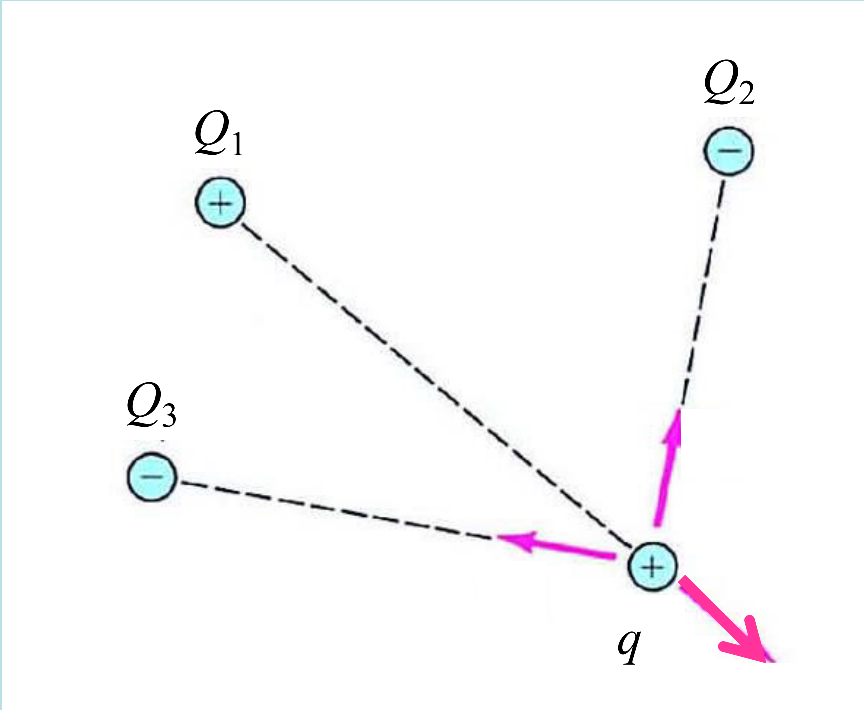


Potential graph



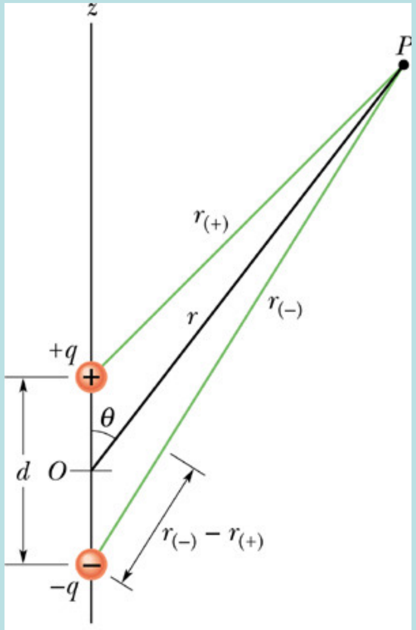
Elevation graph

若有一個以上的固定電荷Q，電位可以疊加：



$$V = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_i}{r_i}$$

若已知電荷源，電位可以以點電荷的電位的疊加來計算。

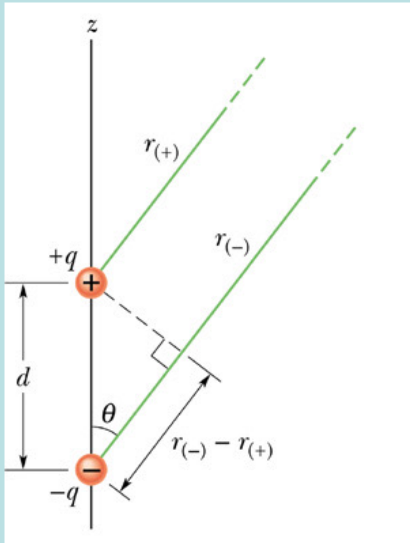


$$V = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_i}{r_i}$$

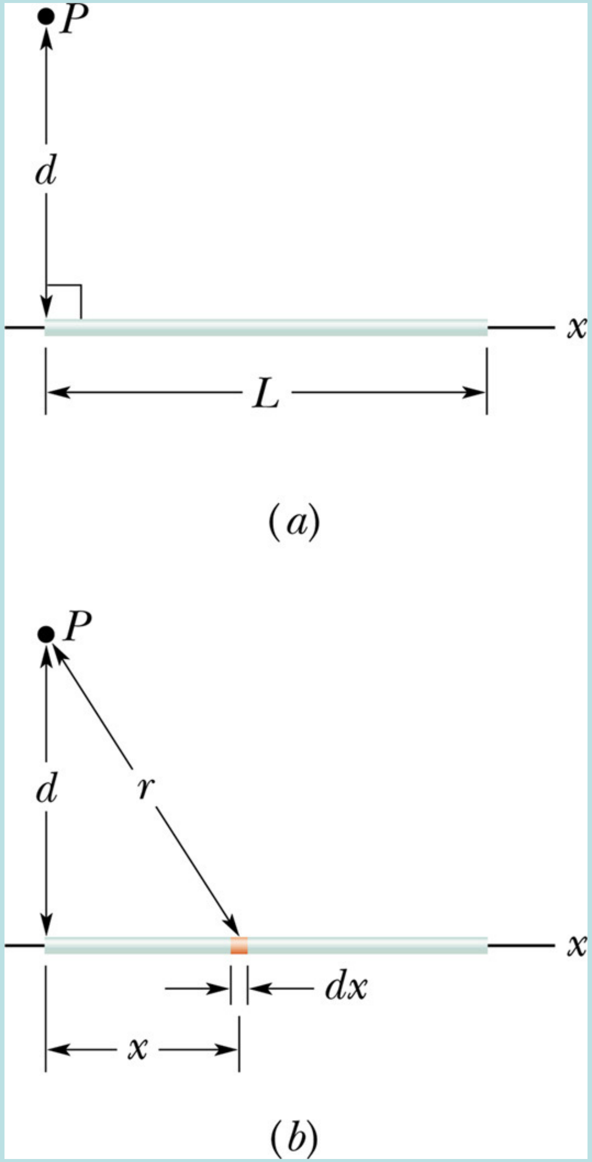
電偶極的電位

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_+} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_-}$$

$$r_\pm = r \mp \vec{d}\cdot\hat{r} = r \mp \frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{q}$$

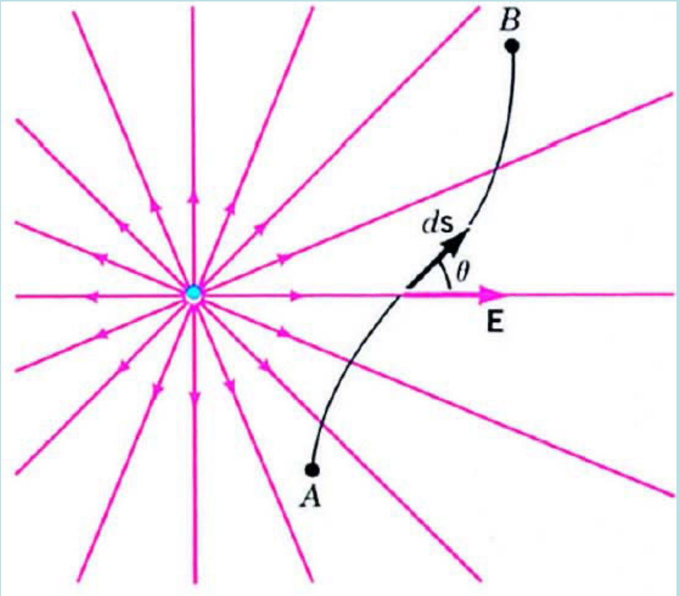


$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{r^2}$$



帶電棒的電位可以切成一小段小段疊加。

有時用電荷算電位十分繁雜，若已知電場，電位也可以以場的線積分來計算。



$$\Delta U = -\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

位能差等於力的線積分的負號。

$$V = \frac{U}{q} \qquad \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

$$\Delta V = -\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

兩點之間的電位差，等於沿任一連接兩點的曲線，負電場的線積分！

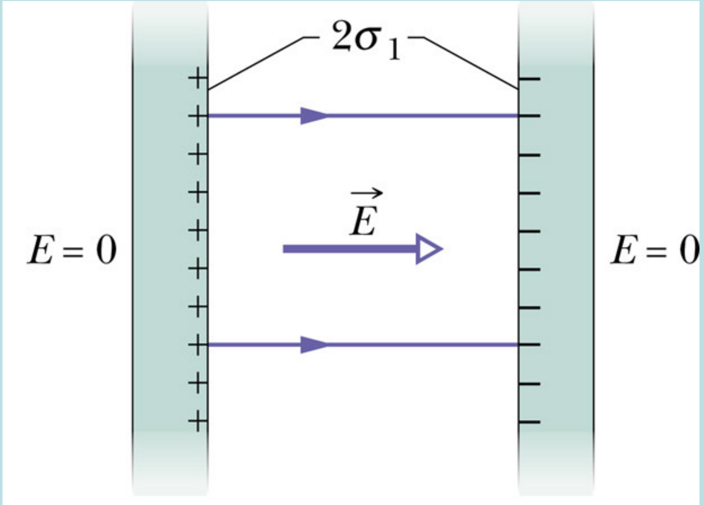
注意電場只給定了電位差！因此可以在電位上全數加一個常數，

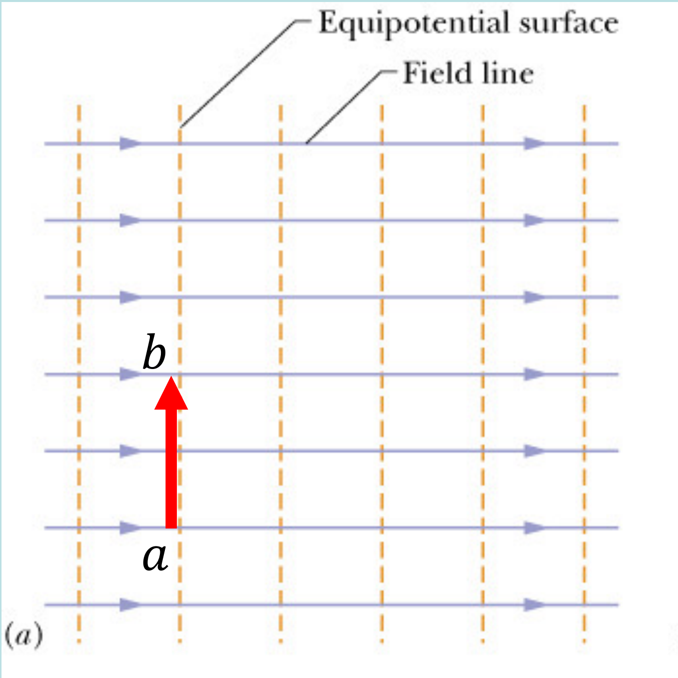
或是找任一位置作為電位為零的參考點，不影響結果。

考慮兩片帶大小相等正負電的無限大電板，電板間的電場是均勻的。

先看沿著垂直於電場方向的電位差：

$$\Delta V = -\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0$$





沿著垂直於電場的方向，電位不變！

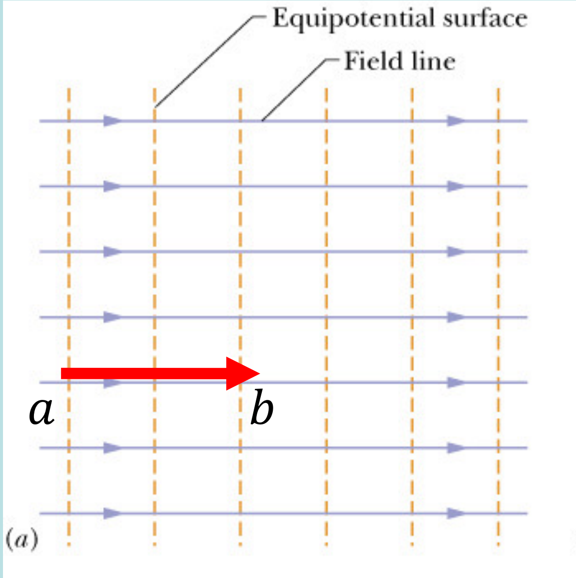
等位面與電場垂直。

沿著平行於電場方向的電位差，設此方向為x：

$$\Delta V = -\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int_{a}^{b} E(x) \cdot dx$$

電位差即是電場大小的積分。

注意：電場是指向電位下降的方向。



高電位 低電位

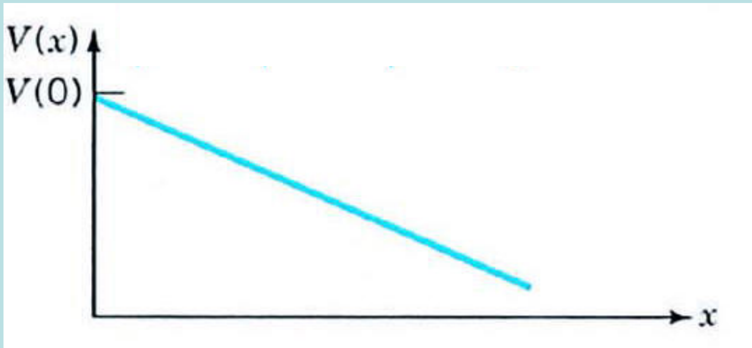
若電場是均勻的：

$$\Delta V = -E\int_{a}^{b} dx = -Ed$$

電場是指向電位下降的方向。

$$E = -\frac{\Delta V}{d}$$

電位降得越快，電場越大。

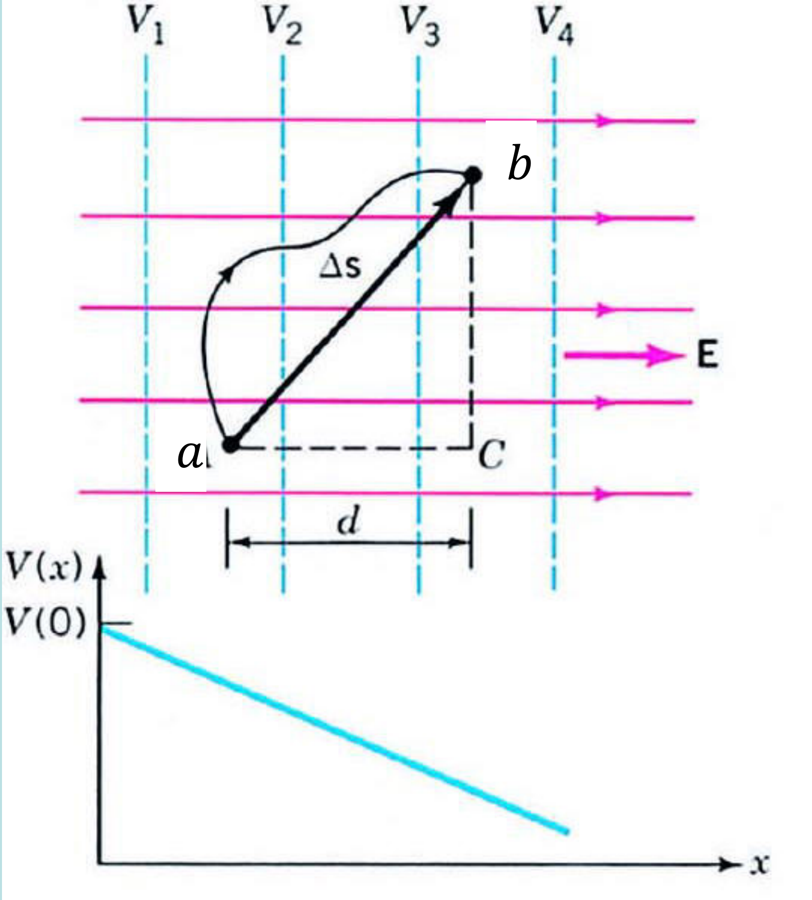


將這兩個結果綜合起來：

沿著垂直於電場的方向移動，電位不變！

均勻電場中任意兩點的電位差只要考慮沿電場方向的位移即可。

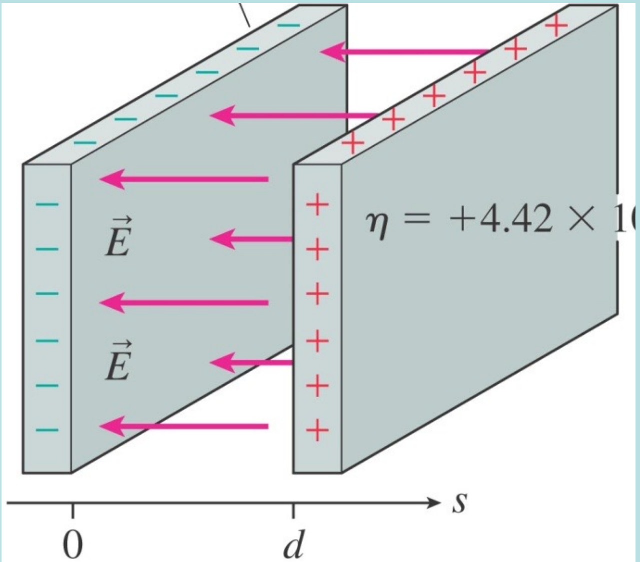
$\Delta V = -Ed$　d 是沿電場方向的位移。

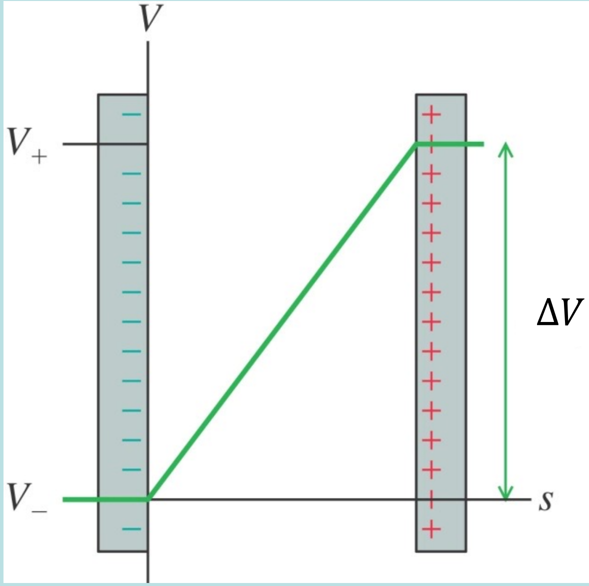


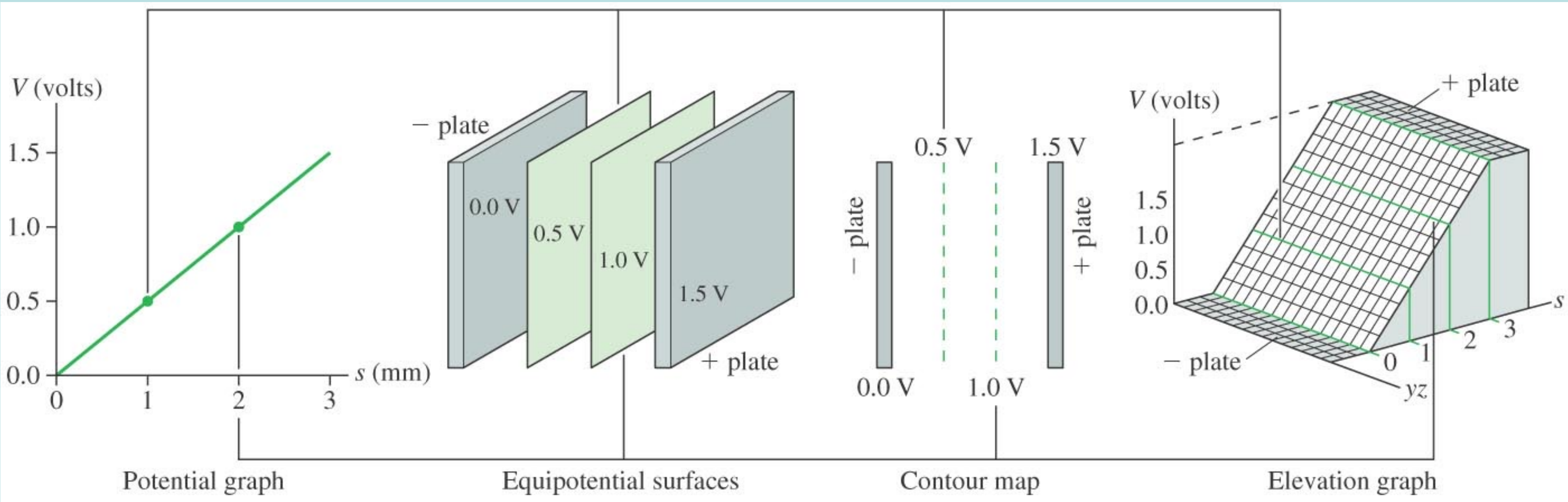
$$E = -\frac{\Delta V}{d}$$

電場的方向是電位下降的方向

兩平行電板間的電位： $\Delta V = -Ed$

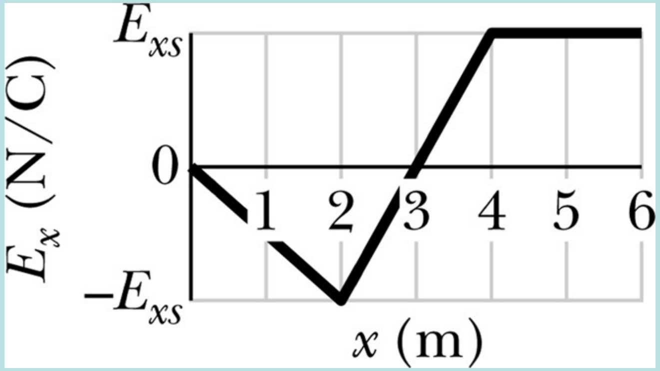






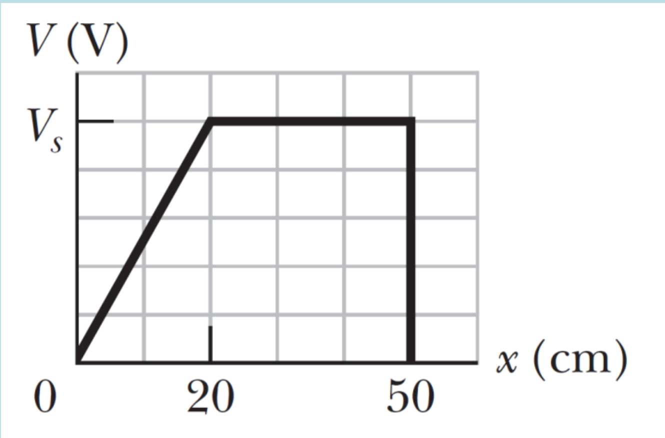
若電場是定向但不均勻，取方向為x：$$\Delta V = -\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int_{a}^{b} E_x(x) \cdot dx$$

兩位置之間的電位差即是負電場的積分，即在兩點之間電場函數下的面積。



x軸下的面積要算是負電位差。

因此電場是電位的微分乘負號：$$E_x = -\frac{dV}{dx}$$



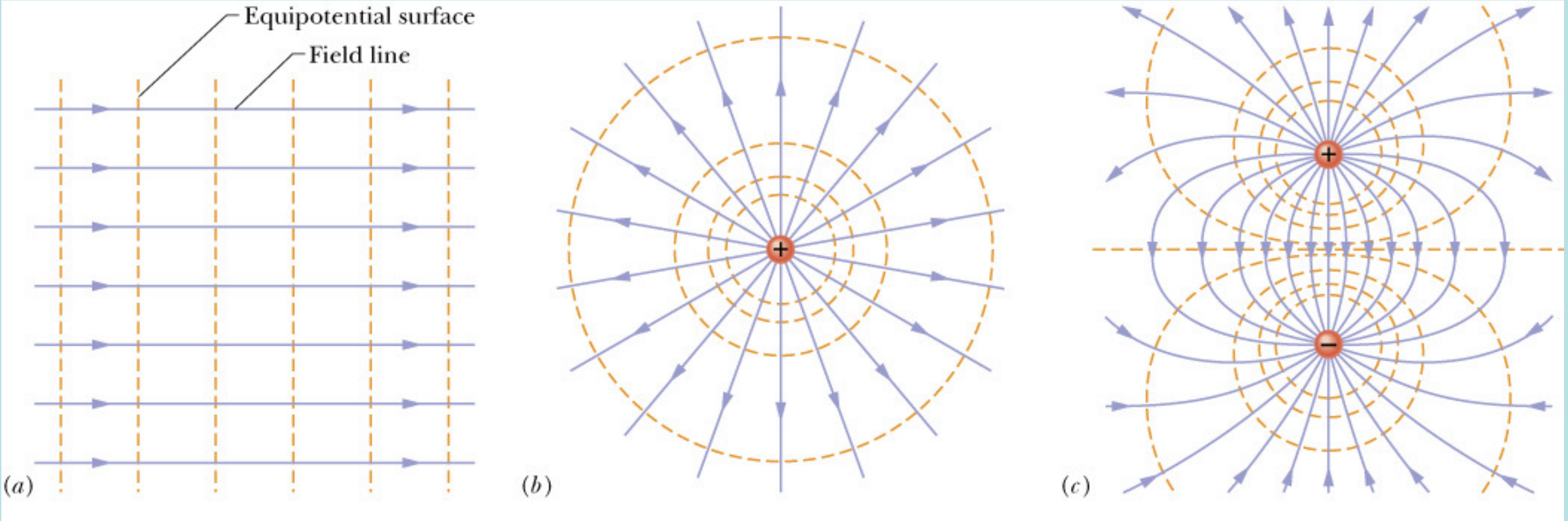
$$E_x = -\frac{dV}{dx}$$

此式可以直接推廣到三維空間，對不定向的電場也對！

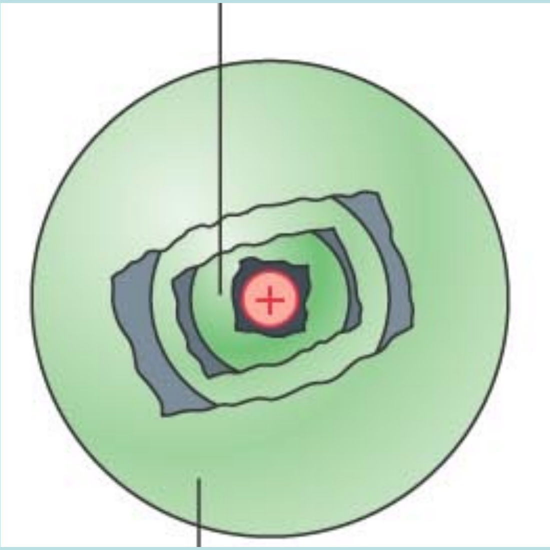
3D

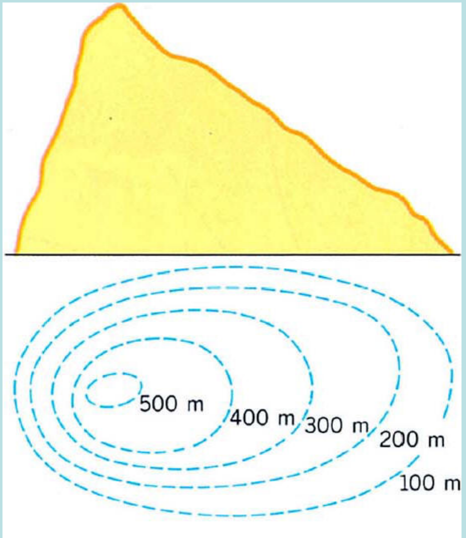
$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

要使電位$V(\vec{r})$具象化最有用的就是等位面

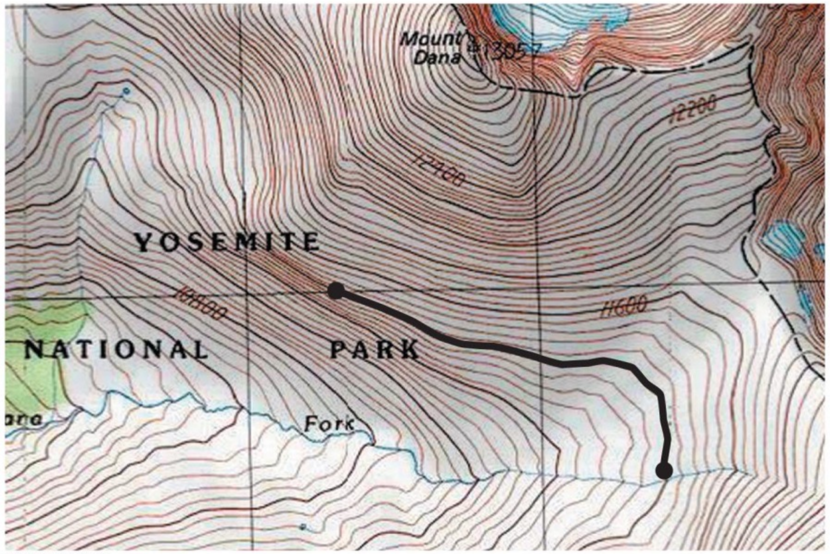


等電位面非常像地圖上的等高線：

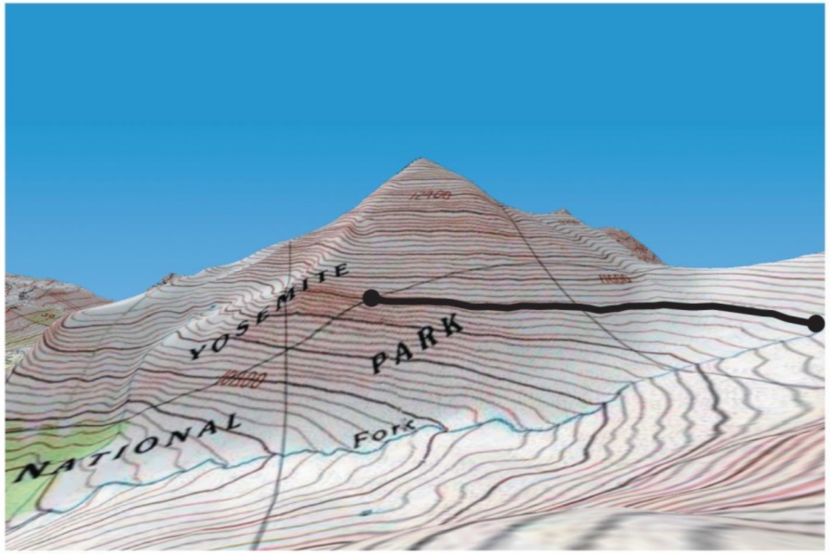


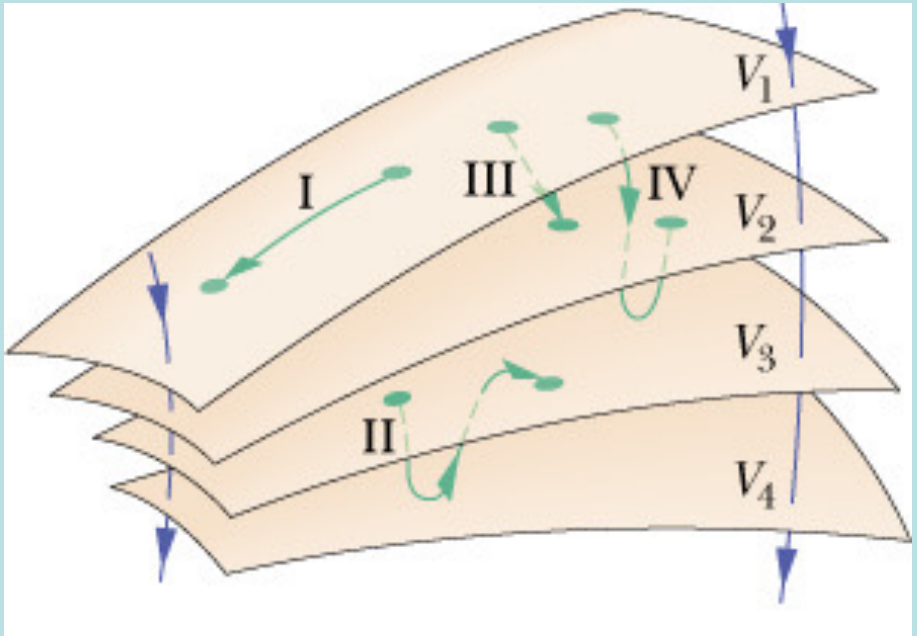


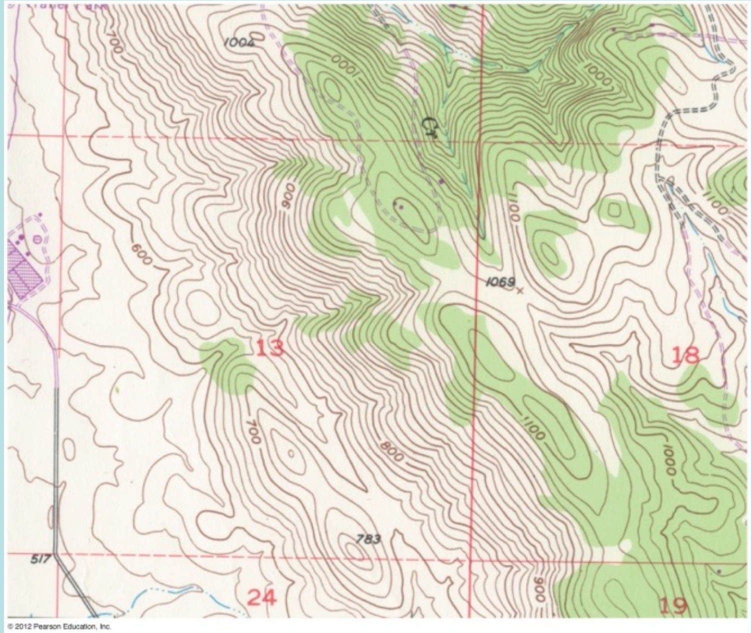
(*a*)


Mount
Dana
13057
12200
12400
YOSEMITE
10800
11600
NATIONAL
PARK
Fork

(*b*)


12400
YOSEMITE
PARK
10800
NATIONAL
Fork

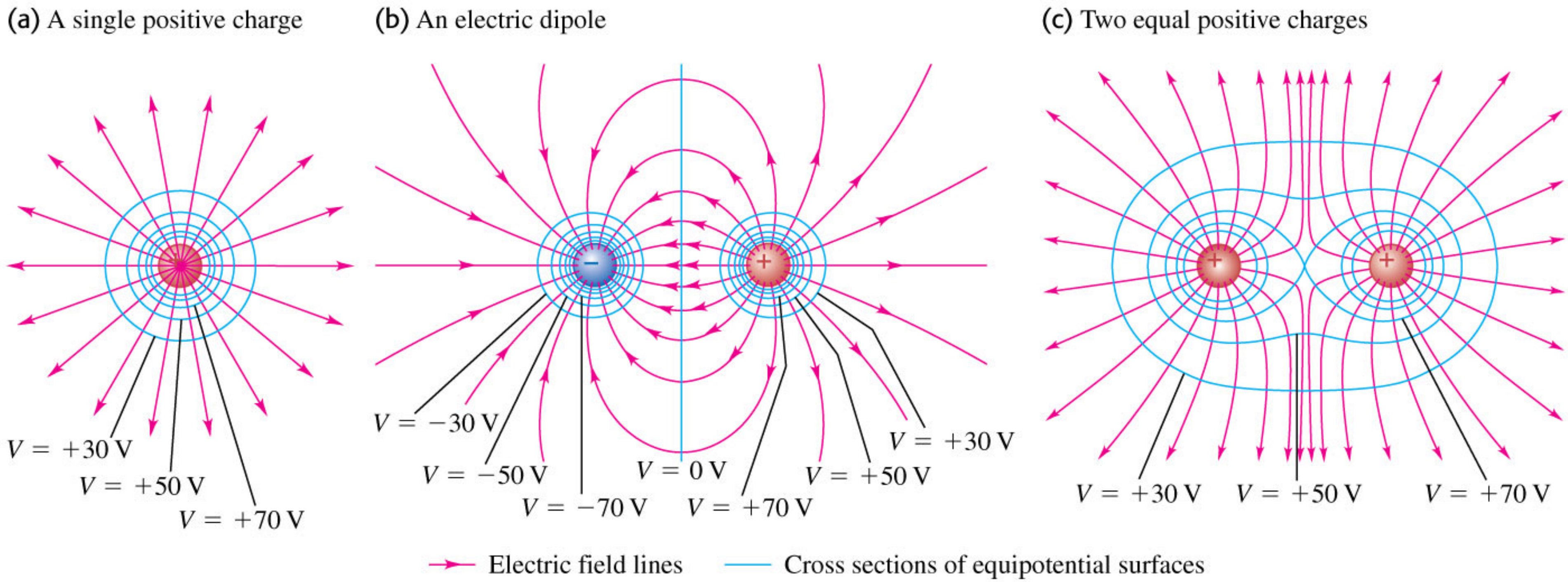




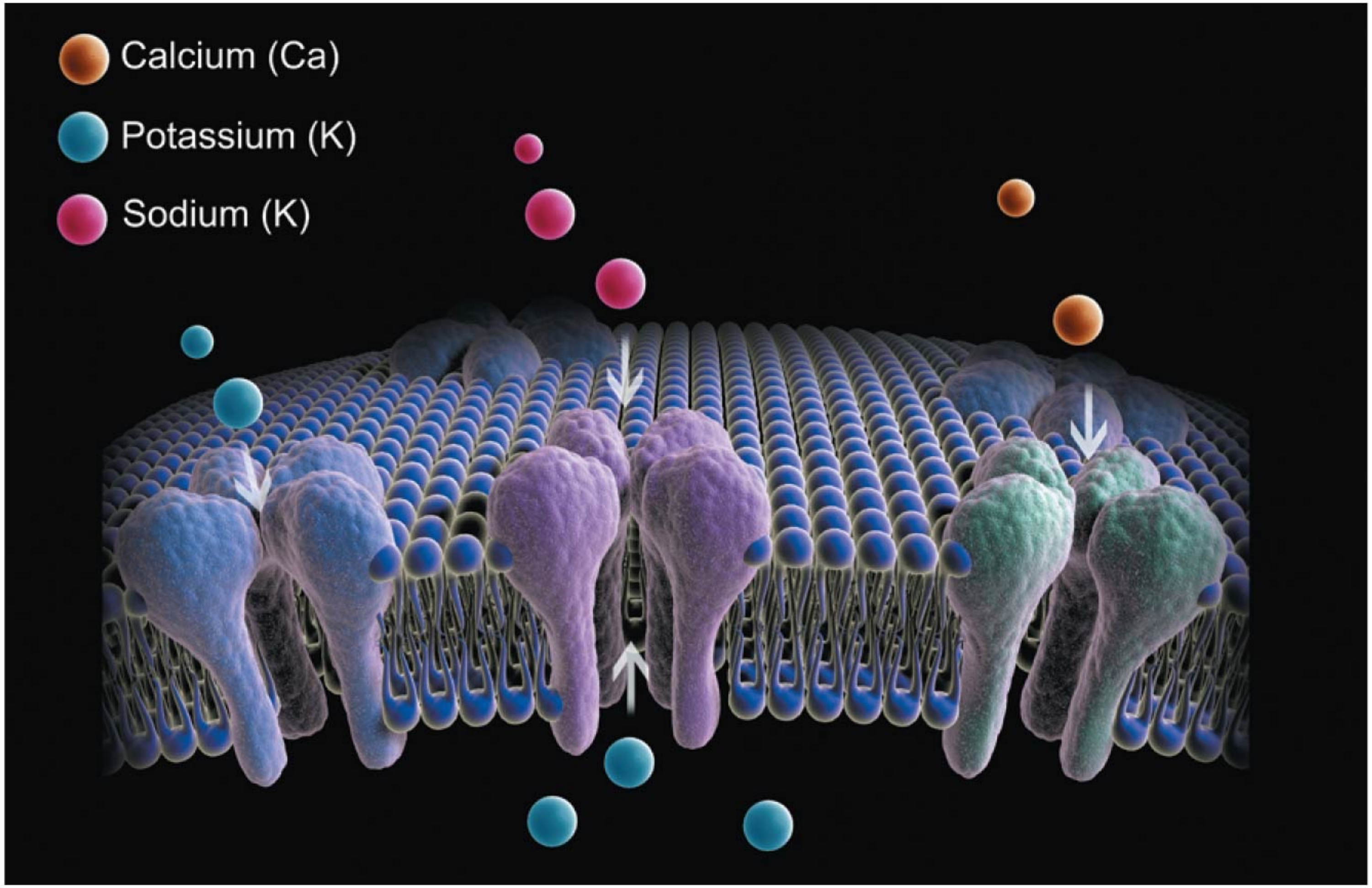
等位面不能交會。

沿等位面方向的電場為零，故電場垂直於等位面。

等位面越密，電場越強：$\boxed{\Delta V = -Ed}$


(a) A single positive charge
V = +30 V
V = +50 V
V = +70 V
(b) An electric dipole
V = −30 V
V = −50 V
V = −70 V
V = 0 V
V = +70 V
V = +50 V
V = +30 V
(c) Two equal positive charges
V = +30 V
V = +50 V
V = +70 V
Electric field lines
Cross sections of equipotential surfaces

電位對生物體很重要，身體運作時會有電位差。
測量身體各部位的電位差！心電圖。



細胞內的電位低於細胞外的電位，$\Delta V \sim 70 - 95\mathrm{mV}$。

因此有一細胞外指向細胞內的電場E。

這會影響通過細胞膜上特別通道進出細胞的離子！

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

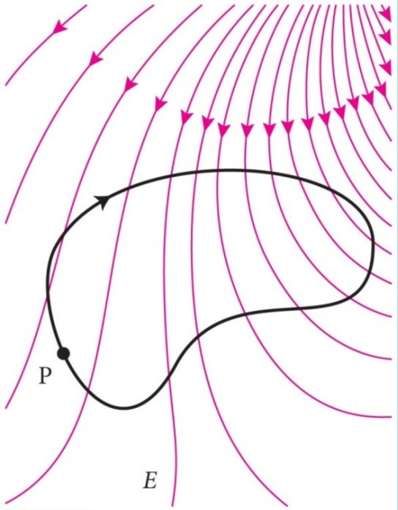
電位存在其實是電場一個非常重要的特質，這個特質給出一個定律：

記得電位差等於電場的線積分：

$$\Delta V = -\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

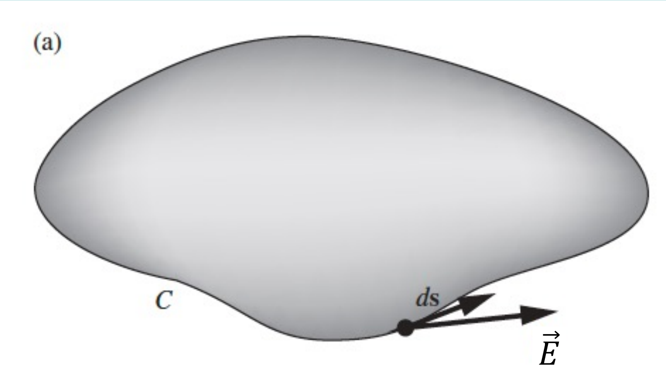
若繞一個封閉曲線計算電場的線積分，因為起點與終點相同，電位差永遠等於零！

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$



沿一個封閉曲線，電場的線積分必為零！

這是空間中任一個靜電場都必須滿足的定律



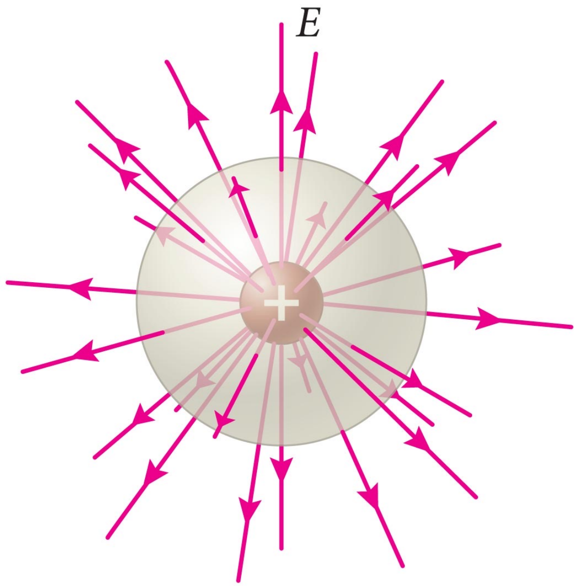
高斯定律可以完全取代庫倫定律嗎？

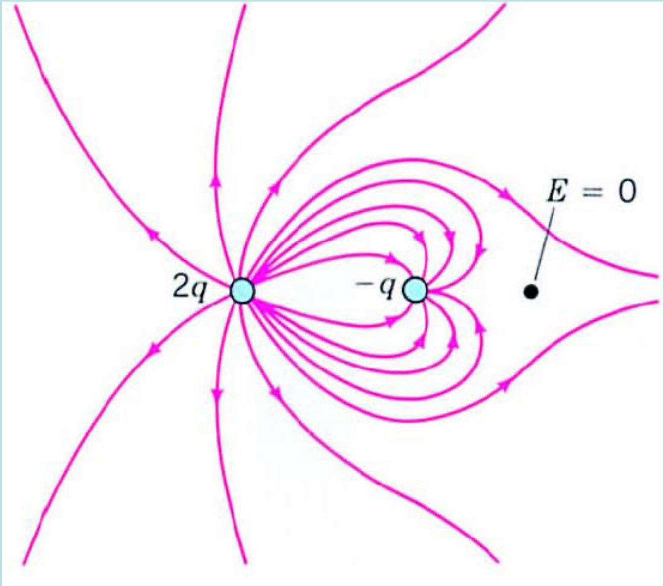
$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

?

$$\vec{E} = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_i}{r_i^2}\hat{r}_i$$

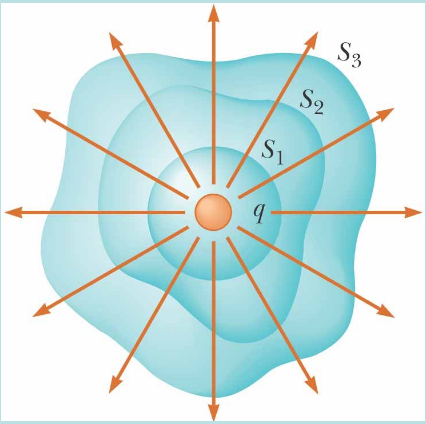
不能! 因為它不夠嚴格！



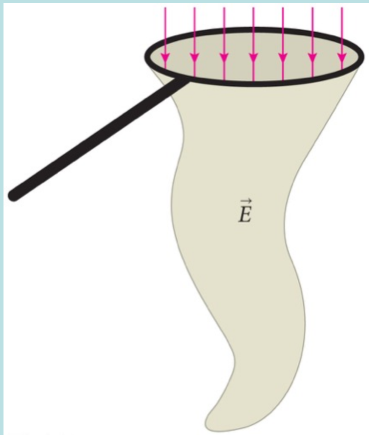


庫侖定律規定了電場線是放射狀由點電荷q所發出！

高斯定律面積分正好會捕抓曲面內放射出場線的數目。不管源頭在曲面內的何處。

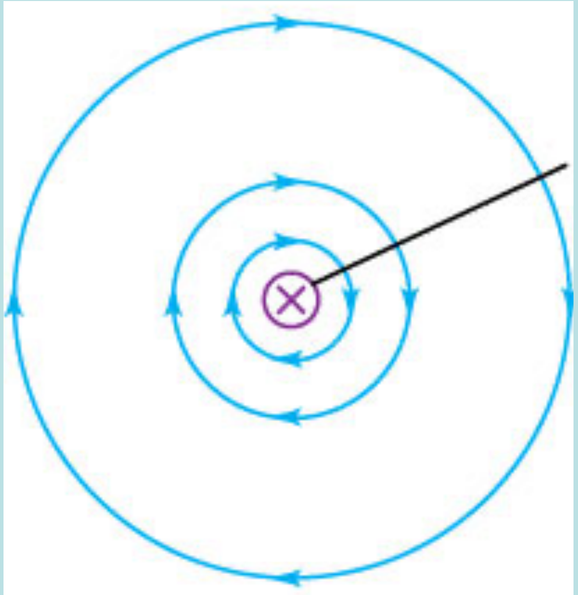


$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



連續的電場線還有另一種可能的型式。

它可以沒有產生的點也沒有消滅的點！



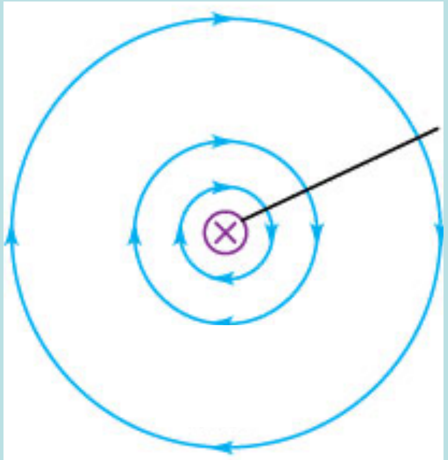
想像場線是一條一條的封閉曲線（不一定是圓）。

如此就不需要起點與終點，或說起點與終點是重合的。不需要電荷了！

這與放射狀場線非常不同，我們把它們稱為漩渦狀的場線。

庫侖定律規定電場線來自電荷，所以庫侖定律不容許這樣漩渦狀電場線。

但高斯定律似乎不禁止這樣漩渦狀電場線。



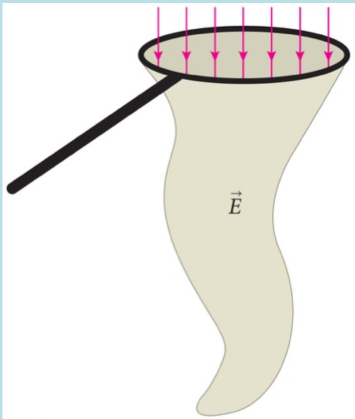
原因是這樣的漩渦狀場線，它的通量永遠為零！

$$\oint \vec{E}_{\text{漩渦}} \cdot d\vec{A} = 0$$

漩渦狀場線沒有起點或末點，因此對任一高斯面進入場線一定離開。

高斯定律的面積分無法捕捉到這樣的電場！因此對之完全沒有約束。

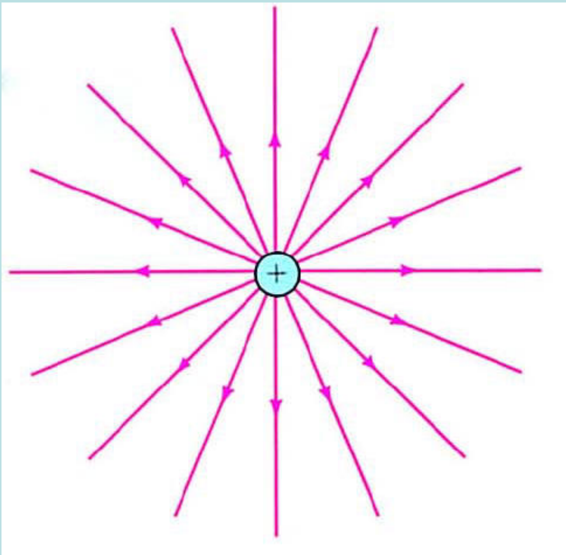
所以，庫倫定律比高斯定律嚴格！



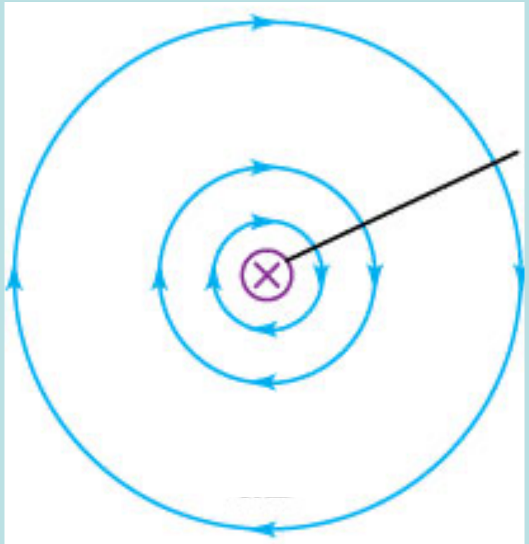
換另一種說法：

如果只有高斯定律：

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



+

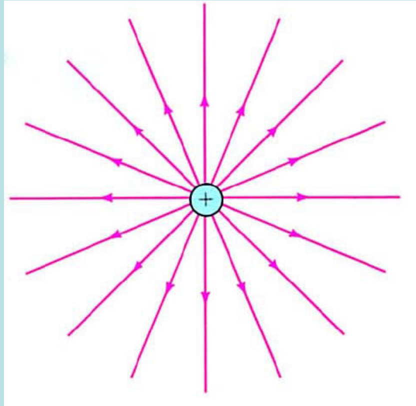


我就可以在庫倫電場放射狀的場線上疊加一個漩渦狀的電場。

疊加前後都滿足高斯定律。

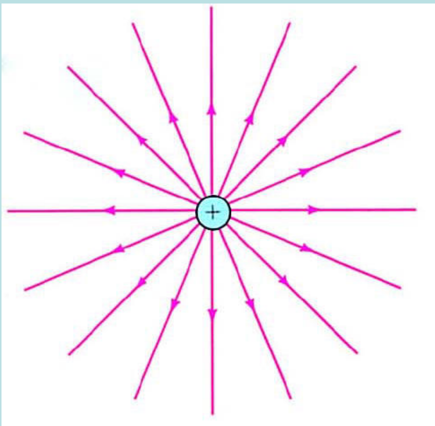
$$\vec{E} = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_i}{r_i^2}\hat{r}_i$$

庫倫定律預測電力線必定是放射狀的。

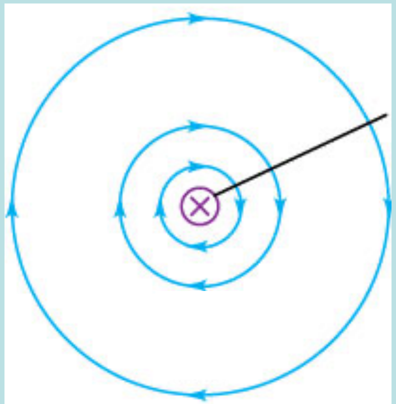


$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

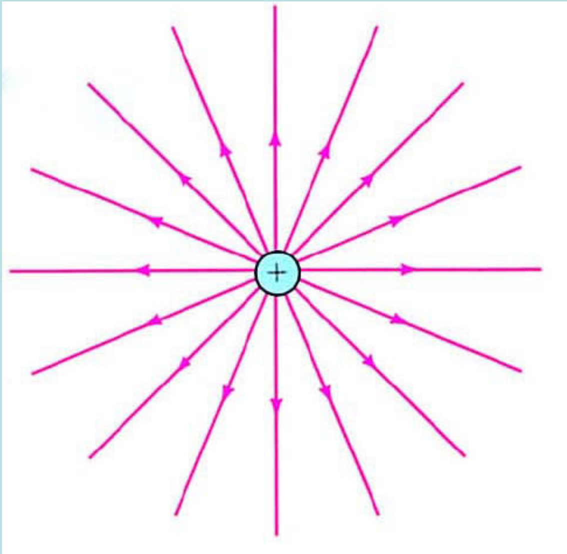
高斯定律預測放射狀的場線上疊加任一個漩渦狀的電場。



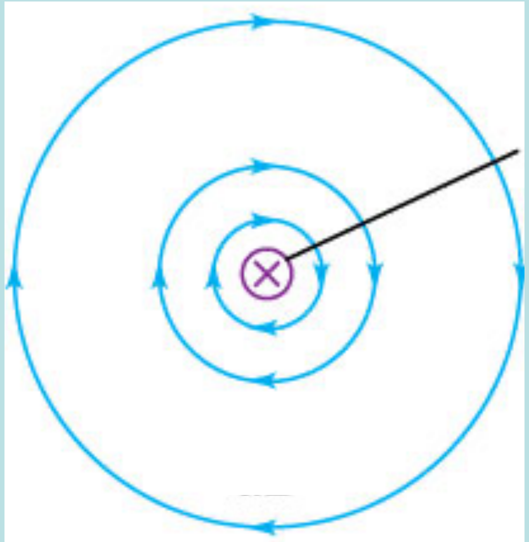
+



而自然界真的沒看到過漩渦狀的靜電場。



+



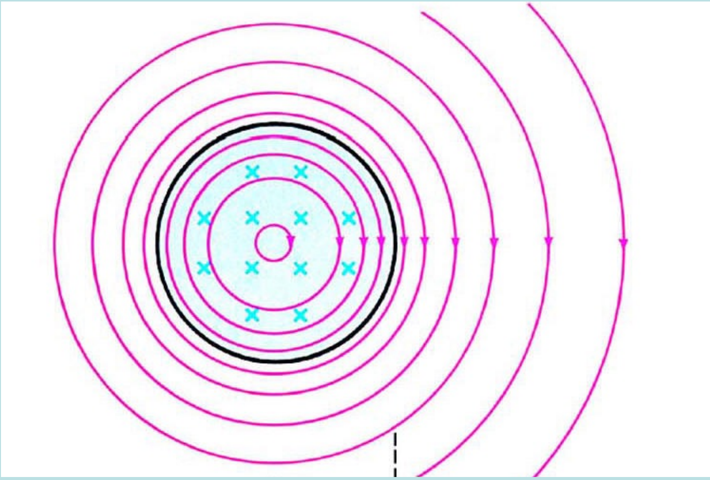
高斯定律可以取代庫倫定律成為主宰靜電學唯一定律嗎？答案是不能。

因為高斯定律不夠嚴格，無法禁止漩渦狀電場。這個漏洞必須立法禁止！

高斯定律 ＋ 一個可以禁止漩渦狀電場的定律 ＝ 庫倫定律

要禁止，要先捕捉到漩渦狀電場。

如果有漩渦狀的電場線：



取一條沿著漩渦的路徑，沿這個路徑計算電場的線積分：

在此路徑上漩渦狀的電場線將與路徑一直同向，內積永遠為正：

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} \sim \oint E_{漩渦}\cdot ds$$

可以說線積分會沿路收集沿路徑方向的電場分量！

那麼如果要求：$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0$ 則 $E_{漩渦} = 0$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0$$

這個定律正好可以禁絕漩渦狀的場線！

如果要求電場沿任一封閉曲線的線積分永遠為零，漩渦狀電場就不可能出現！

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

這個定律正好可以禁絕漩渦狀的場線！

高斯定律加上電場線積分為零的定律，就等於庫倫定律。

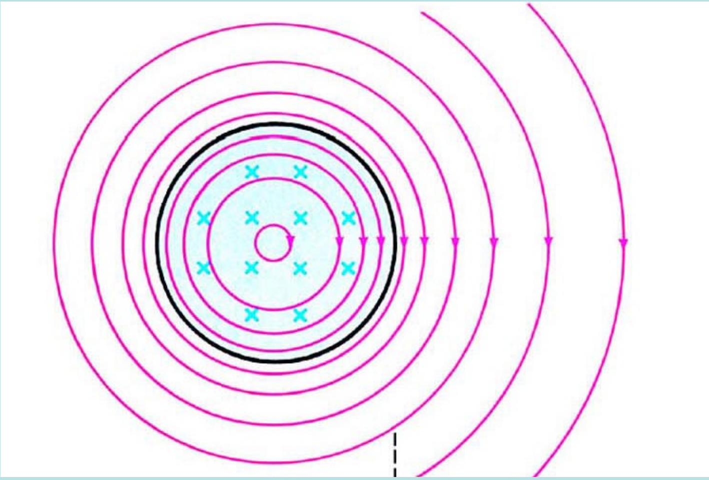
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

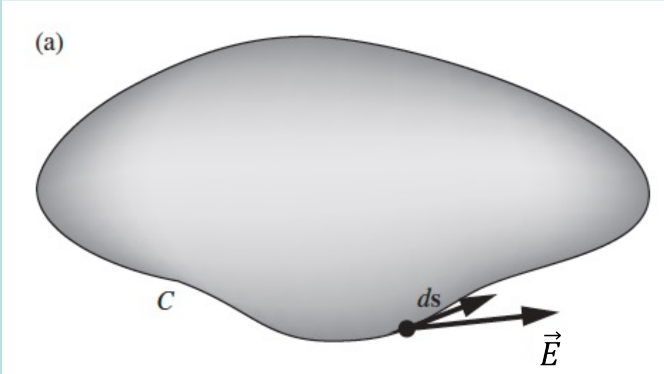
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\vec{E} = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

根本的原因在於：線積分與面積分分別捕抓紀錄不同形狀的場線：

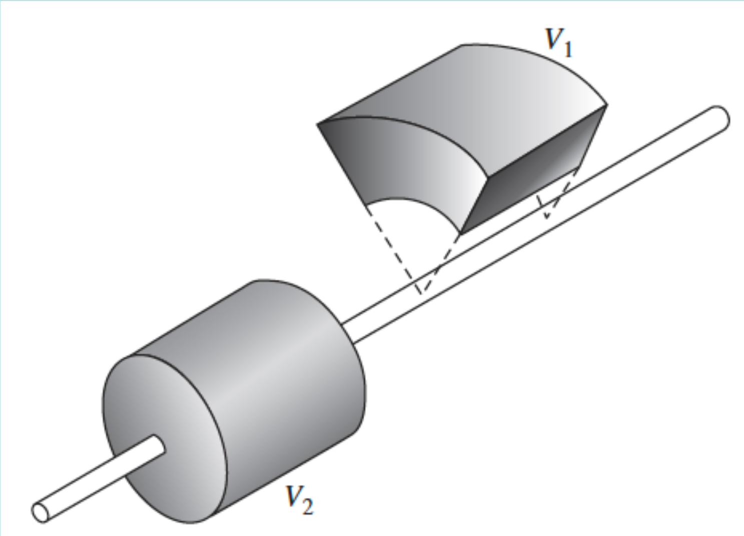


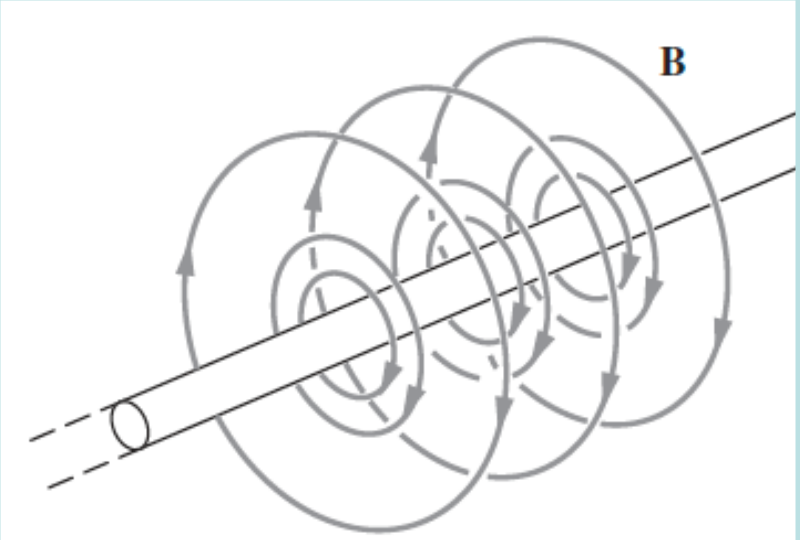


$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} \sim \oint E_{\text{漩渦}} \cdot ds$$

這個積分會挑選出平行於該漩渦路徑的場，那就是漩渦狀的場線！

若有旋渦狀場線的場，就會對線積分有貢獻，就說線積分可補抓旋渦狀場線。

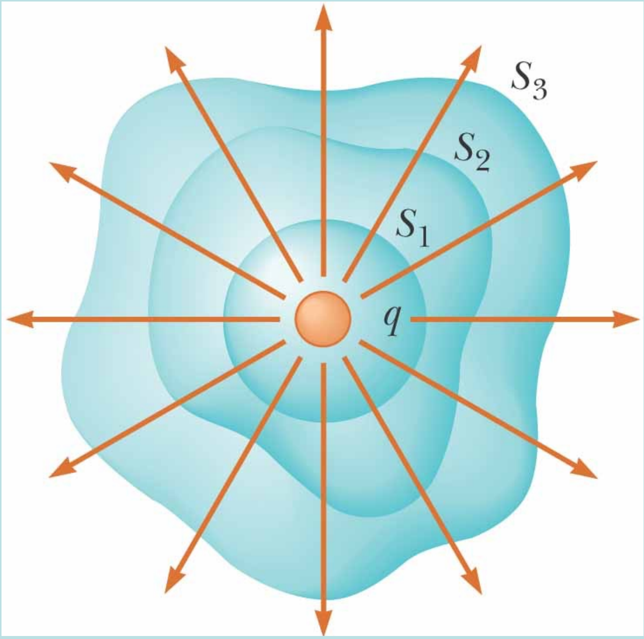


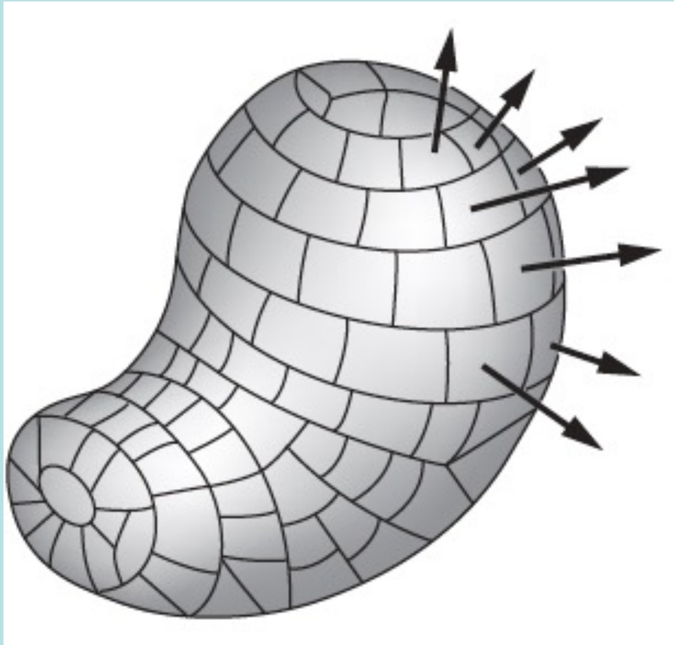


漩渦狀場線沒有起點或末點，因此對任一高斯面進入場線一定離開。

所以漩渦狀場線在任一高斯面的通量永遠為零！ $\oint \vec{E}_{漩渦} \cdot d\vec{A} = 0$

面積分無法捕捉到漩渦狀場線，它對面積分貢獻永遠為零！

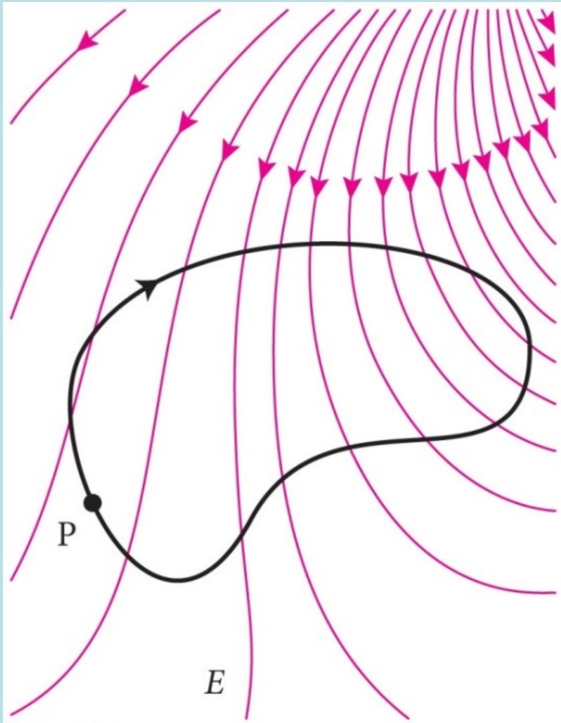




面積分會挑選出垂直於高斯面的場，那就是放射狀的場線！

若有放射狀場線的場，就會對面積分有貢獻，就說面積分補抓放射狀場線。

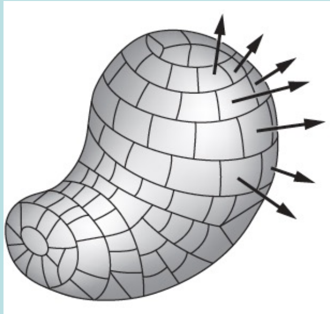
$$\oint \vec{E}_{放射} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

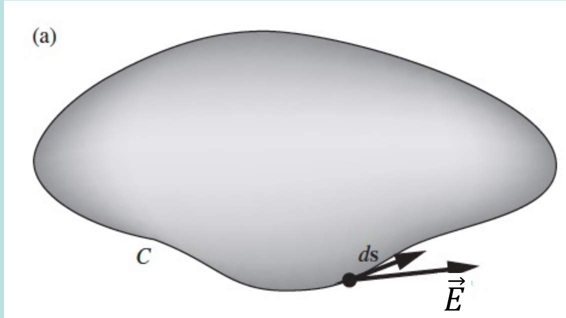


由點狀源頭發出的放射狀場線，如庫倫電場一樣是保守力，

對任一封閉曲線 $\oint \vec{E}_{放射} \cdot d\vec{s} = 0$

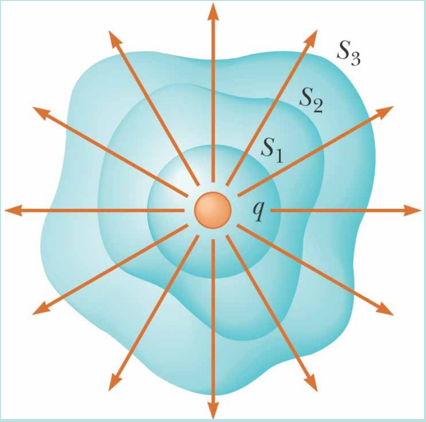
線積分無法捕捉到放射狀場線，它對線積分貢獻永遠為零！





面積分

線積分

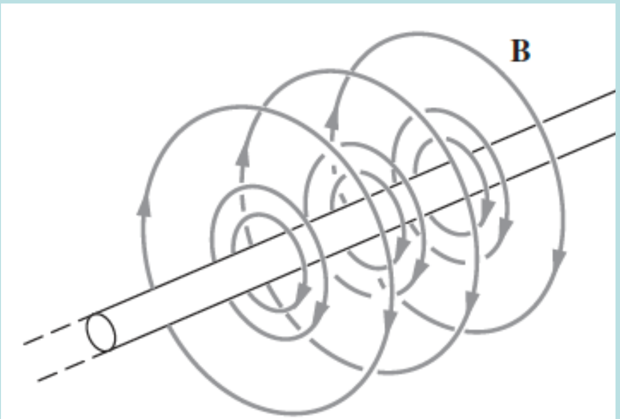


$$\oint \vec{E}_{\text{放射}} \cdot d\vec{A}$$

$$\oint \vec{E}_{\text{放射}} \cdot d\vec{s} = 0$$

放射狀的場線

面積分會補抓放射狀的場線！



$$\oint \vec{E}_{\text{漩渦}} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\oint E_{\text{漩渦}} \cdot ds$$

線積分會補抓漩渦狀的場線！

漩渦狀的場線

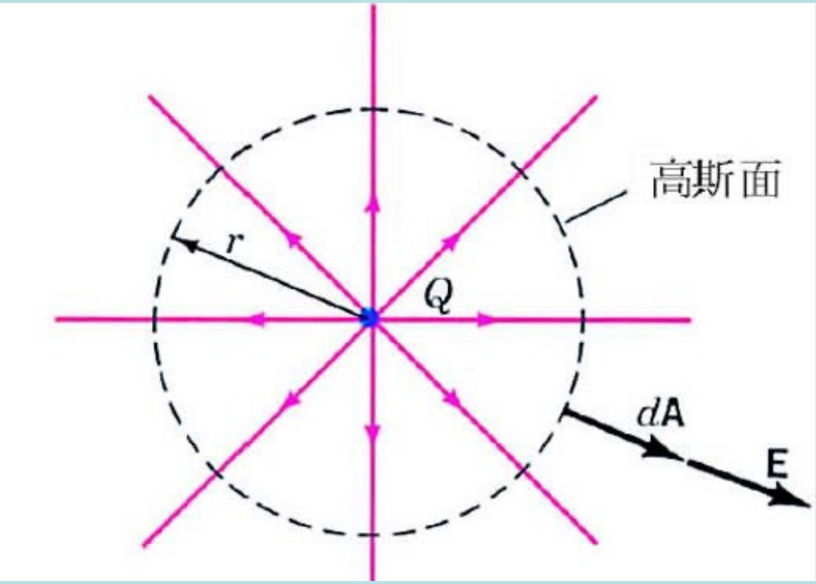
這兩個方程式合起來可以取代庫倫定律！

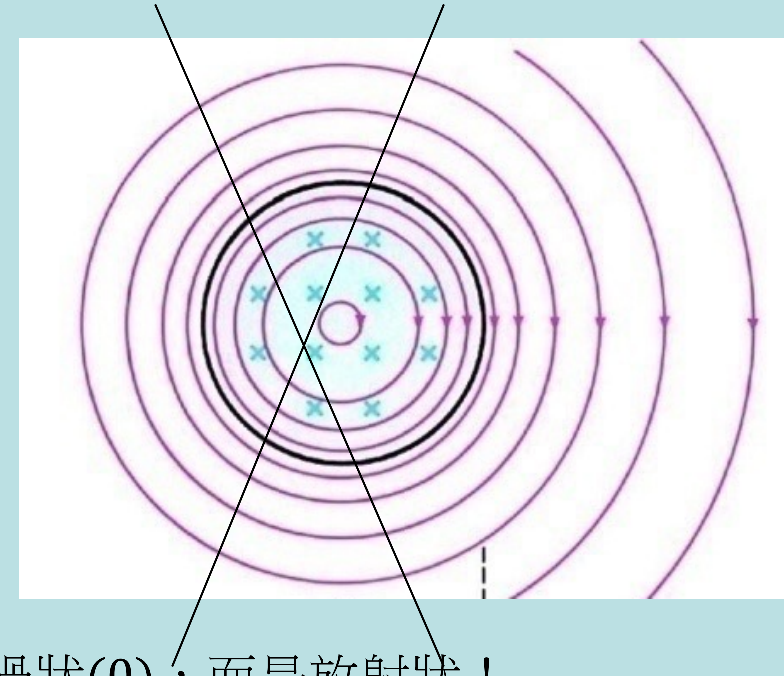
這兩個方程式是靜電學的基本定律，規定了靜電場的形狀！

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

面積分會補抓放射狀的場線！　　線積分會補抓漩渦狀的場線！





右邊的方程式規定了靜電場線必定是非漩渦狀(0)，而是放射狀！

左邊的方程式規定了放射狀場的大小由場源的電荷大小q決定！

這兩點正是庫倫定律的內容！

這兩個方程式就是馬克思威爾方程式的一部分。

另外兩個也是由對磁場一樣的積分所寫成！

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Maxwell Equations

庫倫定律在電動力學中是不適用的，但這兩個定律卻只需要簡單的修改。

考慮靜電場與靜磁場：

面積分會補抓放射狀的場線！　　線積分會補抓漩渦狀的場線！

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

靜電場電場線是放射狀！場源是電荷。

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0$$

靜電場電場線不是漩渦狀！

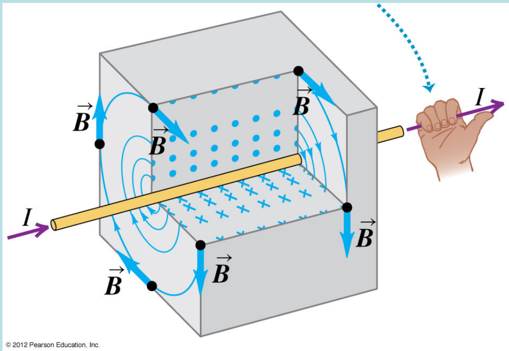
$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0$$

靜磁場磁場線不是放射狀！

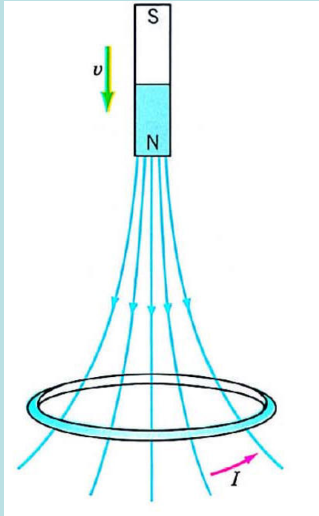
$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 i$$

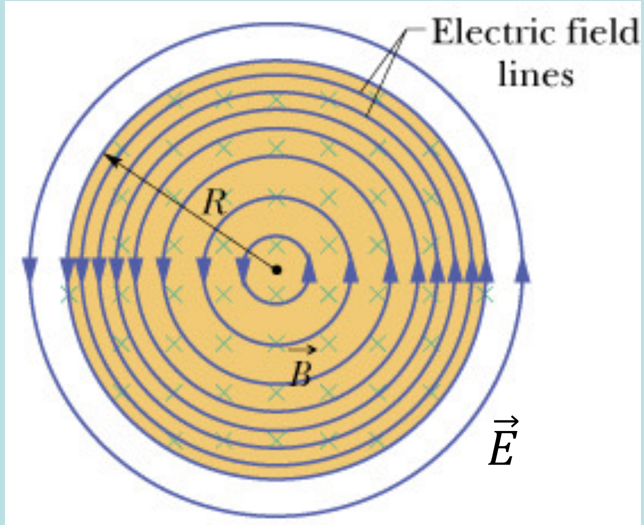
靜磁場磁場線是漩渦狀！場源是電流。

Maxwell Equations



考慮動電場與動磁場：





$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

變化磁場可以產生漩渦狀電場線。

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0$$

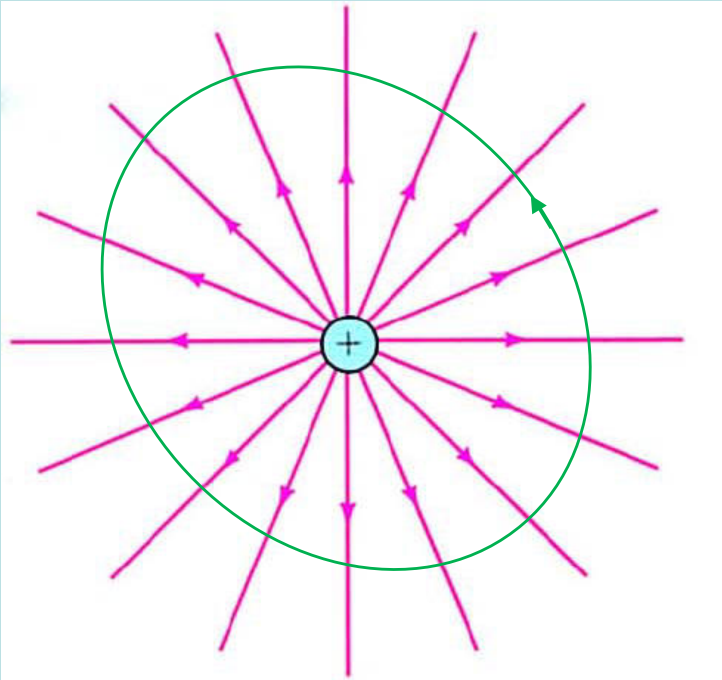
$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 i + \mu_0\varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt}$$

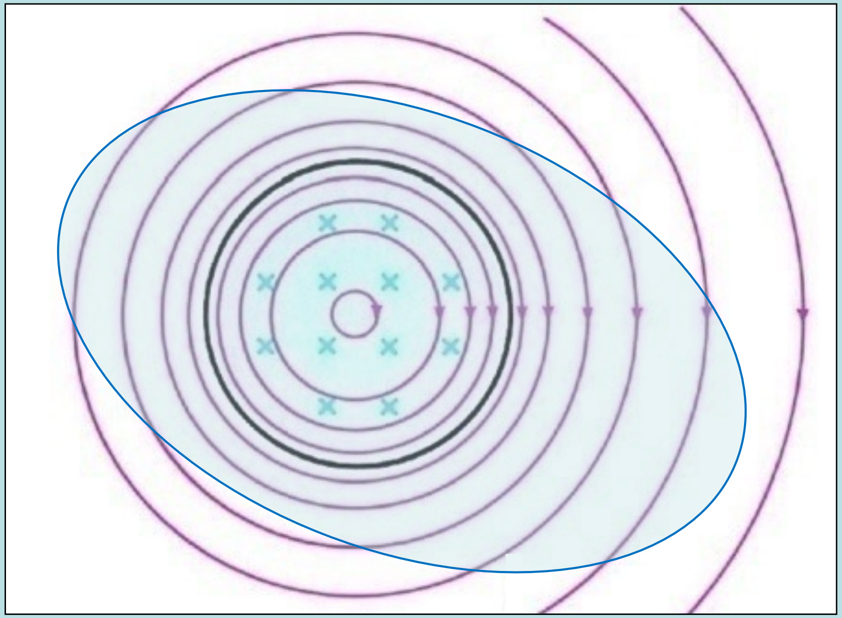
變化電場可以產生漩渦狀磁場線。

放射狀場線與漩渦狀場線只是籠統的說法。

但馬克斯威爾當年就是用這種方式來抓出場的幾何特性。

其實嚴格來說，他們的定義就分別是線積分及面積分永為零的場！





$$\oint \vec{E}_{\text{放射}} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_{\text{放射}} = 0$$

$$\oint \vec{E}_{\text{漩渦}} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_{\text{漩渦}} = 0$$

線積分為零的場稱為放射狀場線。

面積分為零的場稱為漩渦狀場線。

但即使討論抽象的幾何，Maxwell 離不開具體的物理模型！

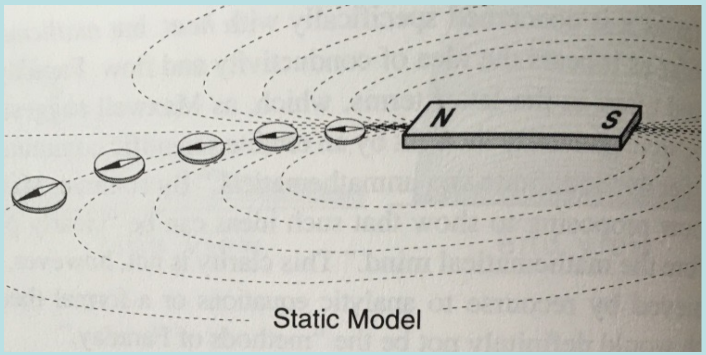
I. *Theory of the Motion of an incompressible Fluid.*

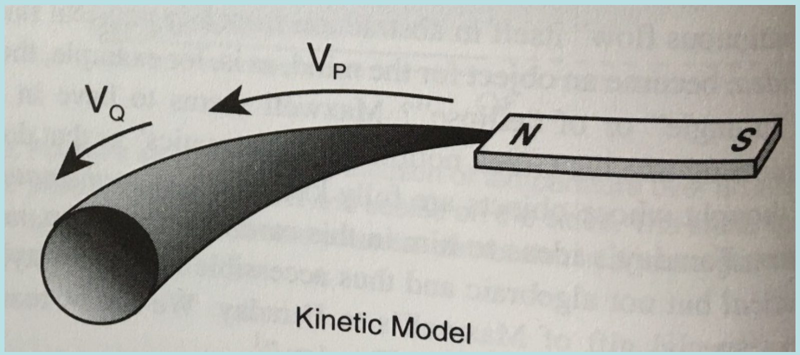
(1) The substance here treated of must not be assumed to possess any of the properties of ordinary fluids except those of freedom of motion and resistance to compression. It is not even a hypothetical fluid which is introduced to explain actual phenomena. It is merely a collection of imaginary properties which may be employed for establishing certain theorems in pure mathematics in a way more intelligible to many minds and more applicable to physical problems than that in which algebraic symbols alone are used. The use of the word "Fluid" will not lead us into error, if we remember that it denotes a purely imaginary substance with the following property:

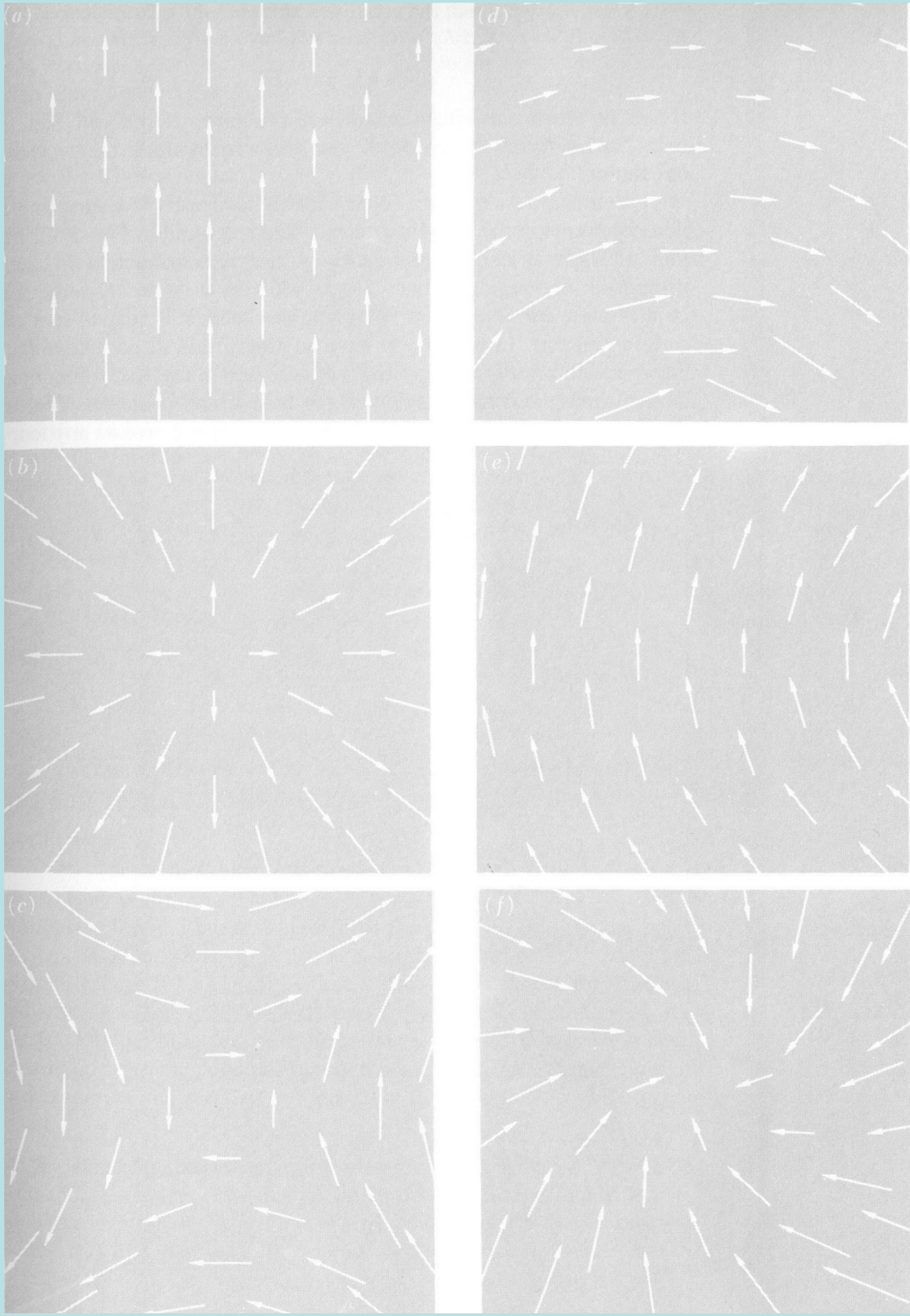
空間中遍佈的連續的線，最典型的模型就是連續的流體！

於是Maxwell 將場線中的電磁力，類比於一沿場線流動的不可壓縮流體，

強調的是流體可以捕捉到電磁場空間分布的幾何性質。






(a)
(b)
(c)
(d)
(e)
(f)

電位最有用的應用是在導體的電性

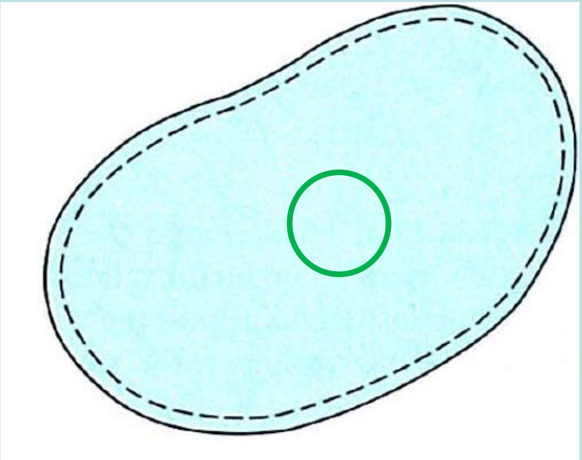
導體內有可以自由移動的電荷。

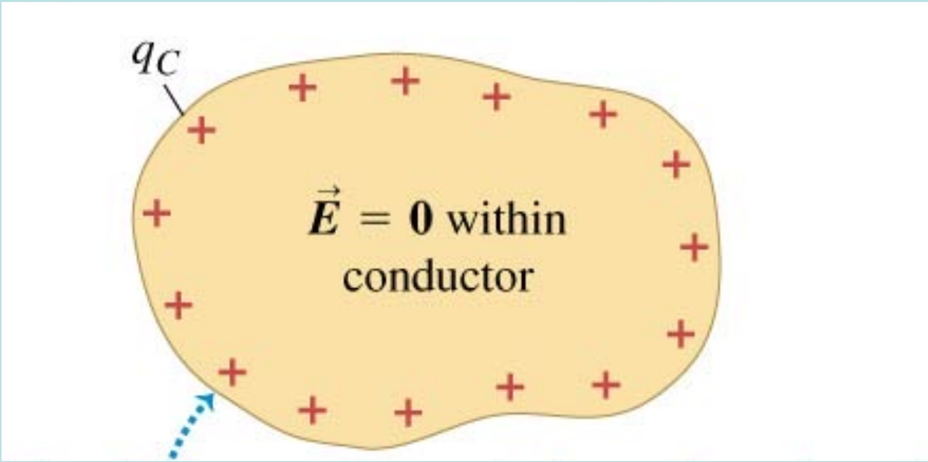
若有電場、及電位差，正電荷會移動，由高電位移向低電位。

負電荷會移動，由低電位移向高電位，直到電場為零。

導體的靜電場由停下來之後的電荷分佈決定。

但因為不知電荷的位置，庫倫定律無法發揮！

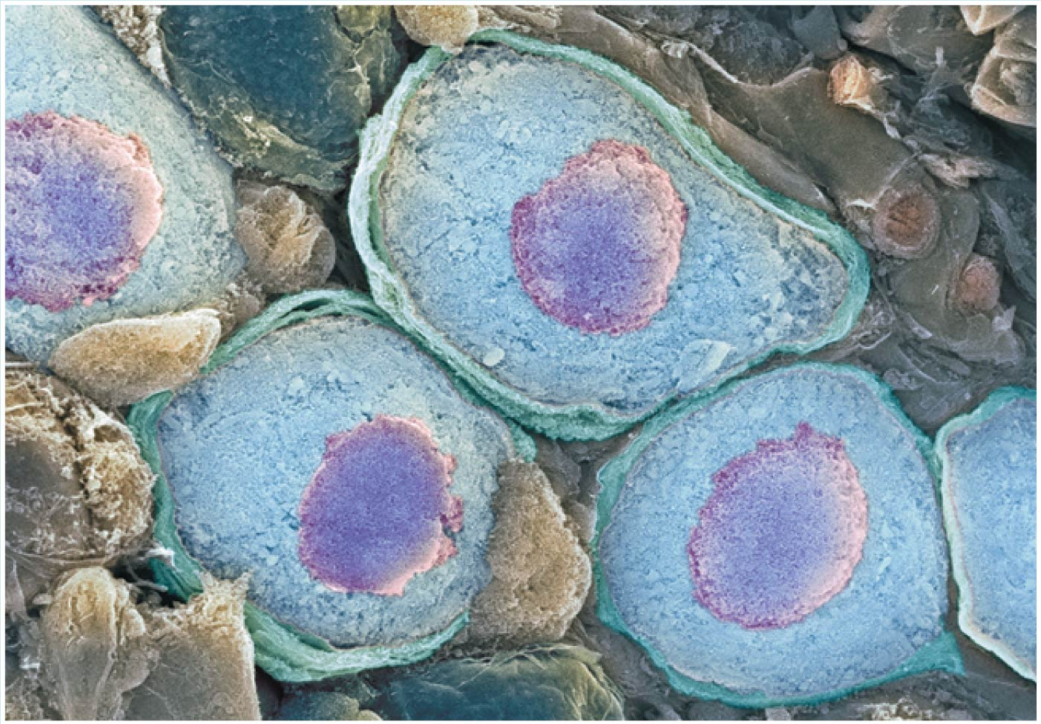


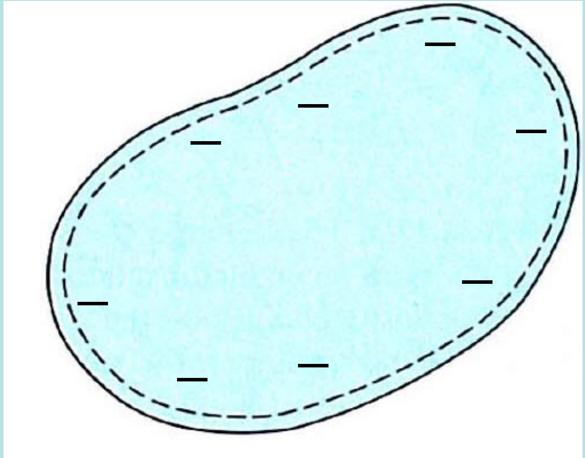


導體內電場為零！否則自由電荷就可以繼續移動。

取導體內任一高斯面，電通量為零，所有高斯面內電荷都為零！

導體內電荷為零，因此電荷只分布於表面。





人的神經細胞內，有許多Kr^+氪離子及帶負電的蛋白質分子Pr^-鐠離子。

只有較小的Kr^+離子可以透過細胞膜到達細胞外的液體中，

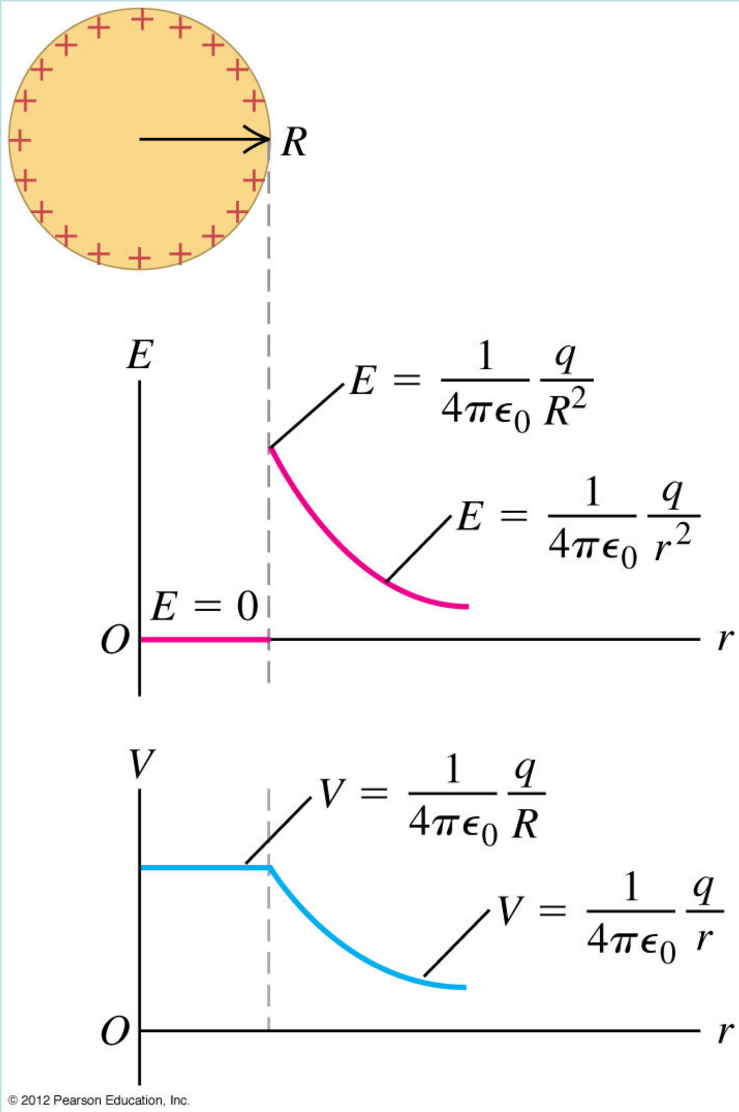
因此細胞內的液體是帶負電，

此液體是導體，因此負電會分佈在細胞膜內的表面，無論細胞形狀為何。

於是細胞內外會有一電位差，或說有一靜電場。

因為導體內電場為零，因此整個導體為等電位！

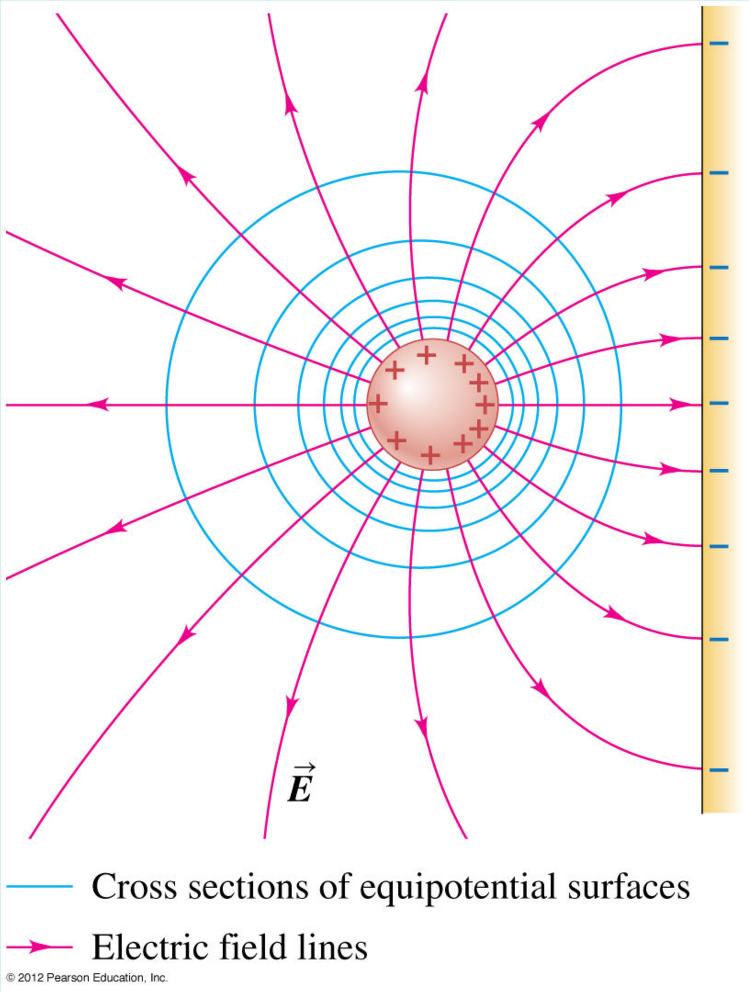
導體表面是等位面！如以下導電球。

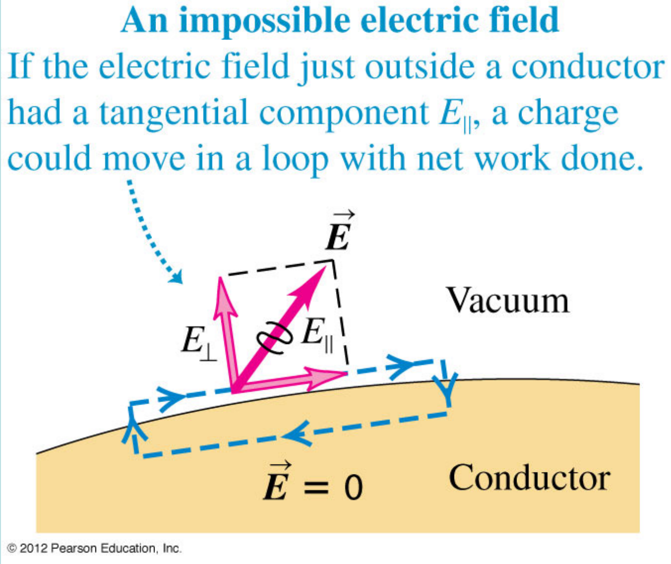


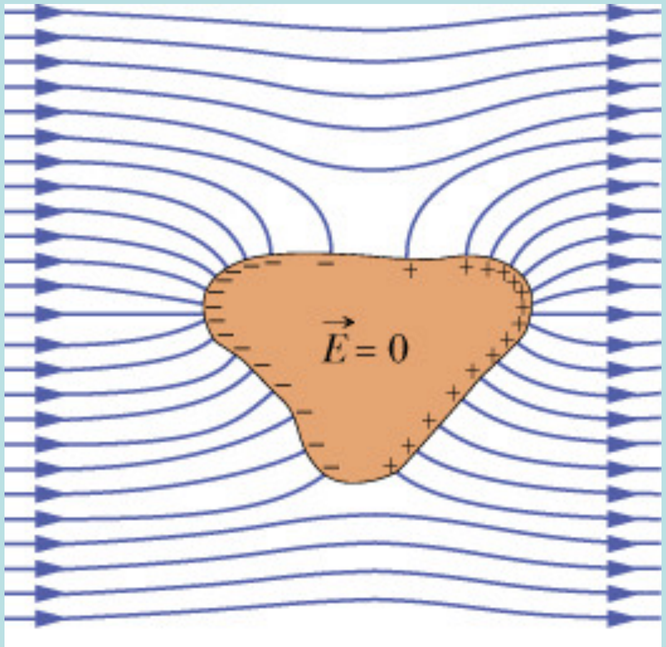
因表面為等位面，電場垂直於導體表面！

若有平行表面的電場就會繼續推動自由電荷移動！

垂直於導體表面電場則無法將電荷推出表面！

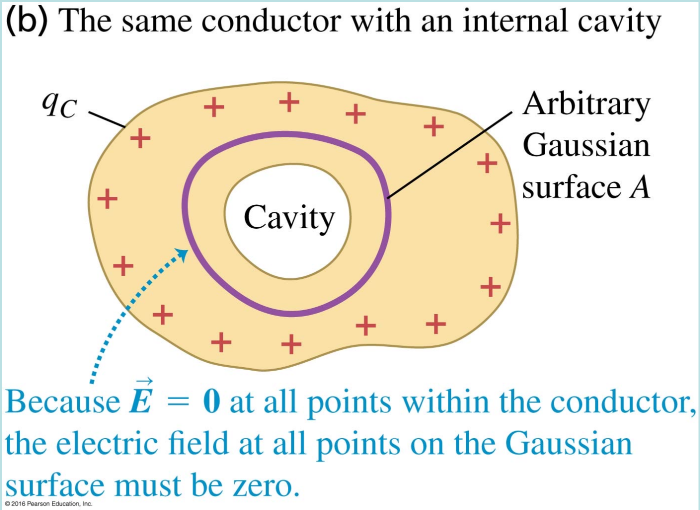






導體會改變空間中電場的分布！

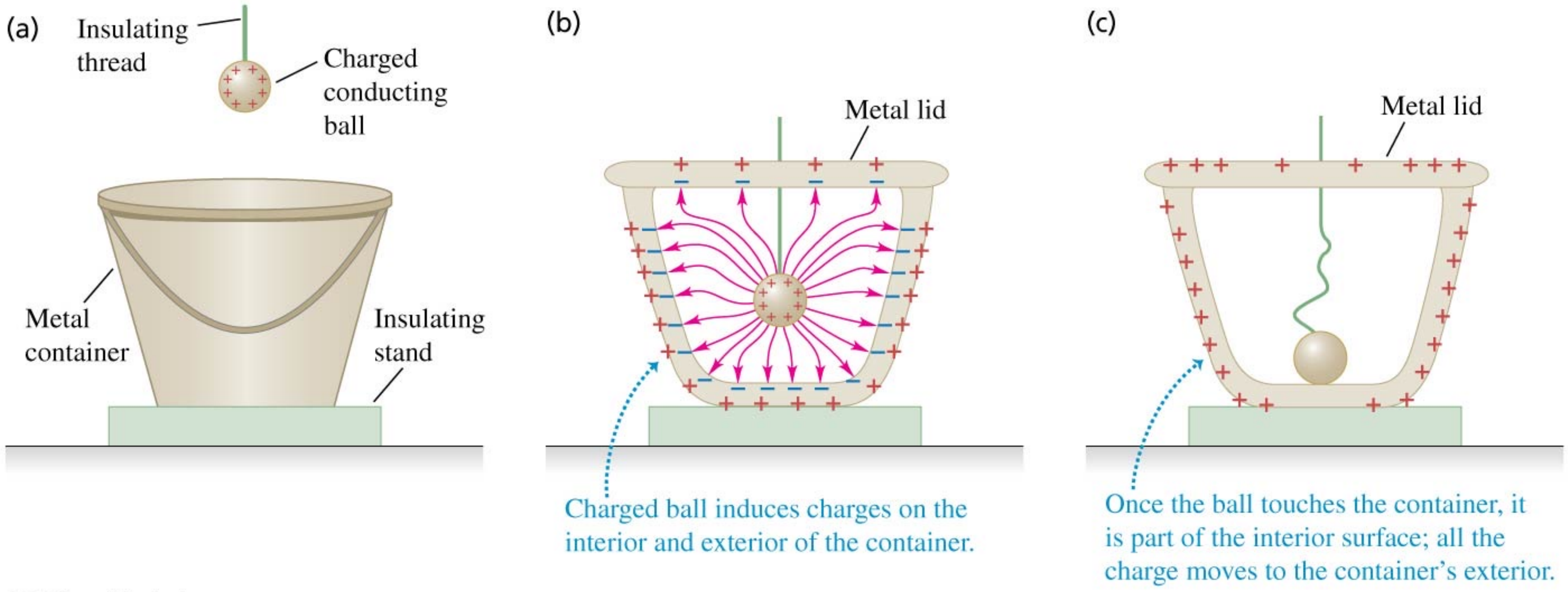
屏蔽效應：



金屬導體內無電場，導體內的空腔內自然也無電場！

金屬空腔內無電場！

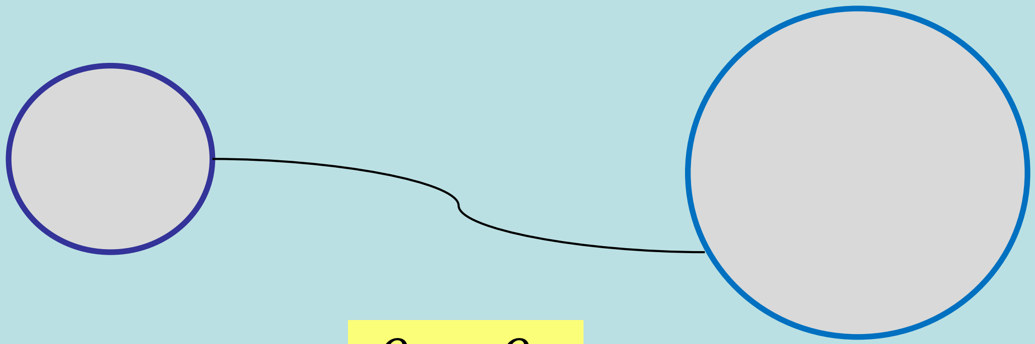
導體內電荷為零，電荷只分布於表面，這是高斯定律的結果。



法拉第的實驗驗證了高斯定律，也就是庫侖定律的正確性！

兩大小不同的導體以導線連接：

平衡後，導線內電場為零，電位相等，球表面的電位必須相等。



$$\frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2}$$

雷電 Thunder

鏡好聽 MIRROR VO!CE

發現 節目 有聲書 課程 節目主持人/有聲書主播 訂閱說明 APP下載

登入 / 註冊

節目 知識好好玩

【物理好好玩S2EP04】從閃電到氣候變遷—2021年諾貝爾物理...介紹

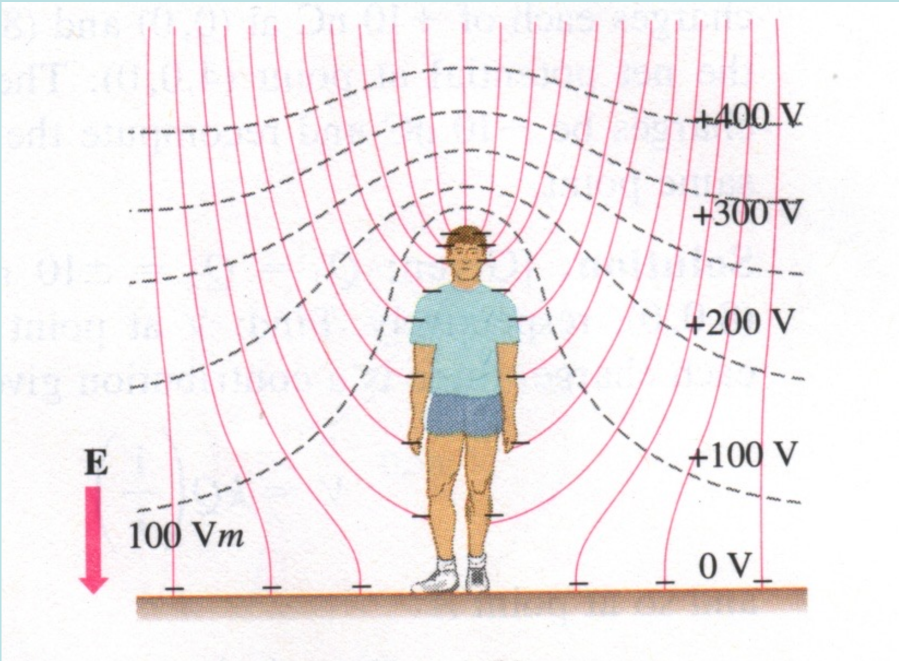
主持人 | 張嘉泓

單曲長度 | 00:22:08 發布時間 | 2022-04-12

#張嘉泓 #物理好好玩 #閃電 #雷神 #富蘭克林 #雷雨雲 #地表增溫 #氣候變遷

查看節目資訊

開始播放



在一般晴天時的大氣層中，每1m會有大約100V左右的電位差！

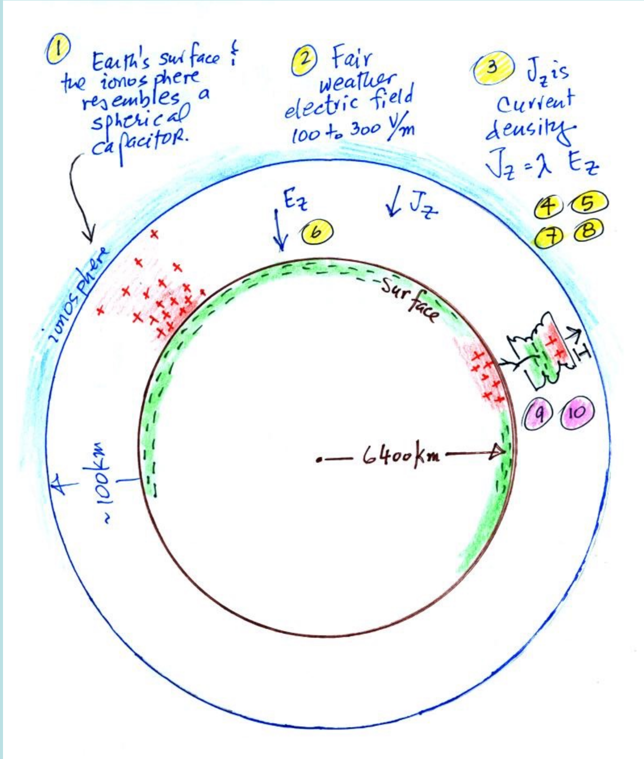
所以一般人的頭腳之間應有約200V的電位差！

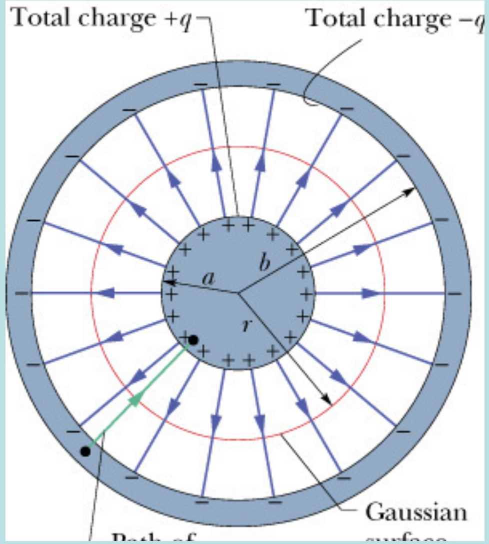
但因人體是導體，人的表面是一等位面。

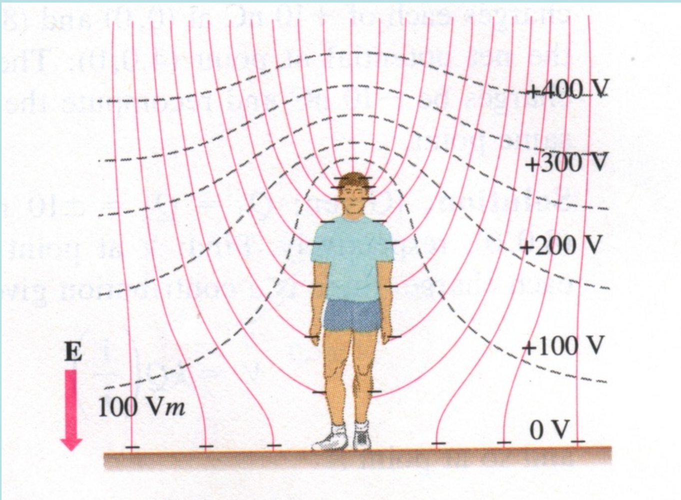
原本水平的等位面會隨地面上的人體而攏起！

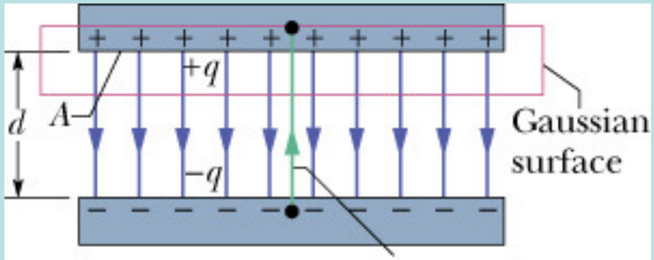
因此人的頭頂或其他尖起物等位面最密，電場最大，

此處空氣最易游離形成導體，落雷可能最大！









大氣層中，每1m會有大約100V左右的電位差！

這是因為地面帶負電荷，大約 -10^{-9} C/m^2，正電荷位於50km高的電離層。

地球表面與電離層之間猶如球型電容器，因此大氣中會維持一向下的電場。

空氣會因宇宙線而些微游離因此導電，照理，約10分鐘這個電荷即會流失。

地表會經由閃電現象再次充電
閃電現象主要來自雷雨雲。
含水氣的空氣，受熱迅速絕熱擴張而上升，
在高空水氣凝結迅速下落。

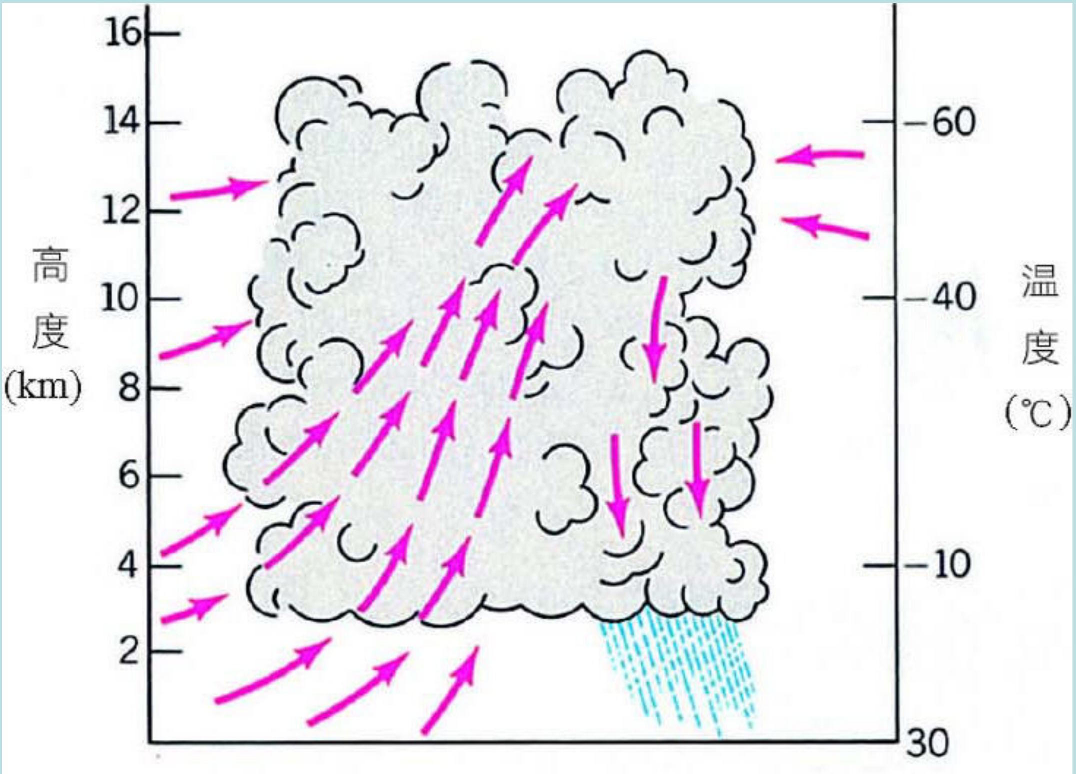
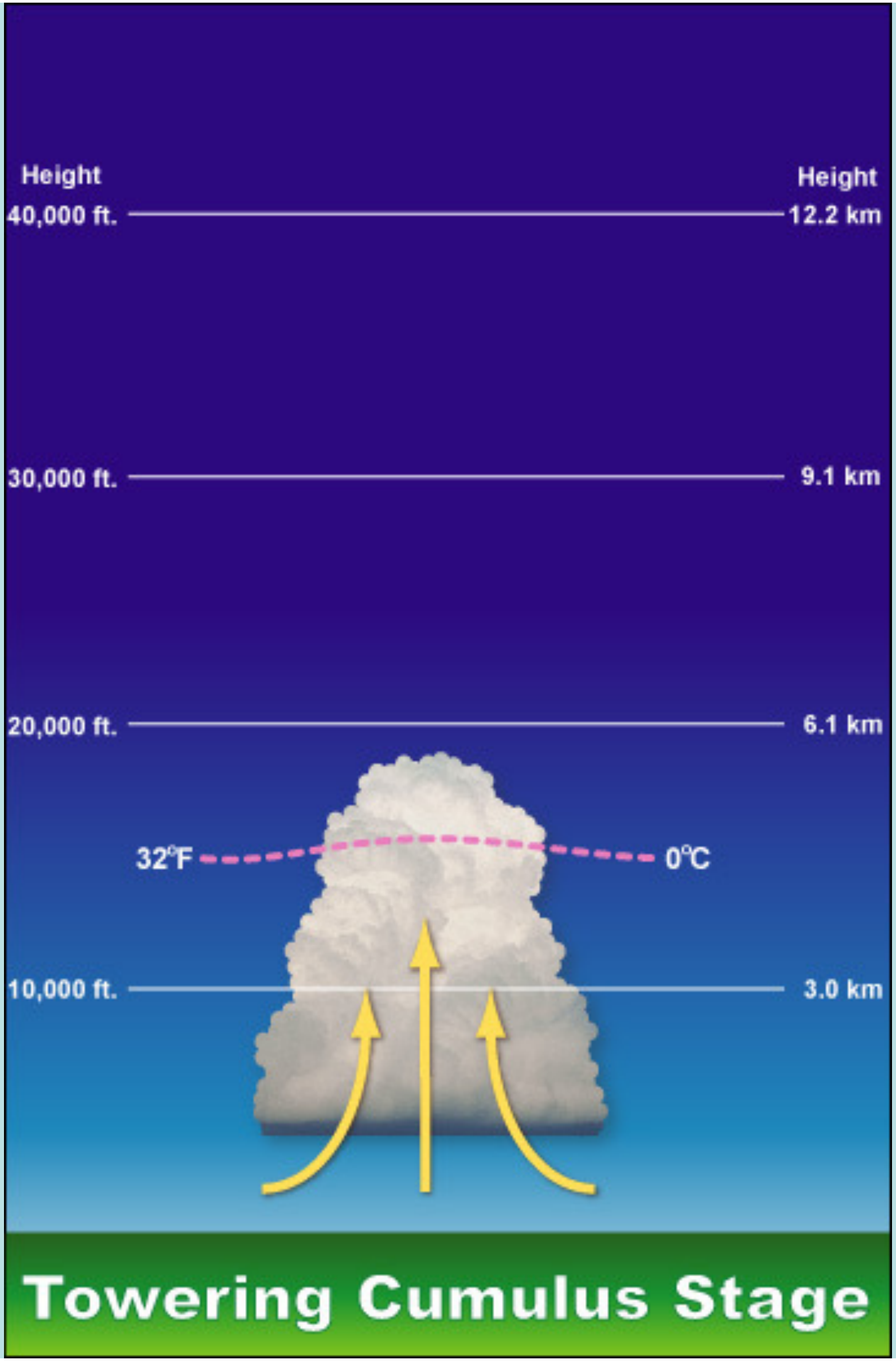
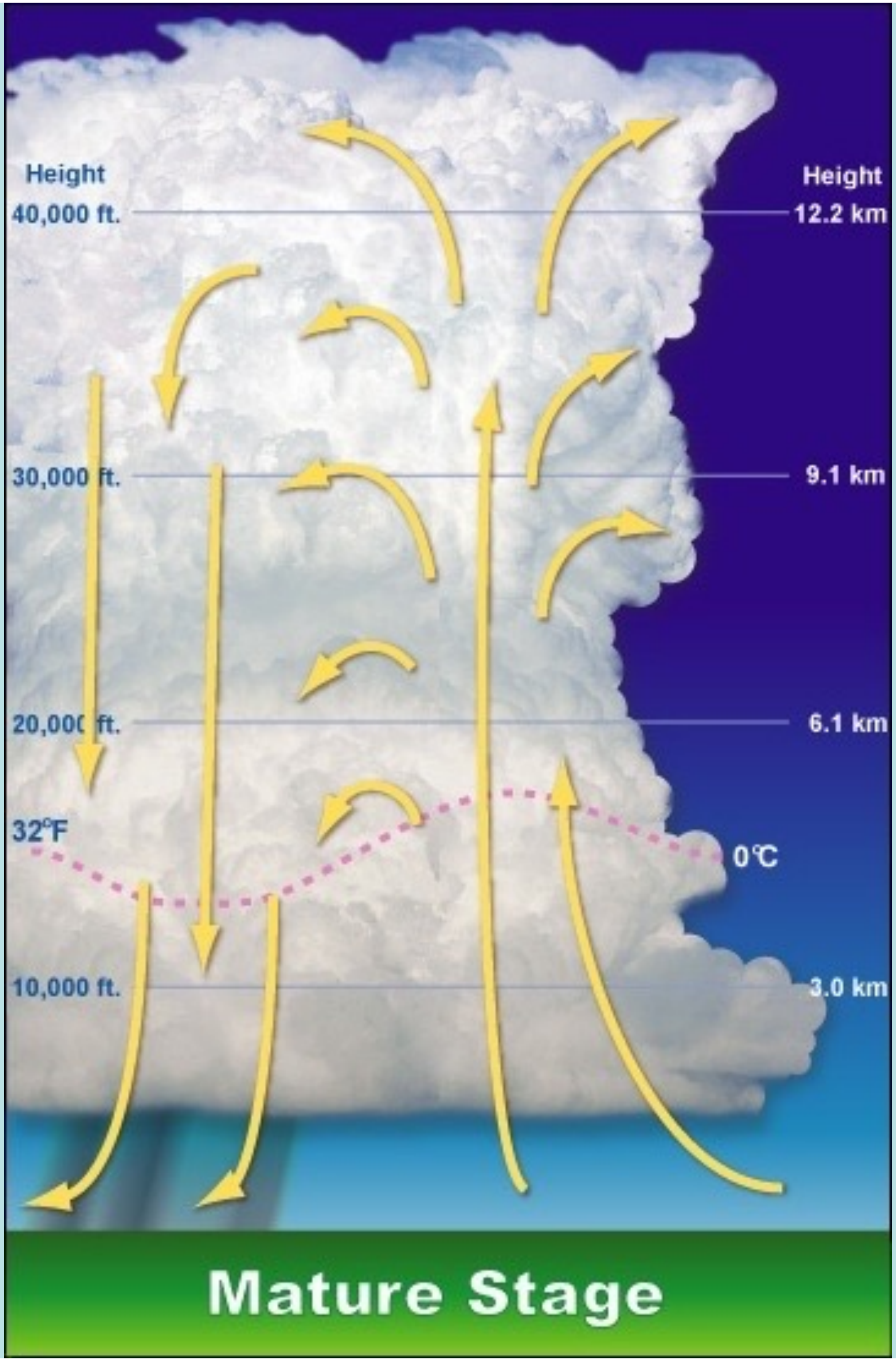
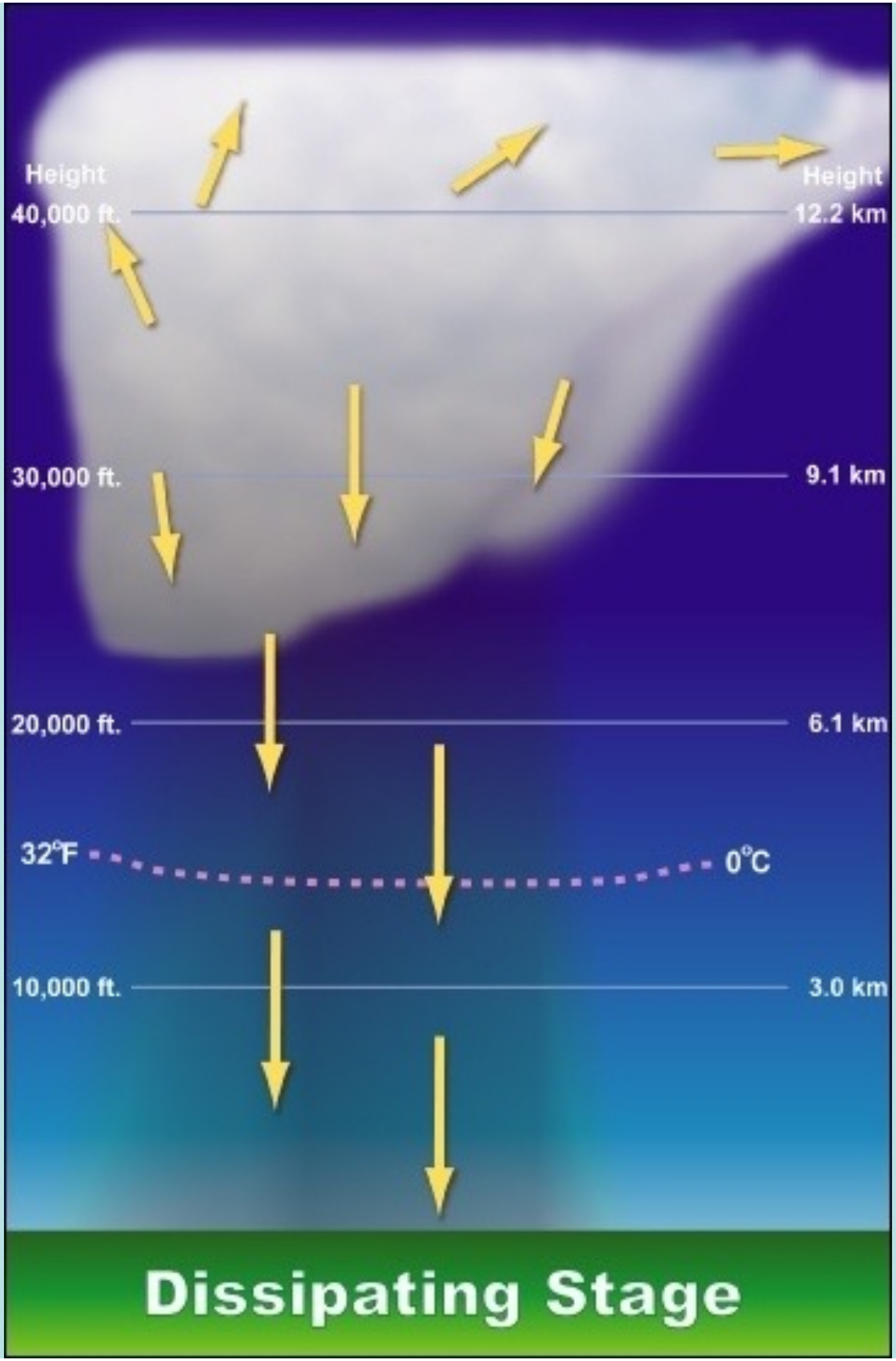


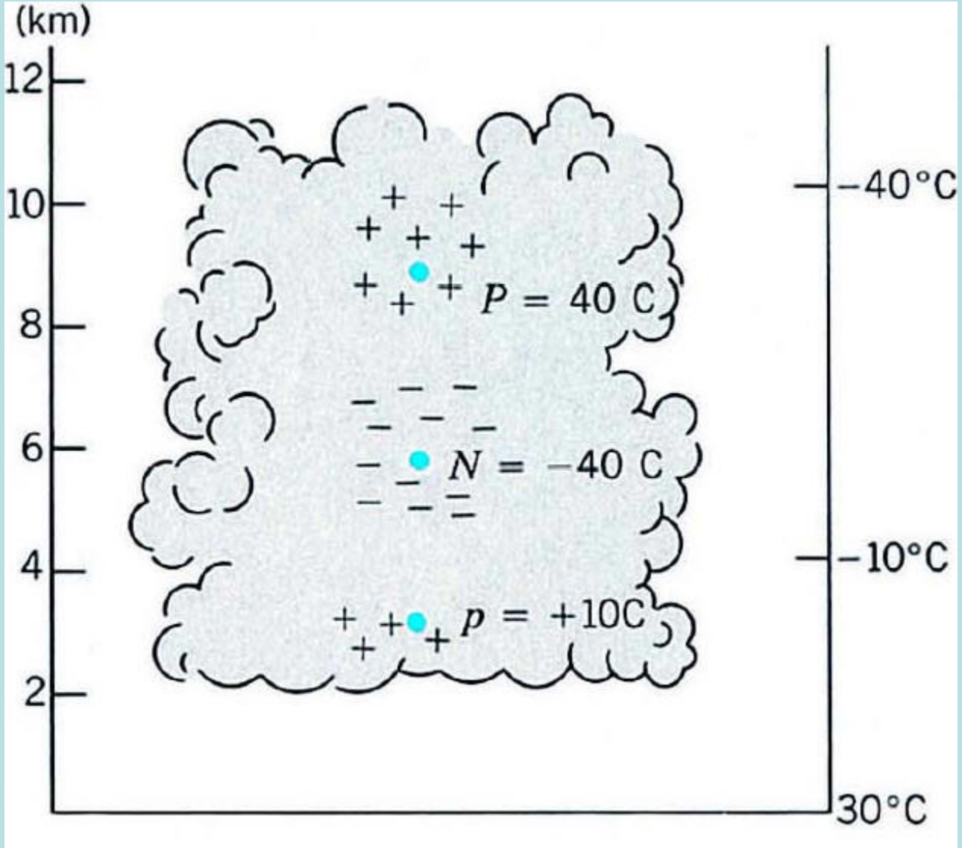
圖 27.21
雷雲。温濕氣流上升，直至形成冰晶。
冰晶長成冰雹，落入下降氣流區內。


Height
40,000 ft.
30,000 ft.
20,000 ft.
10,000 ft.
Height
12.2 km
9.1 km
6.1 km
3.0 km
32°F
0°C
Towering Cumulus Stage



Height
40,000 ft.
30,000 ft.
20,000 ft.
32°F
10,000 ft.
Height
12.2 km
9.1 km
6.1 km
0℃
3.0 km
Mature Stage


Height
40,000 ft.
30,000 ft.
20,000 ft.
32°F
10,000 ft.
Height
12.2 km
9.1 km
6.1 km
0°C
3.0 km
Dissipating Stage



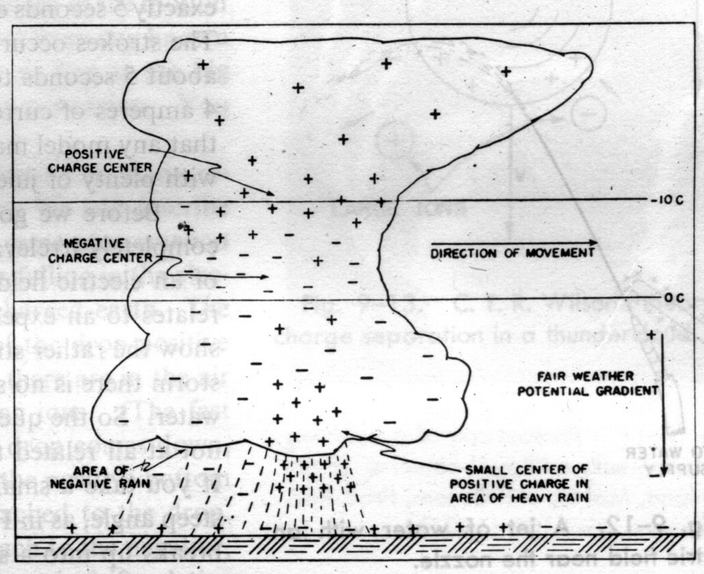


Fig. 9–11. The distribution of electrical charges in a mature thunderstorm cell. [From U.S. Department of Commerce Weather Bureau Report, June 1949.]

觀察發現雷雨雲的下層帶負電

雷雨雲內會保持一個向下的電場。

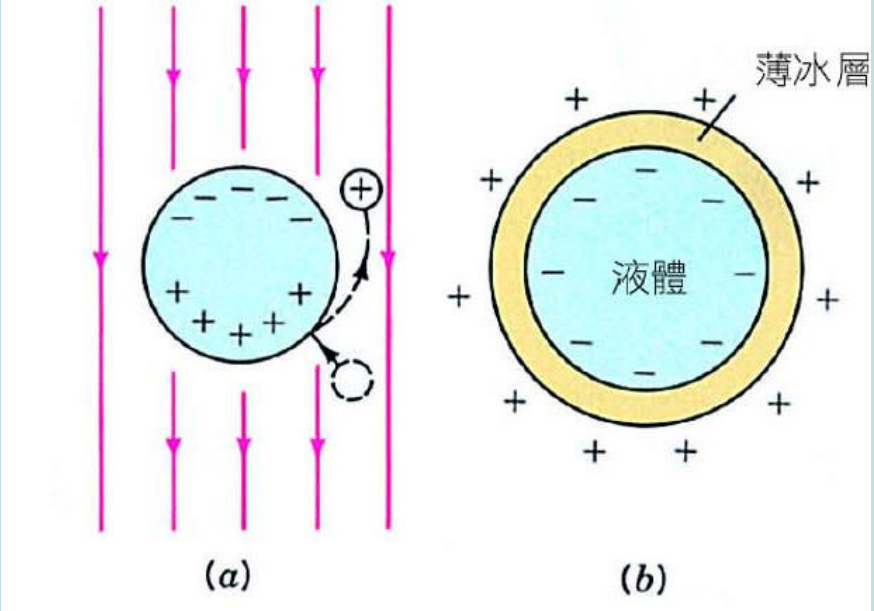
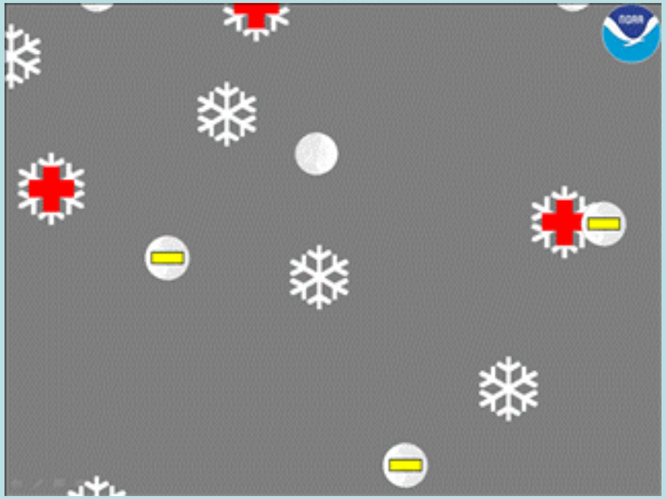
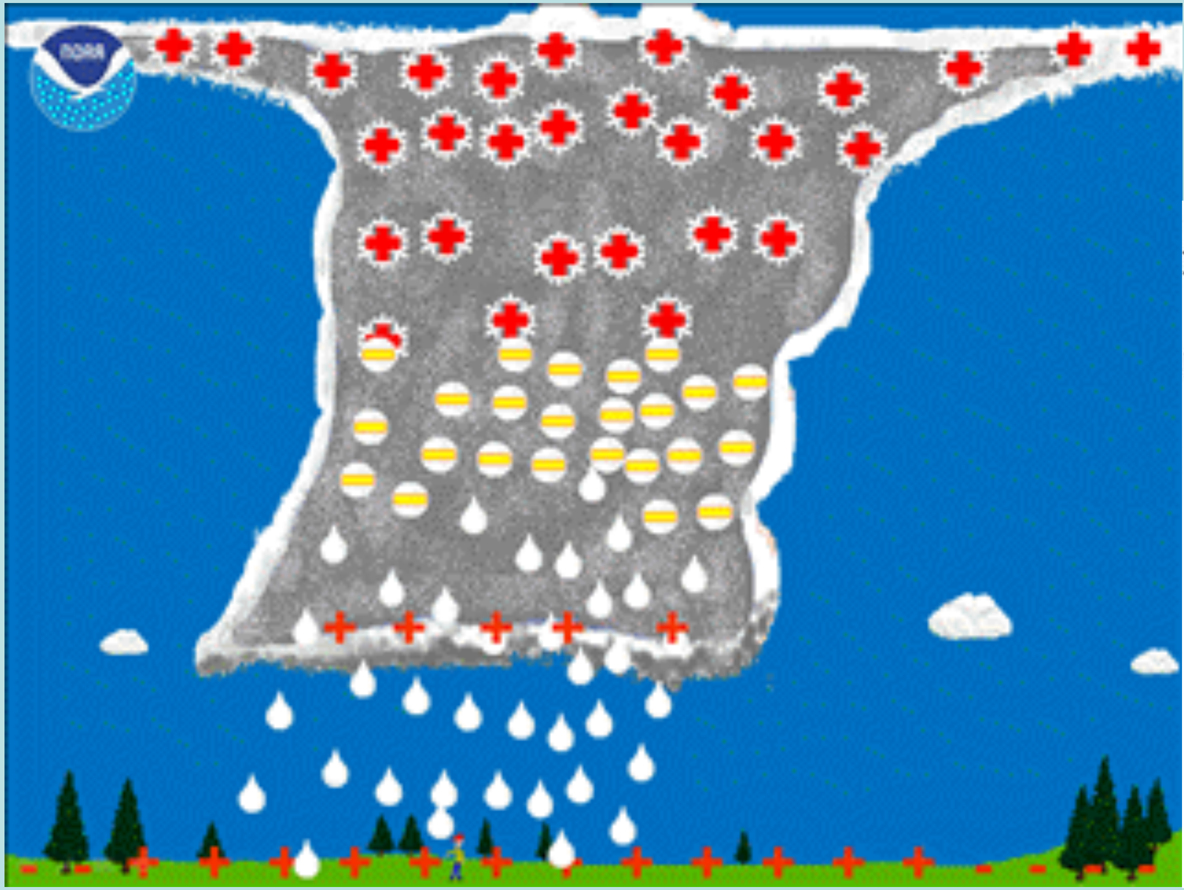


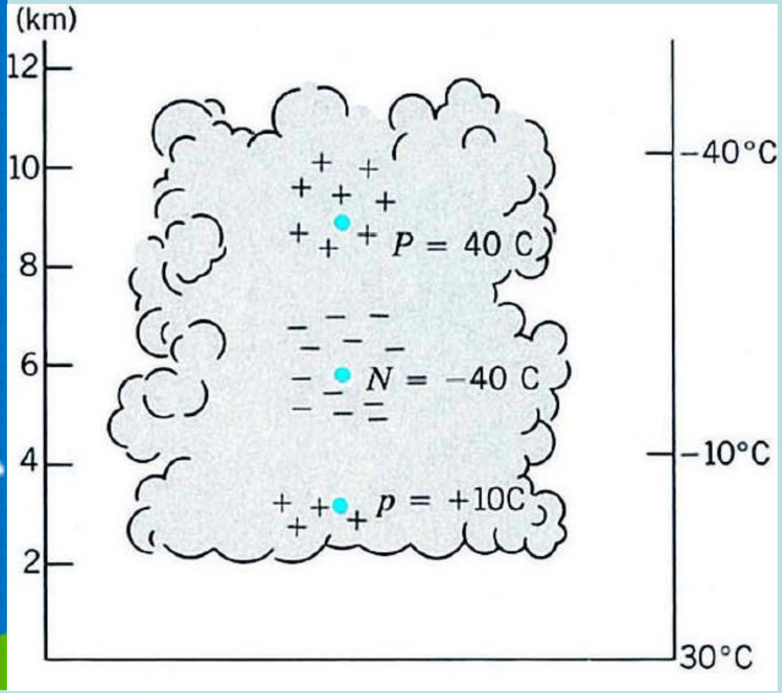
圖 27.23
(a) 當一水滴與落下的冰雹底面（帶正電）相撞時，它本身會因此而帶電。(b) 水滴開始結冰時，先是形成一冰殼，而其帶電情形則如圖所示。



在此向下的電場中，凝結下落的水滴前方會聚集正電。

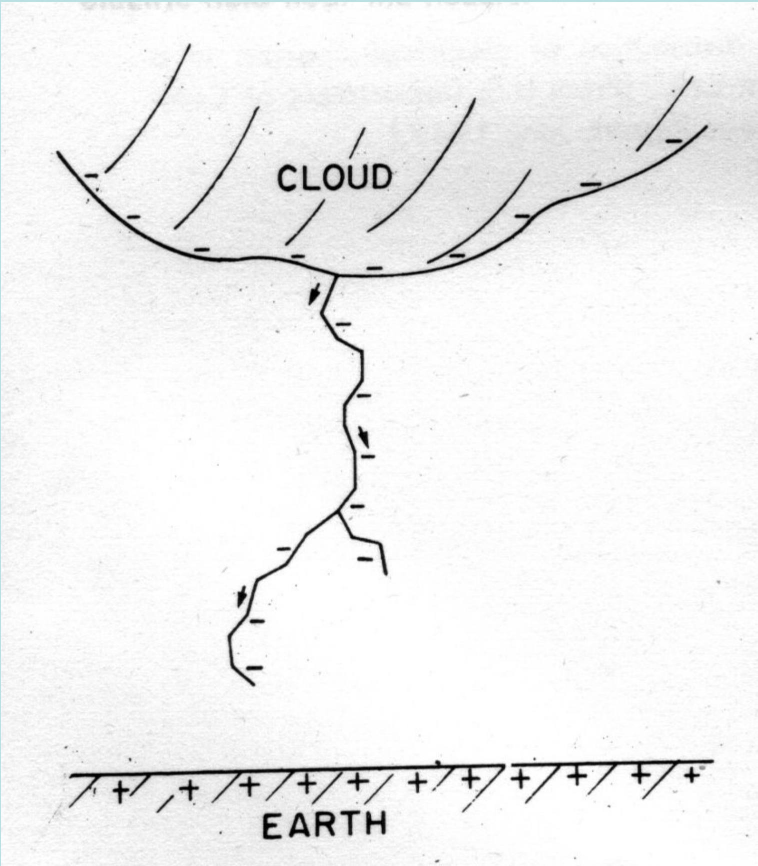
與上升的冰雹撞擊後，冰雹帶正電。





雷雨雲下層的負電會持續累積。好像一個充電器！

如果雷雨雲接近地表負電較缺乏，需要充負電的區域，
或是因下層帶負電的雷雨雲接近，在附近地表感應了正電，
雲層與地面間的電場就會增加，造成中間的空氣游離，
於是雲層上的負電流下地面，就是閃電，
於是完成充電的過程，地表的負電自然地得到補充。



閃電流過的路徑，就是已經游離的空氣段落。

游離空氣段落一開始會一段一段、由上而下慢慢產生。

已游離的段落會充滿負電，一旦聯通雲層與地表，就如導線可以通電。

原則上應該是由接近地表、最後游離的段落發起，閃電是由下往上打！

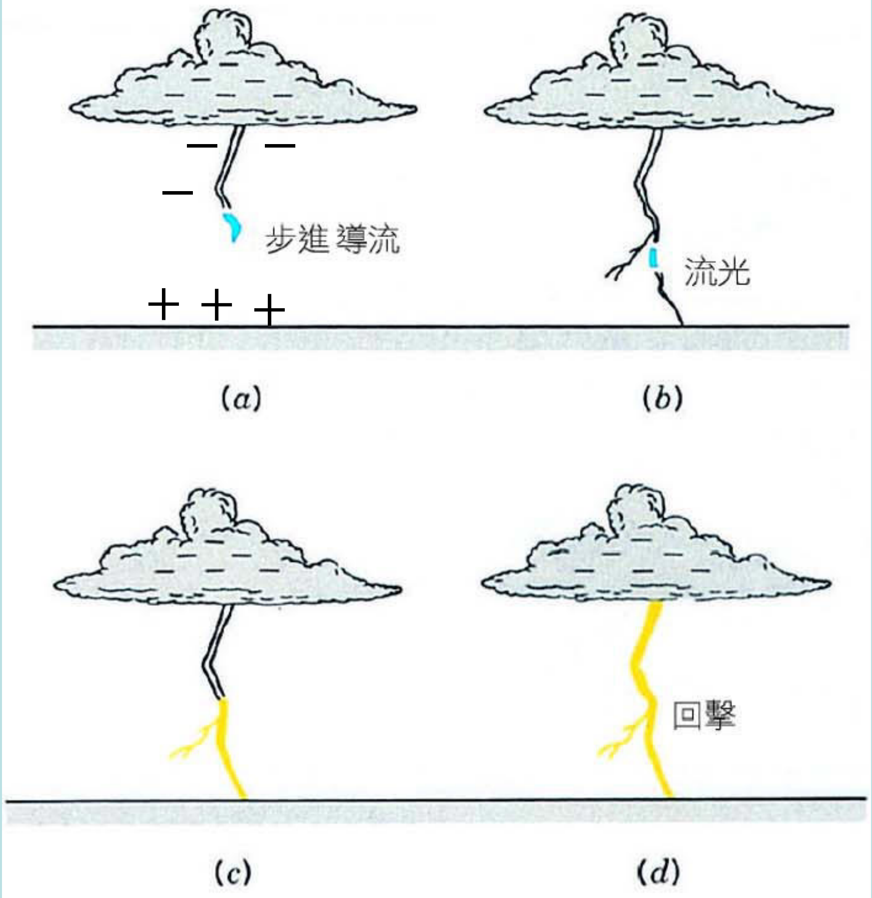
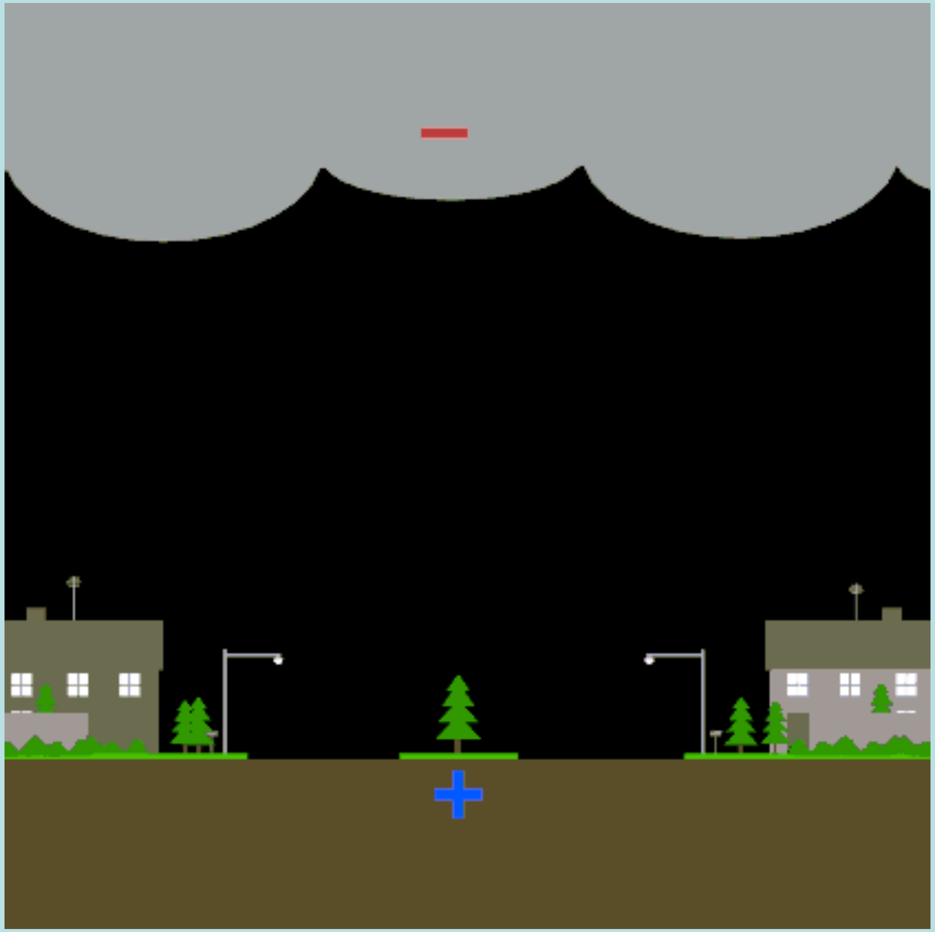
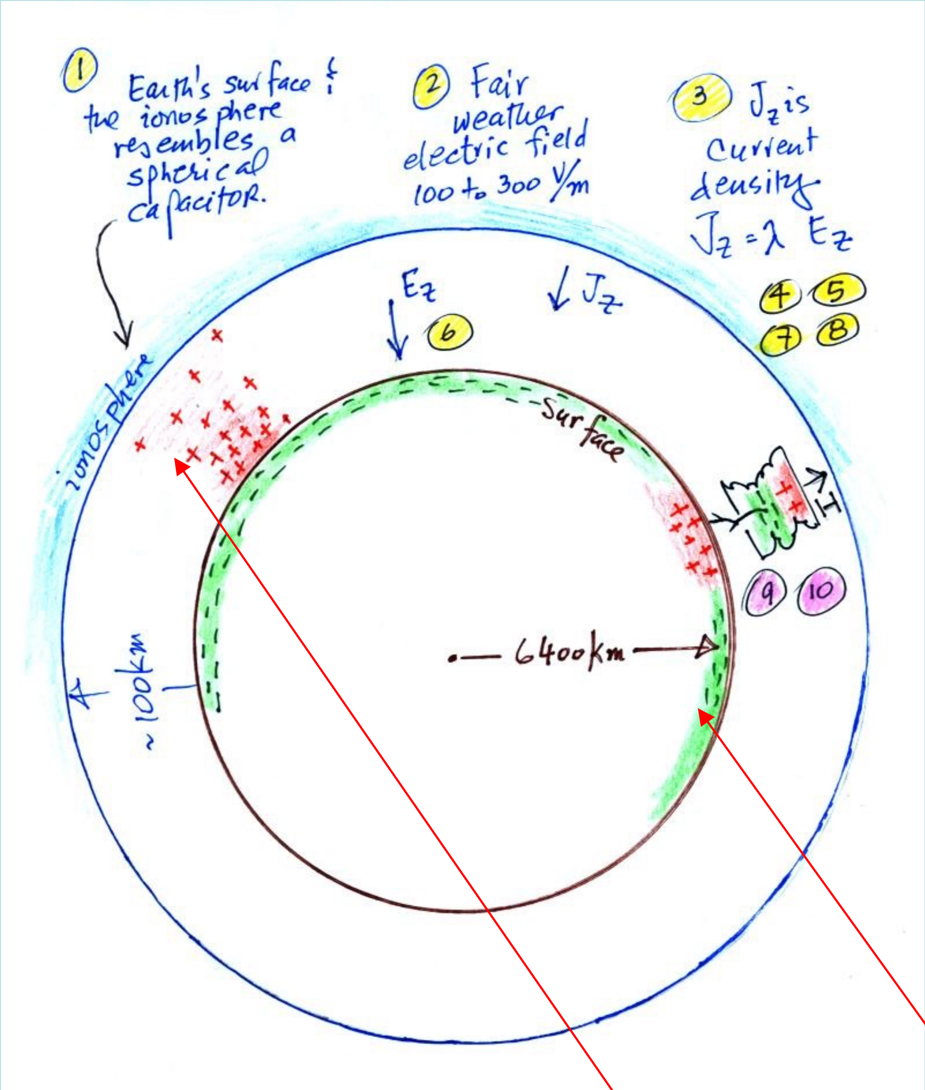
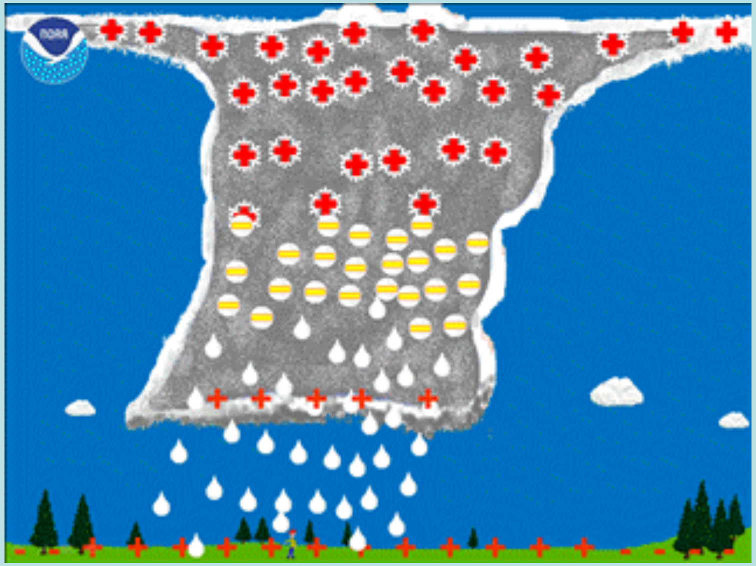
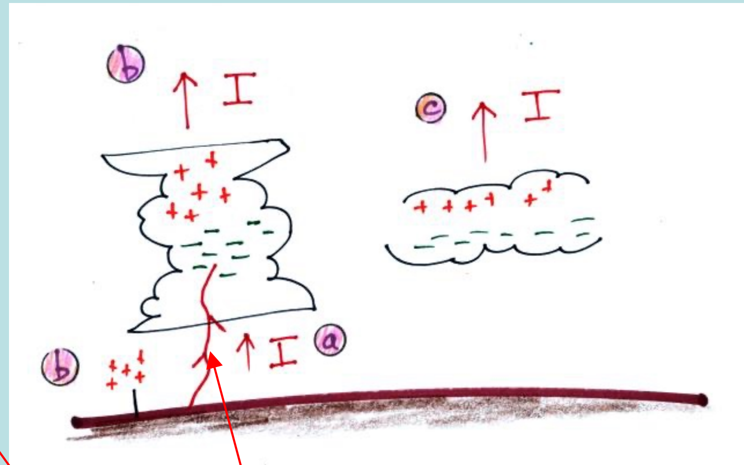


圖 27.25
閃電回擊的四個發展階段。









地球表面與電離層之間猶如球型電容器。晴空時地面為負電。

但如同絕緣不好的電容器，正電會慢慢由上向下流。

當地面出現局部正電區域，閃電又將負電帶到地面與之中和，

如此保持地面負電性以及電場向下，如同電池為漏電的電容充電。

View of lightning from an airplane flying above a system.

High-speed photography showing different parts of a lightning flash during the discharge process as seen in Toulouse, France.

0.32 s


Lightning_Trumbull_County_Ohio.ogv
0:00:03
0:00:13

© 2004 Thomson - Brooks/Cole

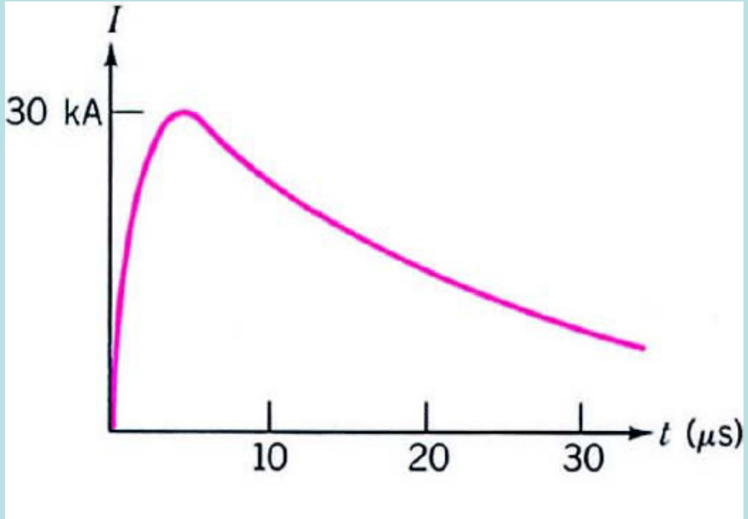
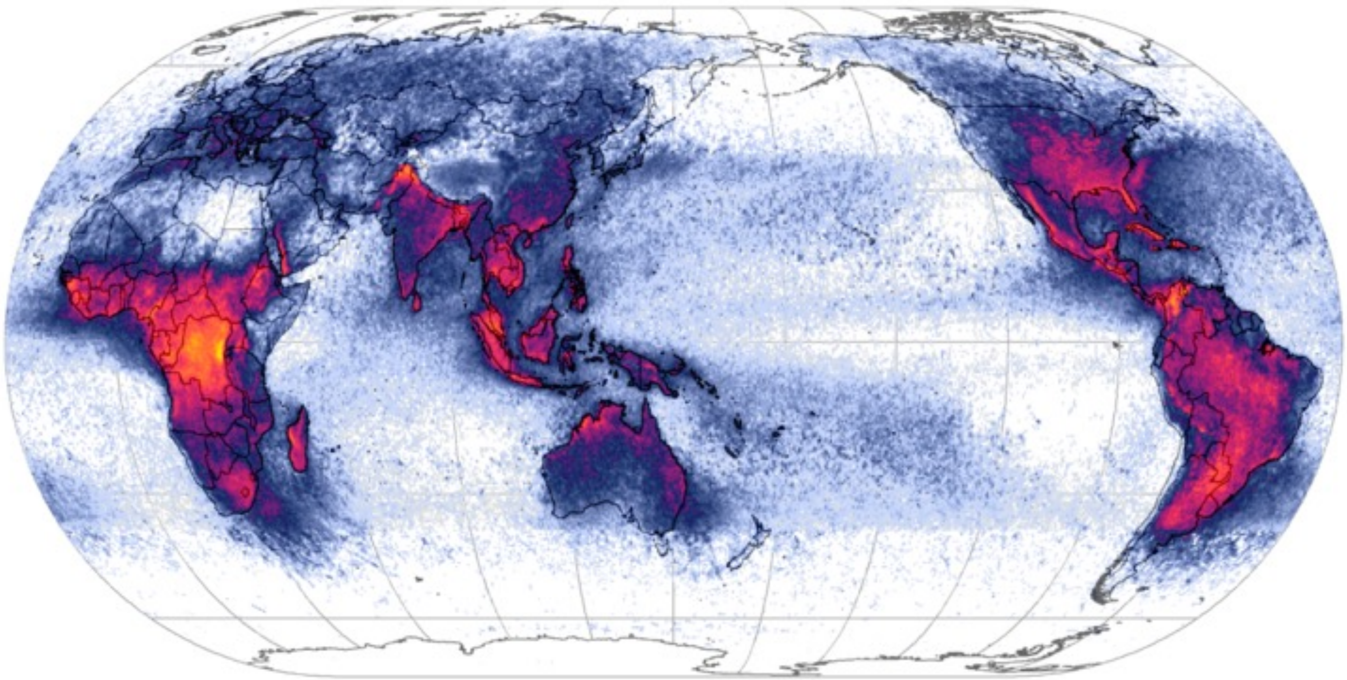


圖 27.27
回擊期間電流之變化情形。

Frequency of Lightning Strikes



colors show number of strikes per square kilometer per year:

0.1 0.2 0.5 1 2 5 10 20 50 100 200

梯度，散度，旋度

$$E_x = -\frac{dV}{dx}$$

此式可以直接推廣到三維空間

3D

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

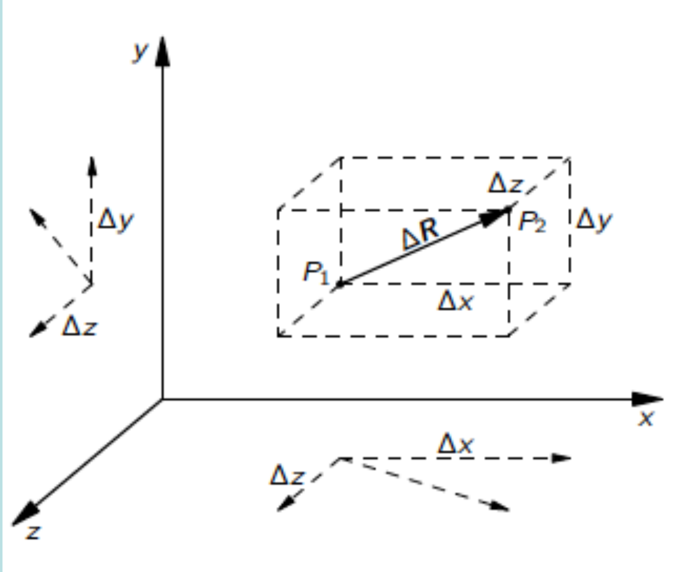
$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

兩點間的電位差等於兩點間負電場的線積分：

$$\Delta V = -\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

考慮圖中很靠近的P_1與P_2：

兩點的位移： $\Delta\vec{R} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$



因為很靠近，電場的變化不大，可視為常數：

$$\Delta V = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\sim -\vec{E} \cdot \Delta\vec{R} = -E_x\Delta x - E_y\Delta y - E_z\Delta z$$

但$V(x, y, x)$是一個多變數函數，

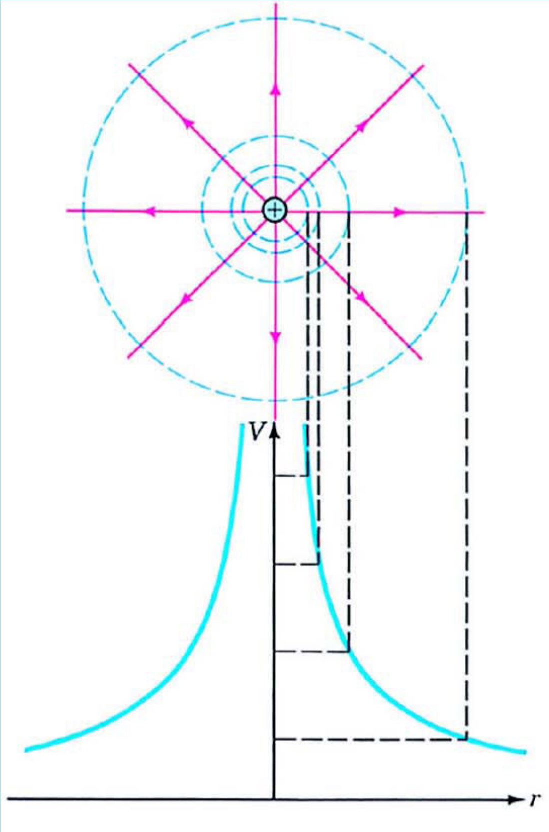
函數變化可以以偏微分表示：

$$\Delta V = \frac{\partial V}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\Delta z$$

比較兩式得到 $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$ $E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$ $E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$

以向量符號書寫： $\vec{E} = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)$ 這個運算稱為電位的梯度，Gradient。

若計算點電荷的庫倫電位能的梯度，果然就可以得到庫倫電場：



$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x},\frac{\partial V}{\partial y},\frac{\partial V}{\partial z}\right) = \left(\frac{dV}{dr}\frac{\partial r}{\partial x},\frac{dV}{dr}\frac{\partial r}{\partial y},\frac{dV}{dr}\frac{\partial r}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{dV}{dr}\left(\frac{\partial r}{\partial x},\frac{\partial r}{\partial y},\frac{\partial r}{\partial z}\right) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\hat{r} = -\vec{E}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{x}{r} = \hat{r}_x$$

$$\vec{E} = \left(\frac{\partial V}{\partial x},\frac{\partial V}{\partial y},\frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

這是適用於所有靜電學的關係！

電位純量場的梯度是一個向量場！這是一個普遍的結果！

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) V \equiv -\vec{\nabla} V$$

是一個向量！

這個事實適用於任何純量場U ，我們根本可以把這個運算本身，就視為向量！

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

梯度是一個運算，還是要作用於一個函數上：

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) = \vec{\nabla} U$$

注意以上是由電場線積分永為零：

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

得到有電位存在：

電位差是電場線積分：

$$\Delta V = -\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

進一步就得到電場是電位的梯度：

$$\vec{E} = \vec{\nabla} V$$

可以證明，若任一向量場$\vec{A}$，只要是放射狀，也就是滿足：

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{s} = 0$$

此一向量場$\vec{A}$就一定可以寫成一個純量場ϕ的梯度：

$$\vec{A} = \vec{\nabla} \phi$$

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

到此梯度都運算在純量函數，得到向量！

它運算的對象也可以是一個空間中的向量函數，例如電場：$\vec{E}$。

只是兩個向量各自有三個分量，要放在一起，這時就必須指定分量要如何組合。

如同向量的乘積，這裡也只有兩種選擇：內積與外積！

對此空間函數作空間微分，同時作內積組合，定義：

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(x, y, z) \equiv \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

可以很容易猜出這是一個純量！

這個運算組合稱為散度，Divergence。

利用這符號高斯定律可以很簡潔地寫成：

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

對此函數作空間微分時，同時作外積組合，可以定義：

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(x, y, z) \equiv \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)$$

旋度，Curl　　可以很容易猜出這是一個向量！

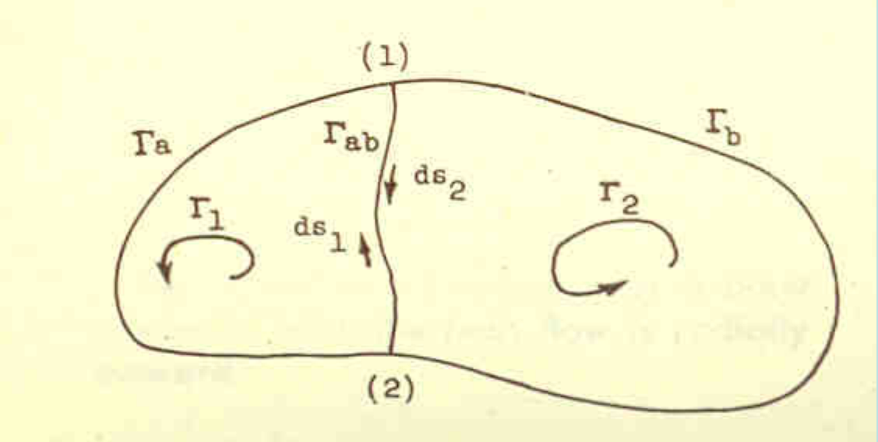
旋度可以讓我們計算線積分！如同散度可以計算面積分。

將一個路徑Γ分解成子路徑： $\Gamma_a + \Gamma_b$

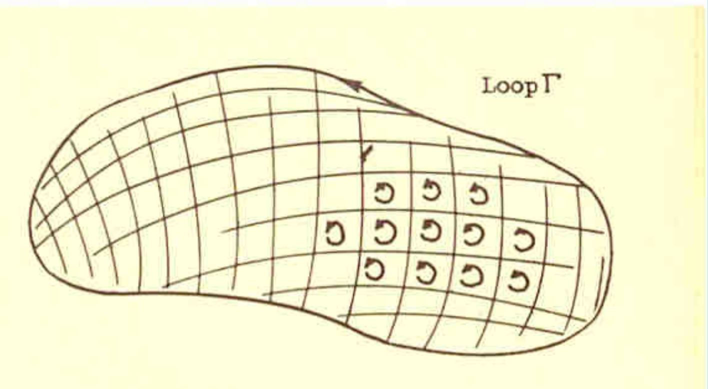
沿此空間的線積分會等於沿子路徑的線積分的和。

這是因為線積分時，子路徑 $\Gamma_a + \Gamma_b$ 重疊部分 Γ_{ab} 的線積分會互相抵消，

只留下$\Gamma_a + \Gamma_b$外圍部分的路徑，就是Γ的線積分。



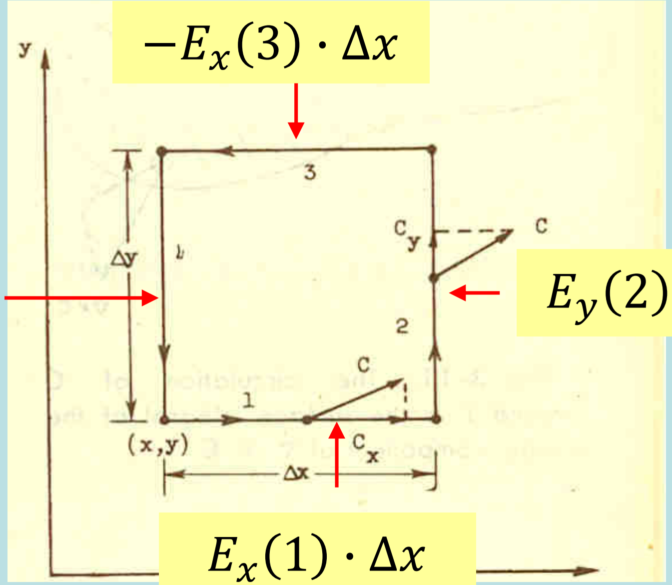
一任意路徑線積分可以分解為無限多無限小正方形的線積分的加總！



考慮沿一個在$x-y$平面上一無限小的正方形路徑，計算電場的線積分

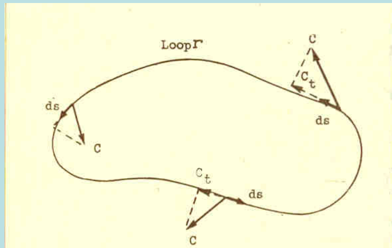
$-E_x(3)\cdot\Delta x$

$-E_y(4)\cdot\Delta y$



$E_y(2)\cdot\Delta y$

$E_x(1)\cdot\Delta x$



注意：

$$E_y(2)-E_y(4)\sim\frac{\partial E_y}{\partial x}\Delta x$$

$$E_x(3)-E_x(1)\sim\frac{\partial E_x}{\partial y}\Delta y$$

$$\oint\vec{E}\cdot d\vec{s}=E_y(2)\cdot\Delta y-E_y(4)\cdot\Delta y-E_x(3)\cdot\Delta x+E_x(1)\cdot\Delta x$$

$$=\frac{\partial E_y}{\partial x}\Delta x\cdot\Delta y-\frac{\partial E_x}{\partial y}\Delta y\cdot\Delta x=\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\cdot\Delta x\Delta y=\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_z\cdot\Delta\vec{A}_z=\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)\cdot\Delta\vec{A}$$

$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_z=\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}$$

$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)_z=A_xB_y-A_yB_x$$

$$\oint\vec{E}\cdot d\vec{s}=\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)\cdot\Delta\vec{A}$$

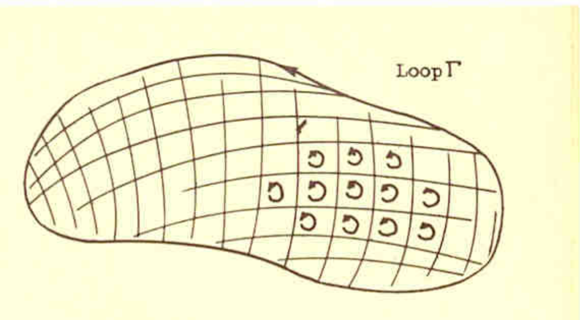
可以看出並證明此式適用於指向任一方向之小平面。

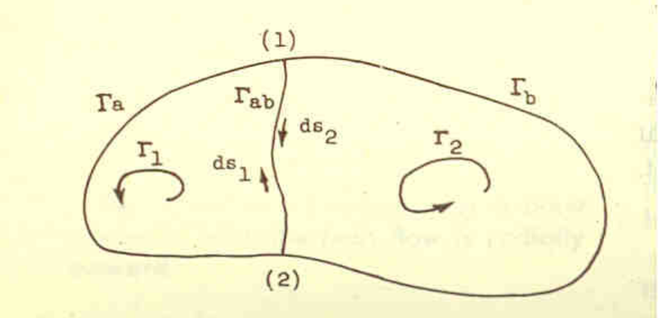
沿無限小的正方形的場的線積分等於該場的旋度乘上正方形面積！

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \Delta\vec{A}$$

一任意路徑線積分可以分解為無限多無限小正方形的線積分的加總！

鄰近正方形接觸邊的線積分因路徑方向相反，故互相抵消，只剩最外圍。





加總所有小正方形的線積分：

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \sum_i \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{s}_i = \sum_i (\vec{\nabla} \times \vec{E}_i) \cdot \Delta\vec{A}_i \rightarrow \int (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{A}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{A}$$

數學上的史塔克定律

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

將此定律適用於小正方形：

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \Delta\vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

微分形式

積分形式可以推得微分形式！

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

將此微分形式定律代入數學的史塔克定律：

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{A}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

微分形式可以推得積分形式！

靜磁學的安培定律也可以寫成微分形式：

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i = \mu_0 \int \vec{j} \cdot d\vec{A}$$

數學上的史塔克定律

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{A}$$

得到法拉第定律的微分形式：

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Maxwell Equations 的微分形式就是由這散度與旋度兩個運算寫成！

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

電荷是電場的基本來源，而且產生的電場是放射狀的，不是漩渦狀的。

電流是磁場的基本來源，而且產生的磁場是漩渦狀的，不是放射狀的。

如果電場與磁場有變化，法拉第定律再加上一個磁通量的時變率！

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

數學上的史塔克定律

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{A}$$

得到法拉第定律的微分形式：

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

電（磁）場變化時會感應產生磁（電）場，

注意電（磁）場的時變率產生的是感應磁（電）的線積分，

因此感應電磁場都是漩渦狀的，不是放射狀的。大致與變化的場方向垂直。

這些運算給你非常簡潔而直覺的推導！

已知電場是電位的梯度：

$$\vec{E} = \vec{\nabla} V$$

如果對純量場的梯度作旋度運算：

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla} V\right) = 0$$

向量外積的規則顯示梯度的旋度必為零！電場滿足：

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$$

還記得電場的線積分永遠為零：

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0$$

原來一個向量場如$\vec{E}$的旋度與線積分是有關的！

如果梯度是向量，將兩個梯度作內積式的組合，就會得到一個純量！

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\equiv\nabla^2$$

當然這梯度內積是一個運算，還是得作用於一個函數上：

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}U=\nabla^2 U\equiv\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

這個運算稱為Laplacian。

已知電場是電位的梯度，電場的散度等於電荷密度：

$$\vec{E}=\vec{\nabla}V \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

將第一式代入第二式：

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}V\right)=\nabla^2 V=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

這是高等靜電學解題的基本方程式！ Laplacian Equation!

$$\nabla^2 V=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

散度透過高斯定律對應到面積分！旋度透過史塔克定律對應到線積分！

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

25 Capacitance

Tienda Brothers/Gamma-Presse, Inc.

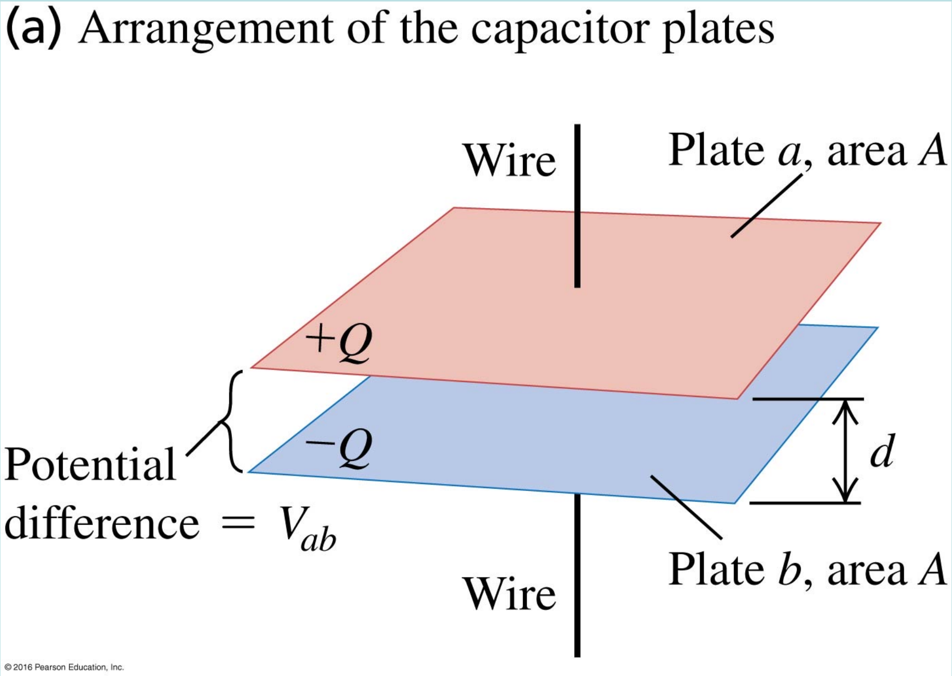
Explosions of airborne dust in grain storage bins (as above), coal mines, flour mills, and many powder industries are a common occurrence, often with loss of life and much property damage. Usually the explosions are due to sparking between charged objects or between a charged object and a grounded connection. Engineers cannot eliminate the possibility of sparking, but they can take measures to reduce the chance that a spark will set off an explosion.

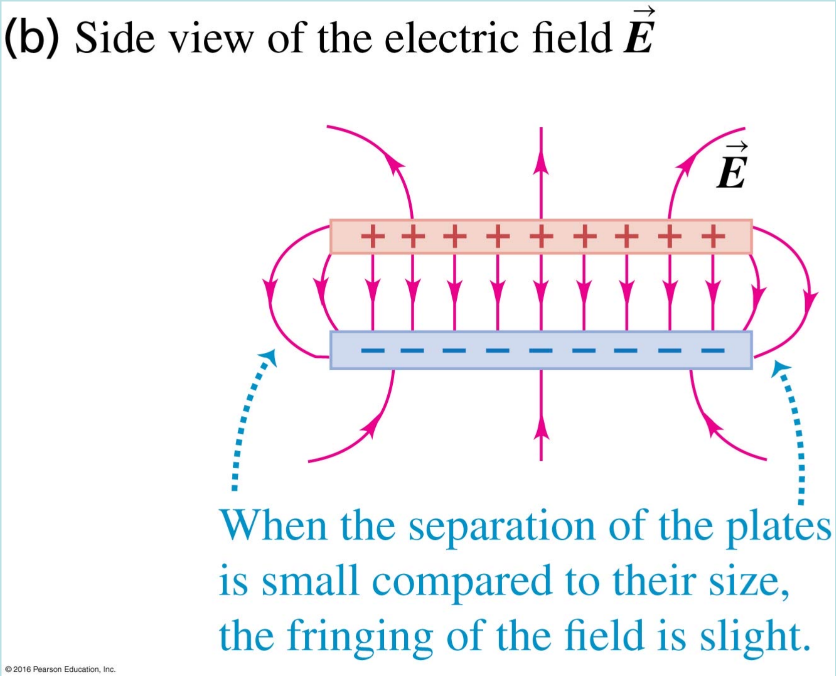
What determines whether sparking will cause an explosion of airborne dust?

The answer is in this chapter.

電容　Capacitor

兩片帶相反電性的（平面板）導體。

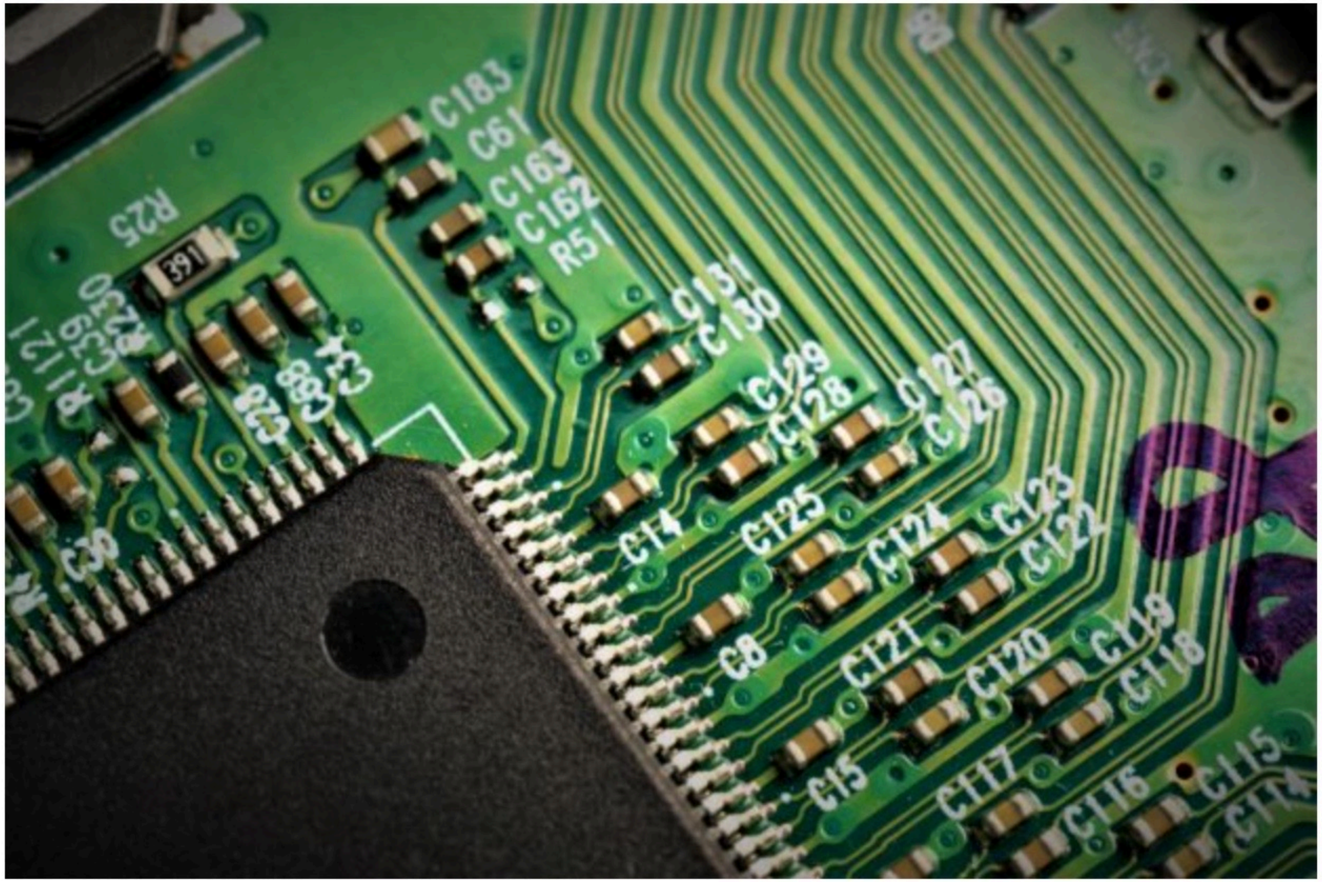




【產業科普】被動元件到底是什麼，MLCC 為何如此搶手？

作者 黃 敬哲 | 發布日期 2018 年 05 月 22 日 15:58 | 分類 材料，零組件 Follow G+ 讚 1,753 分享

專題



近年來被動元件市場供不應求的現象受到市場關注，其中尤以 MLCC 為最，但到底這些電子元件的功能是什麼？

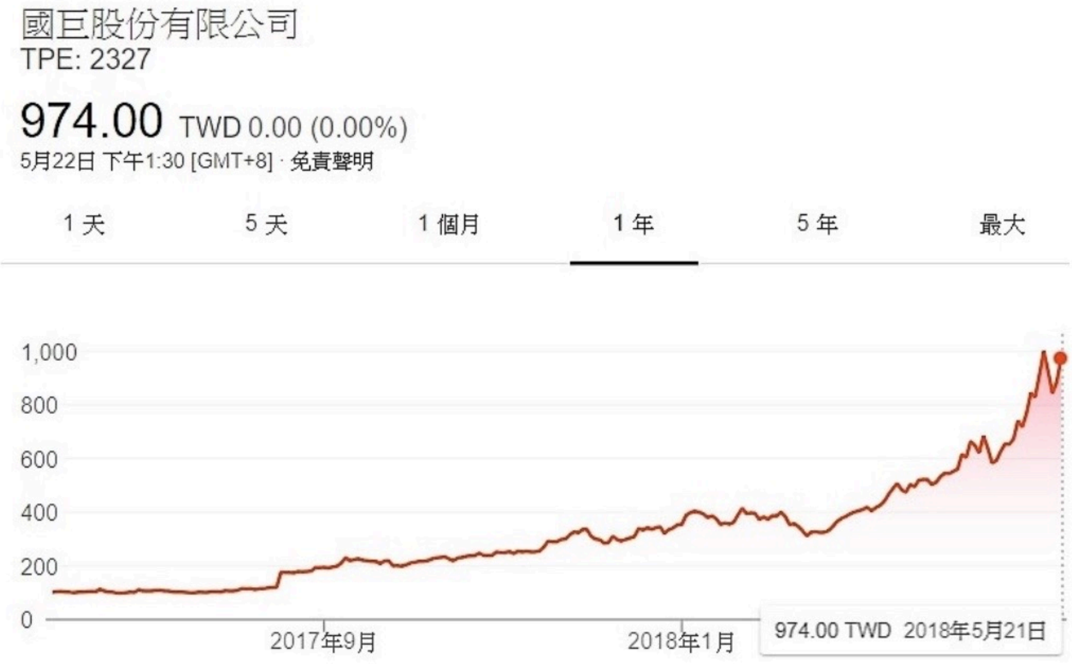
電子元件分為兩類，主動及被動，差別在於是否需要電源驅動。如電晶體及二極體等常討論的半導體元件就是主動元件；被動元件包括電阻、電容、電感等往往被視為主板上配角，非相關專業人士，就比較少去了解，然而其技術發展也非常重要。

電阻器的功能主要調節電流及電壓大小，電感器則是過濾電流雜訊、防止電磁波干擾，並穩定電流。電容器為板上主要的電能儲存元件，進行耦合及協調等功能。這三大被動元件中，以電容的市場規模最大，可分為陶瓷電容、鋁質電容及鉭質電容等，目前最熱門的 MLCC 就是積層陶瓷電容（Multi-layer Ceramic Capacito），又常稱為貼片電容。

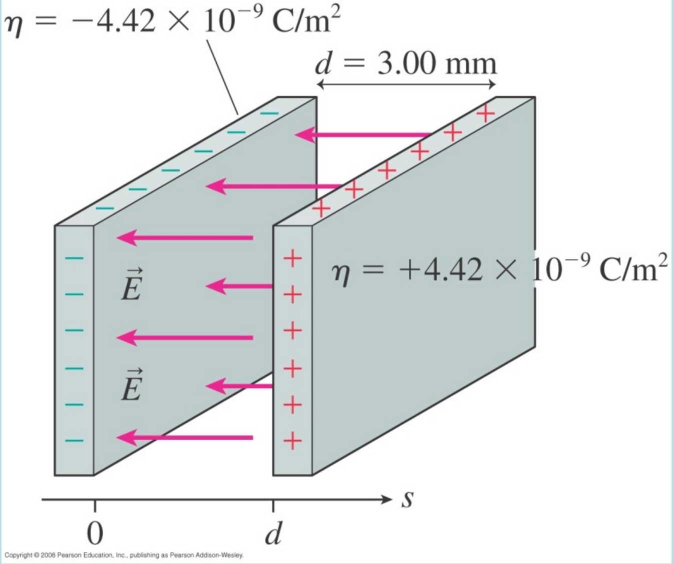
▲ 標準型 MLCC。（Source：國巨）

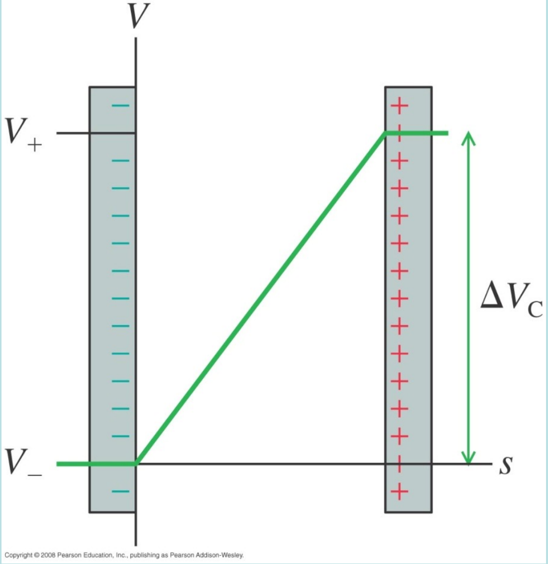
其實不只傳統的電子產品需要，汽車業也非常需要被動元件，尤其是近年來電動車及自駕車等新創產品普及，以前一輛汽車需要使用近 2,000 顆被動元件，進入電動車時代後，使用量高到近萬顆設計也是有，需求量不可小覷。不僅 MLCC，如今據傳連鋁質電容的交期也延到半年以上，可說市場相當緊缺。

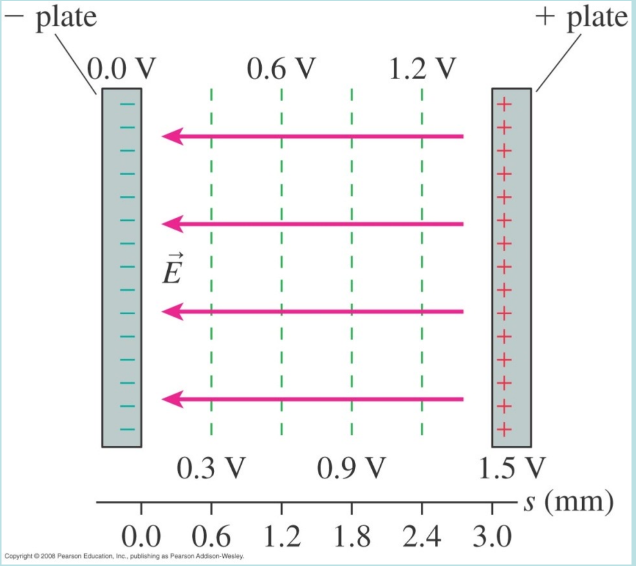
所以 MLCC 龍頭廠村田製作所決定投資近 10 億美元，2019 年前擴產電動車所需陶瓷電容，以因應市場趨勢，並減緩個人電腦及智慧手機成長衰退帶來的衝擊。也因此，追求技術導向的村田製作所在 3 月向客戶端發出通知，部分「舊產品群」產能將減少五成，部分大尺寸 MLCC 將停止接單。這波停產令訂單開始湧向台、韓廠，促成股市題材。



開盤	-	殖利率	0.44%
最高	-	上次收盤價	974.00
最低	-	52 週高點	1,000.00
市值	3414.49億	52 週低點	98.10
本益比	35.30		







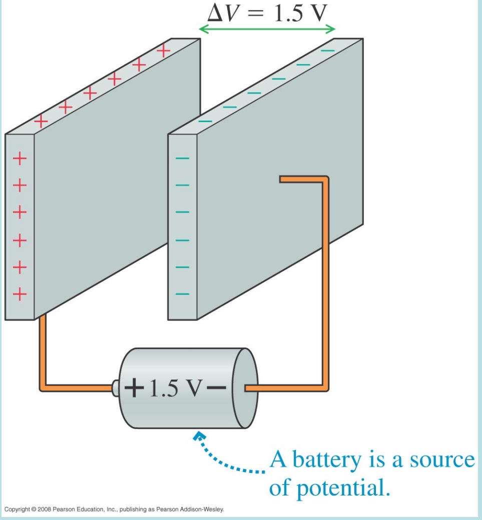
兩片帶相反電性的平面板之間的電場是均勻的。

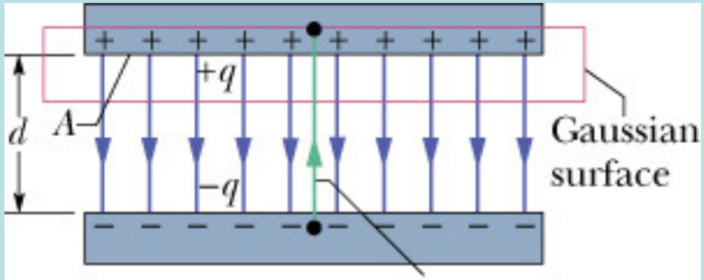
平板外電場為零，如此就不會干擾其他元件。

兩代電板間有一電位差： $V = Ed$

如要維持此電量與電場，必須加一電壓！

電容為儲存電場的裝置。





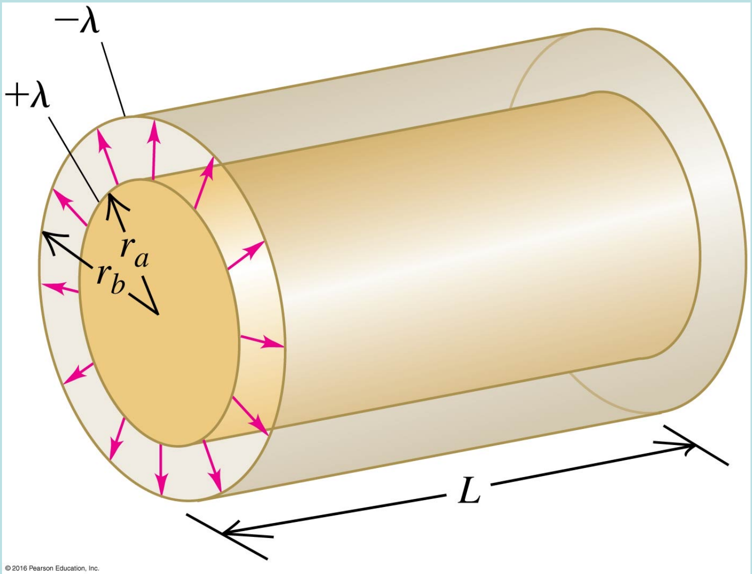
$$V = Ed$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{A\varepsilon_0}$$

$$V = \frac{d}{A\varepsilon_0}Q = \frac{Q}{C}$$

$$C = \frac{A\varepsilon_0}{d}$$

$$Q = CV$$

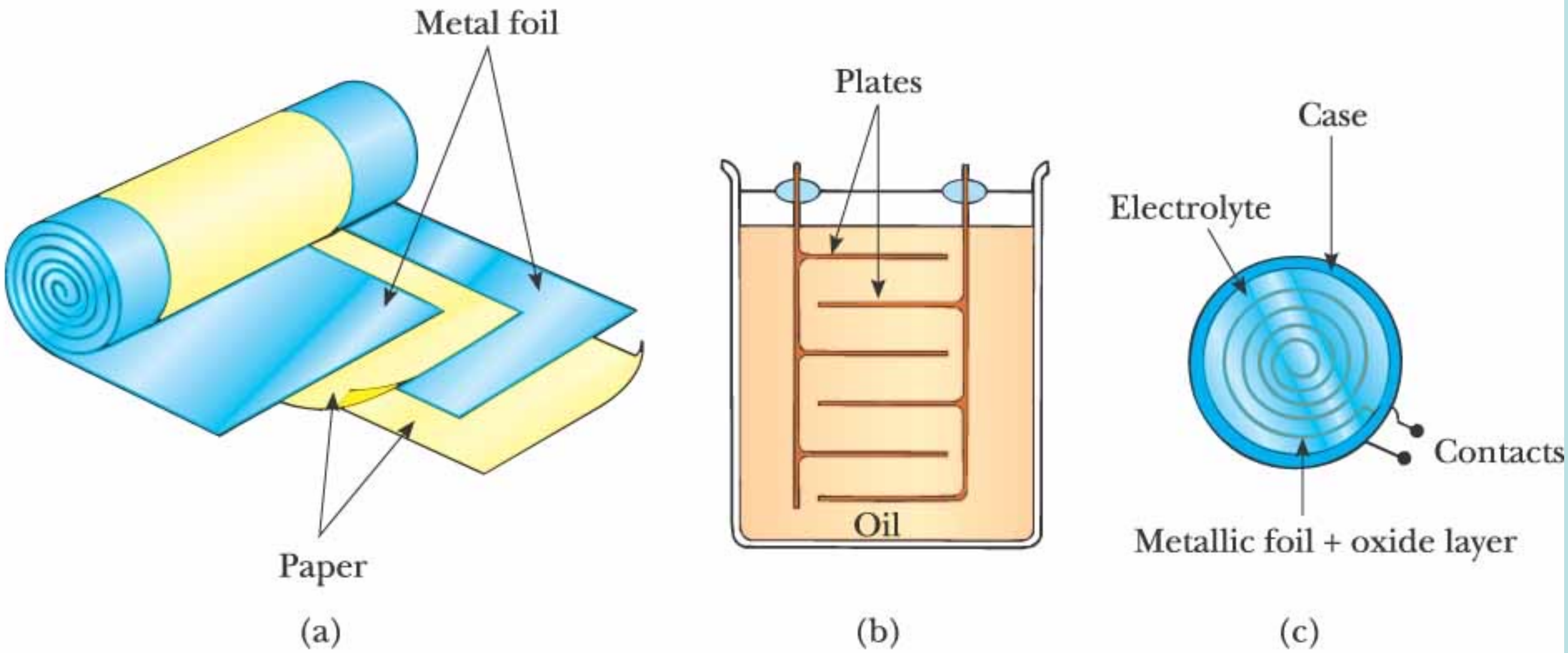


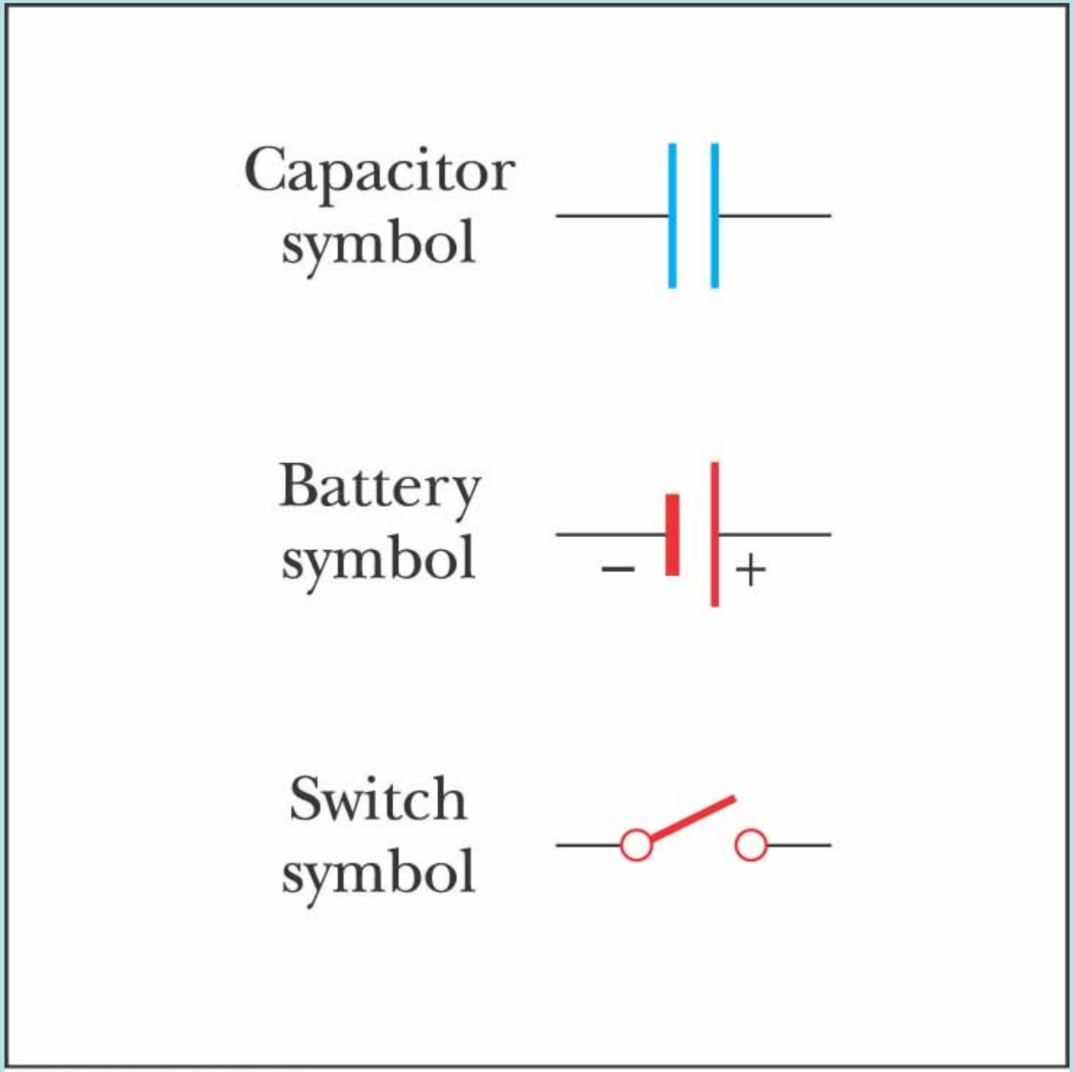
類似的公式也適用於圓柱體電容。

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\lambda L}{\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_b}{r_a}}$$

電容的電荷正比於電壓。 $Q = CV$


Rubycon
PHOTO-FLASH
330V 1300µF
NEGATIVE
FKX
190 UF
150 VDC
+105°C
3,500 µF
40 VDC
MADE IN U.S.A.
POS +
MAX SURGE 250VDC
.68 MFD
200 VDC


Metal foil
Paper
(a)
Plates
Oil
(b)
Case
Electrolyte
Contacts
Metallic foil + oxide layer
(c)


Capacitor
symbol
Battery
symbol
−
+
Switch
symbol

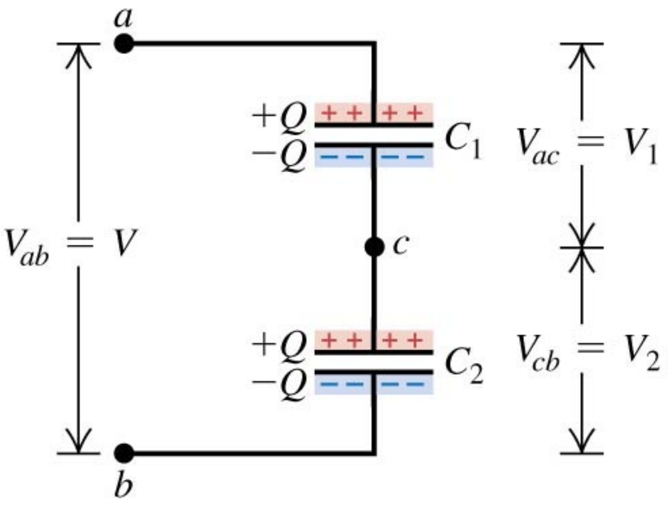
電容式麥克風有一可動及一固定電板。兩者間保持固定電壓。

電波帶動可動電板振動，改變電板間距離，因此成比例改變電荷。

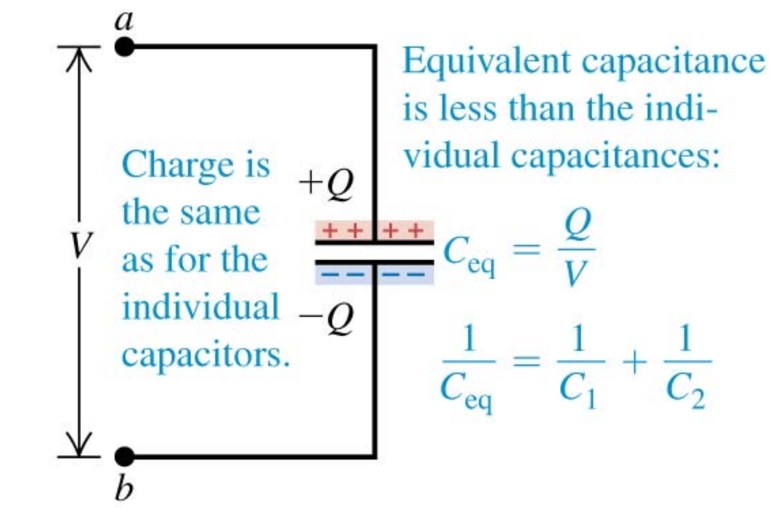
電荷變化即電流，便可被放大並收集為訊號。

(a) Two capacitors in series

Capacitors in series:
- The capacitors have the same charge Q.
- Their potential differences add: $V_{ac} + V_{cb} = V_{ab}$.



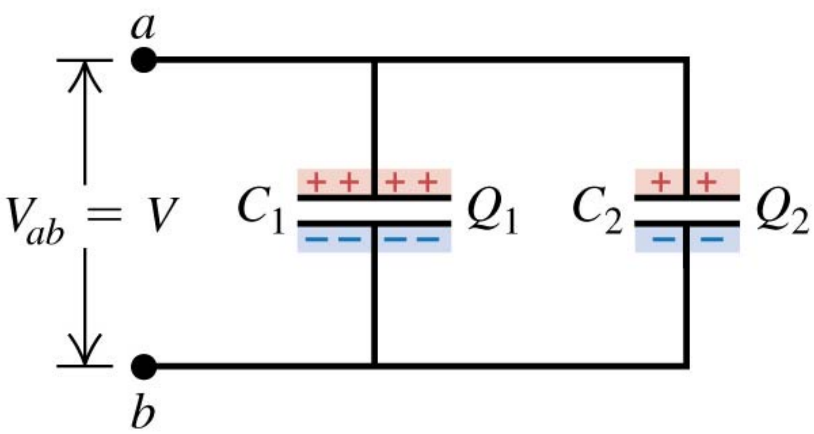
(b) The equivalent single capacitor



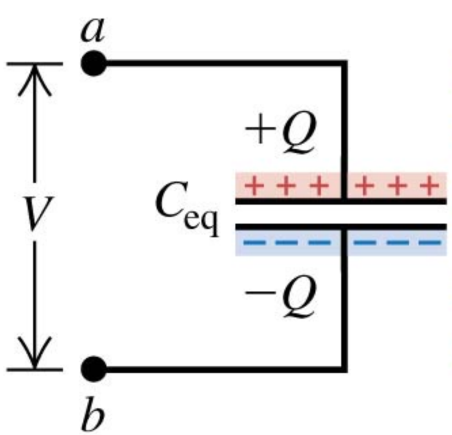
(a) Two capacitors in parallel

Capacitors in parallel:

- The capacitors have the same potential V.
- The charge on each capacitor depends on its capacitance: $Q_1 = C_1V$, $Q_2 = C_2V$.



(b) The equivalent single capacitor



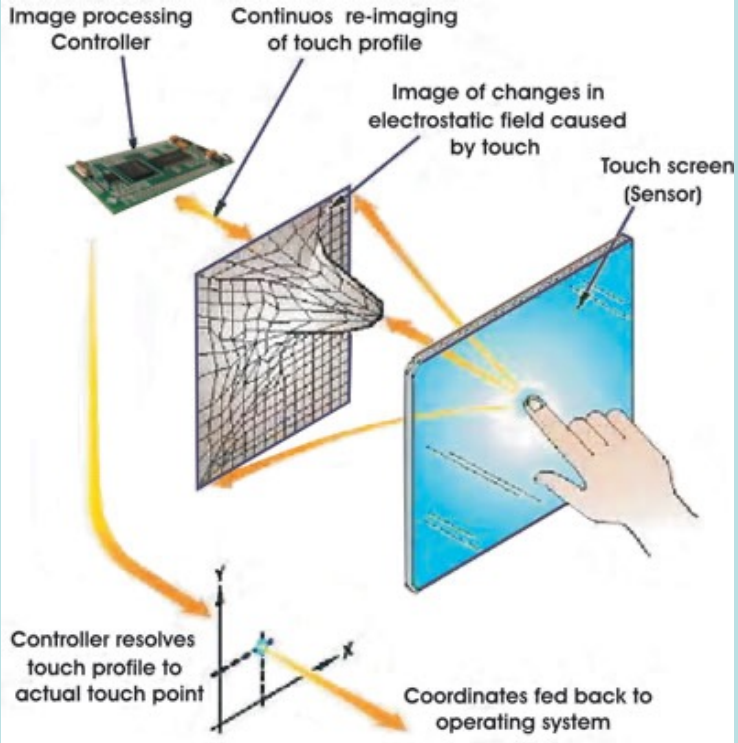
Charge is the sum of the individual charges:

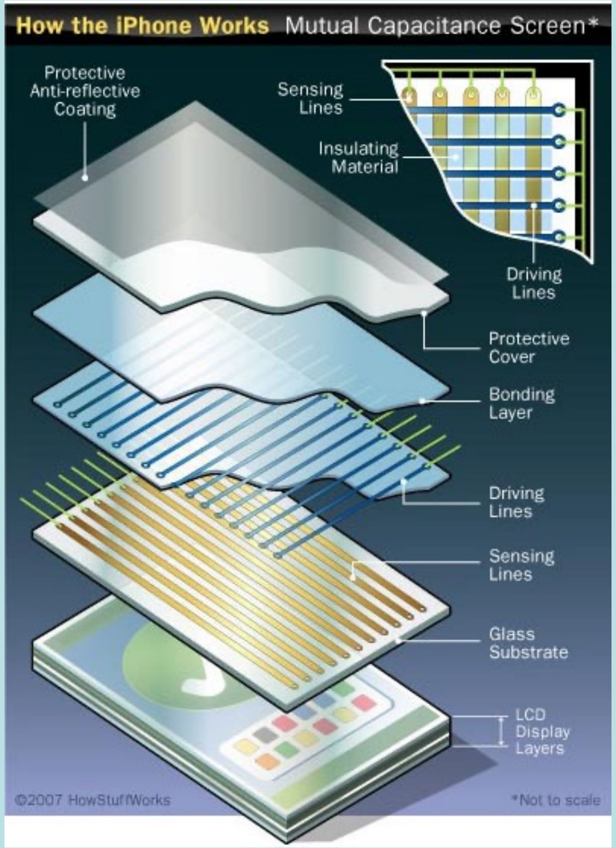
$Q = Q_1 + Q_2$

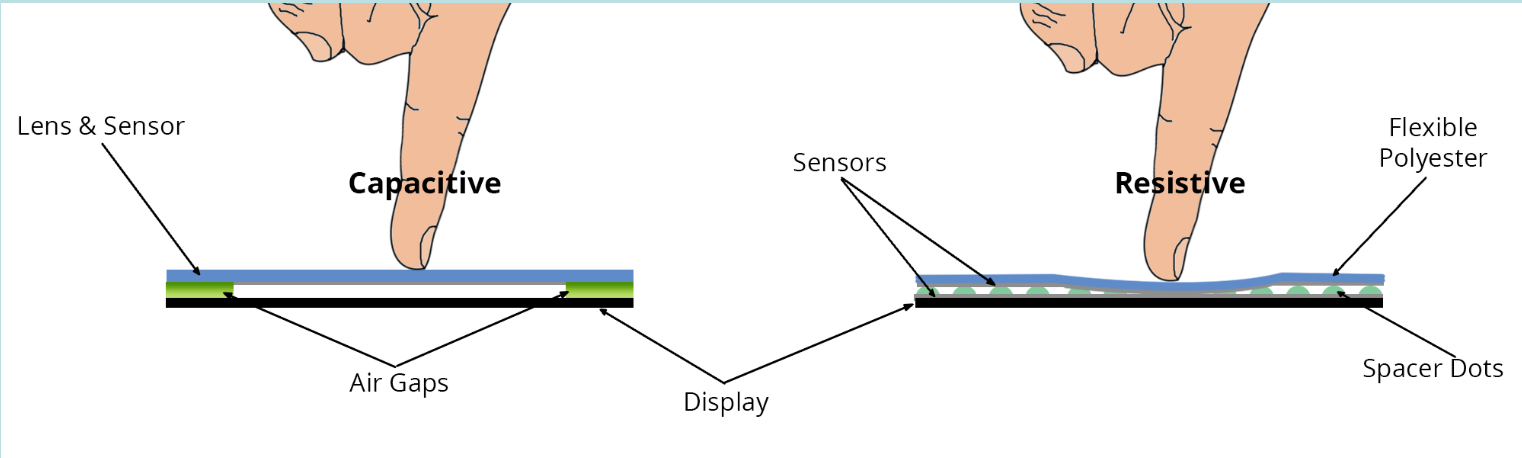
Equivalent capacitance:

$C_{eq} = C_1 + C_2$

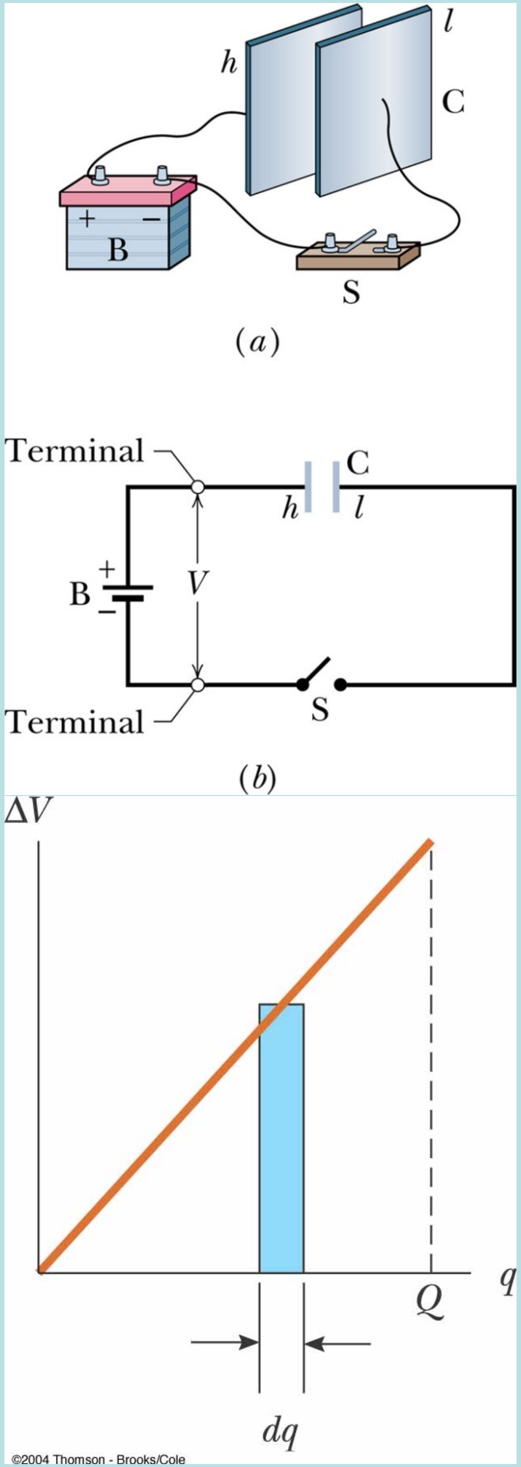
Touch Screen







觸碰的手指提供一個串聯的電容器，改變當地的電容。



電容儲藏電場也同時儲藏能量。

增加電荷dq時必須提供能量：$dq \cdot V$。

注意電位V隨電荷q會一直增加：

當電位是V時儲存於電容中的能量：

$$U = \int_0^Q V \cdot dq = \int_0^Q \frac{q}{C} \cdot dq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} C V^2$$

此能量也可以電場表示：

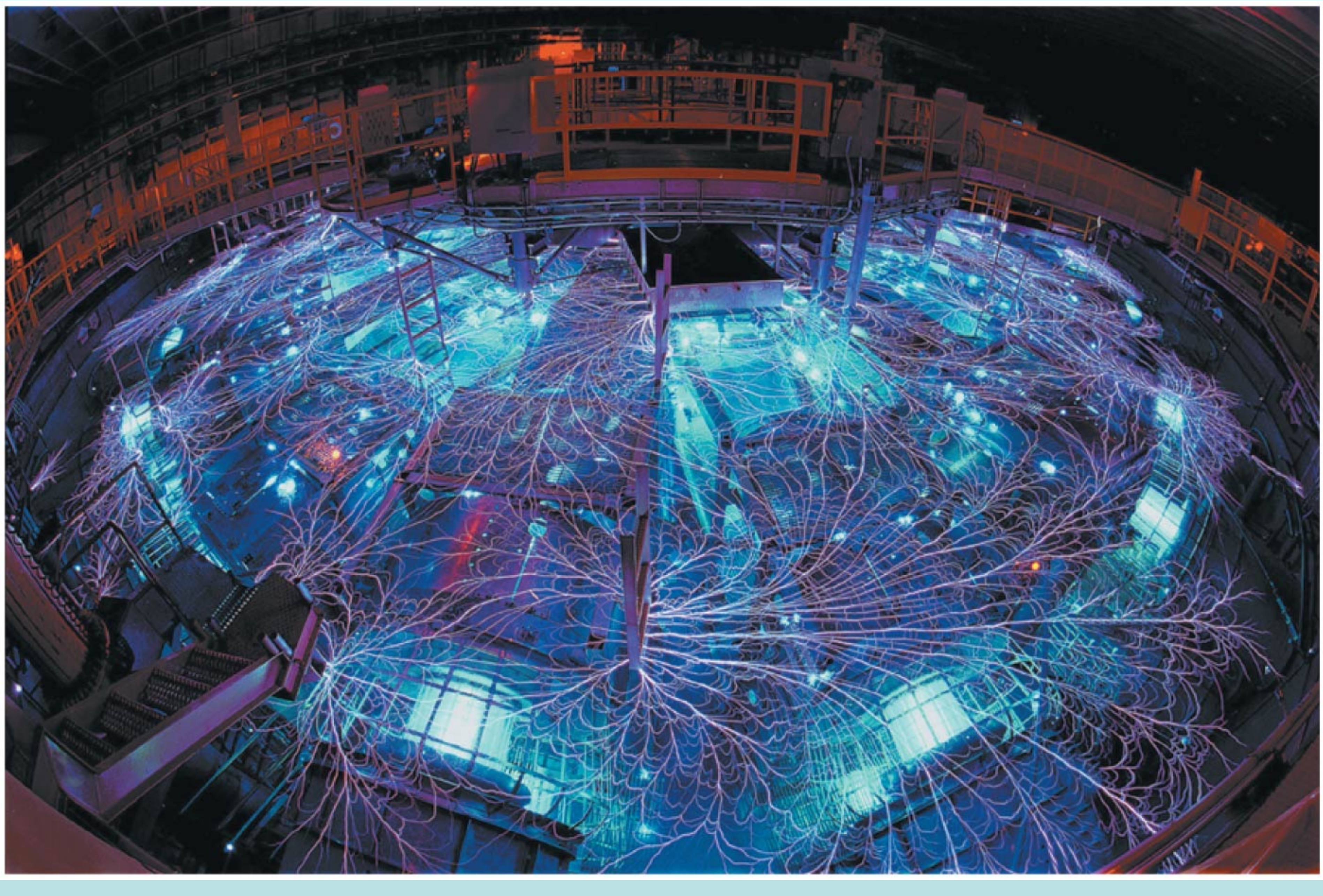
$$U = \frac{1}{2} \frac{A\varepsilon_0}{d} E^2 d^2 = (Ad) \cdot \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

我們可以定義單位體積的能量密度：

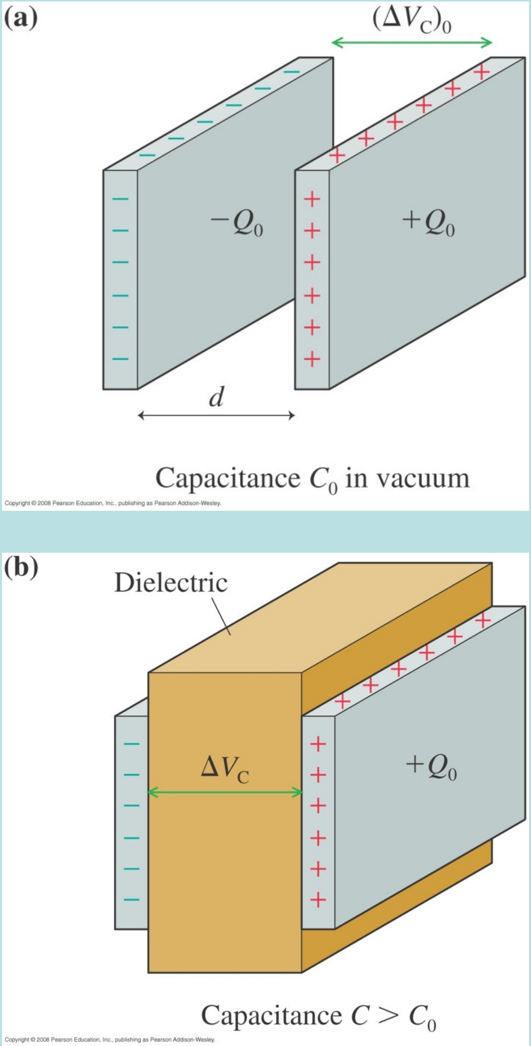
$$u = \frac{U}{Ad} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$ 能量密度只與當地電場有關！

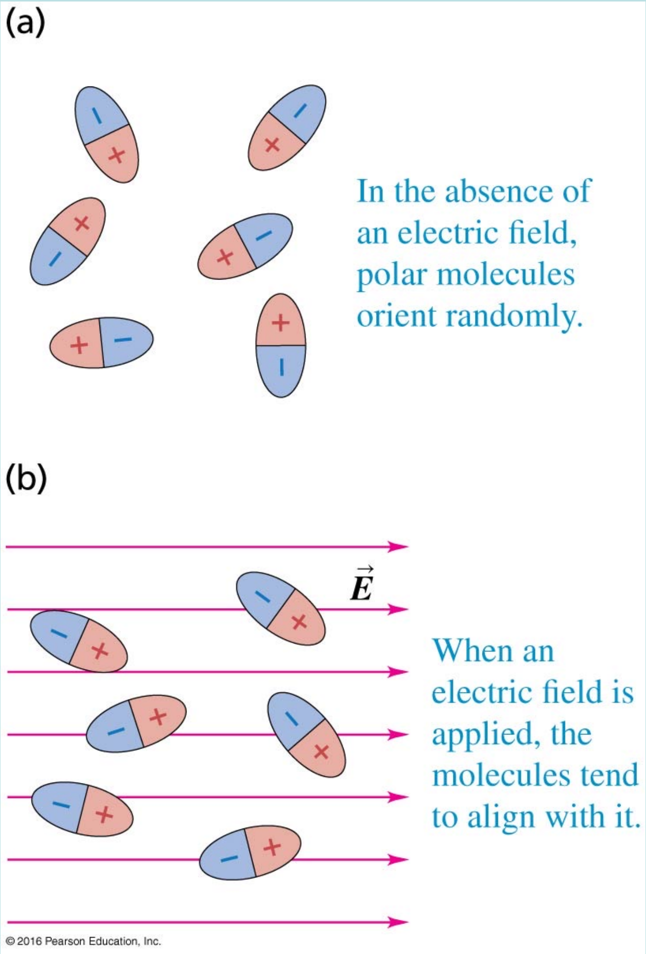
能量可看成是儲存於電場之中！

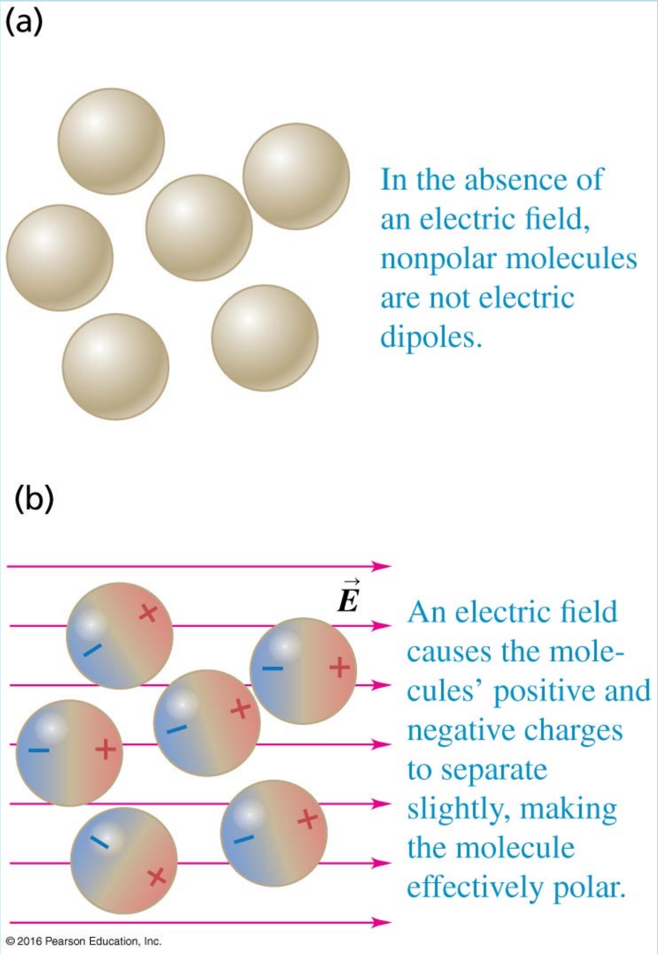
以上公式適用於任意電場！甚至隨時改變的電場！

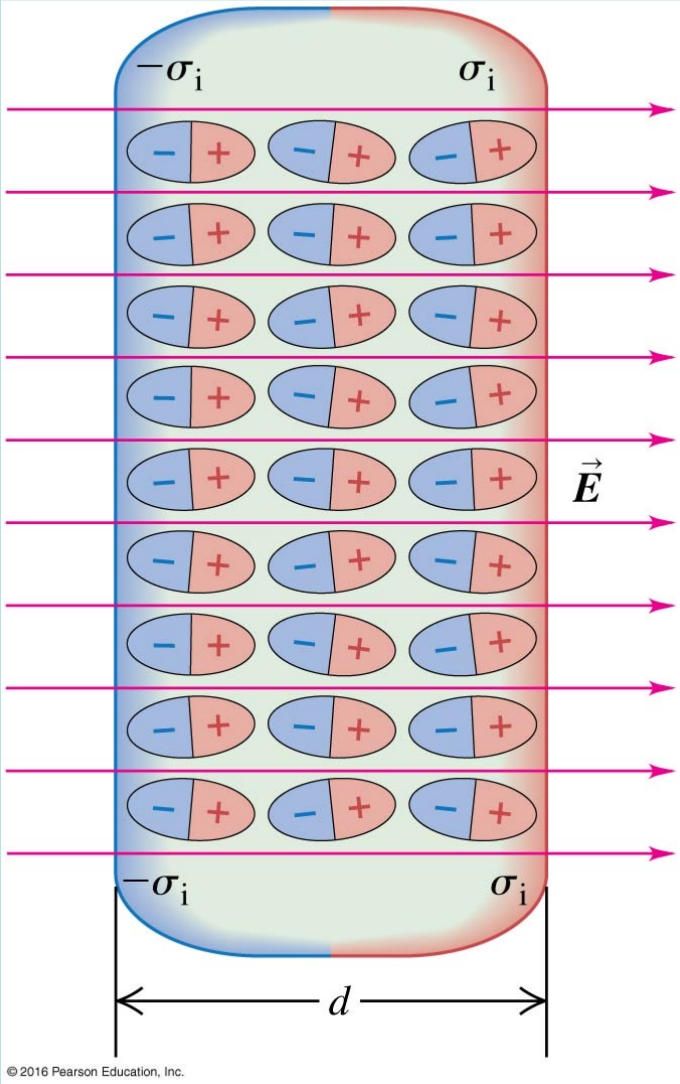


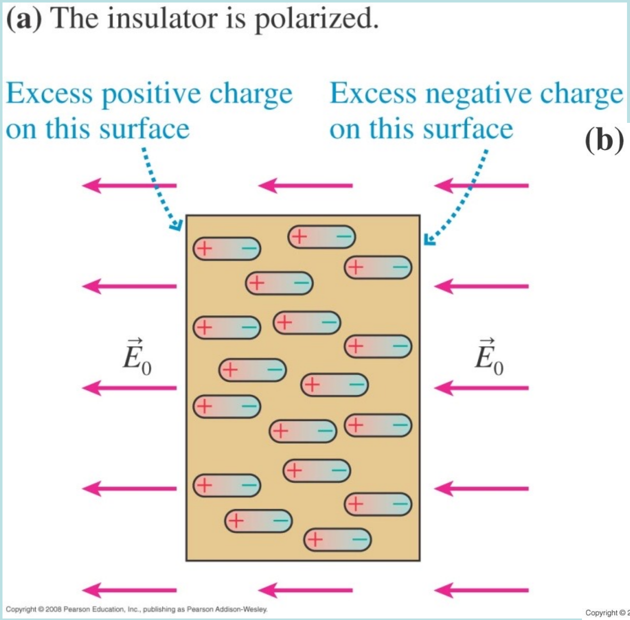
介電質 Dielectrics

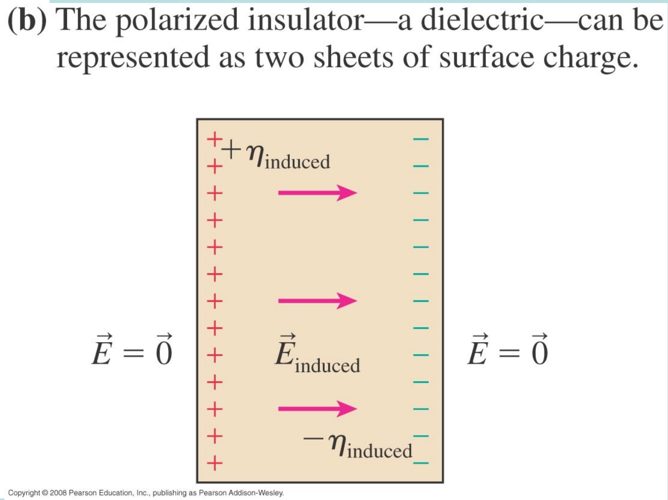








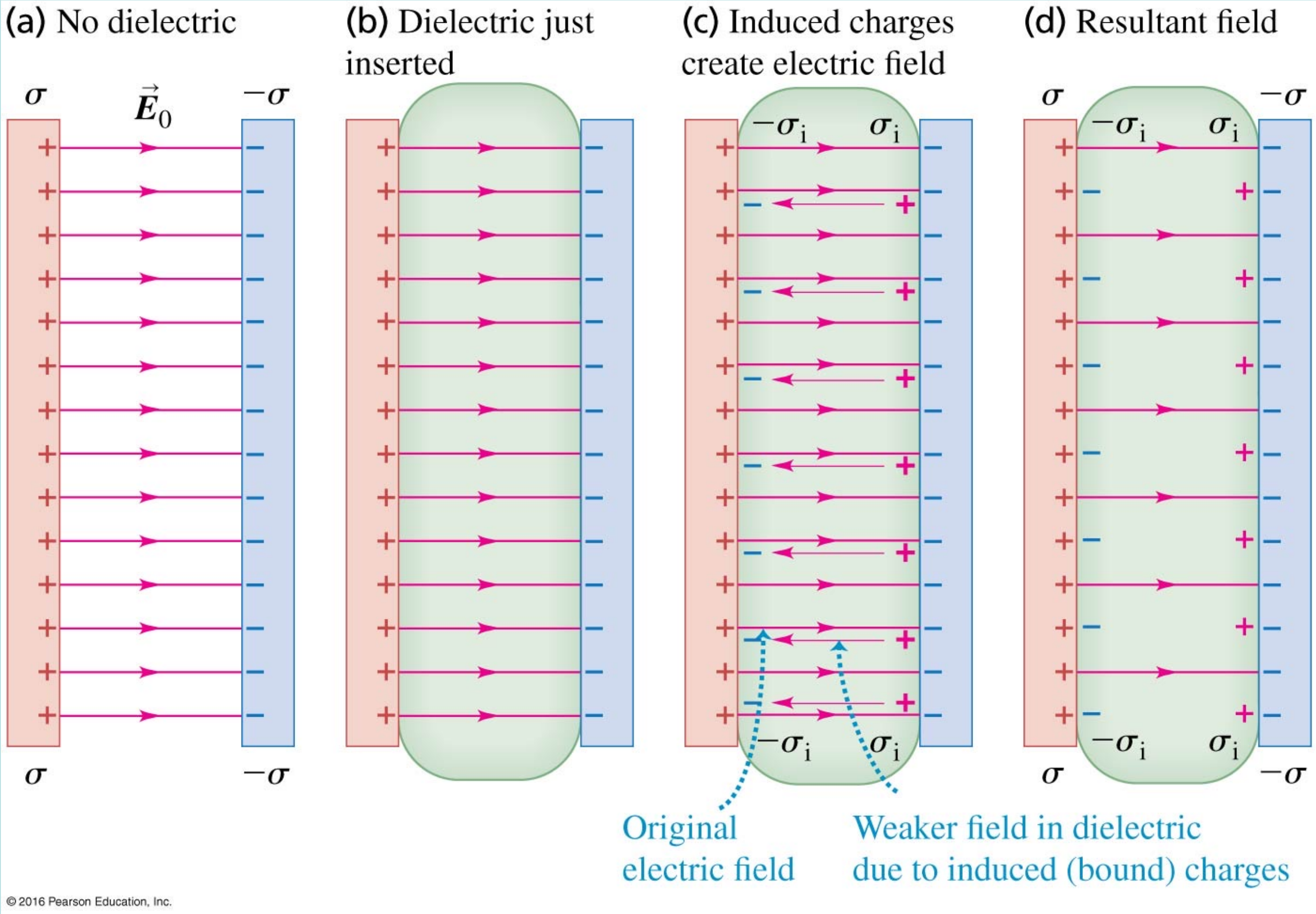




極化的電介質效果如同兩片額外的平面電荷。

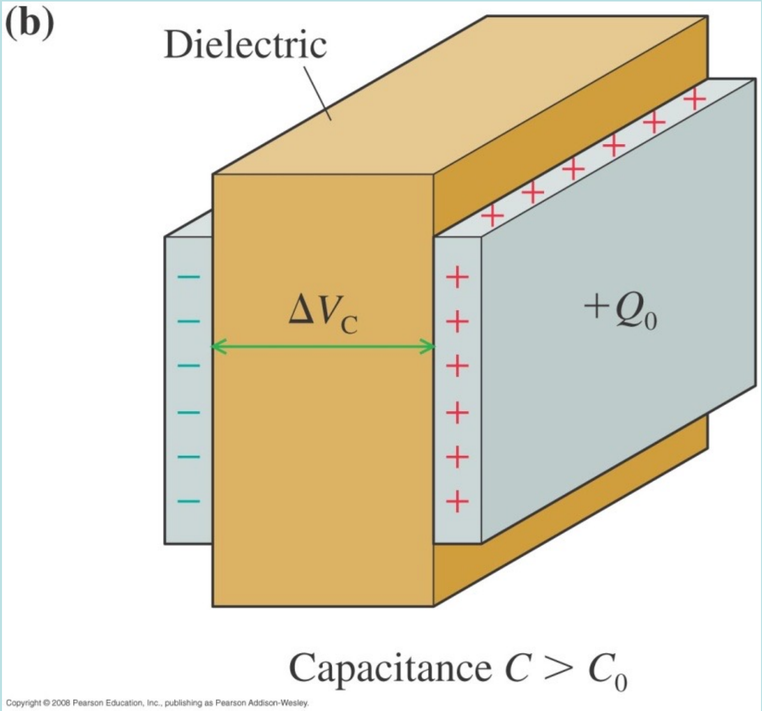
引發的電場與原來的電場成正比，但方向通常相反

$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i$　　$\vec{E}_i \propto \vec{E}_0 \propto \vec{E}$　　$\vec{E} = \dfrac{\vec{E}_0}{\kappa}$

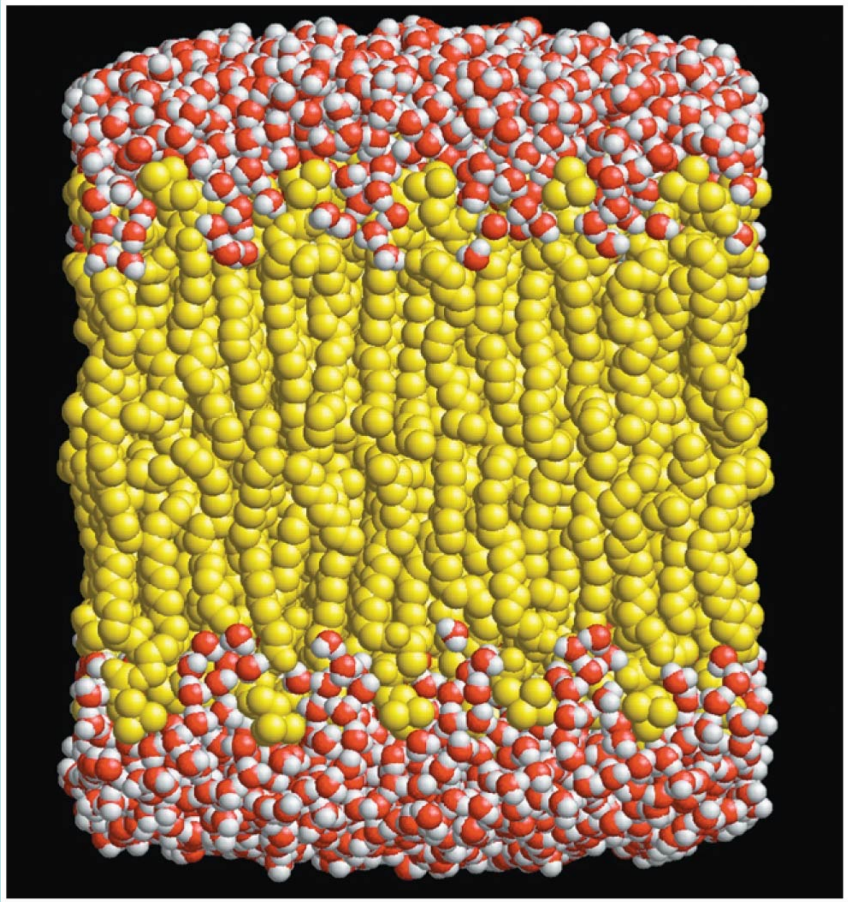


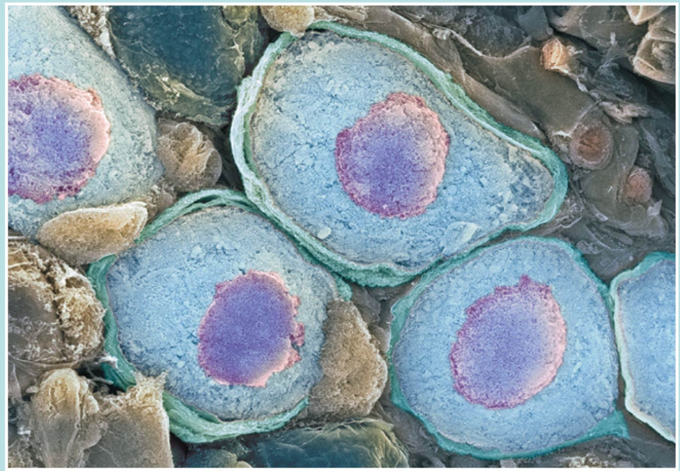
$\vec{E}_i \propto \vec{E}_0 \propto \vec{E}$ $\quad$ $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i$

$\kappa > 1$ 介電常數 $\quad$ $\vec{E} = \dfrac{\vec{E}_0}{\kappa}$



$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q_0}{\frac{V_0}{\kappa}} = \kappa C_0$$



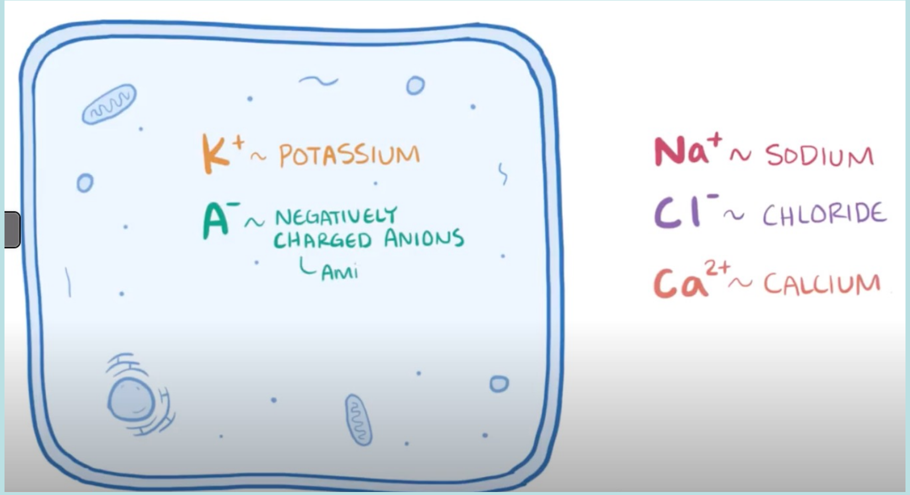


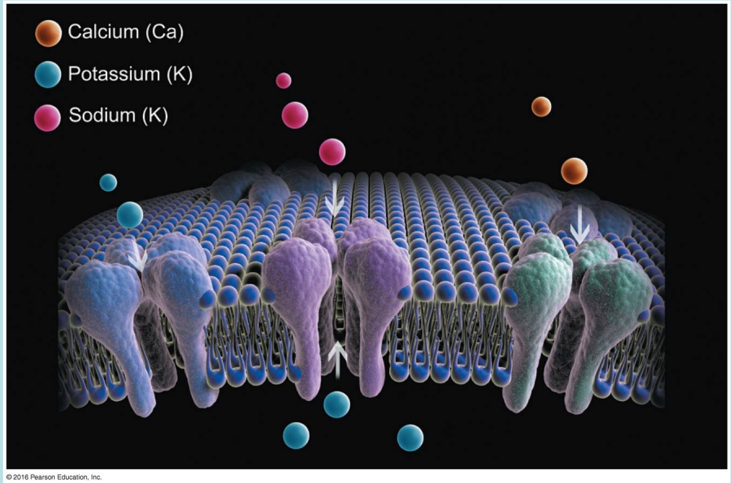
細胞壁就是一個電介質。$\kappa \sim 10$。

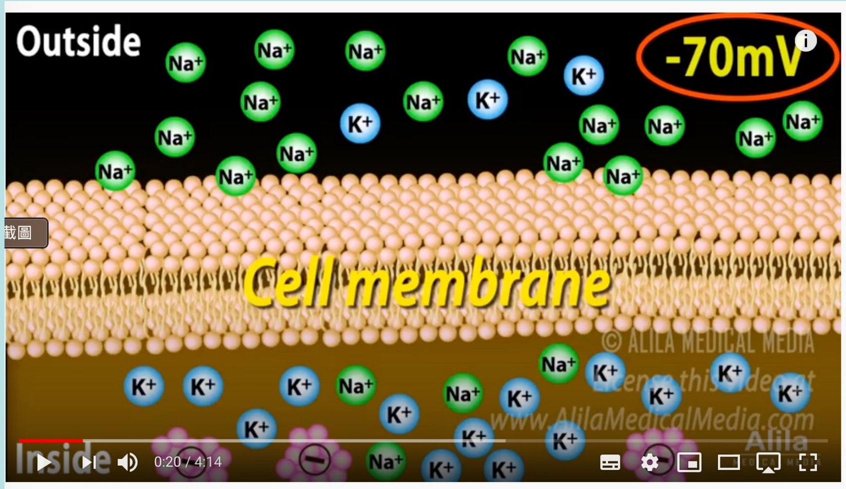
細胞壁內外的液體帶表面電荷，內部帶負電，外部帶正電。

內外電位差大約0.07V，間隔7.0×10^{-9}m，$E\sim10^{7}$V/m。

如無介電質的效應$E\sim10^{8}$V/m，介電質將導電。

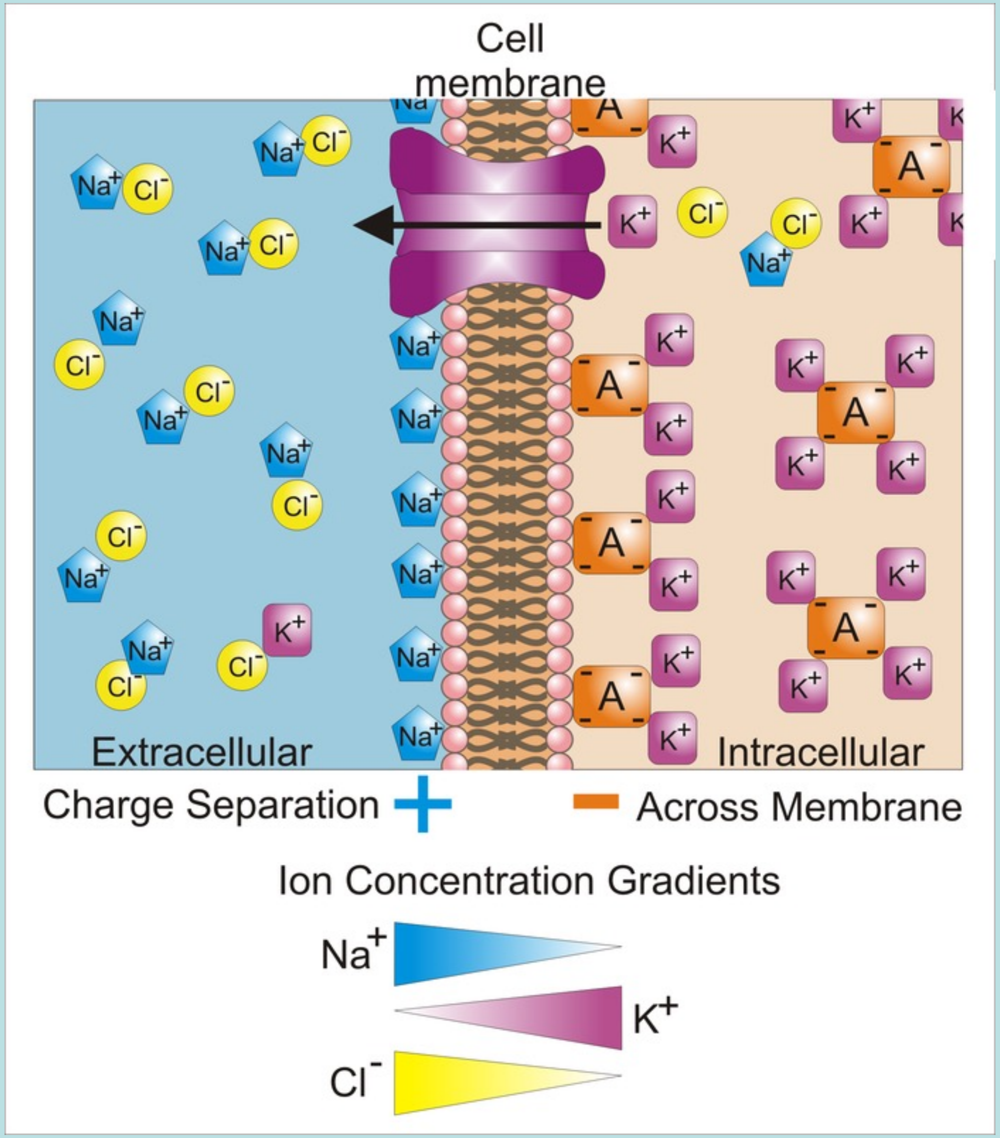


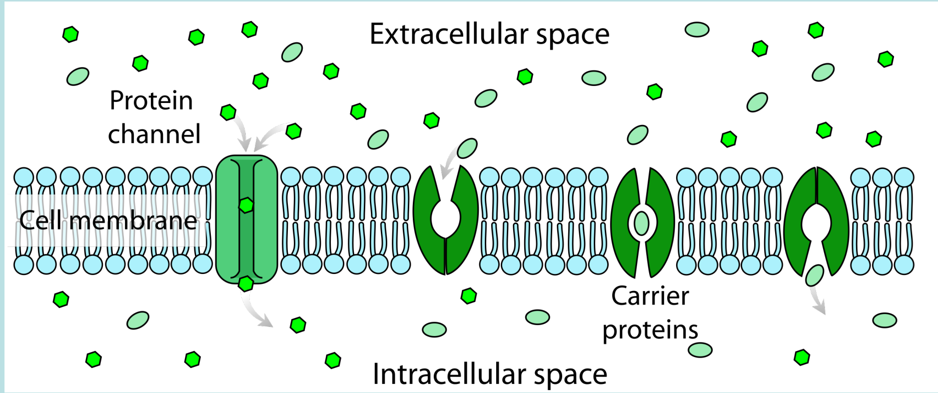


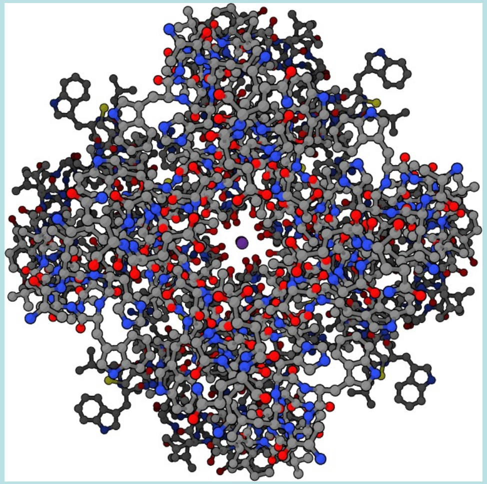


細胞內的電位低於細胞外的電位，$\Delta V \sim 70-95\mathrm{mV}$。

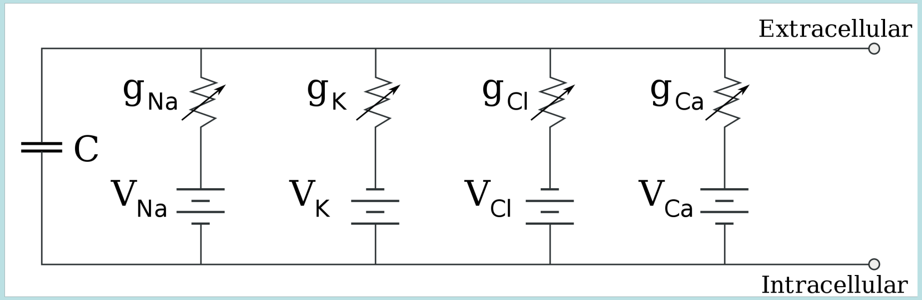
因此有一細胞外指向細胞內的電場E。

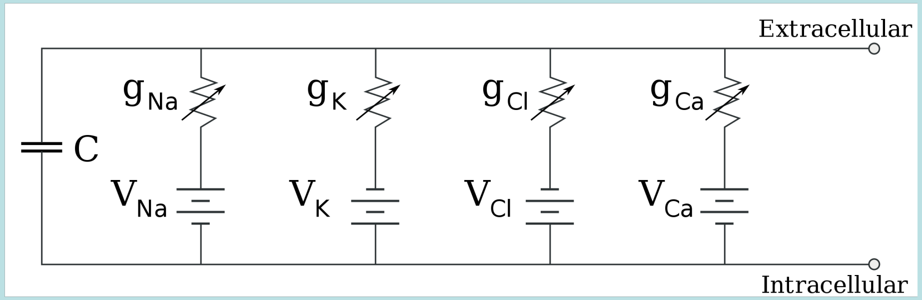

Cell membrane
Extracellular
Intracellular
Charge Separation
Across Membrane
Ion Concentration Gradients
Na^+
K^+
Cl^-


Extracellular space
Protein channel
Cell membrane
Carrier proteins
Intracellular space

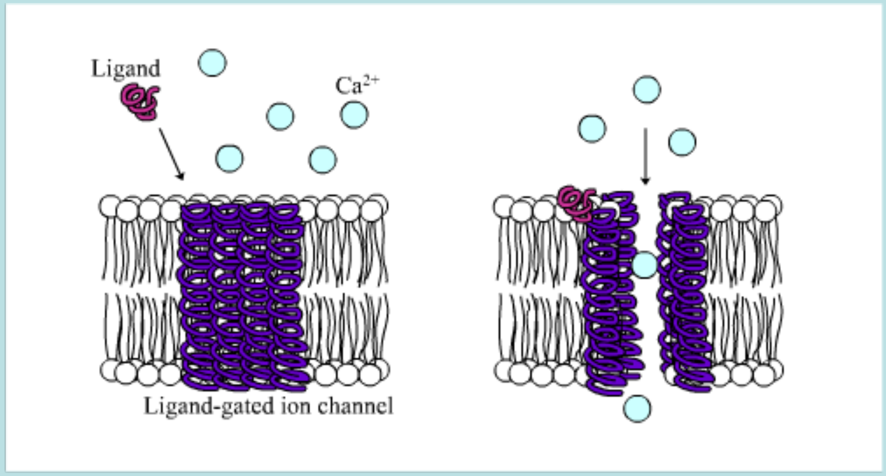


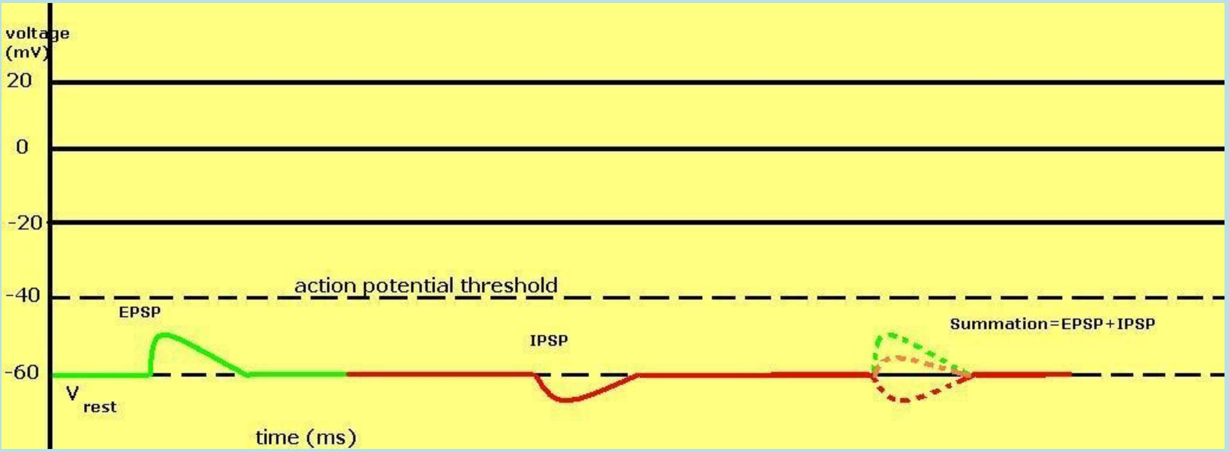
Ion channel

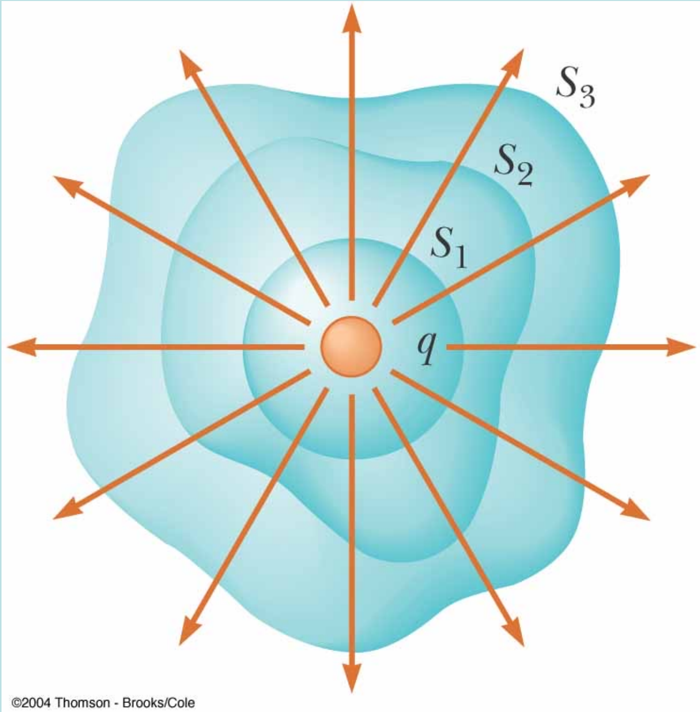

Extracellular
g_{Na}
g_K
g_{Cl}
g_{Ca}
C
V_{Na}
V_K
V_{Cl}
V_{Ca}
Intracellular



改變離子隧道滲透度即可改變電位差而產生訊號。







$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

在均匀電介質中：

$$\oint \vec{E}_0 \cdot d\vec{A} = \oint \kappa \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\kappa \varepsilon_0}$$

在均匀電介質中，只要改常數即可！

$$\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon \equiv \kappa \varepsilon_0$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon}$$