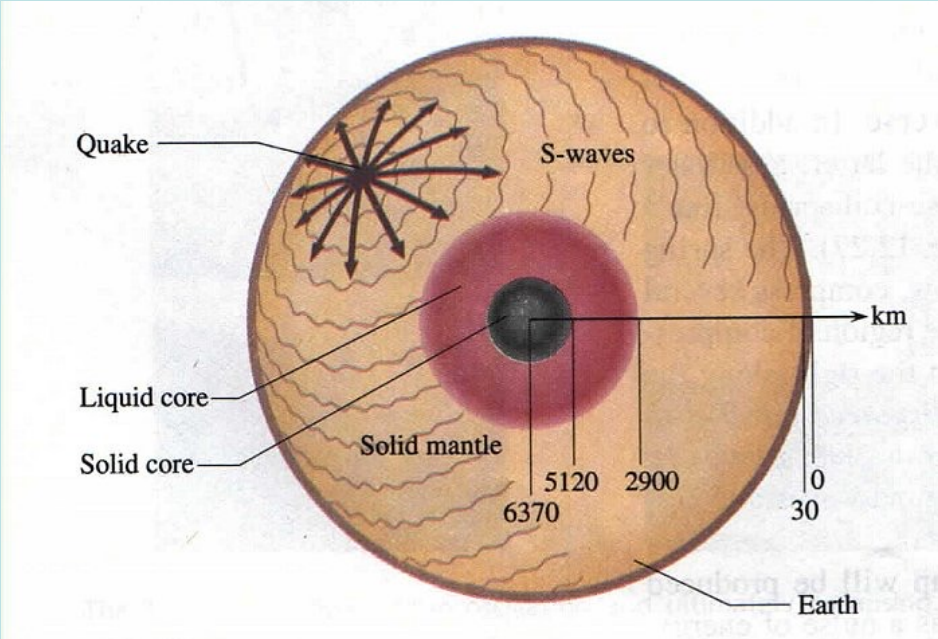
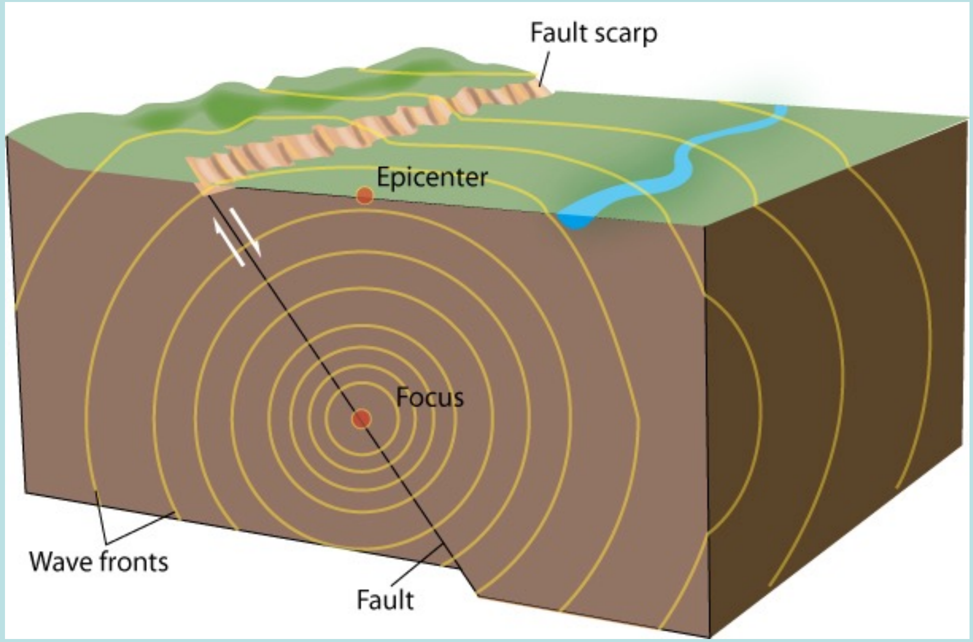
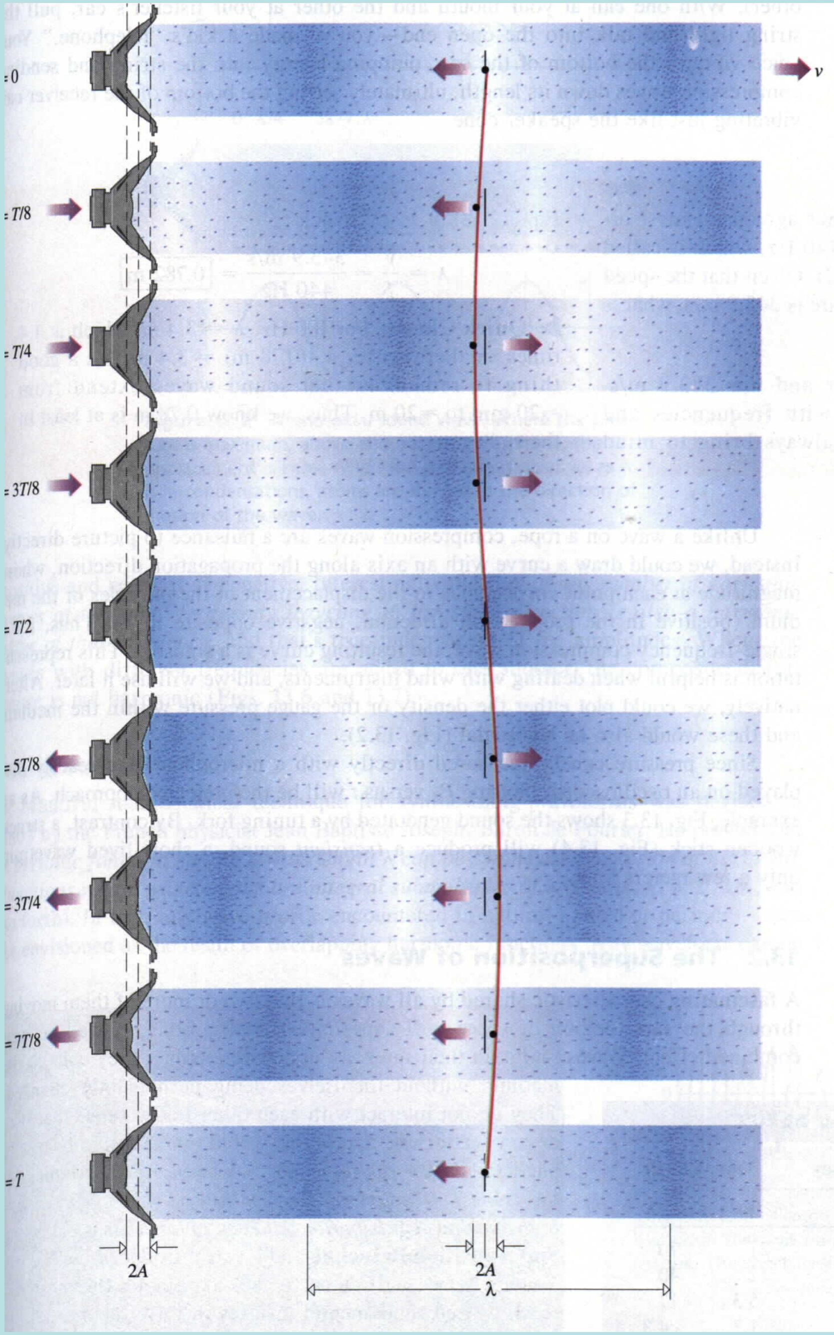
水面波

地震波

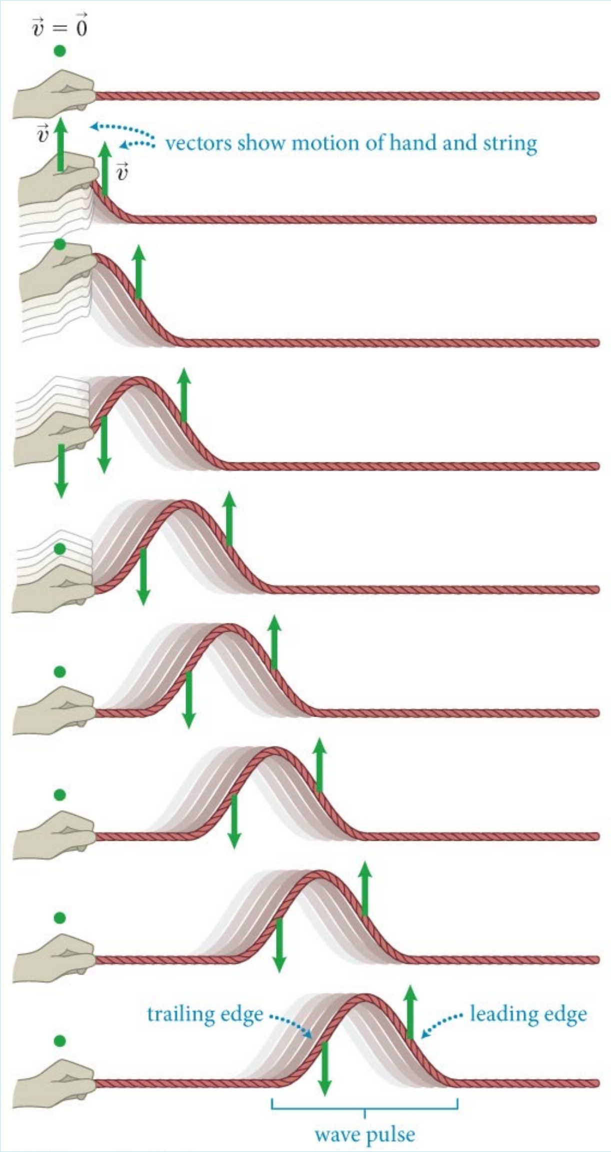

Quake
S-waves
km
Liquid core
Solid mantle
Solid core
5120
2900
6370
0
30
Earth


Fault scarp
Epicenter
Focus
Wave fronts
Fault

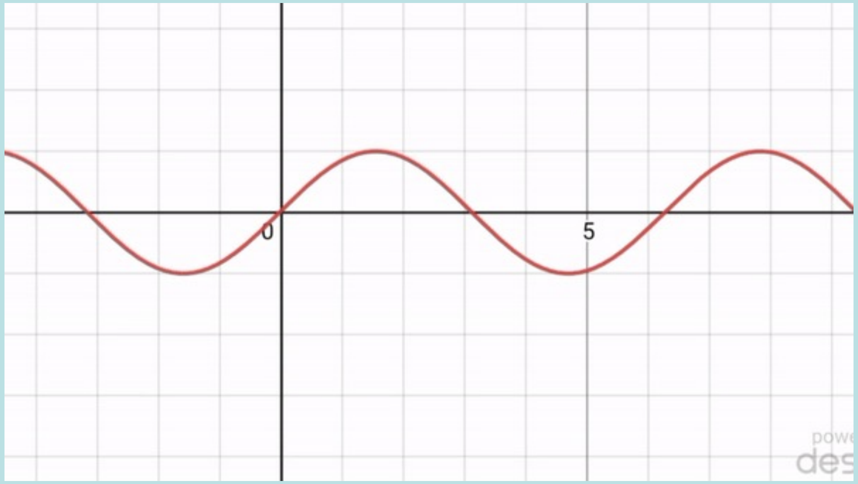
聲波

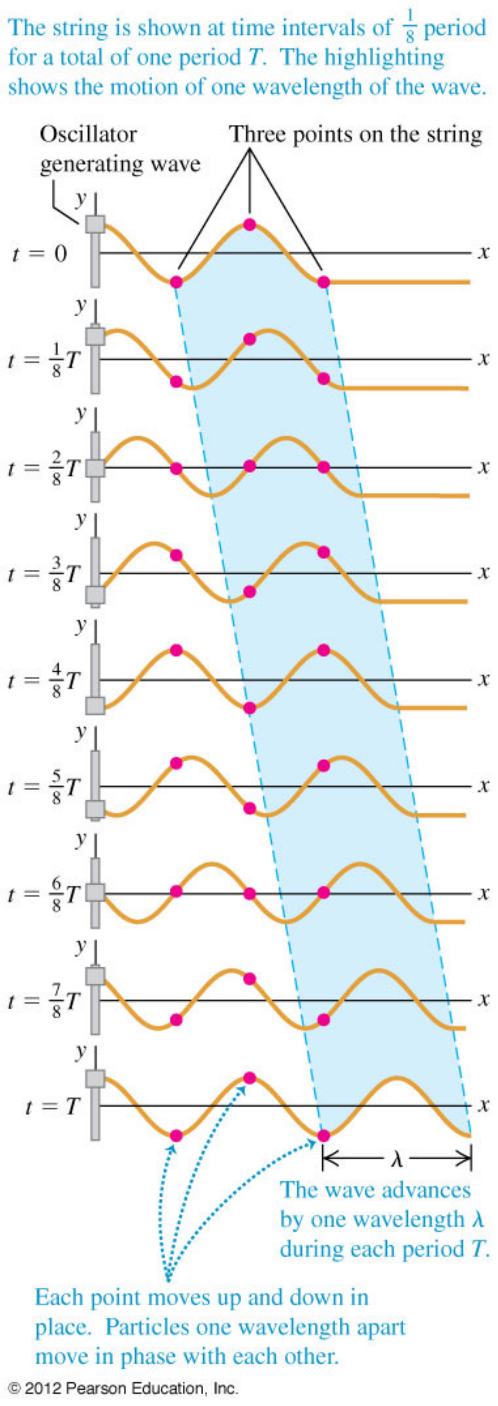


以上這些現象顯然是完全不同的物理系統！
但其現象卻有極類似之處，因此都稱為波！

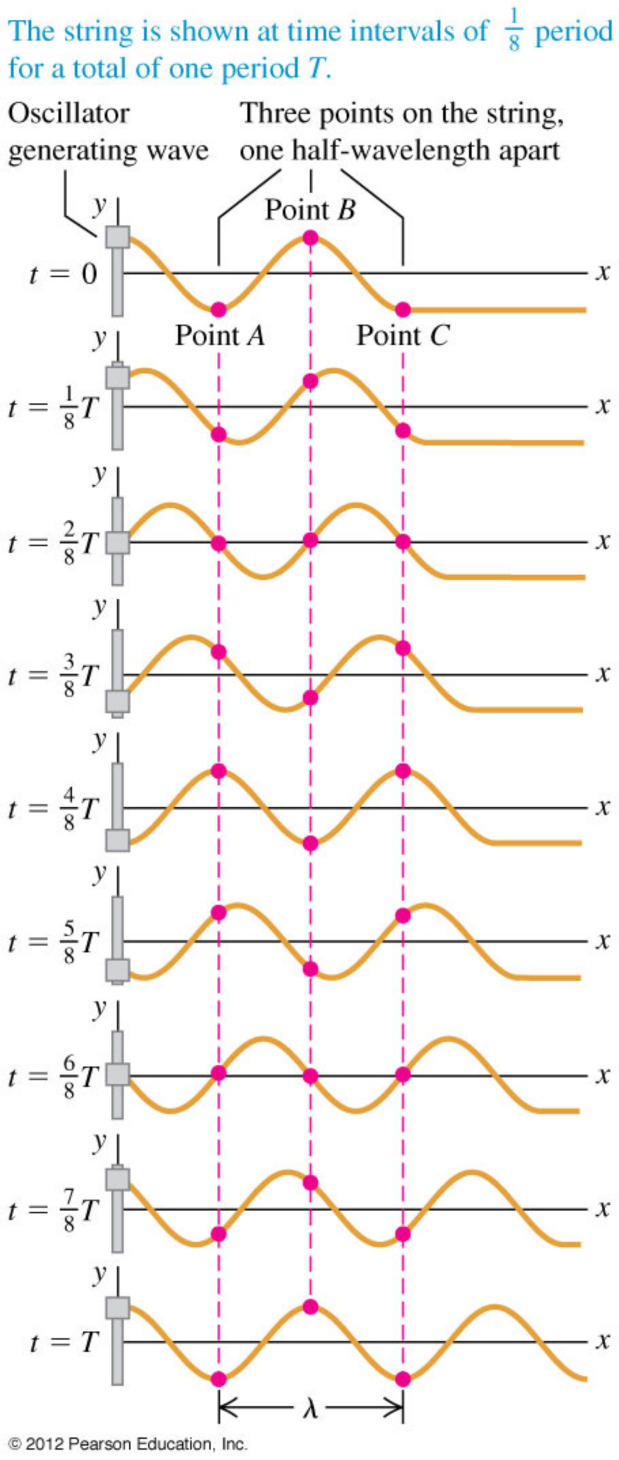


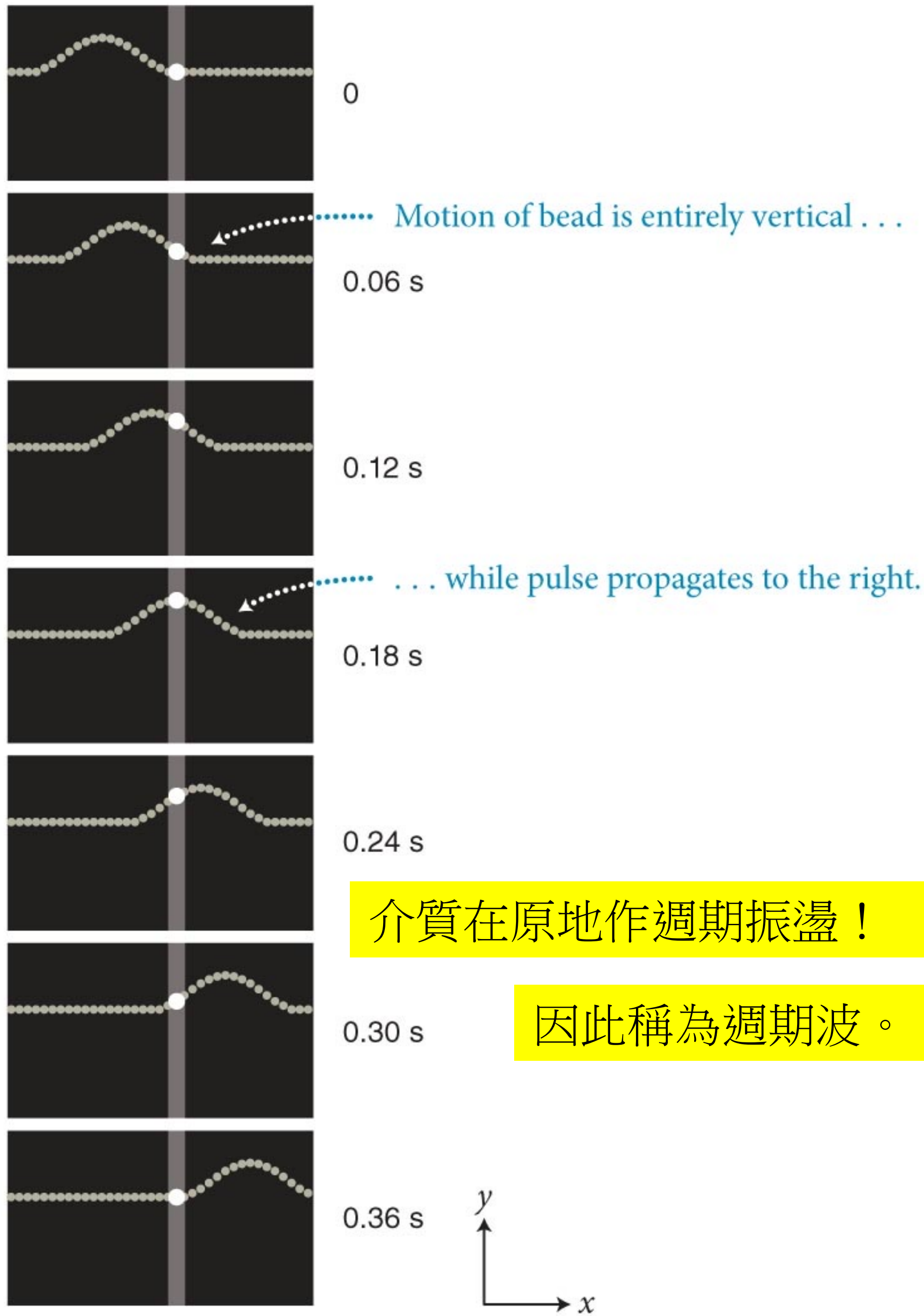
將一條緊拉的弦，在垂直方向移動作一個脈衝。
擾動會在空間中傳播！稱為脈衝波。
持續做脈衝就得到週期波。





波擾動的波型在空間中傳播！波型是不變的。

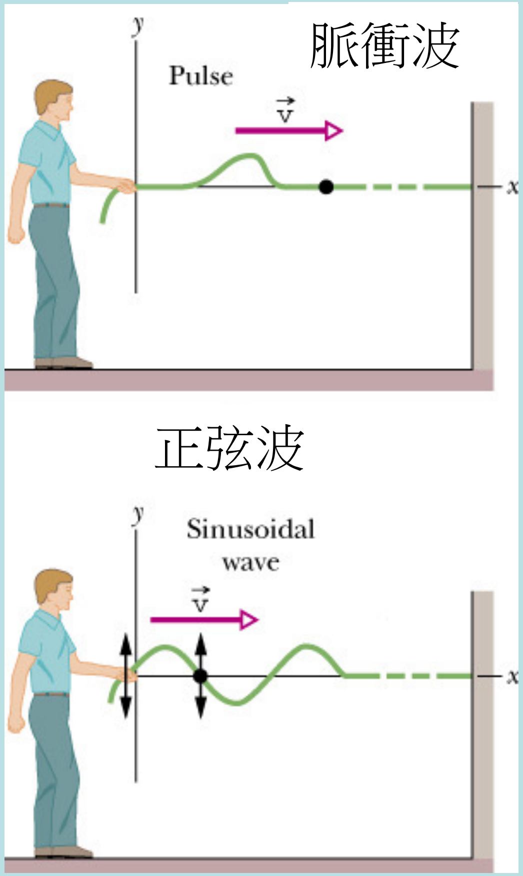


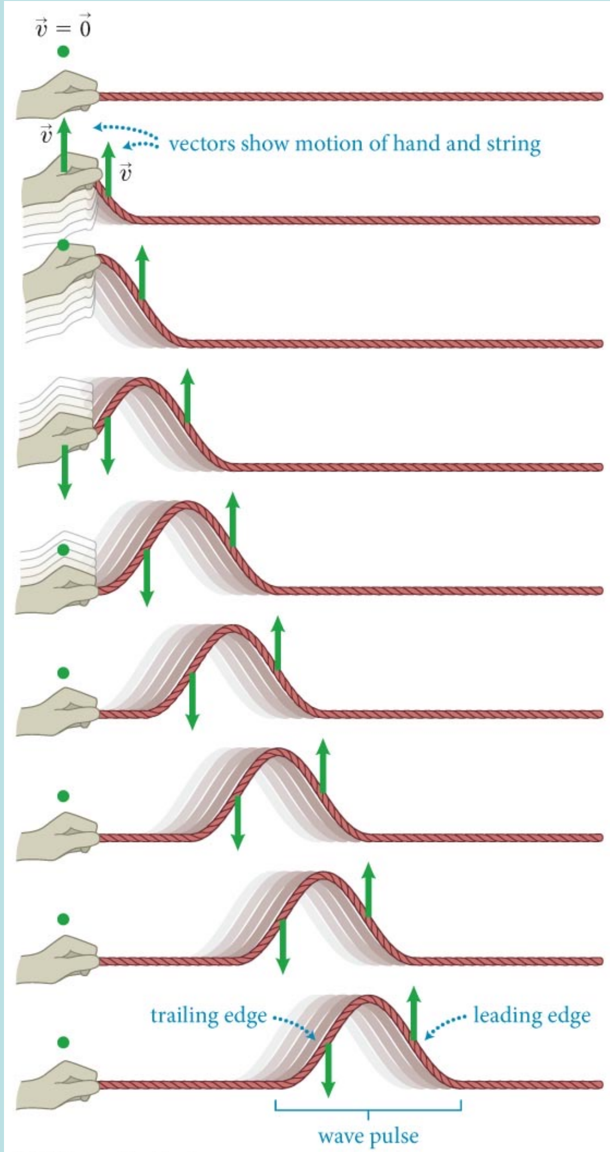


介質在原地作週期振盪！

因此稱為週期波。

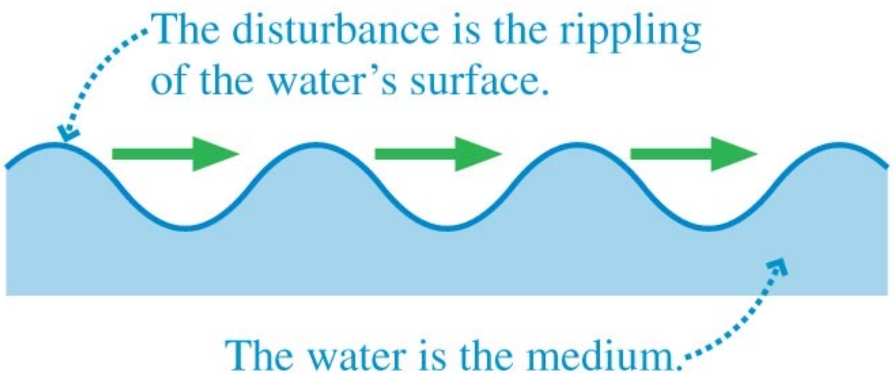
波動：介質擾動在空間中的傳播，此傳播可以傳遞能量。

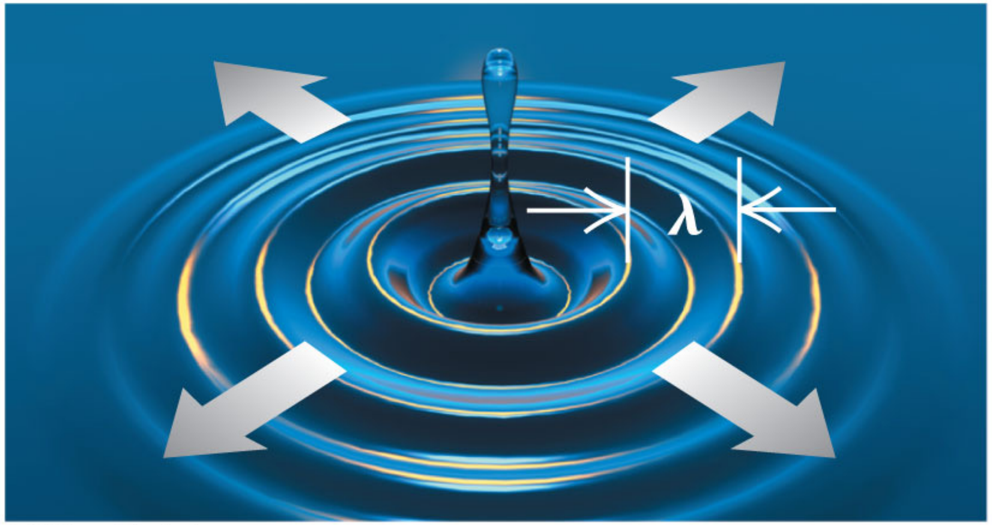




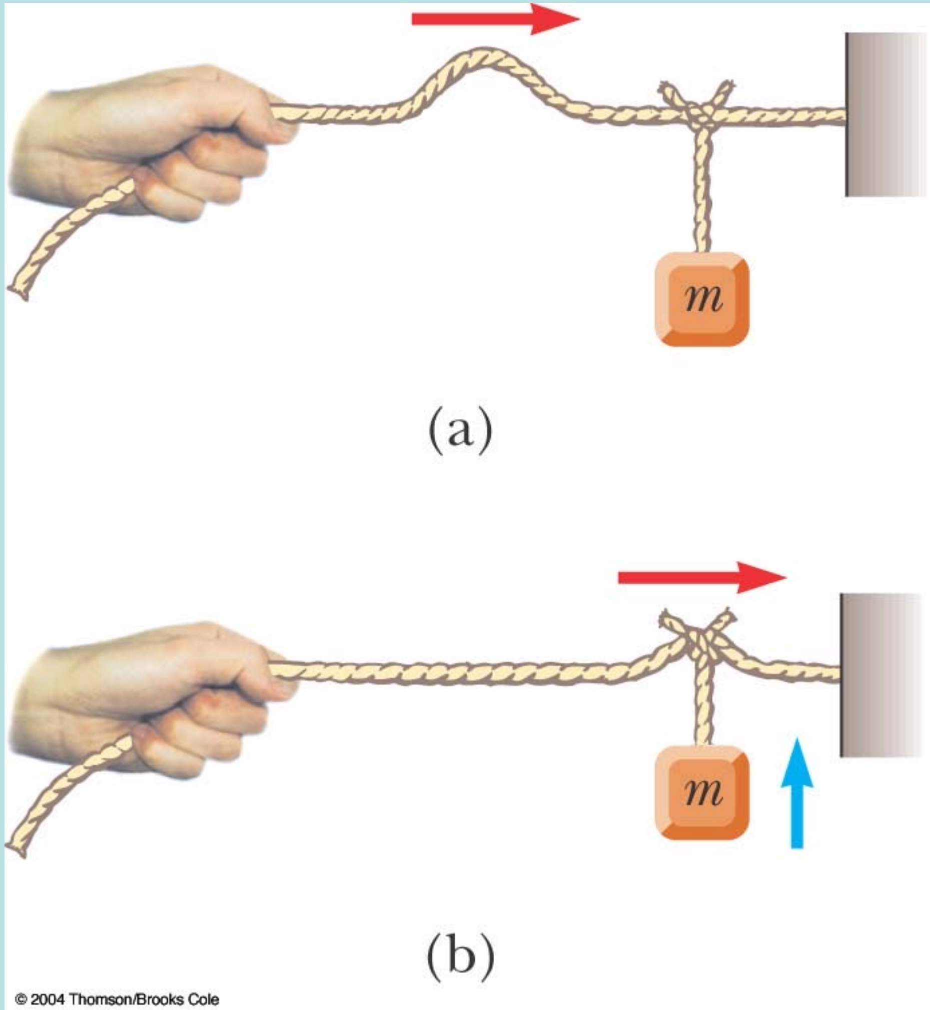
Haliday simulation 16-1

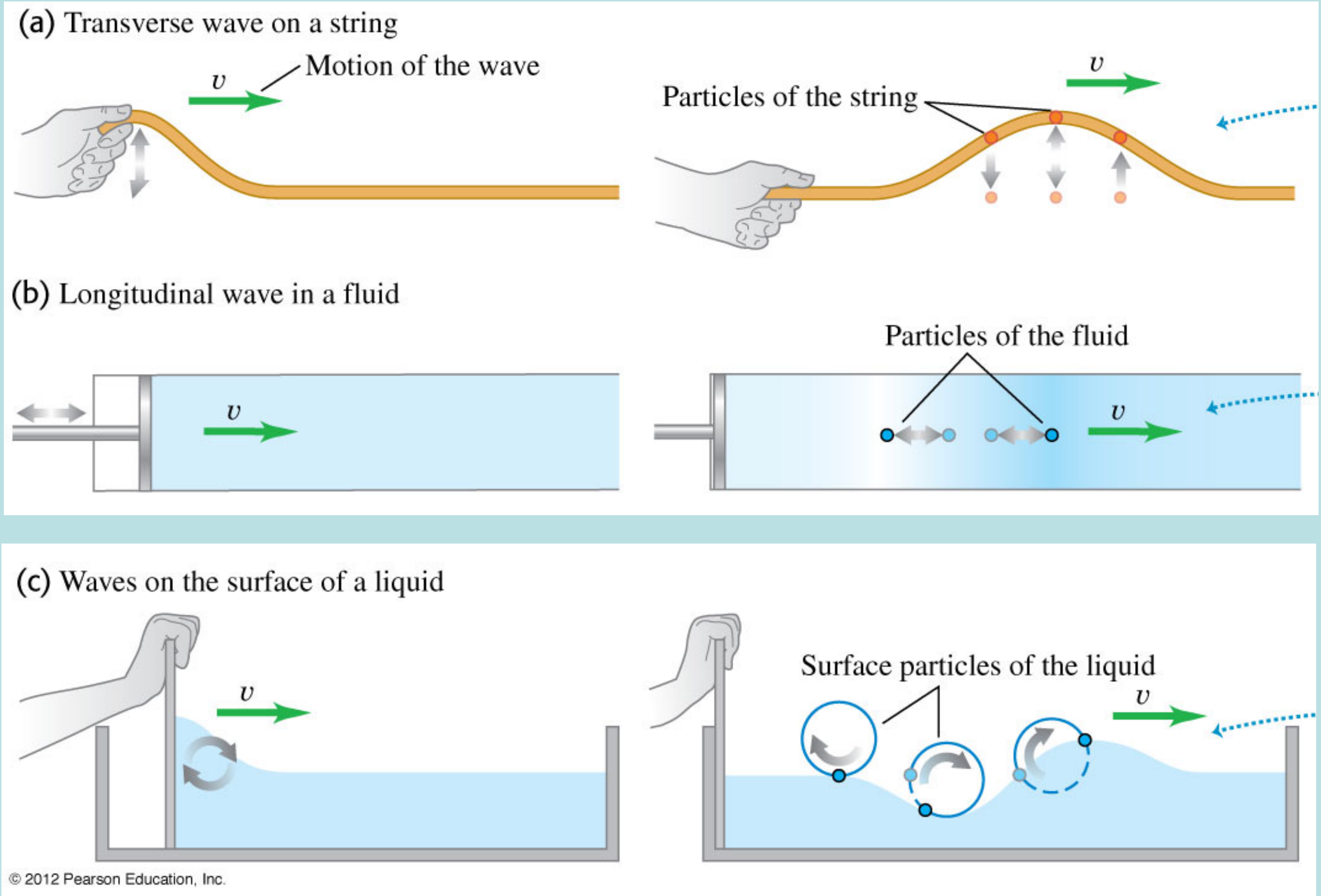
水波即是水面的擾動在空間中的傳播





要在介質中製造擾動，波源必須作功，
擾動傳到遠方後在當地可以作功，
因此波動的現象，基本上是能量在空間中的傳播。





介質的擾動，以波型來代表，在空間中傳播。

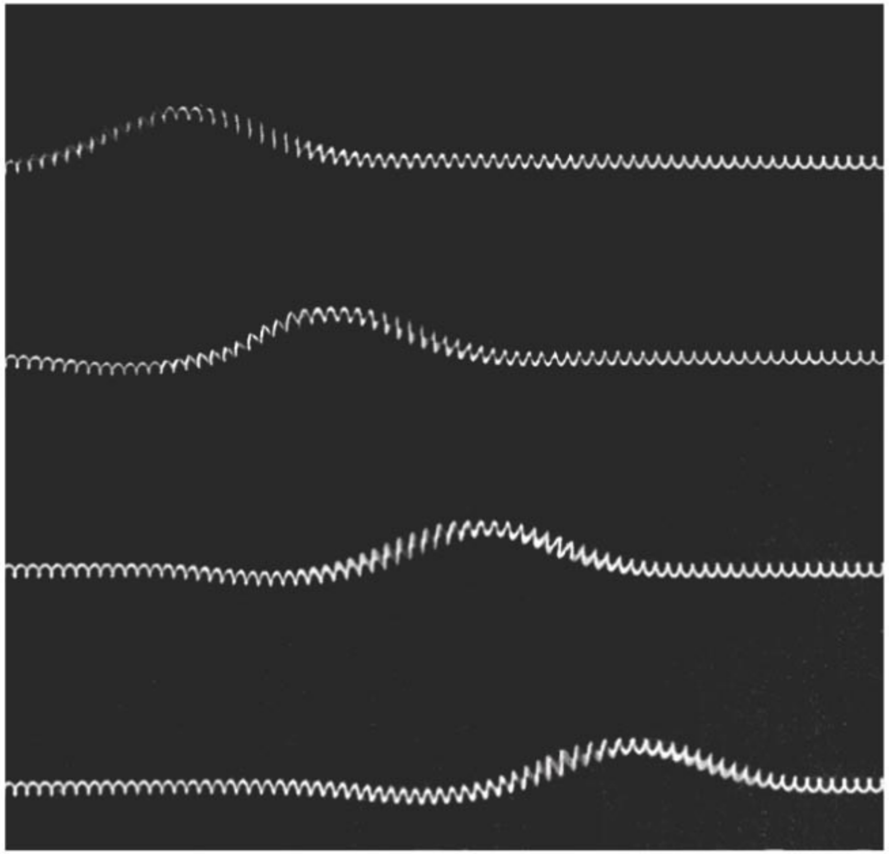
但介質只在原地振盪，並不隨波型傳播。

波有兩個特徵方向：　波傳播的方向　介質擾動的方向

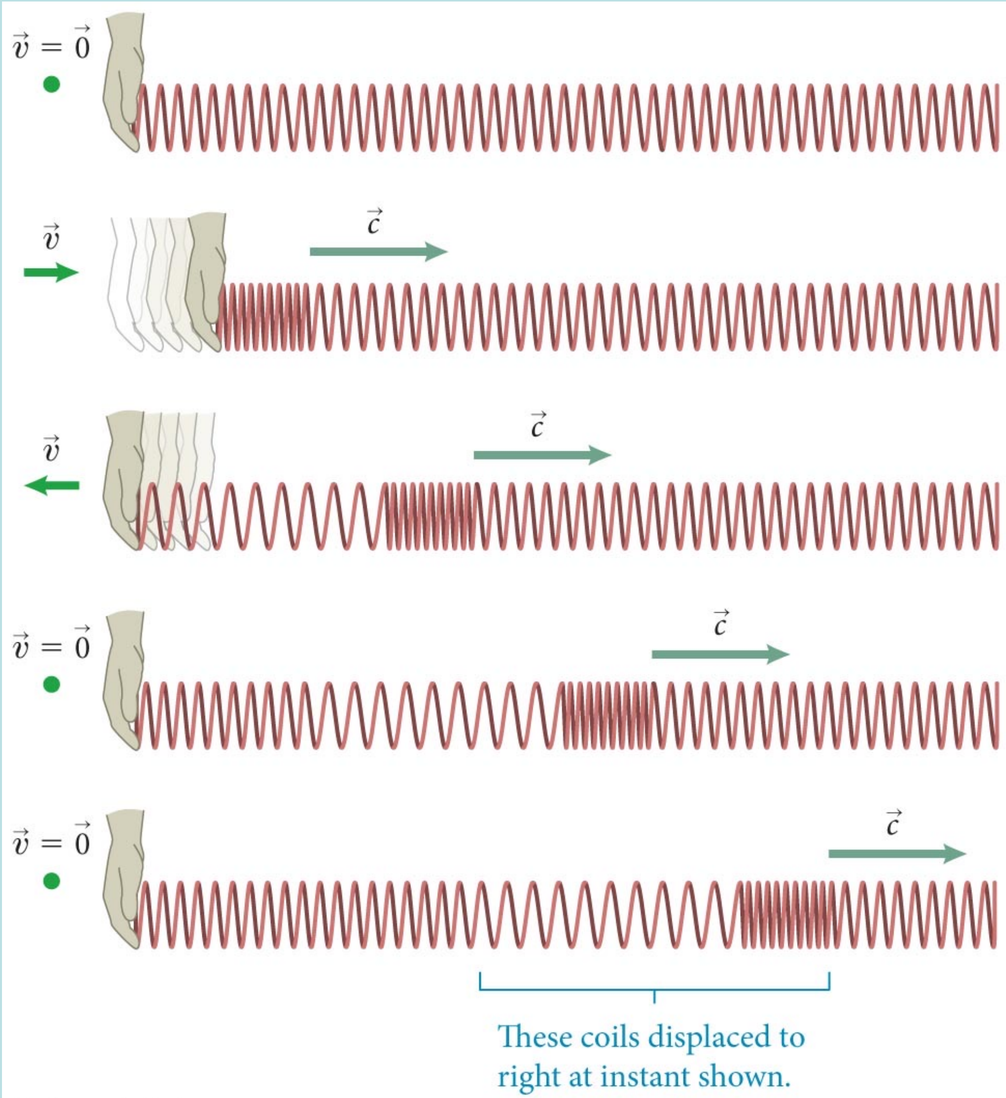
兩者垂直為橫波　　兩者平行為縱波

有彈性的固體介質同時有縱波與橫波：

彈簧可以產生橫波



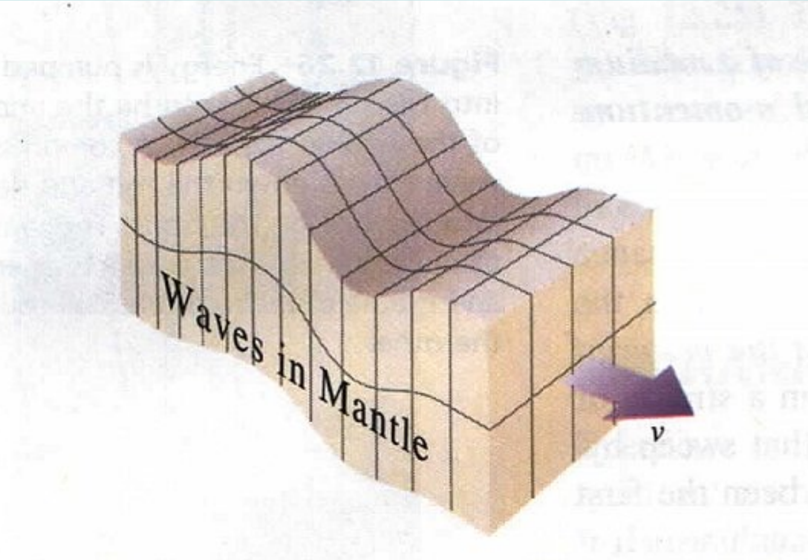
彈簧也可以產生縱波

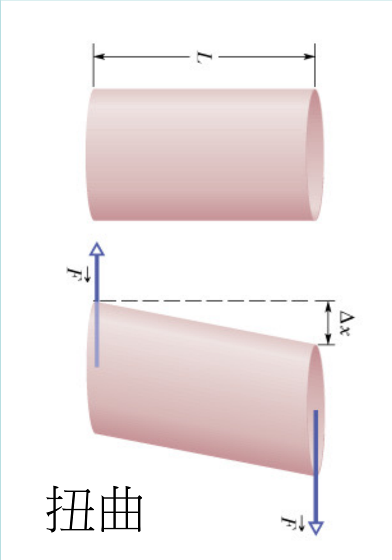


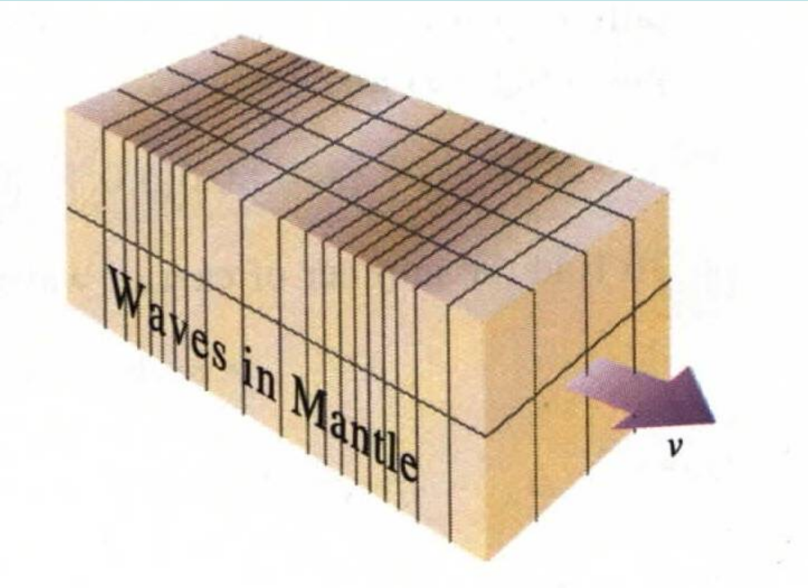
$\vec{v} = \vec{0}$
$\vec{v}$
$\vec{c}$
$\vec{v}$
$\vec{c}$
$\vec{v} = \vec{0}$
$\vec{c}$
$\vec{v} = \vec{0}$
$\vec{c}$
These coils displaced to right at instant shown.

固體在扭曲及壓縮拉長時都會有回復原狀的的彈性，因此同時會有橫波及縱波。

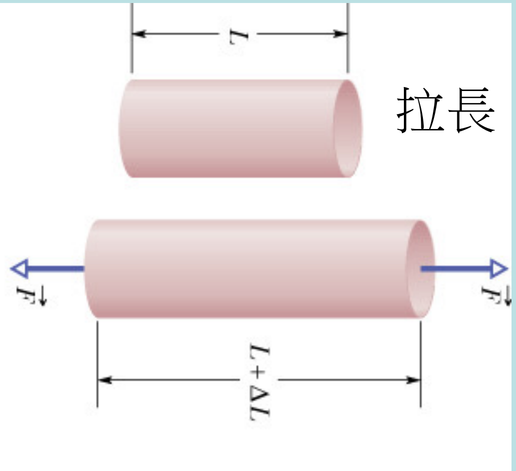
液體則沒有橫波。

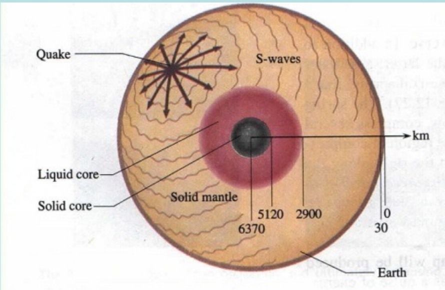




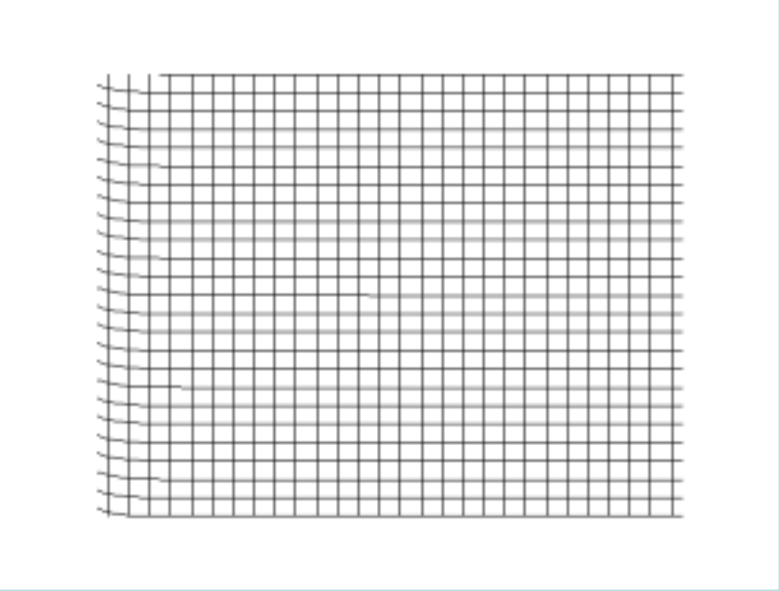


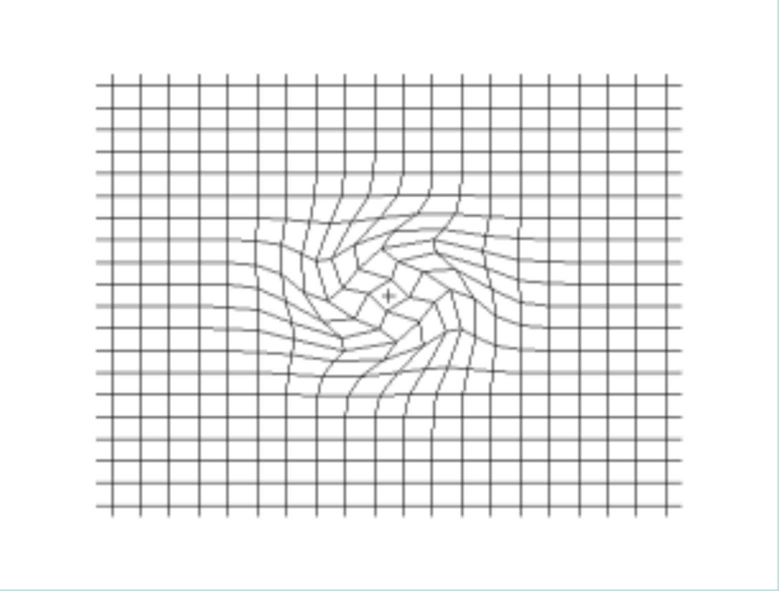
地球的震波同時有縱波與橫波。



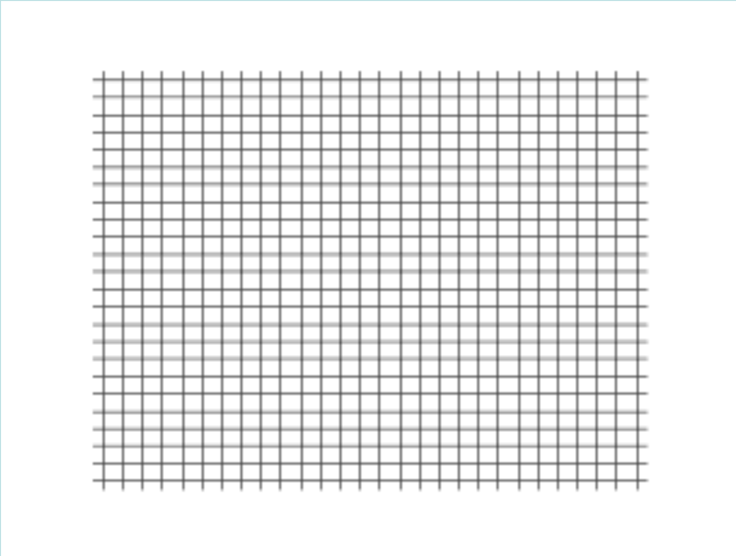


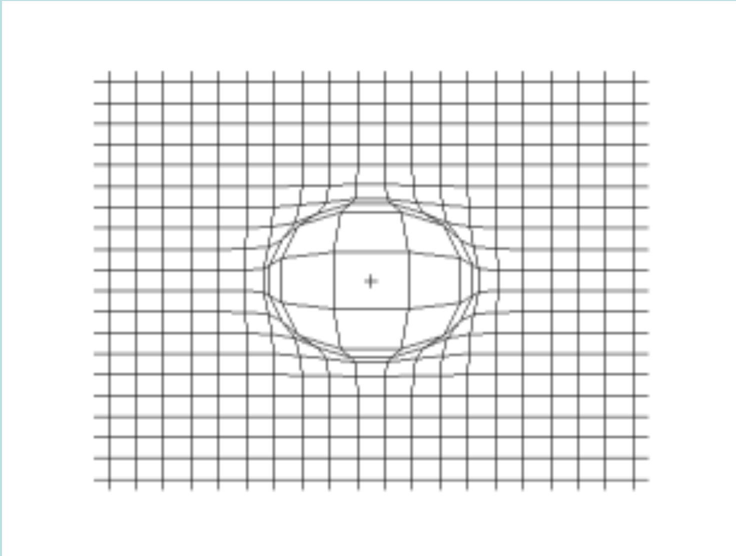
S wave 横波



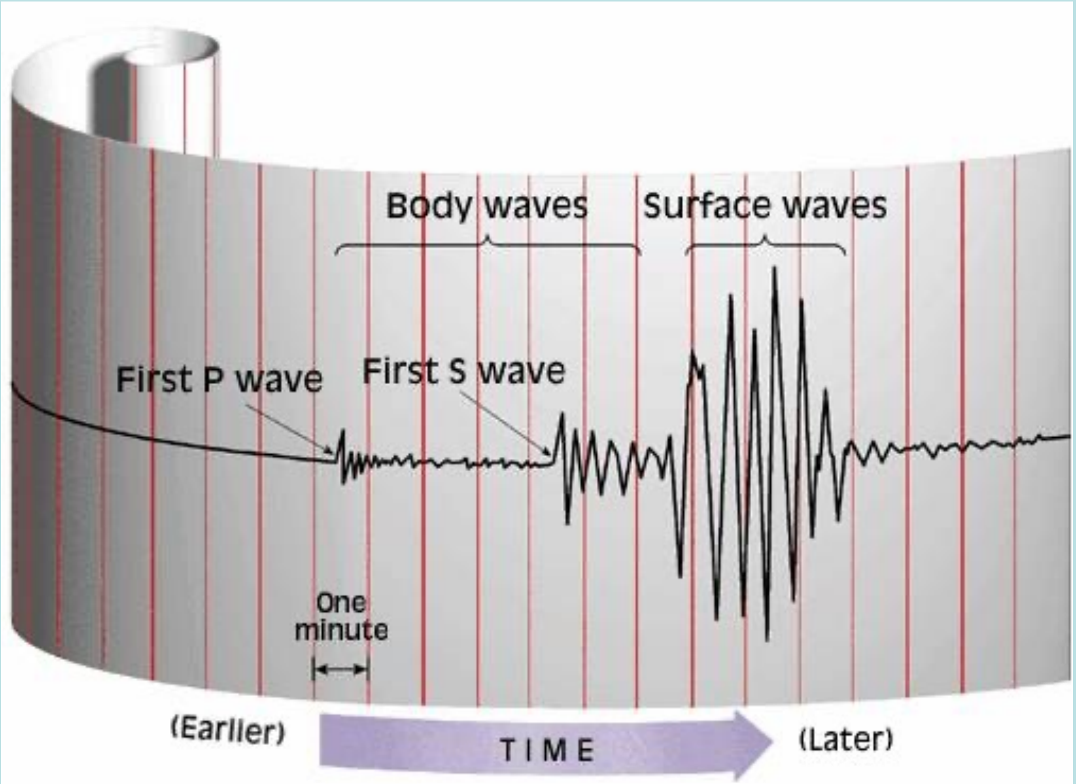


P wave 縱波



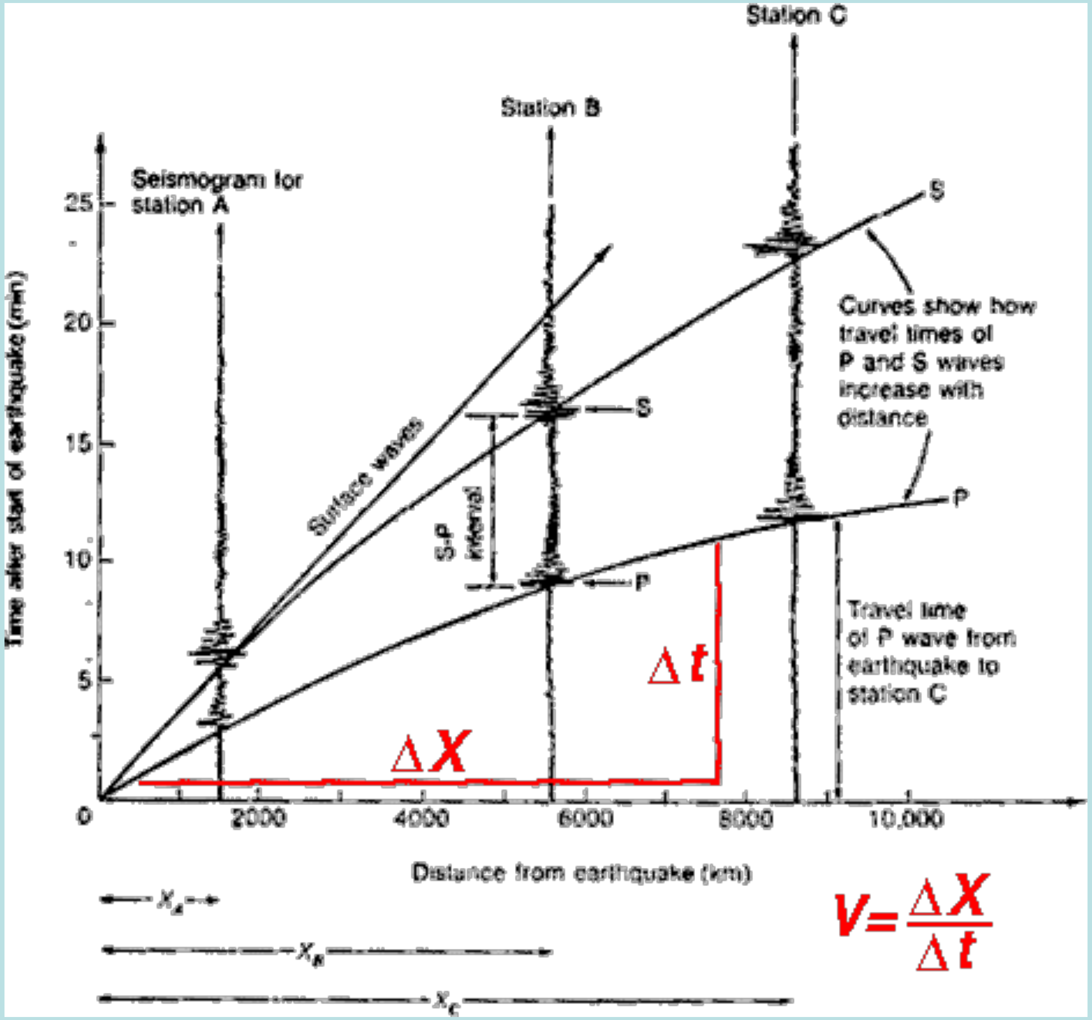


P 波波速約1.5-8 km/s S波波速約是其 60%-70%



由時間差即可計算出震源的距離：

$$\frac{s}{v_S} - \frac{s}{v_P} = \Delta t$$


Station C
Station B
Seismogram for station A
Surface waves
S
P
S-P interval
Curves show how travel times of P and S waves increase with distance
Travel time of P wave from earthquake to station C
Time after start of earthquake (min)
Distance from earthquake (km)
0
2000
4000
6000
8000
10,000
5
10
15
20
25
X_A
X_B
X_C
ΔX
Δt
$V = \frac{\Delta X}{\Delta t}$

我們將以弦波為例來討論：

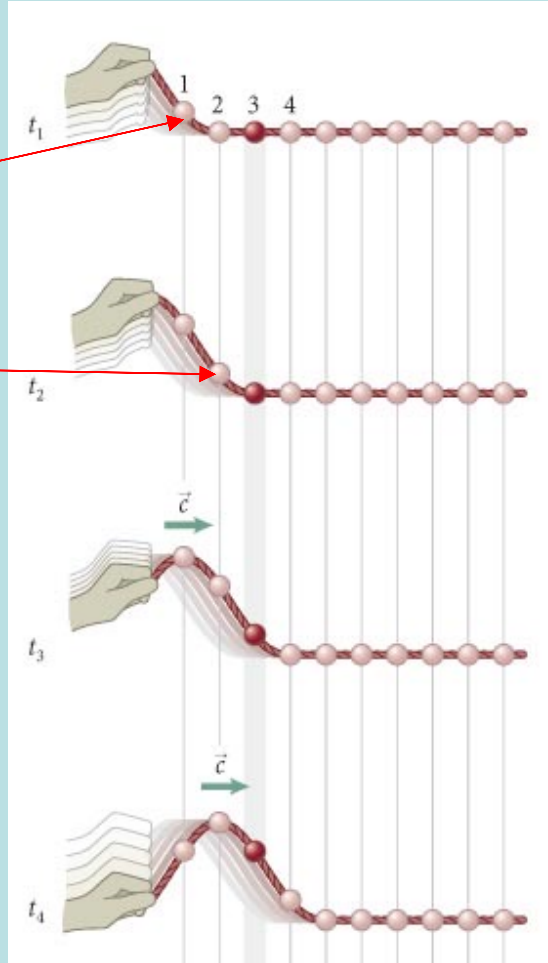
弦就是一系列弦段的組合，可看成一系列的粒子！

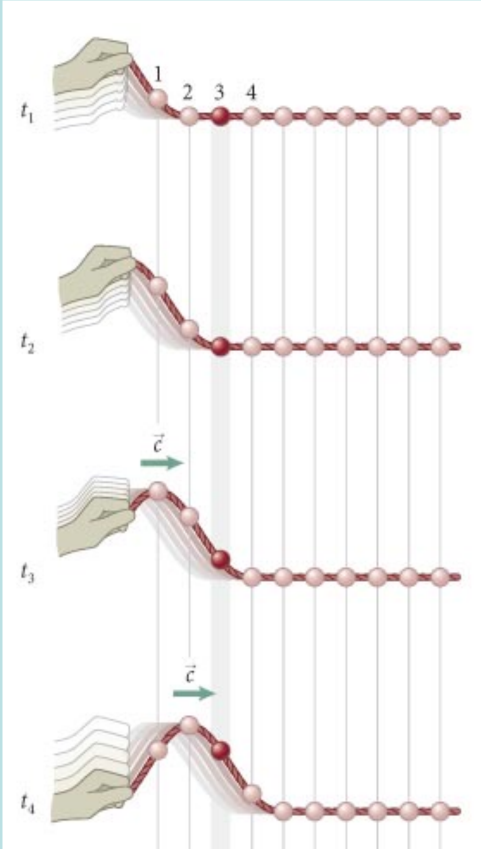
若施力使其中一弦段離開平衡位置，

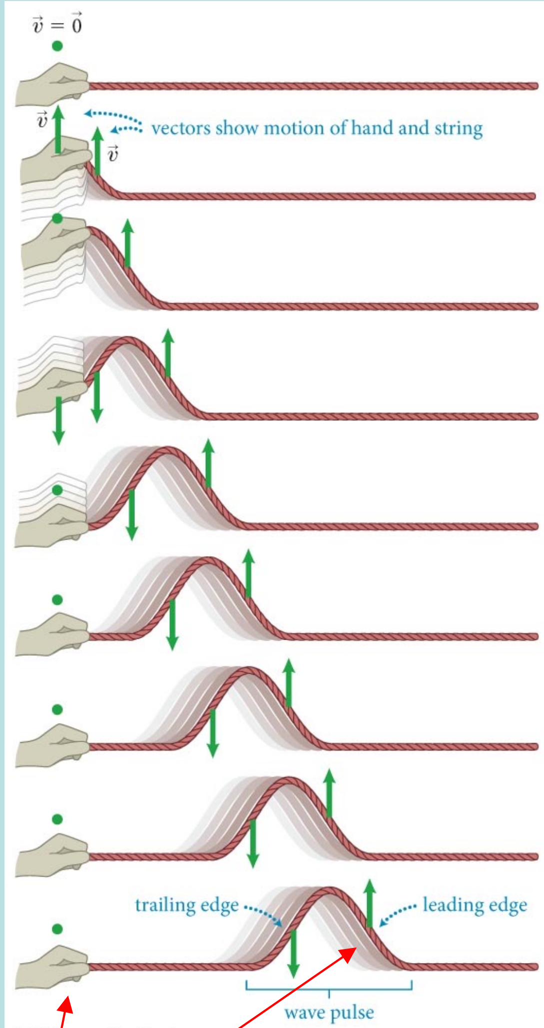
弦的彈力會帶動它的旁邊的弦段也自平衡向上移動，

此弦段移動又會帶動它的旁邊的弦段離開平衡位置，

離開平衡位置的擾動便會因弦的彈力在軸上傳播。







妙的是：即使最初的擾動已經回到平衡位置，

已經傳播了的擾動，會繼續自動的傳播！

氣體柱中的聲波也是如此！氣體原來處於平衡狀態。

若右移活塞加壓力使靠近活塞的氣體密度增加，

該小段氣體壓力會超過平衡的壓力，

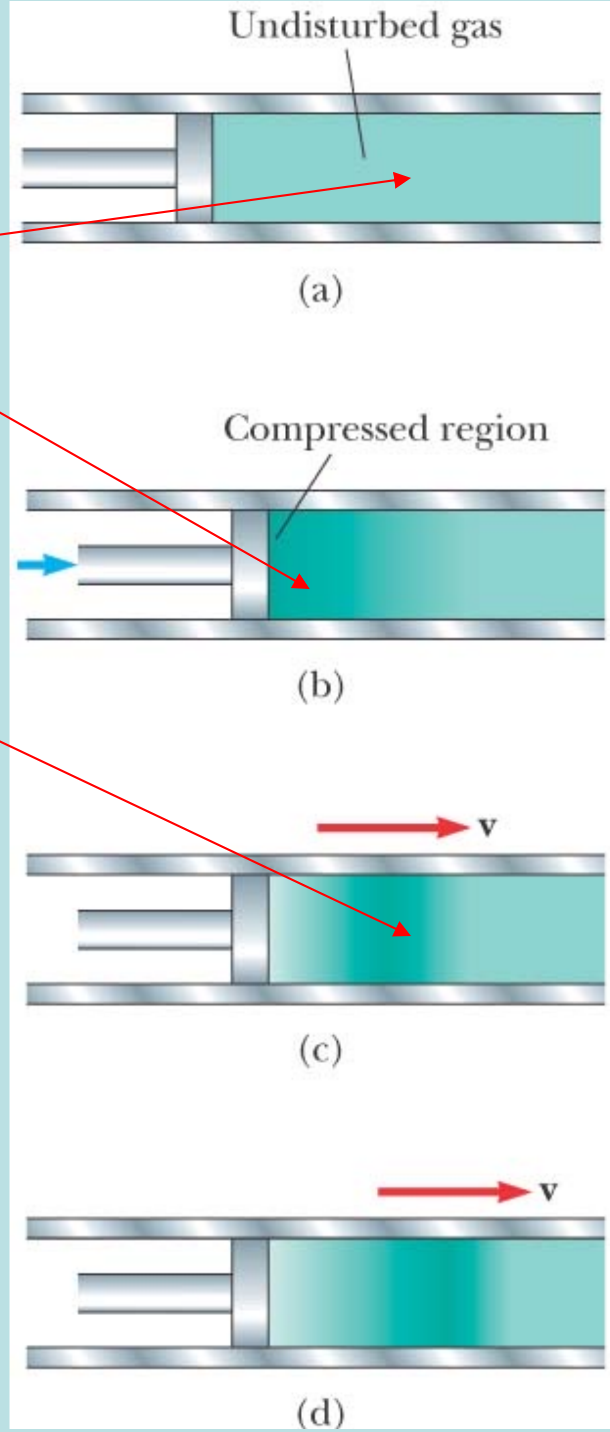
此額外壓力又會推動氣體向右移動，

使靠近的氣體密度隨之增加，再繼續推動氣體向右。

超越平衡壓力的擾動便會在氣體柱中傳播。

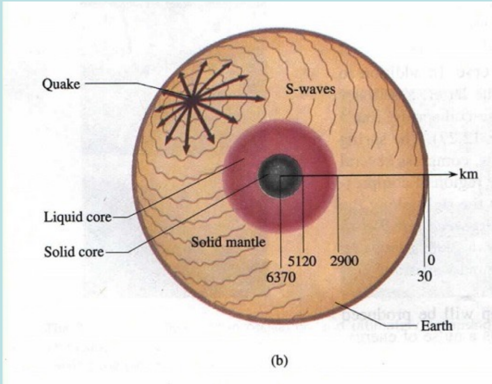
即使最初的擾動停止，

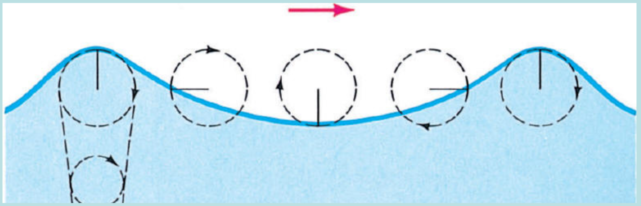
已經傳播了的擾動，會繼續自動的傳播！

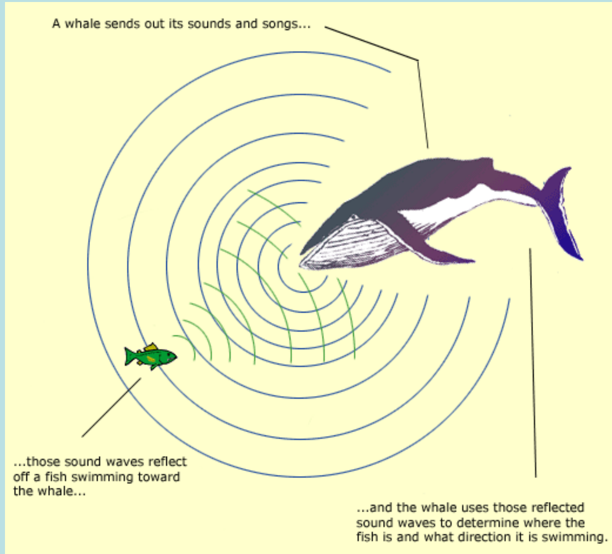


這樣的機制，無論細節，都滿足一樣的波動方程式：

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$





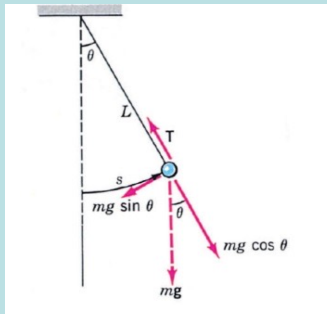


因此在數學上，解是一樣的！

這與簡諧運動類似！

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$$x = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

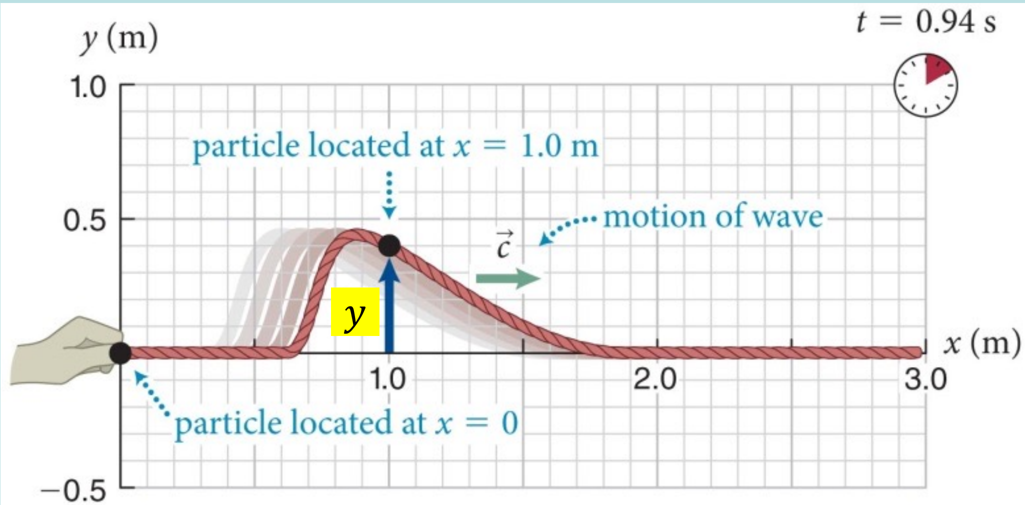


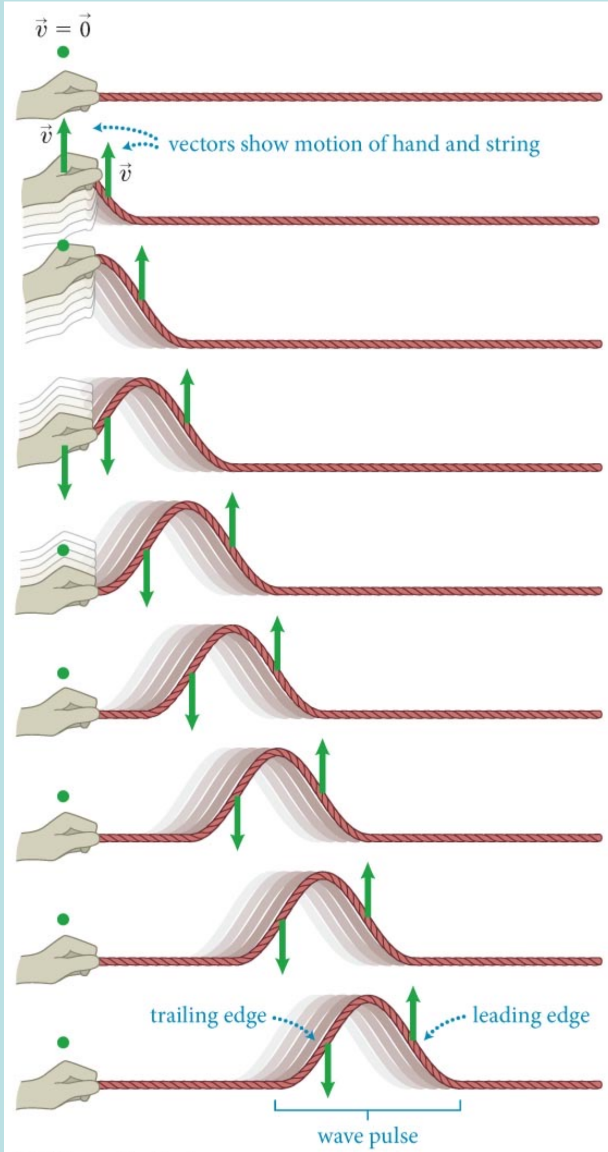
要寫出波滿足的方程式，需要一個新的物理量：

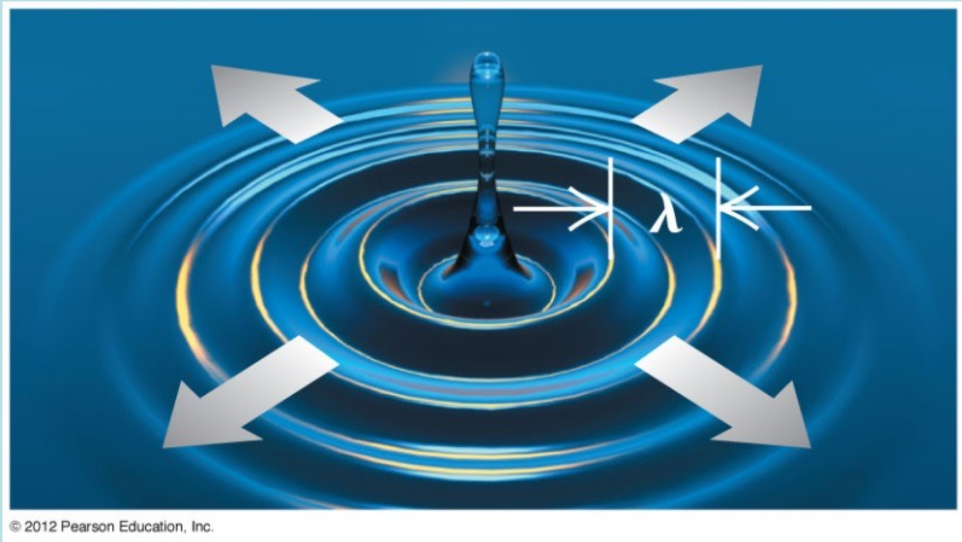
波函數 Wave function：描述介質的擾動的物理量

$y(x,t)$

這是平衡位置為x的弦段在時間為t時的垂直位移。

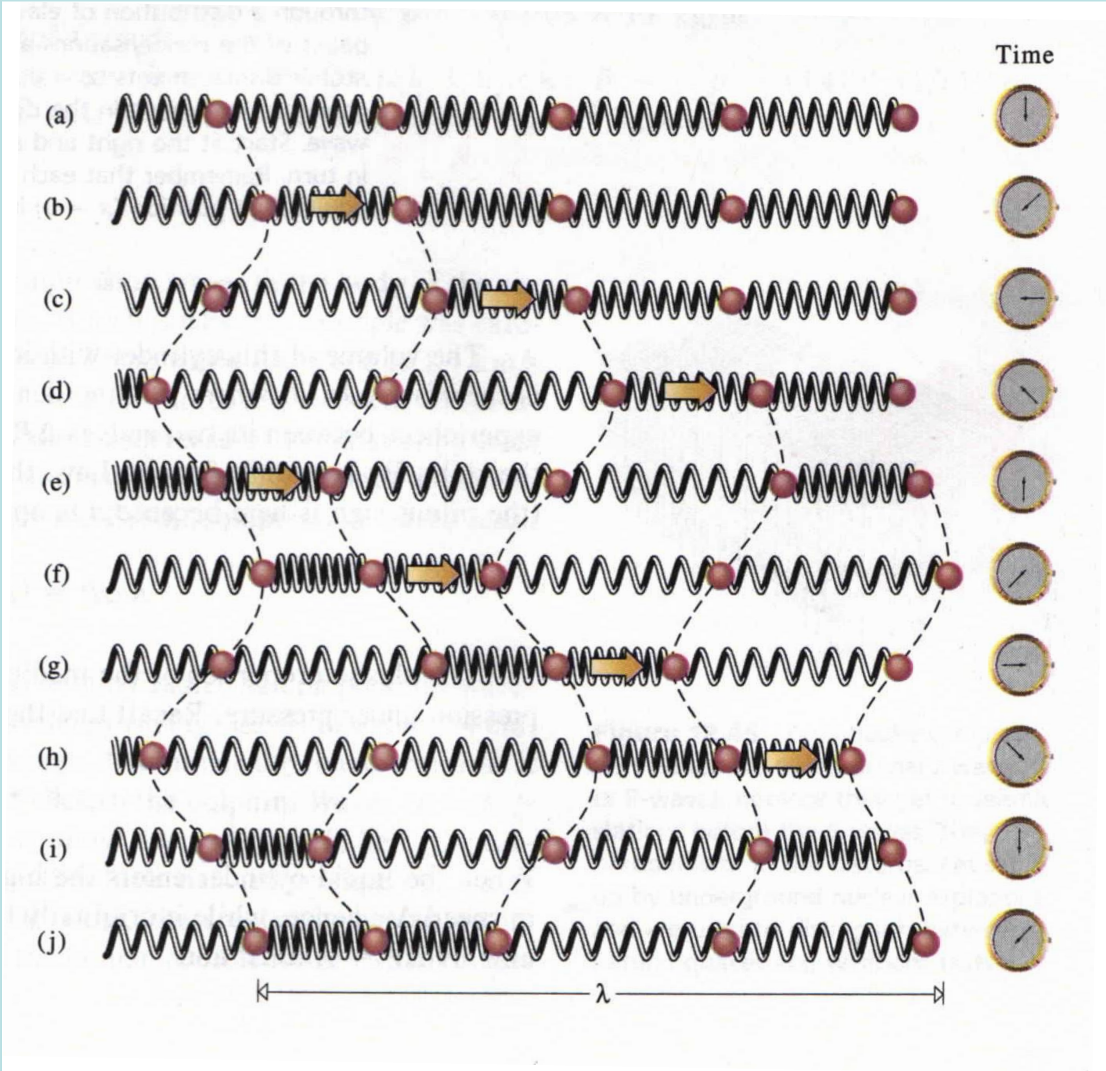






水波的波函數： $z(x, y, t)$

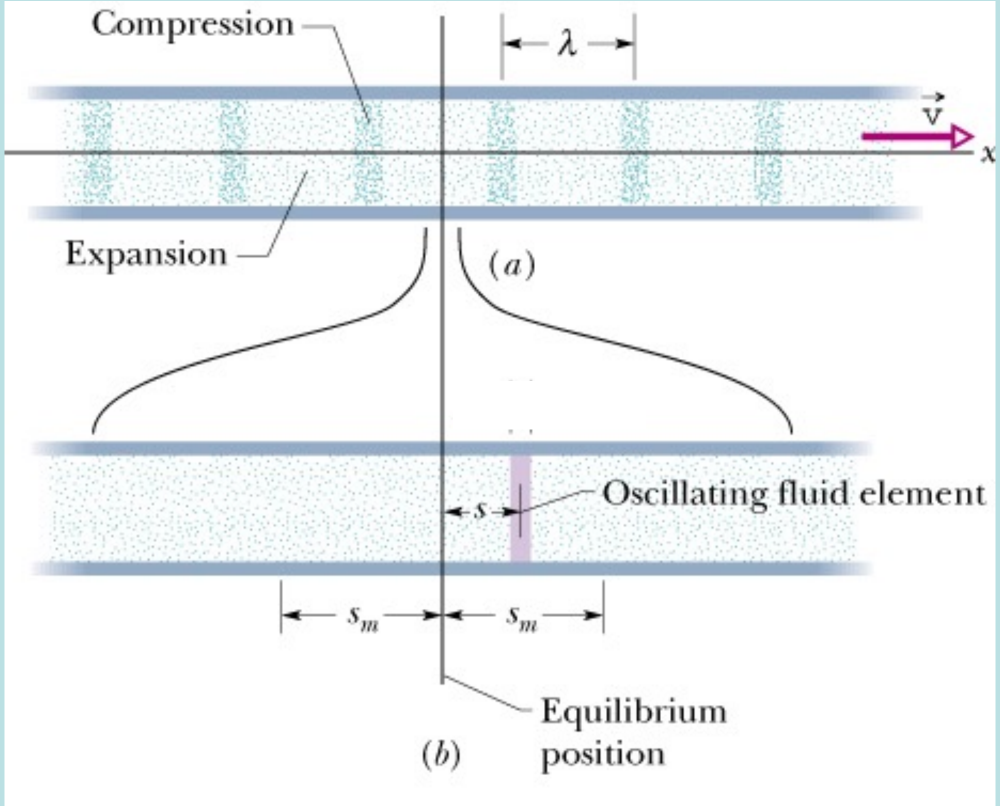
平衡位置為 x, y 的水面，在時間為 t 時的垂直位移或高度差z。



彈簧縱波的波函數： $\Delta x(x,t)$

平衡位置為x處的彈簧，在時間為t時沿x方向的位移Δx 。

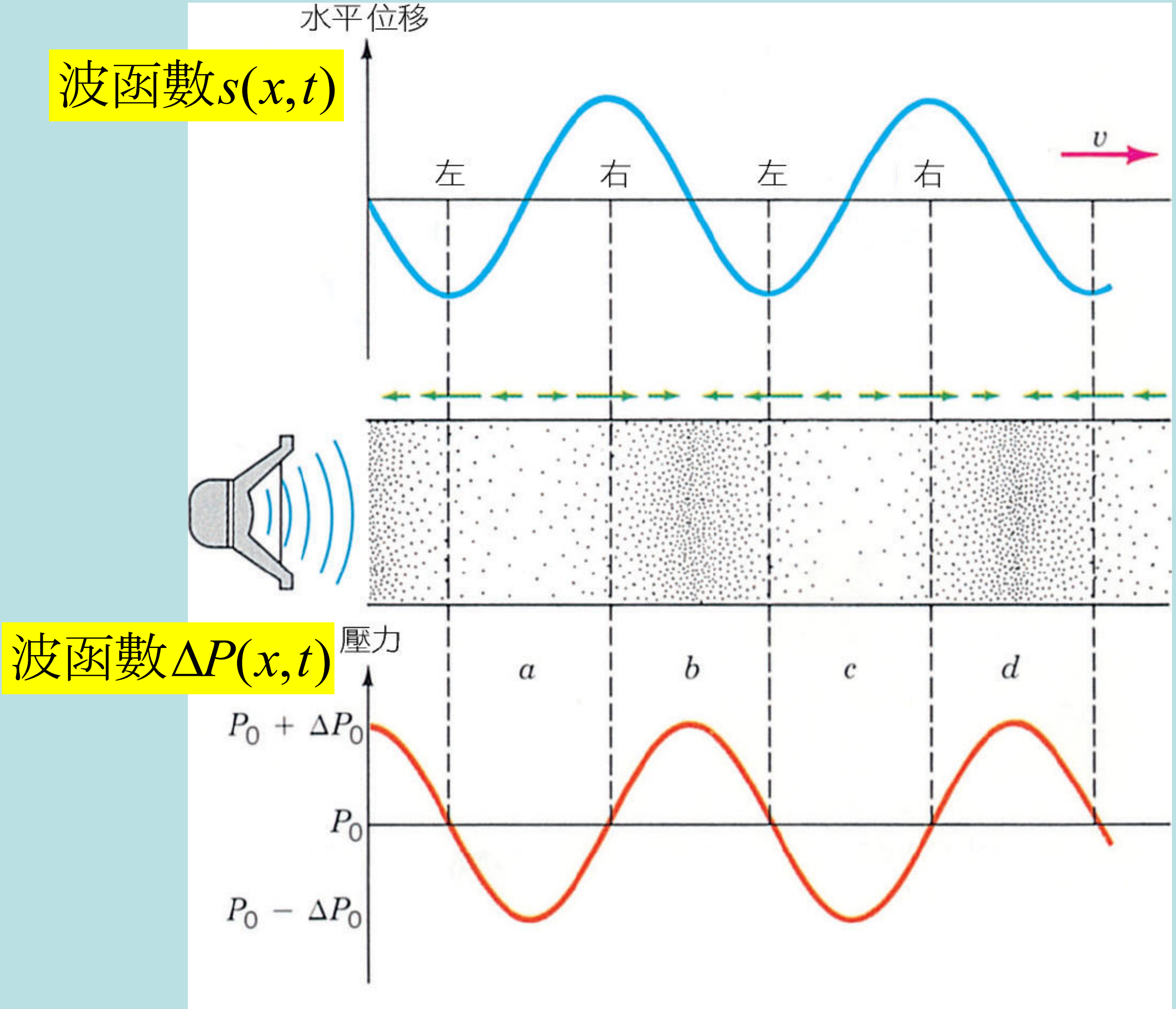
聲波的波函數



以x為平衡點的氣體分子，在時間t時的沿x軸的位移：$\Delta x(x,t)$或$s(x,t)$。

以x為平衡點的氣體分子，在時間t時的位置：$x+s(x,t)$。

波函數可以是水平位移，直接但難測，以壓力表示時測量較為容易！



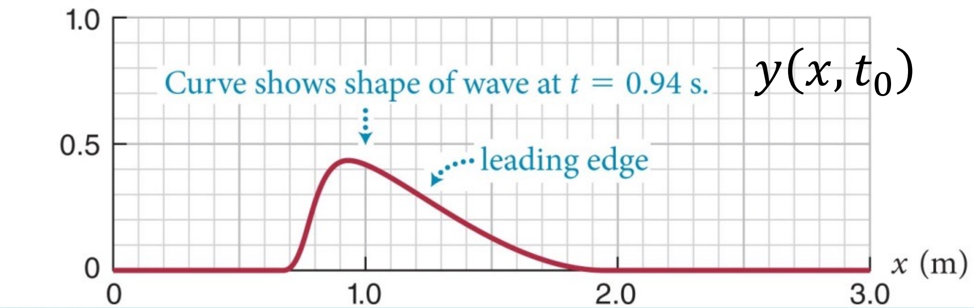
波函數：描述介質的擾動的物理量 $y(x,t)$

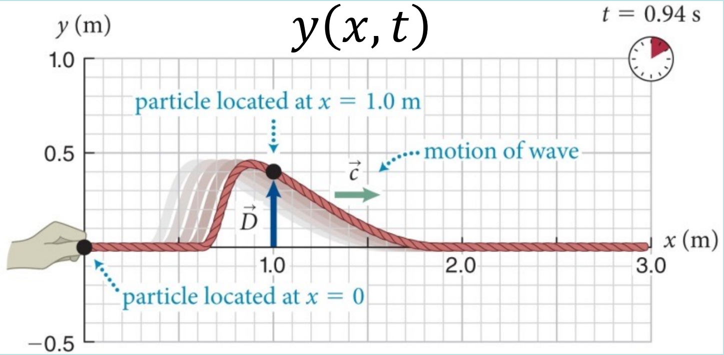
平衡位置為x的粒子在時間為t時的垂直位移。

但它是一個多變數函數，與粒子的單變數函數位置$x(t)$在數學上不同！

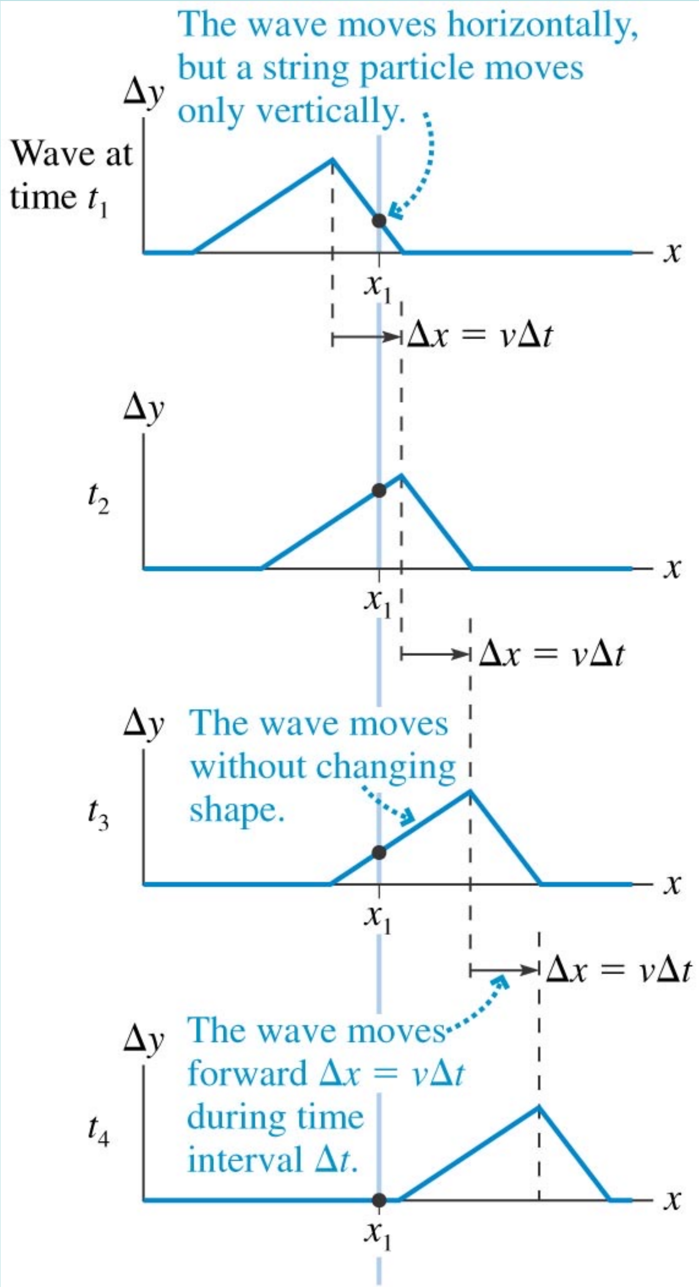
最方便的討論方式就是先固定一個變數，討論函數對另一變數的變化：

固定$t = t_0$，$y(x,t) \rightarrow y(x,t_0)$，波函數成為一個$x$的單變數函數。





$y(x,t_0)$就是$t = t_0$時的波形。

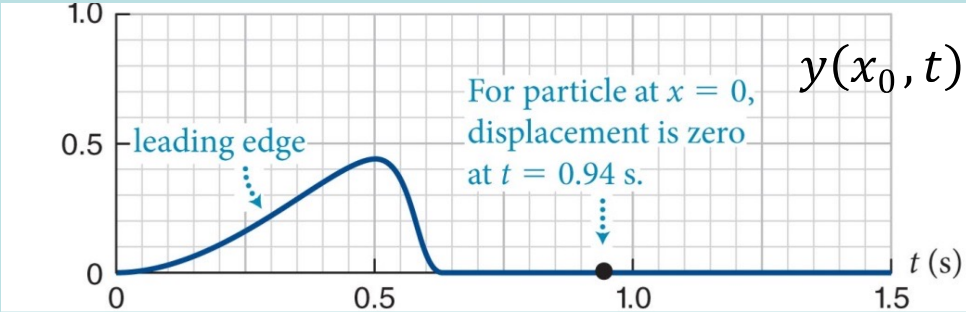


$y(x,t) \rightarrow y(x,t_0)$

如果t_0取一系列不同的值，

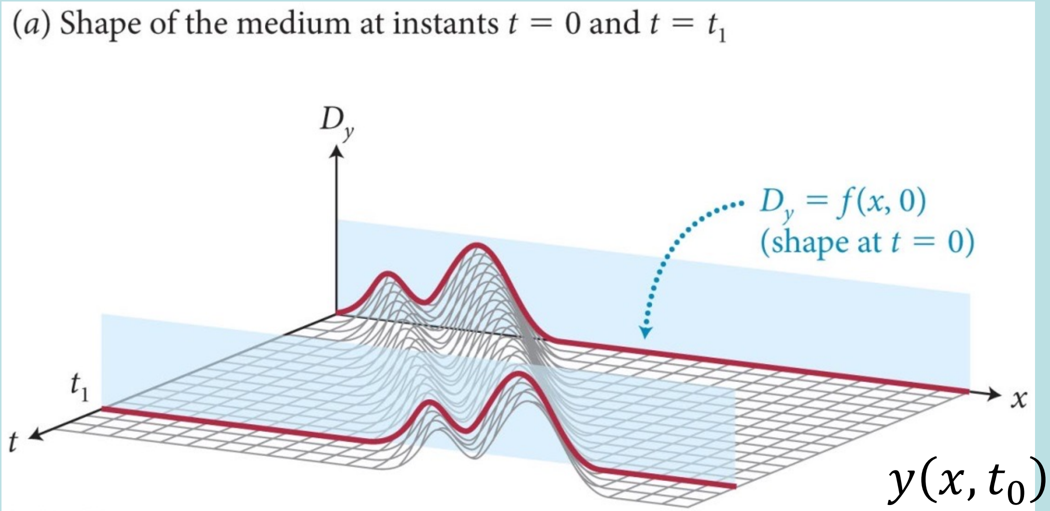
不變的波形，以定速在空間中移動。

固定$x = x_0$，$y(x,t) \rightarrow y(x_0,t)$，波函數成為一個$t$的單變數函數。

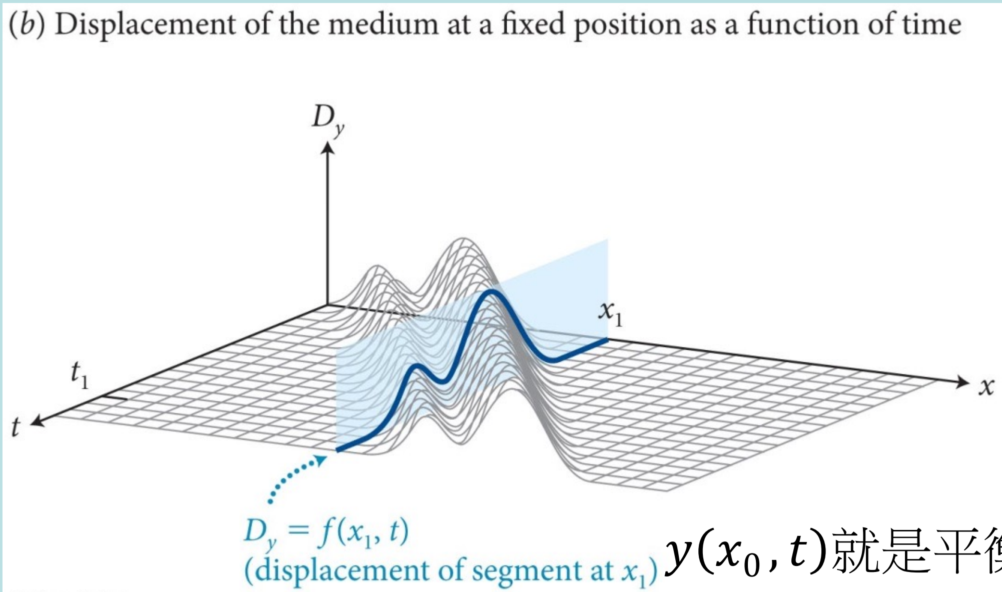


$y(x_0,t)$就是平衡位置$x = x_0$處粒子的運動。

將$y(x,t)$同時對兩個變數作圖：



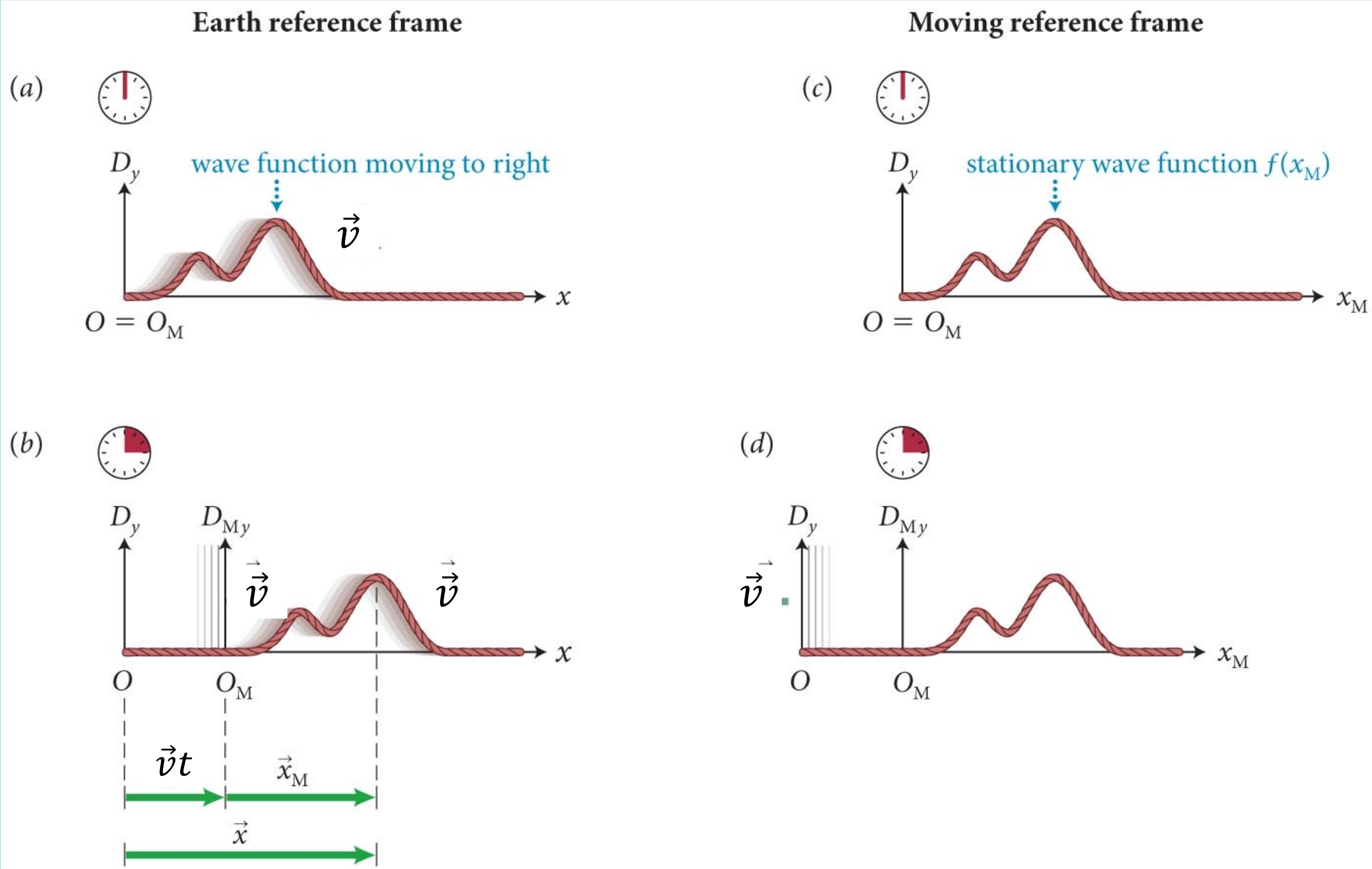
$y(x,t_0)$ 就是 $t = t_0$ 時的波形。



$y(x_0,t)$就是平衡位置$x = x_0$處粒子的運動。

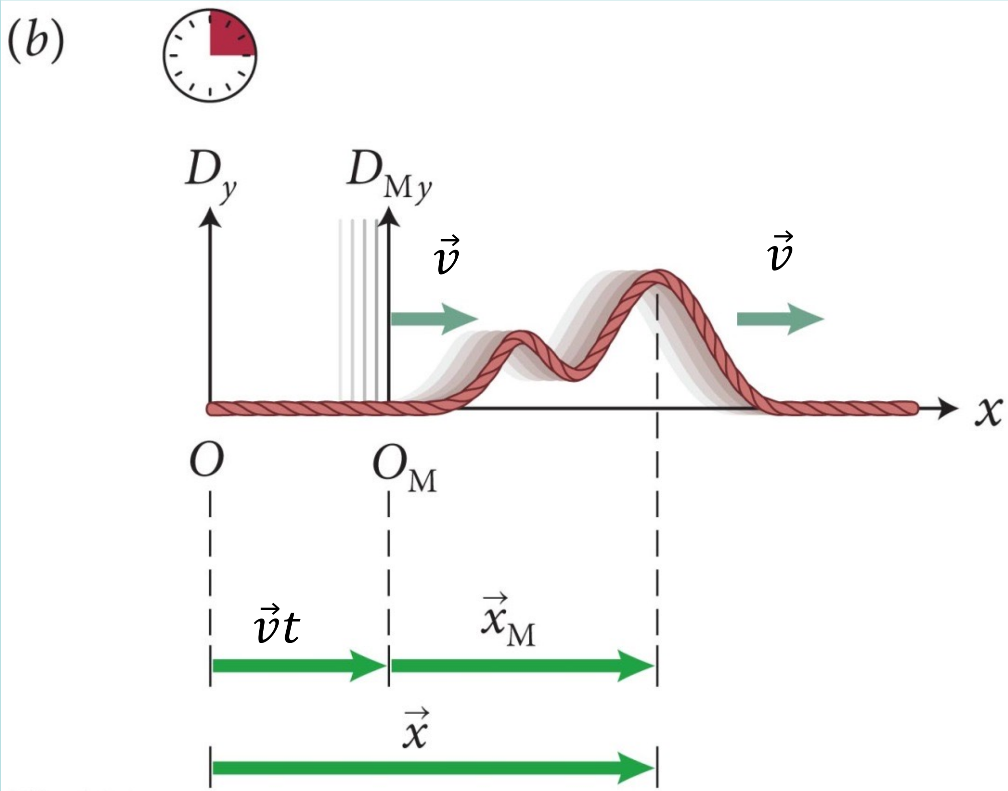
注意：$y(x,t_0)$與$y(x_0,t)$似乎是同一個函數！

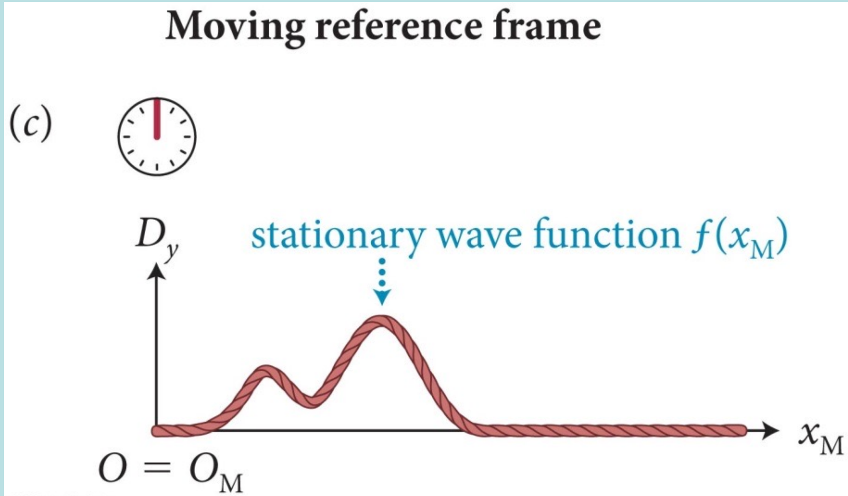
找一個觀察者，隨著波一起移動：



在右圖這個移動的觀察者看來，波型是靜止的，因此波函數與時間無關：假設這個移動的觀察者所量到的位置為x_M。

$y(x_M, t) = f(x_M)$ 這個函數 f 就是靜止時的波型函數！





在移動的O_M 看，波型靜止，波函數與時間無關 $y = f(x_M)$ 函數 f ：靜止的波形

而移動的觀察者所量到的位置x_M與靜止的觀察者所量到的位置x有簡單的關係：

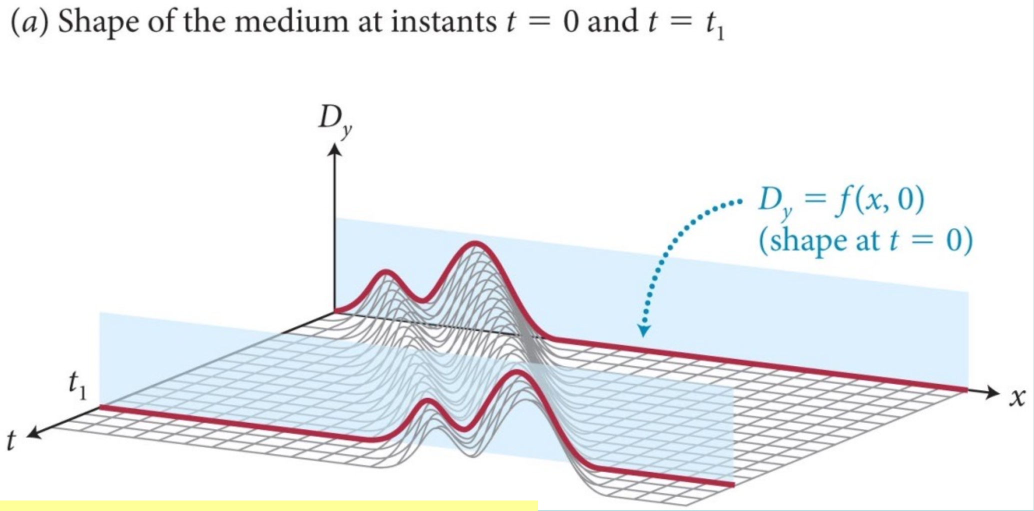
$$x_M = x - vt$$

因此，由靜止的觀察者 O 看 $y(x,t) = f(x - vt)$

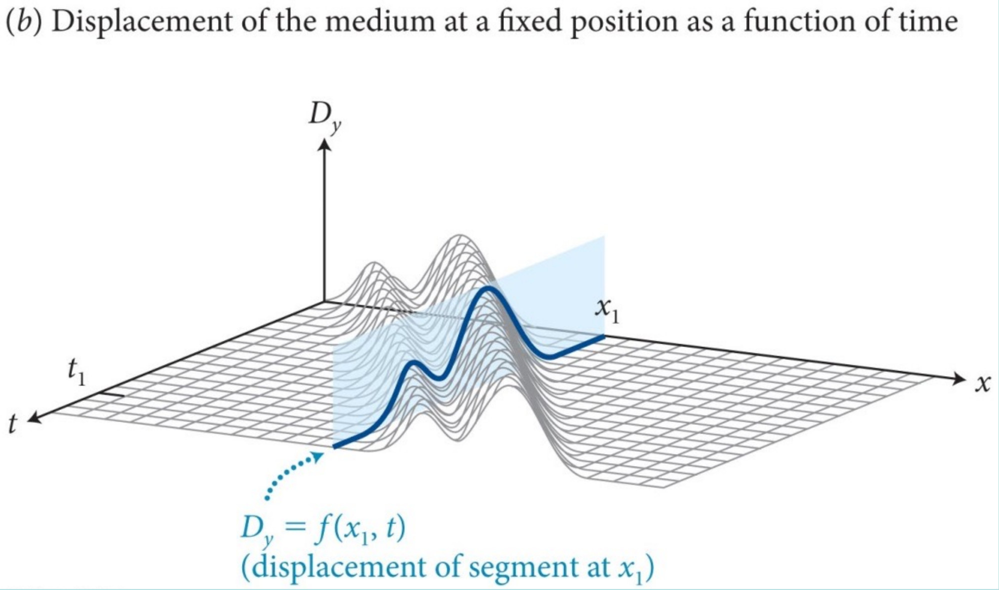
這就是波函數$y(x,t)$的解。

所以$y(x,t_0)$與$y(x_0,t)$的確是同一個函數！

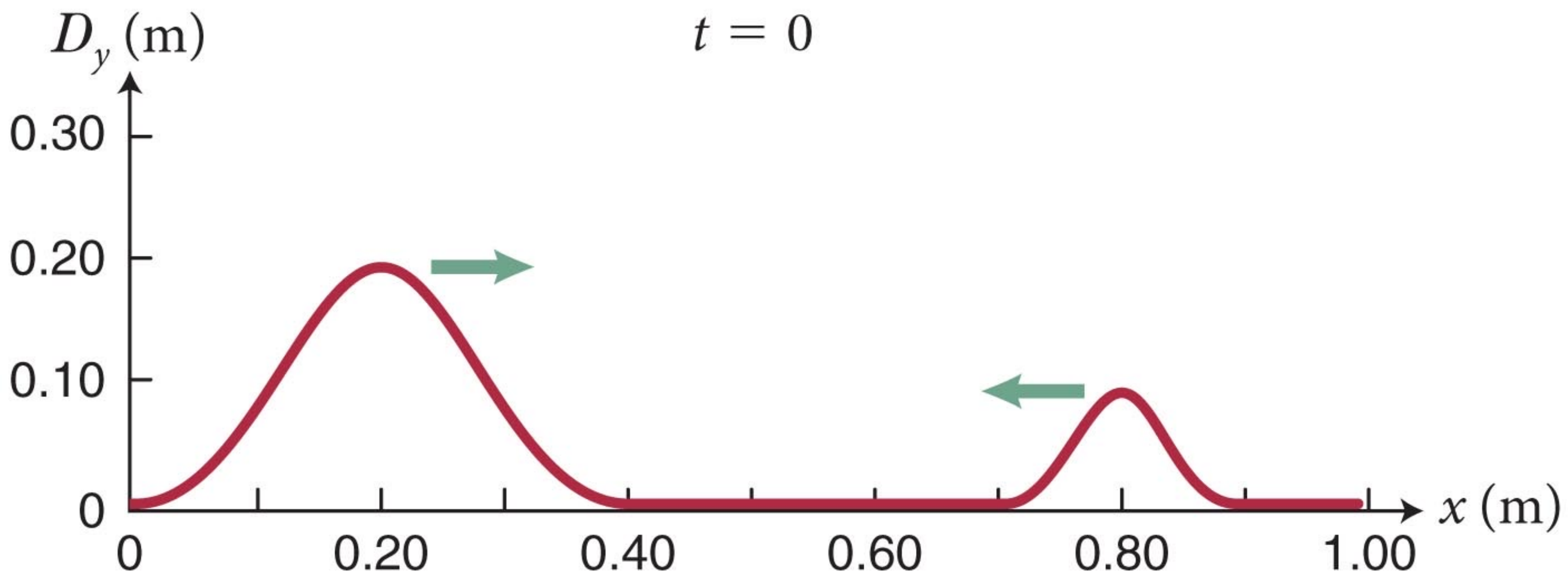
$$y(x,t_0) = f(x - vt_0)$$



$$y(x_0,t) = f(x_0 - vt)$$



向 $-x$ 移動的波，將 v 以 $-v$ 取代即可

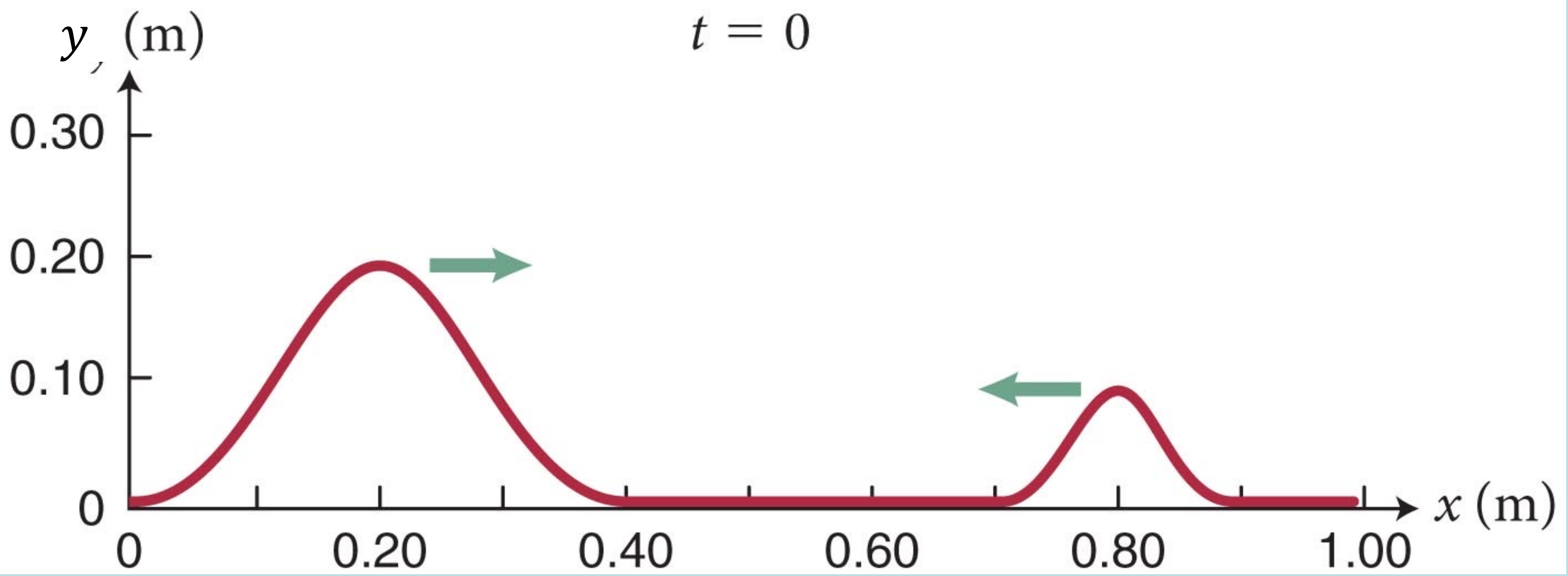


$$y(x,t) = g(x + vt)$$

波動過程中，瞬間波形不變，波型位置以定速在空間中移動

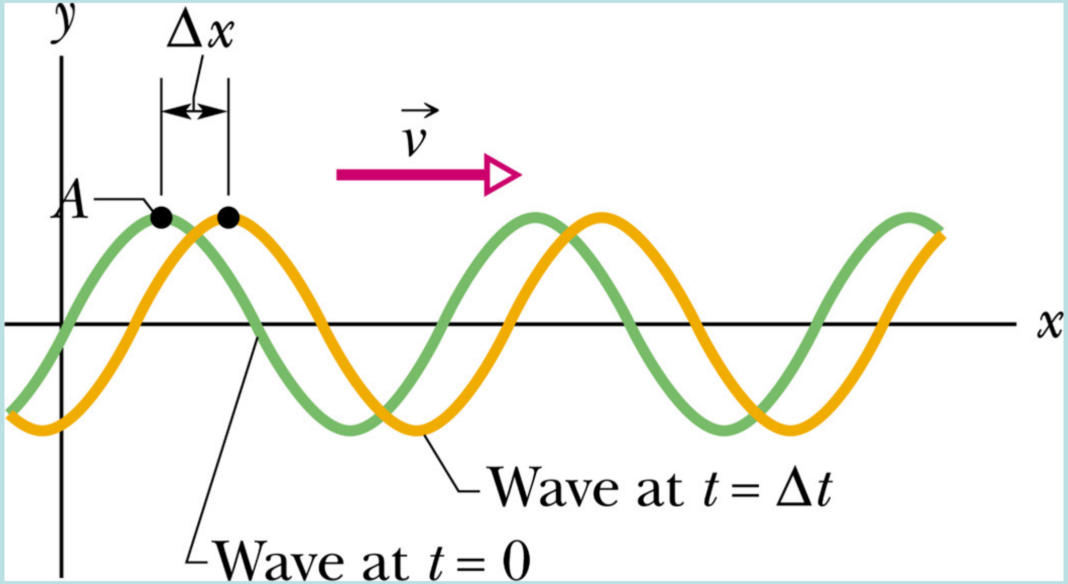
利用這個觀察，我們解出了波函數$y(x,t)$：

$$y(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$



我們如何確定我們的觀察是正確的？

正弦波



瞬間波型是正弦函數，此波型有一個波長λ，波型在位置增加波長λ後會重覆！

$$f(x') = y_m \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x'\right)$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x'\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x' + \frac{2\pi}{\lambda}\lambda\right)$$

定義角波數k

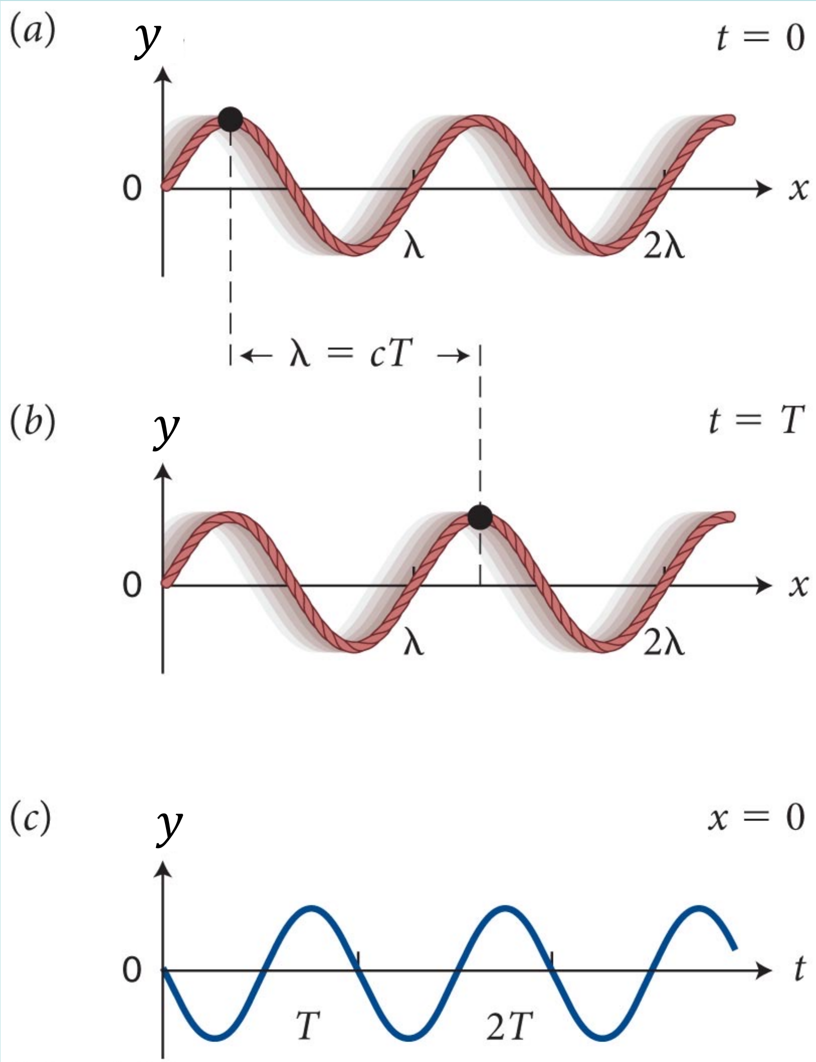
$$k \equiv \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$y(x,t) = f(x') = y_m \sin(kx')$$

$$x' = x - vt$$

$$y(x,t) = y_m \sin(kx - kvt) = y_m \sin(kx - \omega t)$$

$$\omega = kv$$



正弦波的波函數

$$y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$ 角波數k與波長λ

單點運動則如簡諧運動：

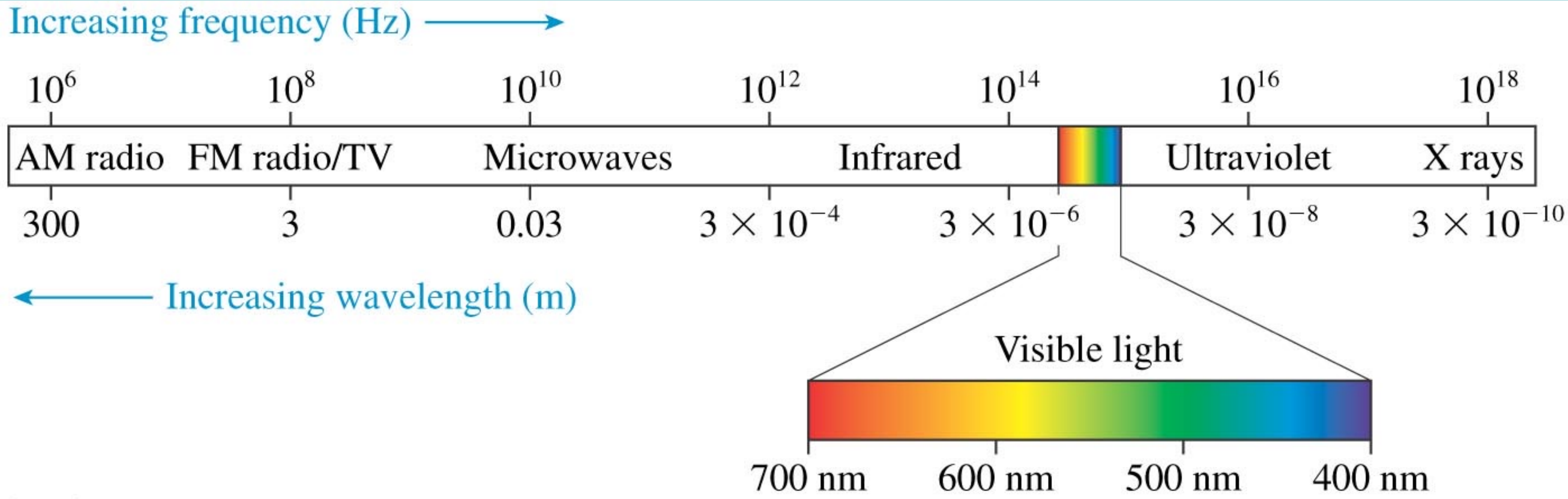
$$y(x=0,t) = -y_m \sin(\omega t)$$

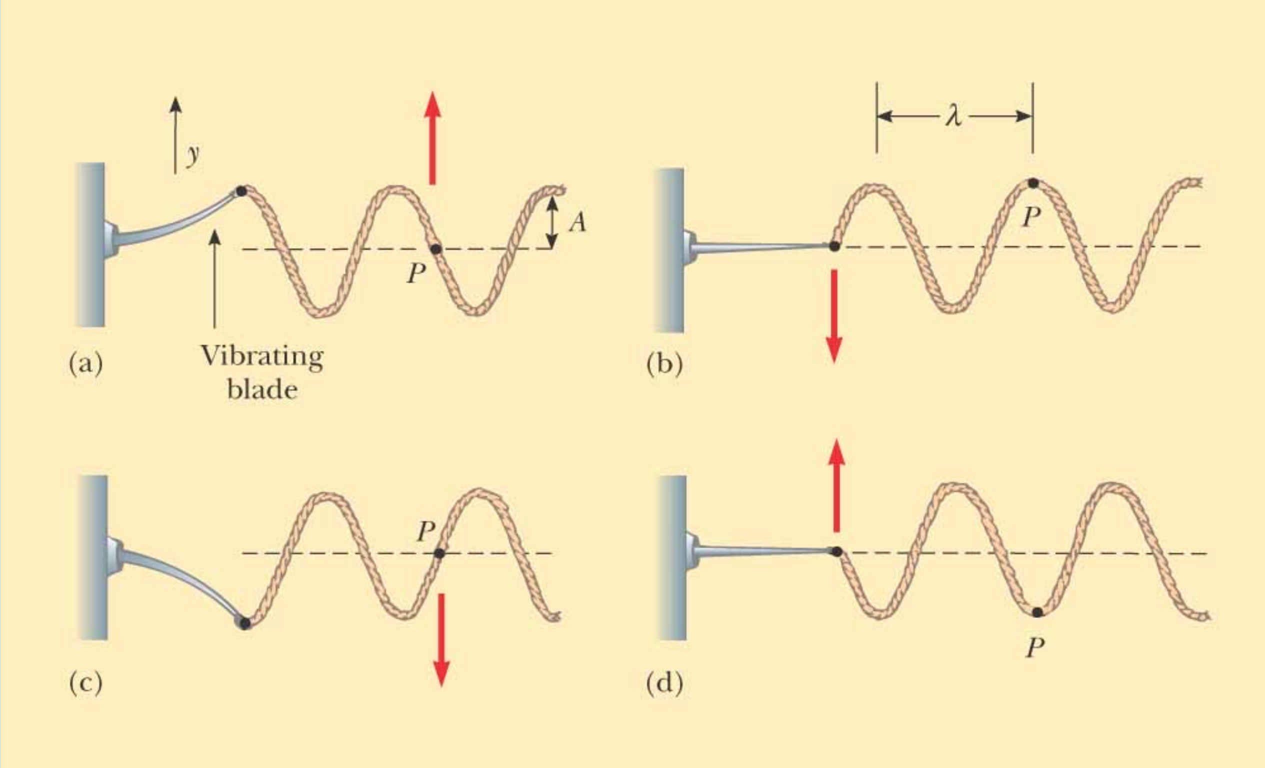
$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$ 角頻率ω與頻率f

$$\omega = kv$$

$$\frac{\omega}{k} = f\lambda = v$$ 色散關係

頻率與波長不是獨立的


Increasing frequency (Hz)
10^6
10^8
10^{10}
10^{12}
10^{14}
10^{16}
10^{18}
AM radio
FM radio/TV
Microwaves
Infrared
Ultraviolet
X rays
300
3
0.03
3×10^{-4}
3×10^{-6}
3×10^{-8}
3×10^{-10}
Increasing wavelength (m)
Visible light
700 nm
600 nm
500 nm
400 nm



觀察在任意 $x = x_0$ 處的弦段的運動：

$$y(x_0, t) = -y_m \sin(\omega t - kx_0)$$

每一弦段皆作簡諧運動，ω即是振動的角頻率。

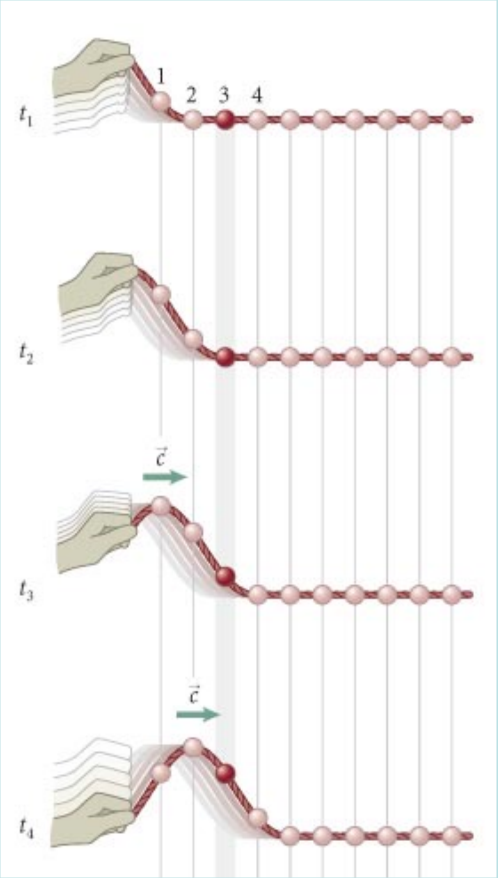
各段的簡諧運動是彼此高度協調的，其相常數必須與位置成正比：$\phi = kx_0$。

正弦波可以由一簡諧震盪器連在介質上產生

畢竟弦只是一個粒子系統的連續極限！

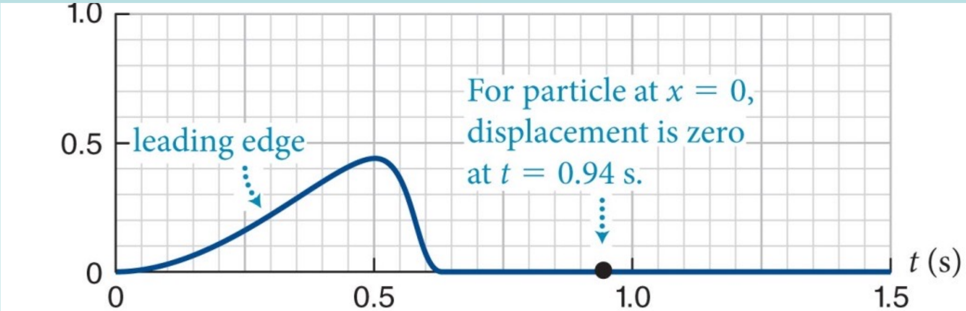
每一個粒子都滿足牛頓運動定律！

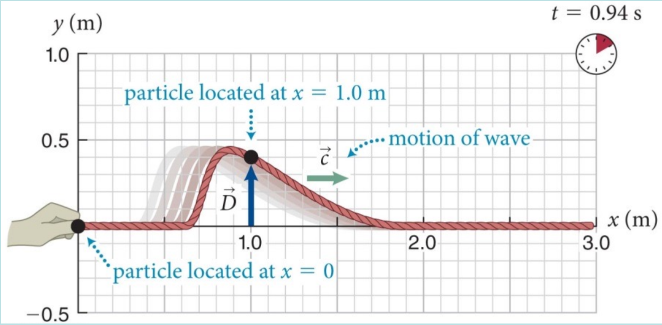
粒子的牛頓運動定律可不可以證實我們的觀察？



我們可以利用波函數來計算弦的運動狀態相關的物理量：

固定 $x = x_0$ $y(x,t) \to y(x_0,t)$ $x = x_0$處粒子的運動





這個單變數函數的微分就是粒子的垂直速度！

$$v(x = x_0) = \frac{d}{dt}[y(x_0,t)]$$

固定一個變數，對另一個變數微分！偏微分 Partial Differentiation

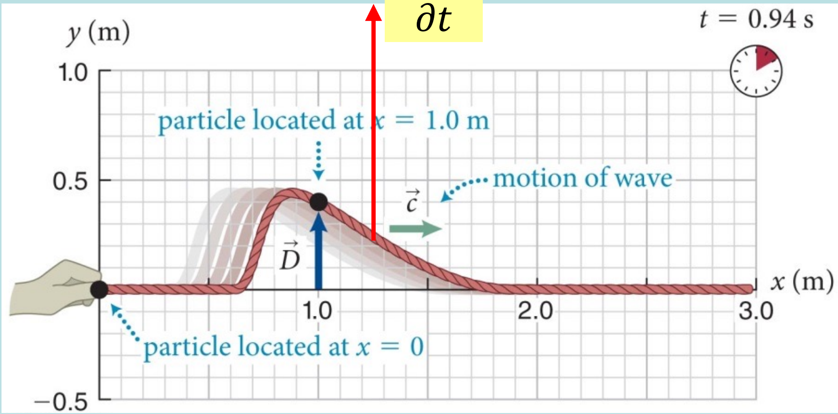
$$\frac{\partial y}{\partial t}(x_0,t) = \frac{d}{dt}[y(x_0,t)]$$

這樣的計算可以在任何一個x_0定義，因此我們可以定義一個偏微分函數

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x_0,t) \to \frac{\partial y}{\partial t}(x,t)$$

偏微分：由一個多變數函數得到另一個多變數函數的運算

固定一個變數 x（視為常數），對另一個變數 t 微分 $\dfrac{\partial y}{\partial t}$



$\dfrac{\partial y}{\partial t}(x,t)$：在 x 處 t 時的垂直速度

$\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t)$：垂直加速度

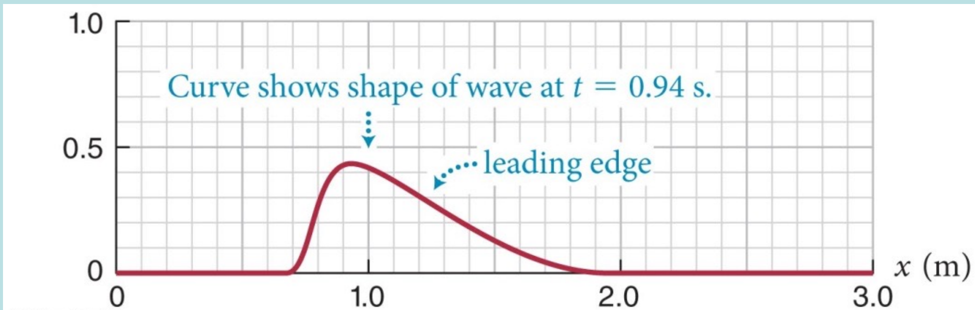
固定一個變數 t（視為常數），對另一個變數 x 微分

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x,t_0) = \frac{d}{dx}\big(y(x,t_0)\big) \rightarrow \frac{\partial y}{\partial x}(x,t)$$

$y(x,t_0)$是瞬間的波型。

$\dfrac{\partial y}{\partial x}(x,t)$：瞬間波型的斜率

$\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t)$：波型斜率隨 x 的變化率



以正弦波為例： $y(x,t) = y_m \sin(kx \pm \omega t)$ 固定一個變數 x（視為常數），對另一個變數 t 微分

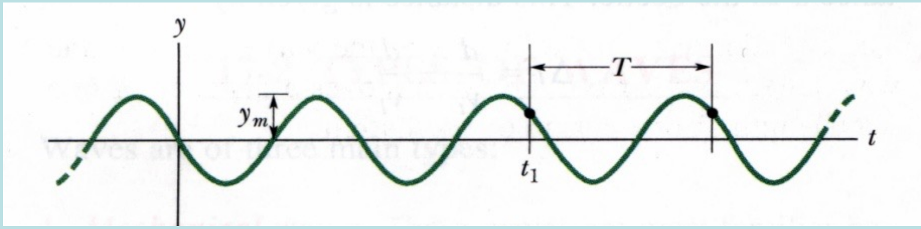
$$\frac{\partial y}{\partial t} \equiv \frac{d}{dt}[y(x_0,t)] = \frac{d}{dt}[y_m \sin(kx_0 \pm \omega t)]$$

$$= \frac{d[y_m \sin(kx_0 \pm \omega t)]}{d(kx_0 \pm \omega t)} \cdot \frac{d(kx_0 \pm \omega t)}{dt}$$

$$= y_m \cos(kx_0 - \omega t) \cdot (\pm\omega) = \pm\omega y_m \cos(kx_0 - \omega t)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \pm\omega y_m \cos(kx \pm \omega t) \rightarrow \text{垂直速度}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 y_m \sin(kx \pm \omega t) \rightarrow \text{垂直加速度}$$



$$\frac{\partial y}{\partial x} = k y_m \cos(kx \pm \omega t) \rightarrow \text{波型的斜率}$$

固定一個變數 t（視為常數），對另一個變數 x 微分

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 y_m \sin(kx \pm \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 y_m \sin(kx \pm \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 y_m \sin(kx \pm \omega t)$$

正弦波波函數的二次時間偏微分與二次空間偏微分成正比！

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{k^2}{\omega^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad k^2 = \frac{1}{v^2}\omega^2$$

比例常數與頻率及傳播方向無關！

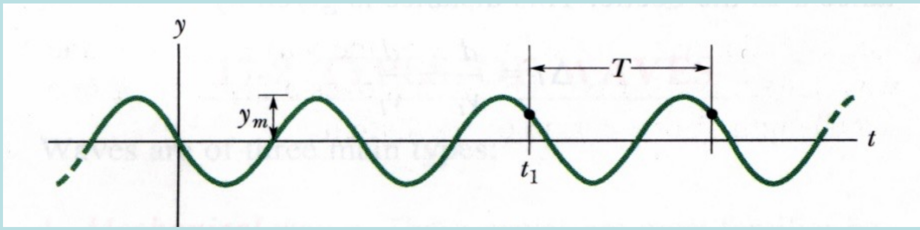
此式對任何頻率的正弦波及其疊加都正確！

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

這是一個所有正弦波及其疊加都滿足的方程式！

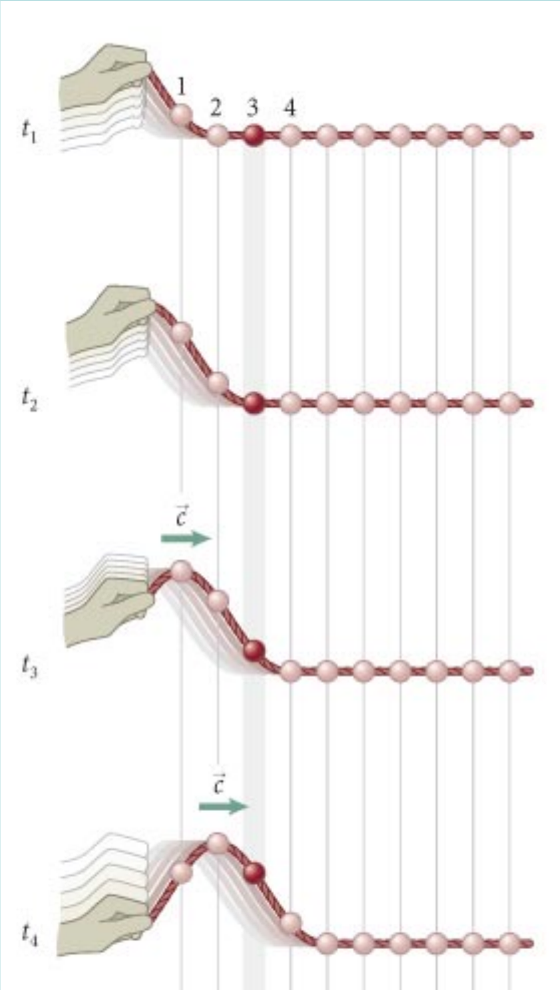
它是不是適用於所有的弦波？



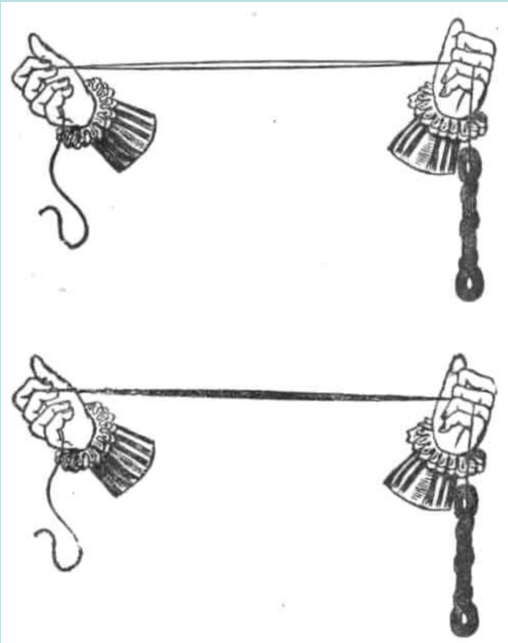
現在開始由弦所滿足的物理定律出發，來討論波了。

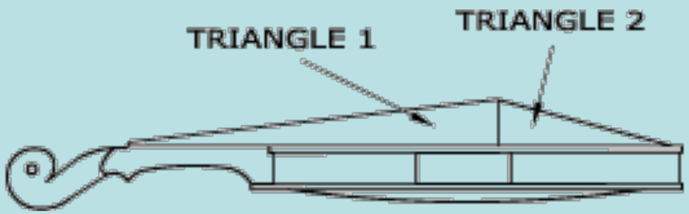
畢竟弦只是一個粒子系統的連續極限！

每一個粒子都滿足牛頓運動定律！

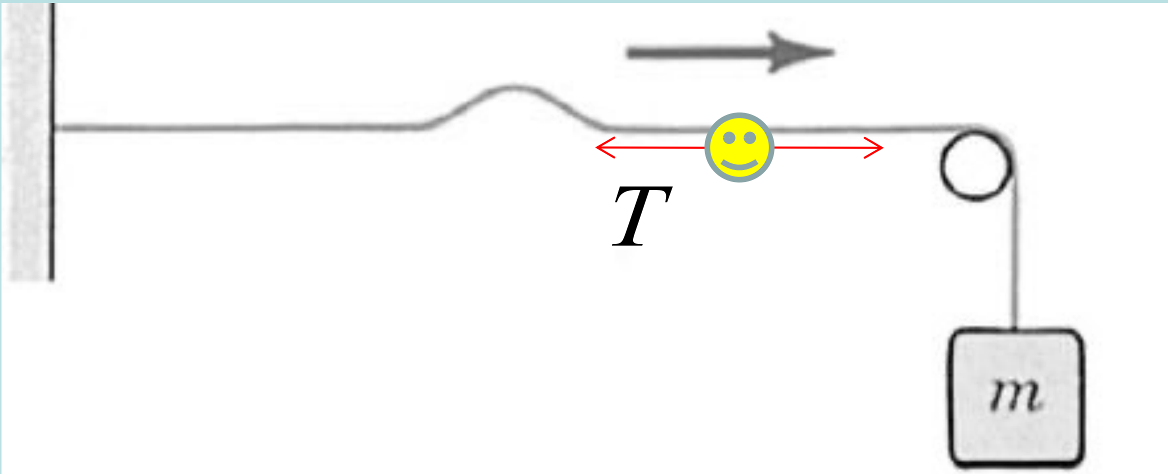


弦必須拉緊才能產生弦波！





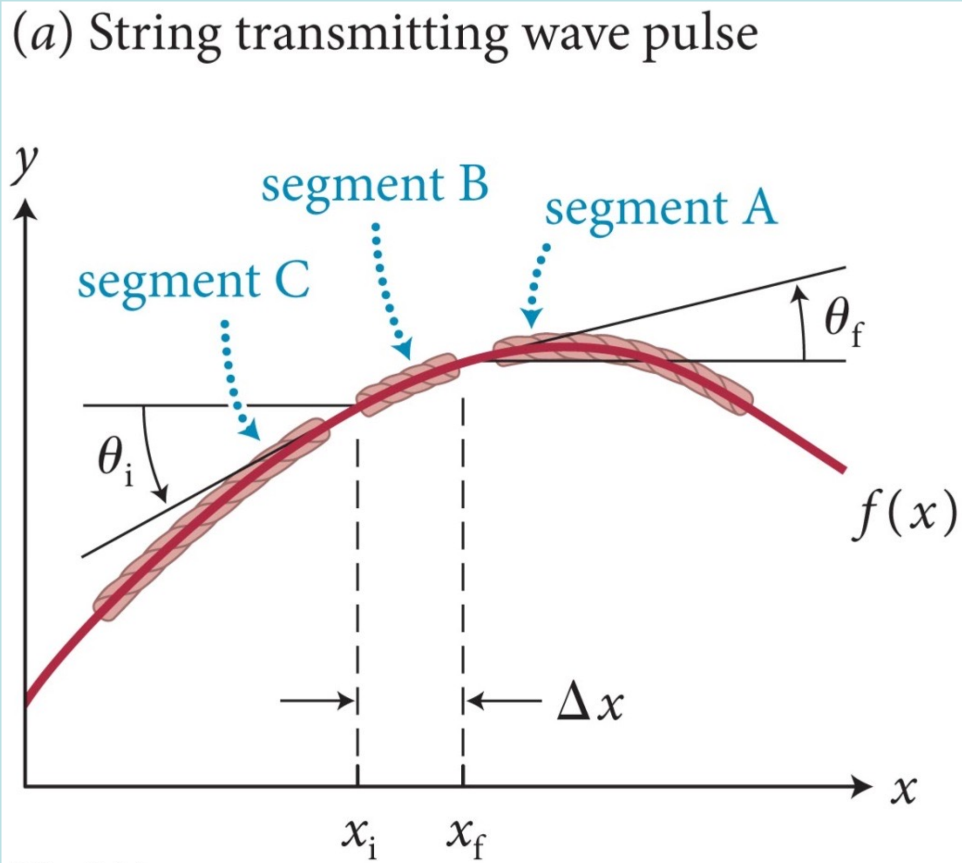
弦的張力 T 是重要要素



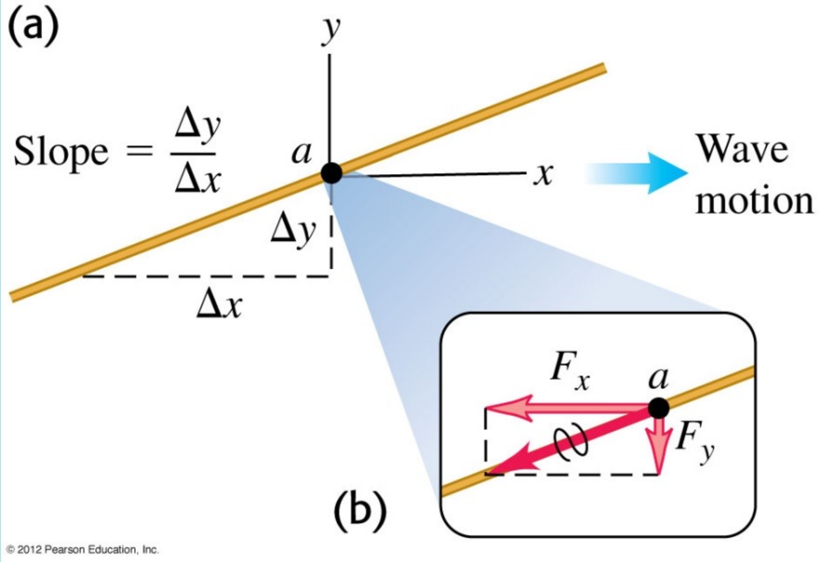
將牛頓定律用在一小段弦上

弦的組成元素只有垂直運動：

一小段弦的垂直受力，等於垂直加速度。



波經過時，左右兩邊角度不同，因此垂直淨力不為零。

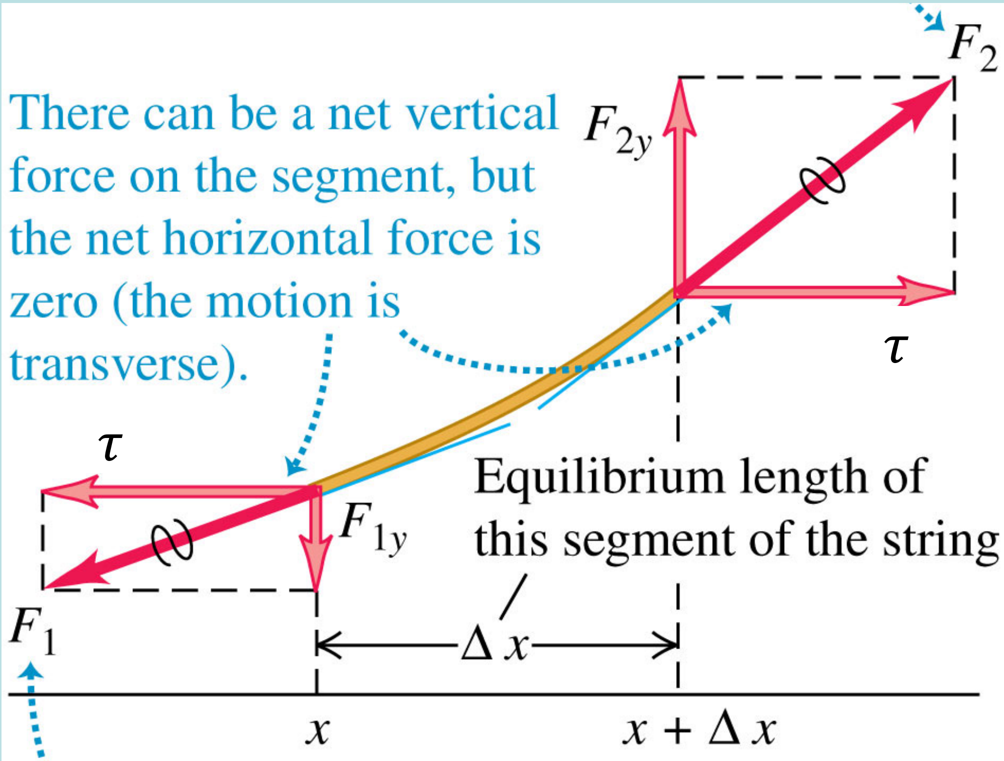


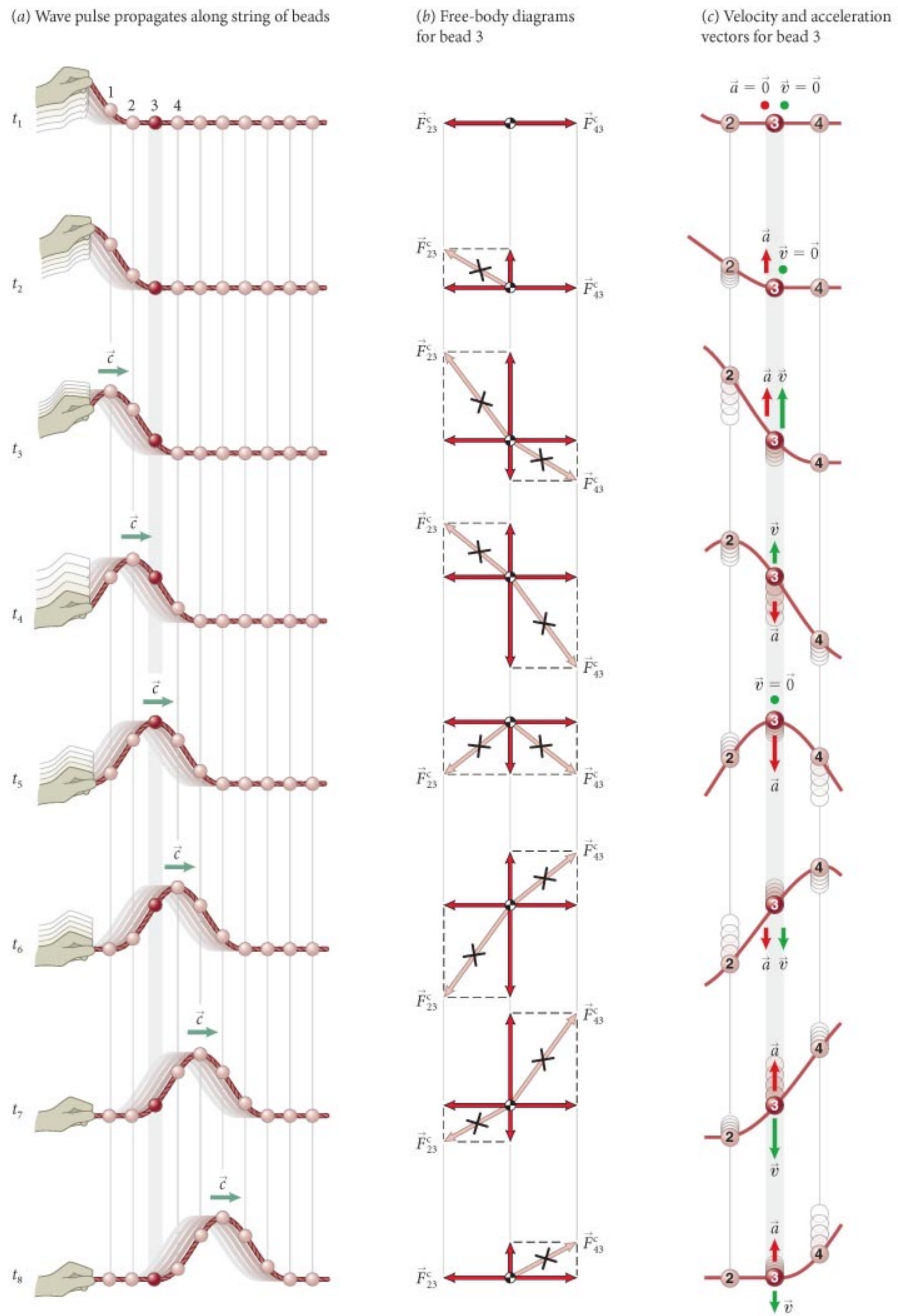
因為弦段在水平方向不動

弦段來自兩邊受力的水平分量抵消，

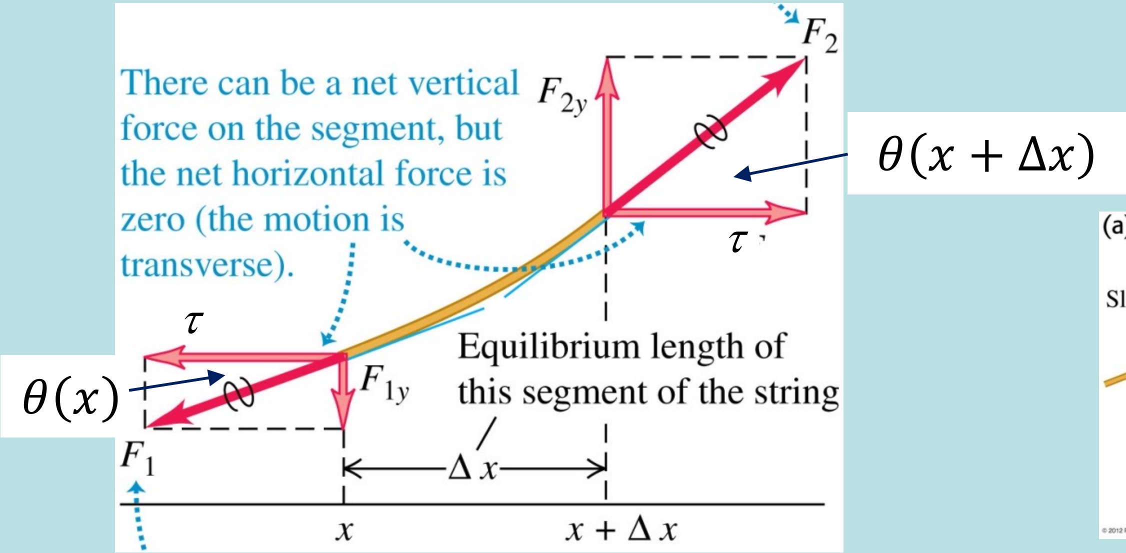
若波幅度不大，此力的水平分量，

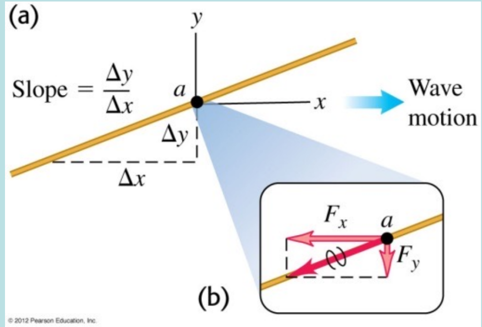
就等於弦無波時的張力 τ！





(a) Wave pulse propagates along string of beads
(b) Free-body diagrams for bead 3
(c) Velocity and acceleration vectors for bead 3
1
2
3
4
t_1
t_2
t_3
t_4
t_5
t_6
t_7
t_8
$\vec{c}$
$\vec{F}^c_{23}$
$\vec{F}^c_{43}$
$\vec{a} = \vec{0}$
$\vec{v} = \vec{0}$
$\vec{a}$
$\vec{v}$





來自左端垂直受力： $F_{1y} = \tau \tan\theta(x)$

右端垂直受力： $F_{2y} = \tau \tan\theta(x+\Delta x)$

垂直總受力

$$\tan\theta = \frac{\partial y}{\partial x}(x,t)$$

斜率隨 x 座標之變化

$$F_{2y} - F_{1y} = \tau \tan\theta(x+\Delta x) - \tau\tan\theta(x) \sim \tau\cdot\left[\frac{\partial y}{\partial x}(x+\Delta x, t) - \frac{\partial y}{\partial x}(x,t)\right] = \tau\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\cdot\Delta x$$

一小段弦的垂直受力必須等於垂直加速度！

$$\tau\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot\Delta x = (\mu\Delta x)\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

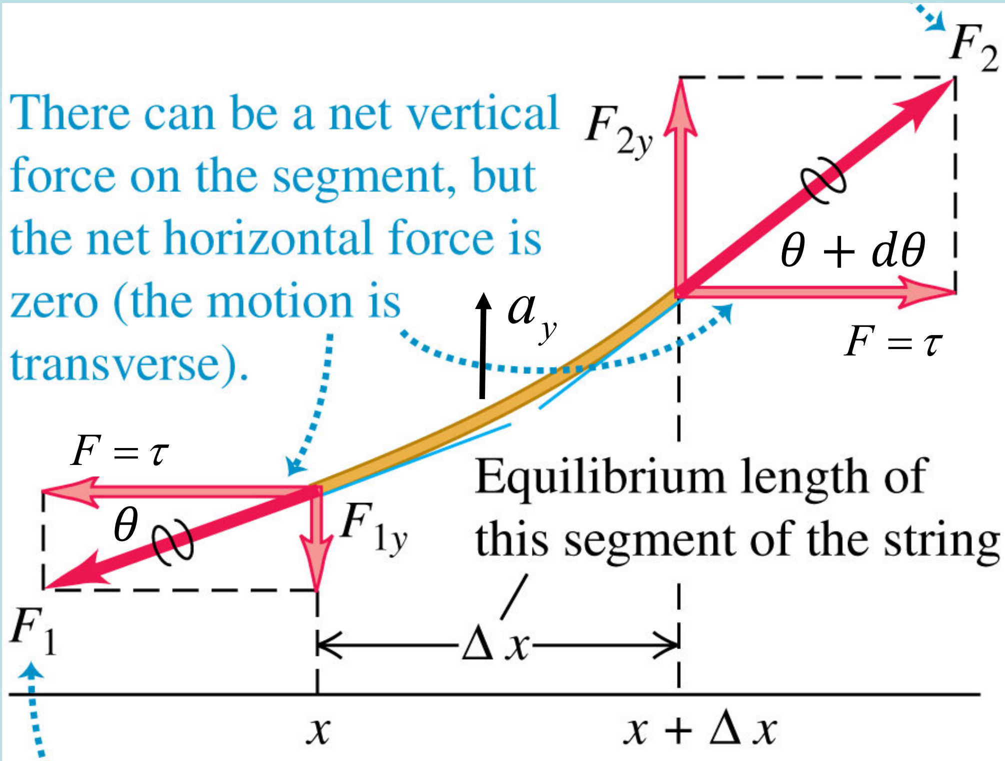
x 座標變化

斜率隨 x 座標之變化率

質量

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{\tau}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

垂直加速度



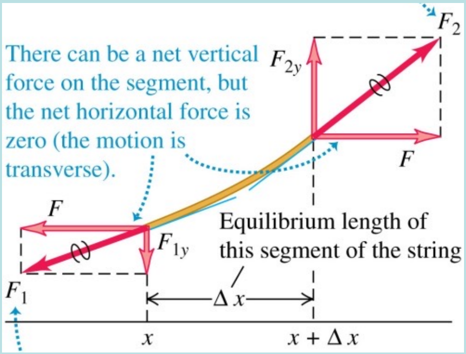
一小段弦的垂直受力必須等於垂直加速度！

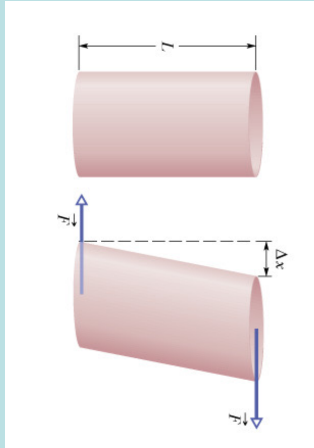
$$F_{2y} - F_{1y} = \tau \tan(\theta + d\theta) - \tau \tan\theta \sim \tau \cdot \left[\frac{\partial y}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial y}{\partial x}(x, t)\right] = \tau \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) \cdot \Delta x$$

$$\tau \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \Delta x = (\mu \Delta x) \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{\tau} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

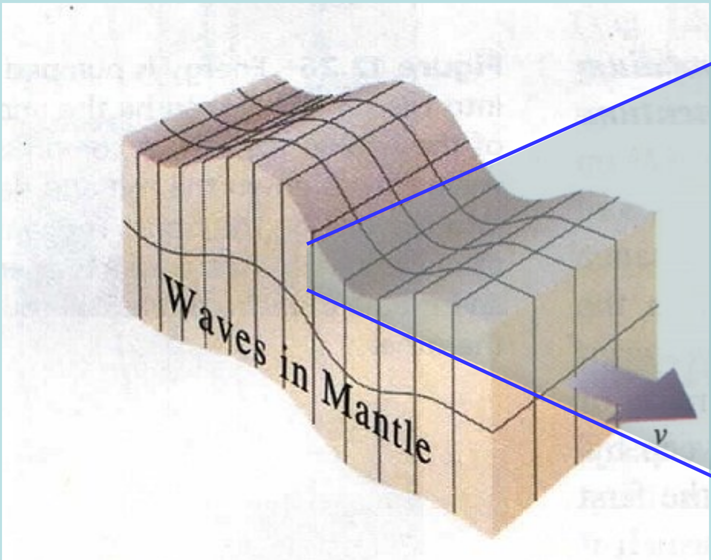
地震波的橫波也是非常相似的機制：

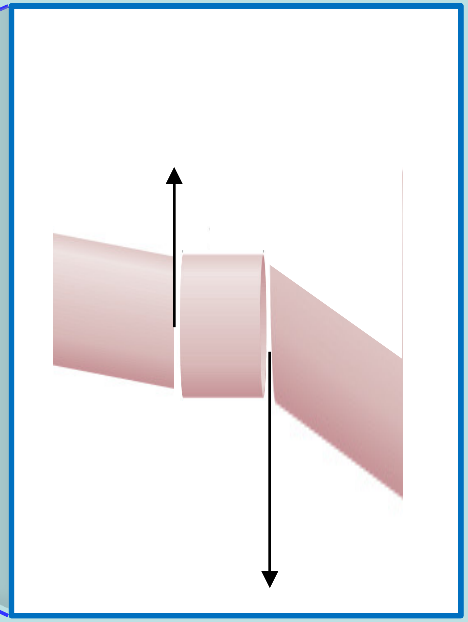




扭曲

$$F \propto \frac{\Delta L}{L} \sim \tan\theta(x)$$

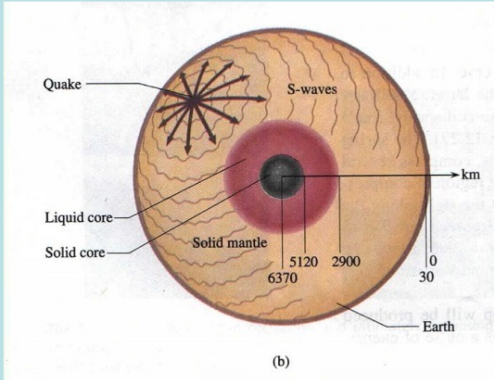


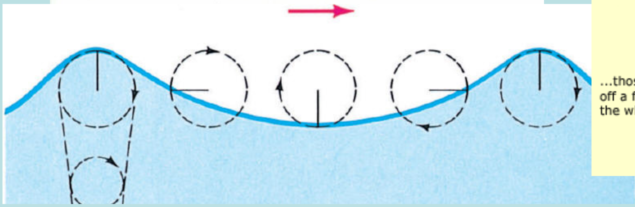


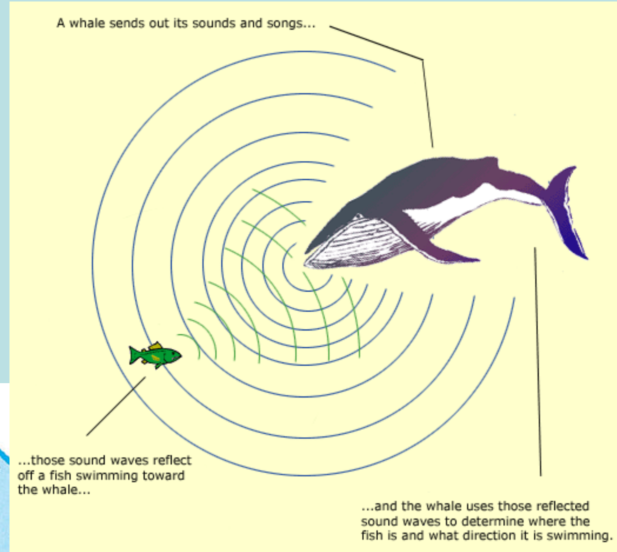
波方程式 Wave Equation

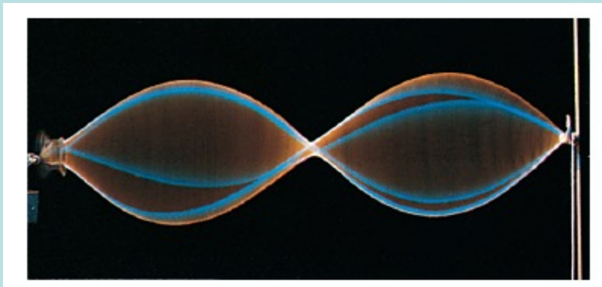
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$$









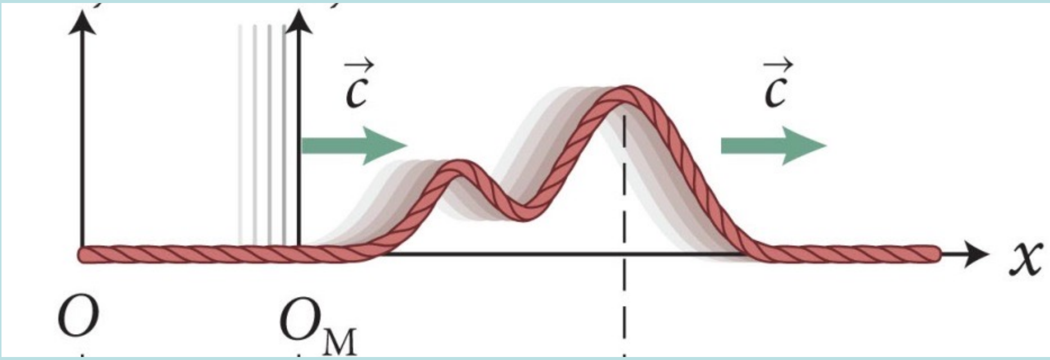
所有波動現象滿足的運動方程式

弦整體波函數所滿足的牛頓運動方程式就是波方程式

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$$

以下證明：這個方程式的解： $f(x - vt)$



$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{\tau}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

波方程式

代入我們猜出來的波動解：

$$y(x,t) = f(x - vt) = f(x')$$

$$x' = x - vt$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{df}{dx'} \cdot \frac{dx'}{dx} = \frac{df}{dx'}$$

固定 t

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d}{dx}\frac{df}{dx'} = \frac{dx'}{dx} \cdot \frac{d}{dx'}\frac{df}{dx'} = \frac{d^2 f}{dx'^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{df}{dx'} \cdot \frac{dx'}{dt} = \frac{df}{dx'} \cdot (-v)$$

固定 x

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{d}{dt}\frac{df}{dx'} \cdot (-v) = \frac{dx'}{dt} \cdot \frac{d}{dx'}\frac{df}{dx'} \cdot (-v) = \frac{d^2 f}{dx'^2} \cdot (-v)^2$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

我們猜出來的波動解的確是波方程式的解！

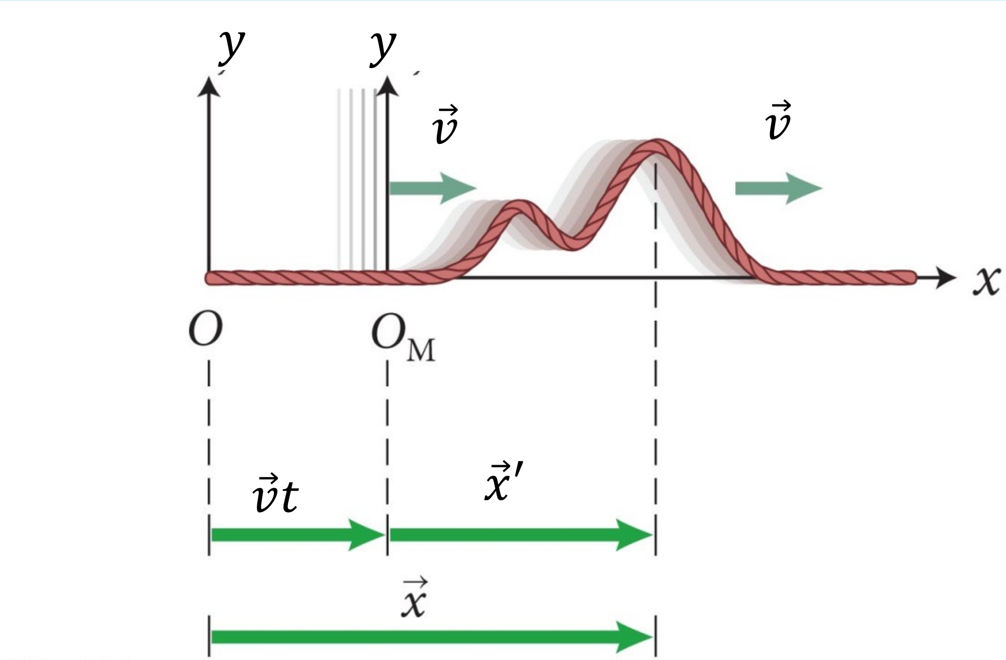
波速真的是常數

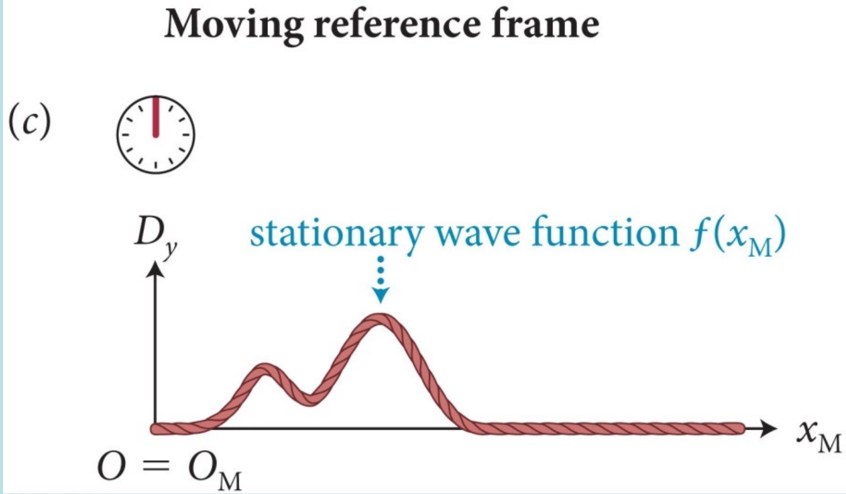
$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$$

$f(x - vt)$

$x - vt$有一個簡單的意義：就是以速度v移動的觀察者所量到的位置x'。

$x' = x - vt$





$f(x - vt) = f(x')$ 與時間無關，對移動觀察者來說，波型不變，波是靜止的！

此解的意義就是：波以函數 f 的波型，以常數波速 v 傳播，傳播的過程波型不變。

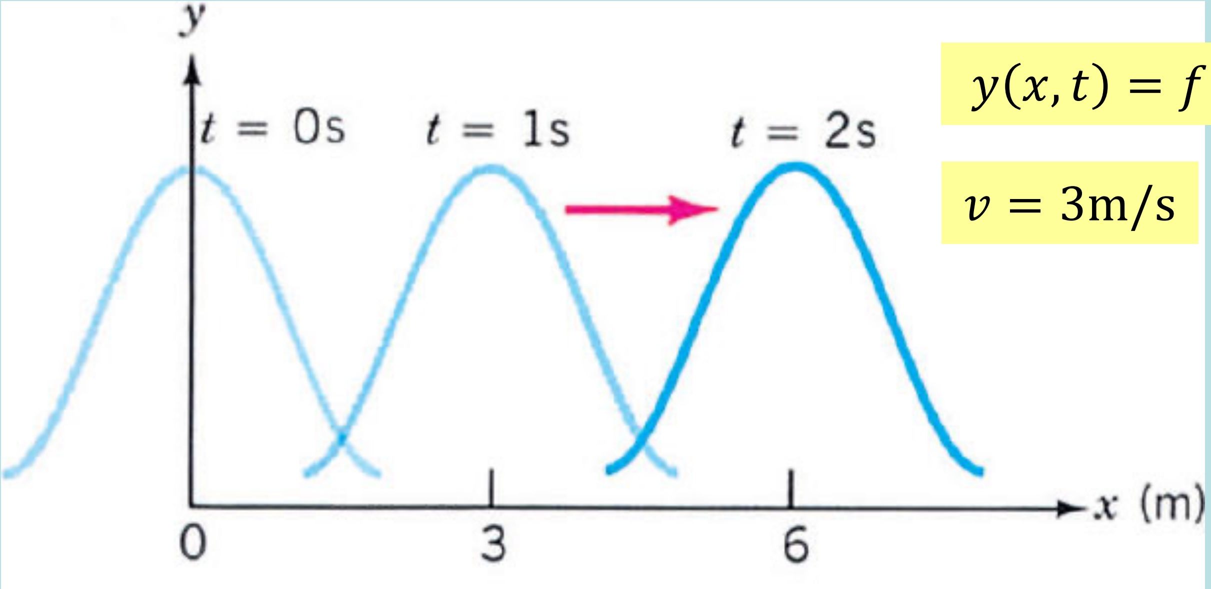
現在這個日常熟知的結果是正式由運動方程式推導出來。

變數$x-vt$值時相等則波函數值$f(x-vt)$相等

維持$x-vt$值相等的位置x，隨時間t增加，而以變化率v線性增加！

因此維持波函數值相等的空間位置都會以同一速度移動。

這就是：波動過程，波形不變，以定速在空間中移動。



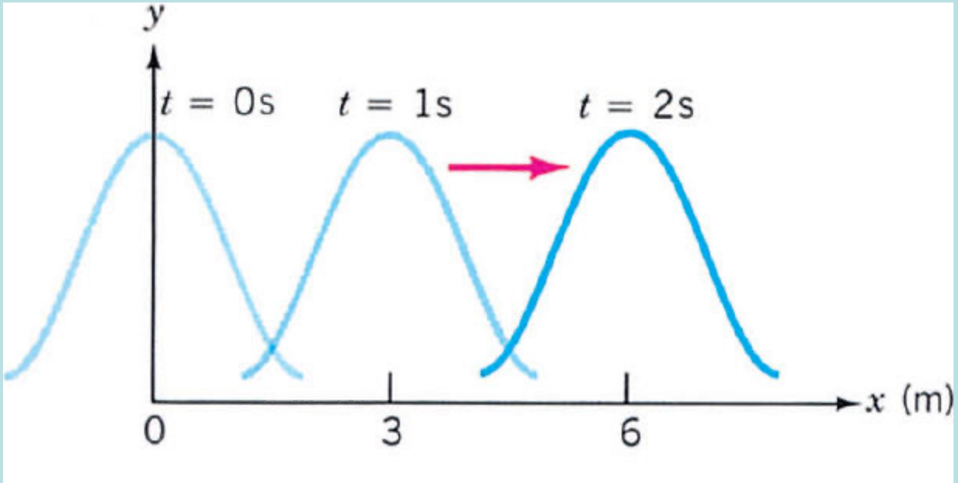
$y(x,t)=f(x-vt)$

$v=3\text{m/s}$

圖中波的頂峰：三組(x,t)： (0,0), (3,1), (6,2)的 $x-vt$值是相等的

所以這些位置在此時間的波函數即垂直位移是相等的！

也就是波的頂峰的空間位置是以定速$v=3\text{m/s}$移動的！



$$y(x,t) = f(x - vt)$$

$$x,\ t \longrightarrow x' = x - vt \xrightarrow{f} y(x,t) = f(x - vt)$$

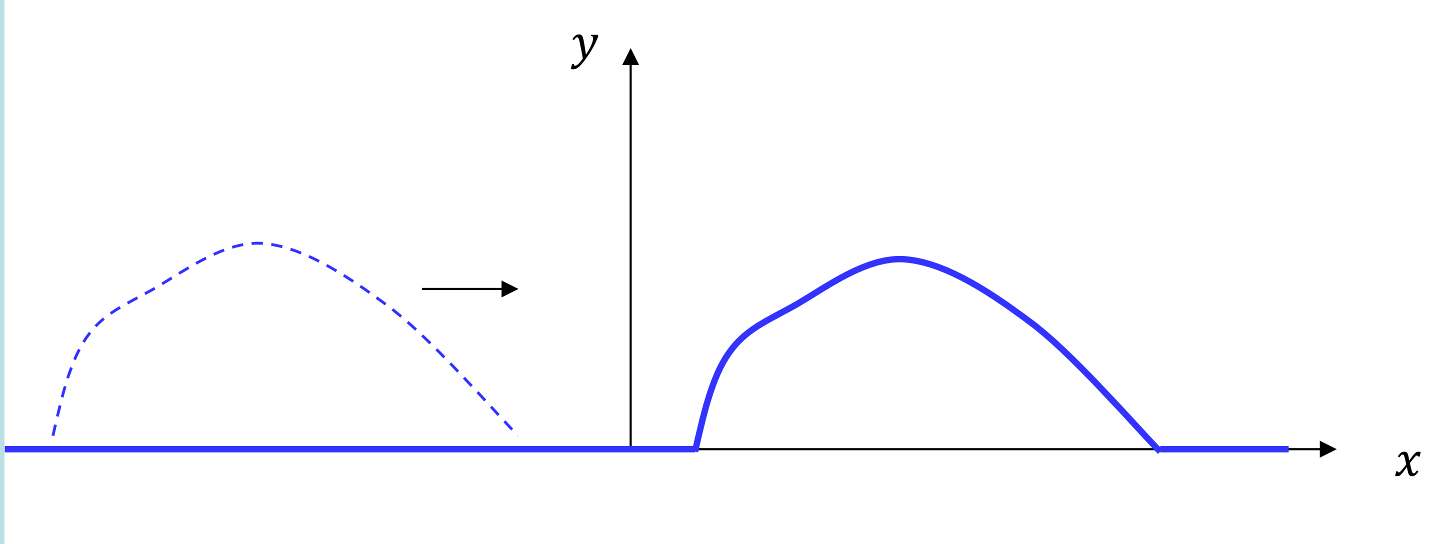
製造出相同 x_M的 x,t 組合一定對應相等的垂直位移 y。

而製造出相同x_M的 x,t 組合正是等速移動的時空座標。

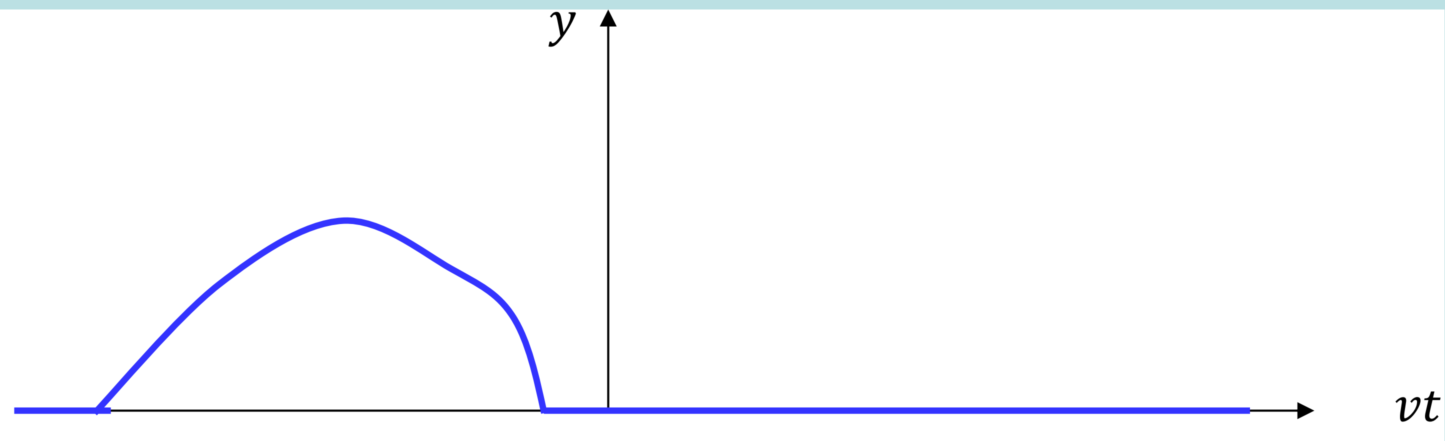
$$x - vt = \text{constant}$$

$y(x,t) = f(x - vt)$ f 的物理意義

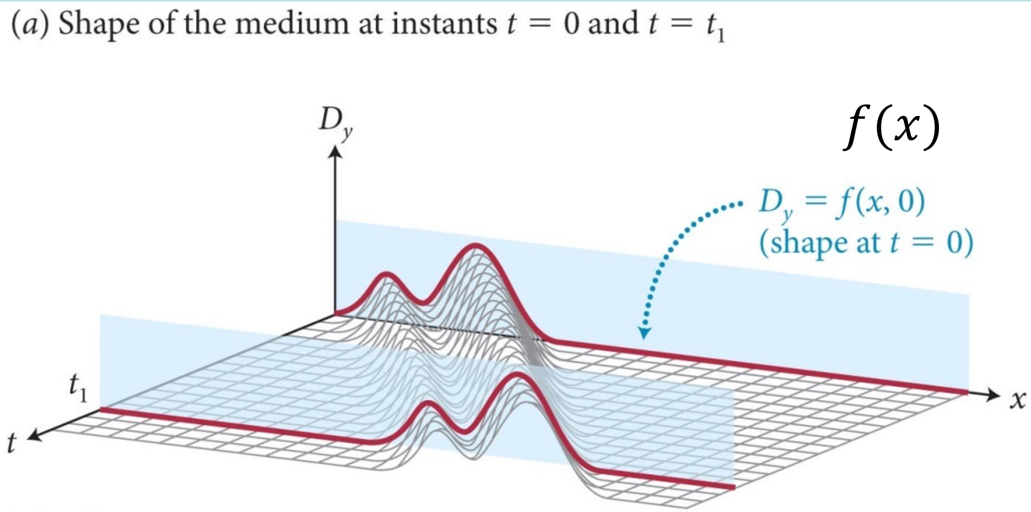
固定 $t = 0$ $y(x,t\,) \to y(x,0) = f(x)$ $t = 0$ 時的波形

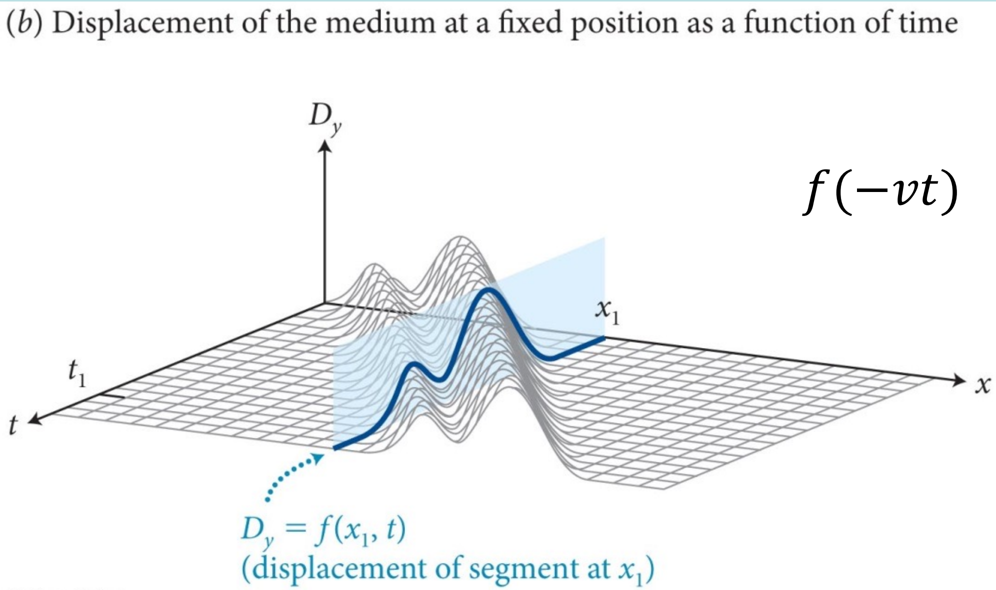


固定 $x = 0$ $y(x,t\,) \to y(0,t) = f(-vt)$ $x = 0$ 處粒子的運動



波函數$y(x,t) = f(x - vt)$在固定時間及固定位置後，得到同一個函數f ！

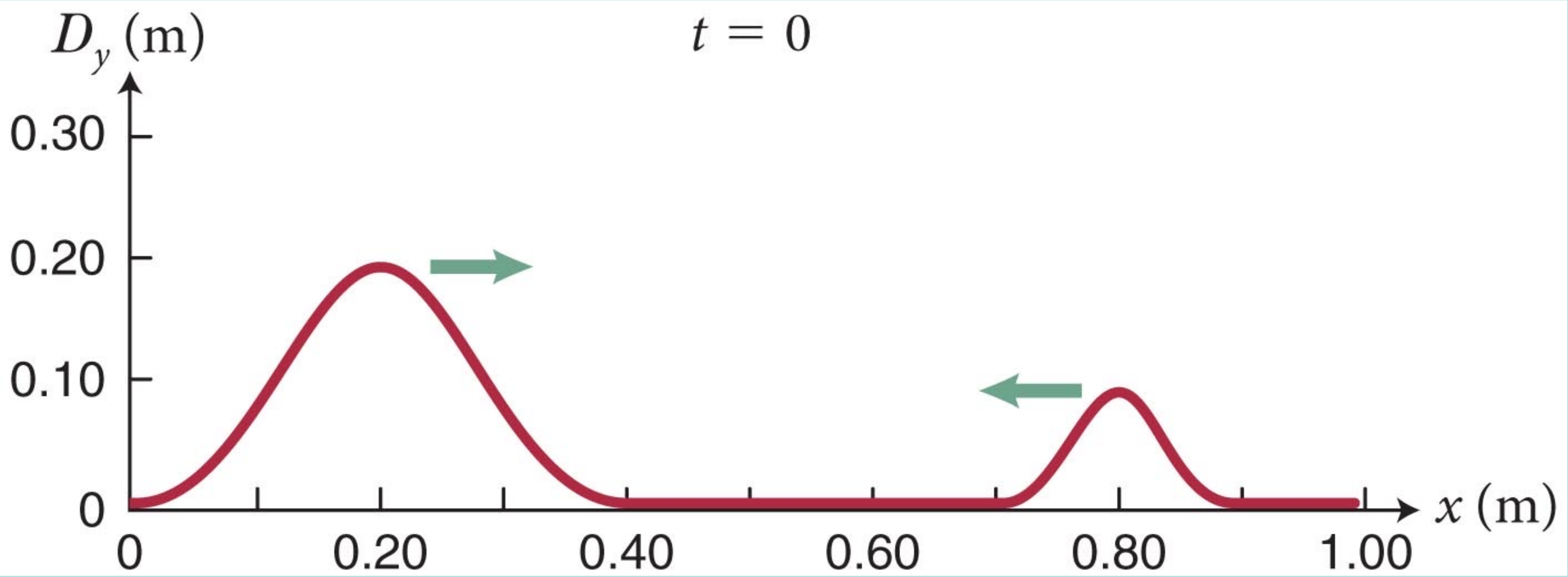




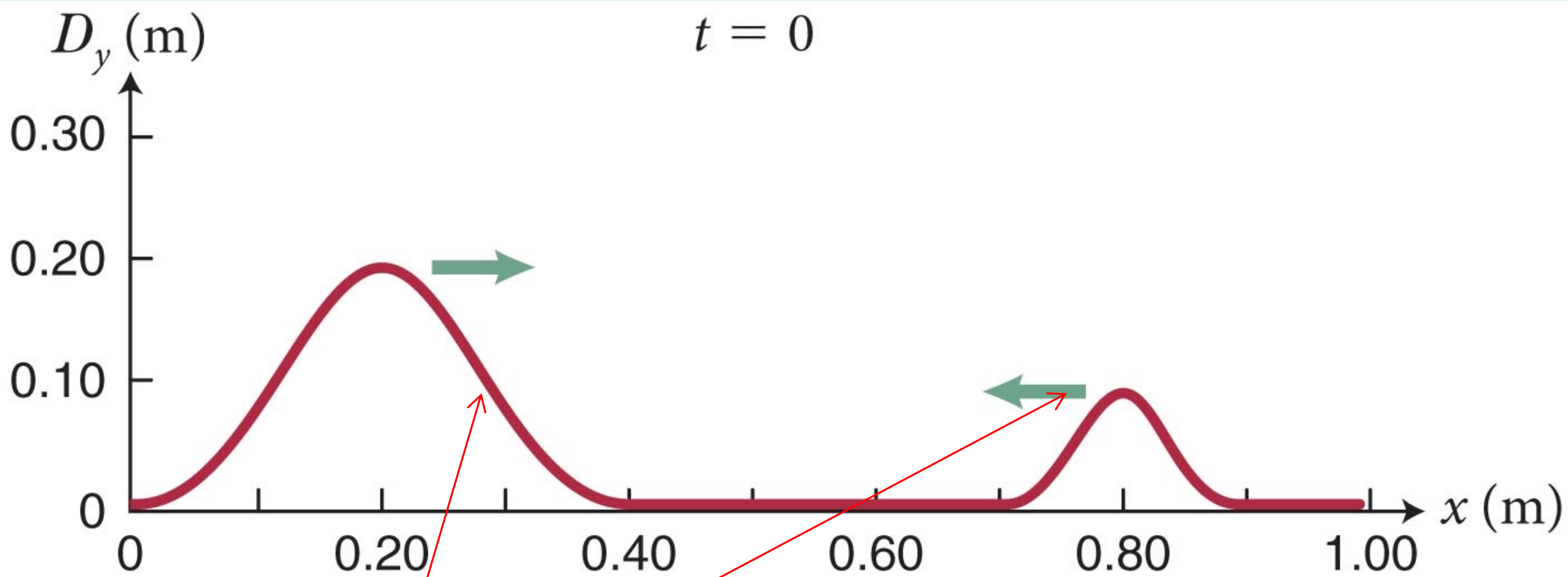
代入$y(x,t) = g(x + vt)$亦可

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

這代表向左傳播的波。



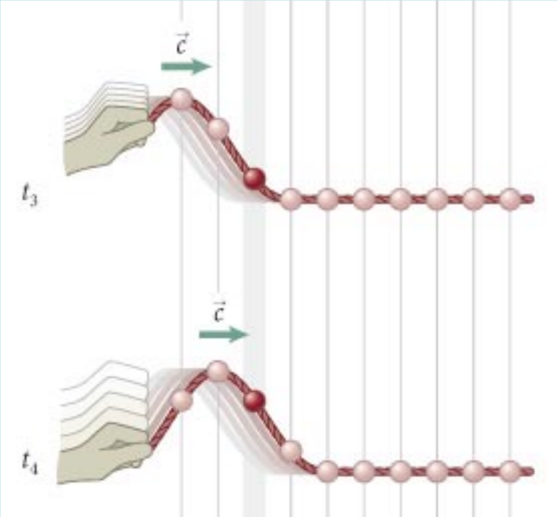
弦波的波函數的最普遍解： $y(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$



而 $f(x)$（$g(x)$） 即為向右（左）傳播的波的瞬間波型

這兩個未知的單變數函數是由起始條件決定：

起始的弦位移，起始的弦垂直方向速度。



波方程式其實是一群粒子的運動方程式。

它的唯一解是由所有粒子的初位置及初速度兩個起始條件完全決定。

在此這就對應：起始的弦位移 $y(x,0)$ ，起始的弦垂直方向速度 $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0)$ 。

由$f(x')$及$g(x')$正好可以給出這兩個函數：

$$y(x,0),\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) \Leftrightarrow f(x'),g(x')$$

$$y(x,0)=f(x)+g(x)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,0)=v[f'(x)-g'(x)]$$

$$y'(x,0)=f'(x)+g'(x)$$

因此$f(x')$及$g(x')$給出滿足方程式及起始條件的唯一解：

$$y(x,t)=f(x-vt)+g(x+vt)$$

波方程式

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

解： $f(x - vt) + g(x + vt)$

在這些波函數的解之中，時間與空間並不獨立，而是連鎖在一起 x'，

對空間的偏微分與時間的偏微分基本上都是函數 f 對 x' 的常微分

因此對空間的兩次偏微分與對時間的兩次偏微分成正比。

波動的特徵皆來自此方程式：

波型以定速傳播

波型在傳播過程中不變形

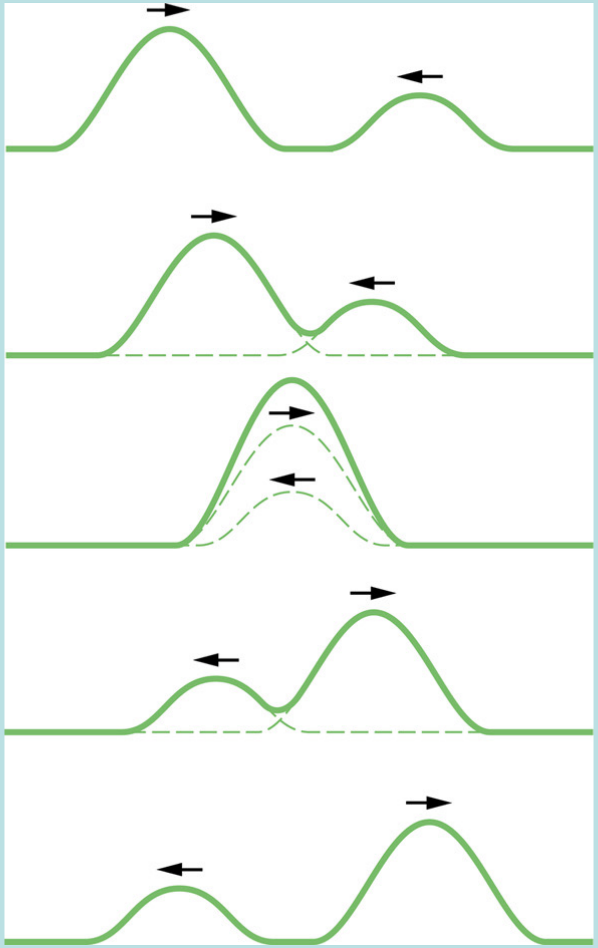
疊加定律

以上結果適用於任何滿足波方程式的波動現象！

疊加定理

兩個波方程式的解的和依舊是波方程式的解：

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} \qquad \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 (y_1 + y_2)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 (y_1 + y_2)}{\partial t^2}$$



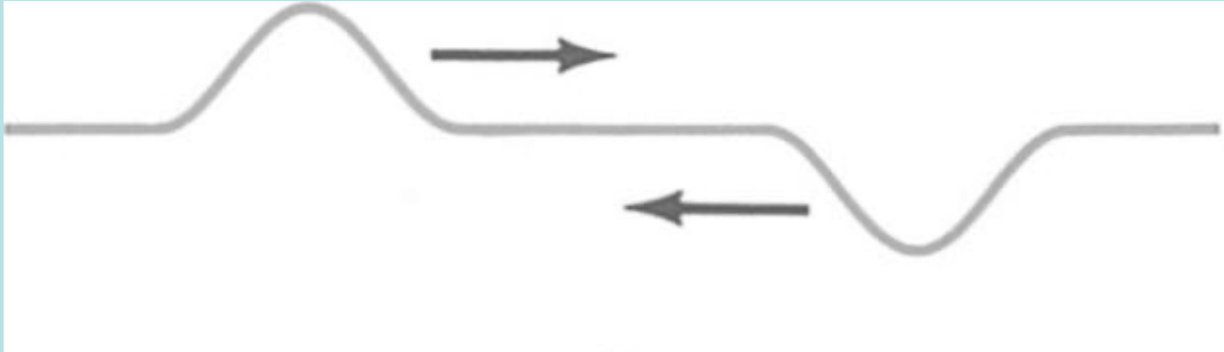
y_1+y_2依舊是波方程式的解：

兩個分立的波重疊時，只要將兩個波函數相加即可。

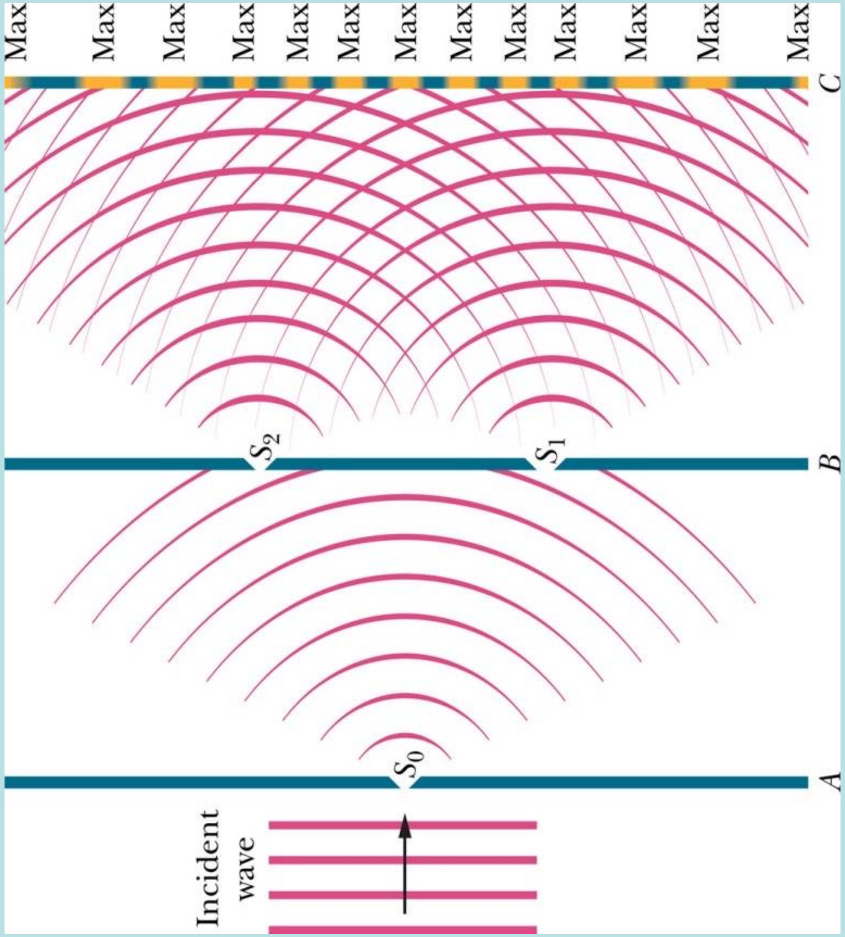
之後若又分立，原來重疊前的波型不變。

模擬（WaveForm-Impulse)

疊加定理



$$y(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$



疊加定理是干涉現象的基礎

$y(\vec{r},t) = y_1(\vec{r},t) + y_2(\vec{r},t)$

到達屏幕的波是通過狹縫一的波與通過狹縫二的波的疊加。

疊加後你已無法分辨波是通過狹縫一還是二。

如果弦所滿足的方程式不是波方程式：例如

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+a\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

這是在振幅加大後的弦運動方程式

$$f(x-vt)+g(x+vt)$$

不再是解

波速不再是定速

$$v\rightarrow v(f)$$

波型在傳播過程中會變形

疊加定律不成立

非線性波動

非線性波動

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + a\left(\frac{\partial y_1}{\partial x}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} + a\left(\frac{\partial y_2}{\partial x}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}$$

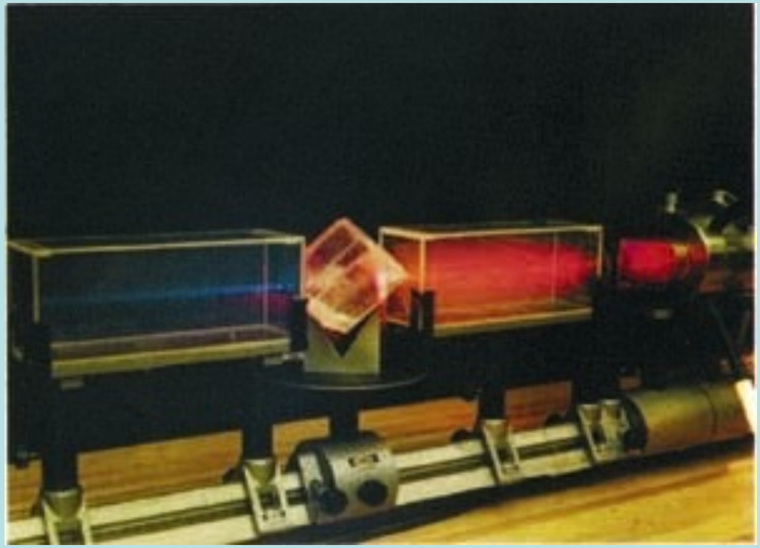
$$\frac{\partial^2 (y_1 + y_2)}{\partial x^2} + a\left(\frac{\partial y_1}{\partial x}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + a\left(\frac{\partial y_2}{\partial x}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 (y_1 + y_2)}{\partial t^2}$$

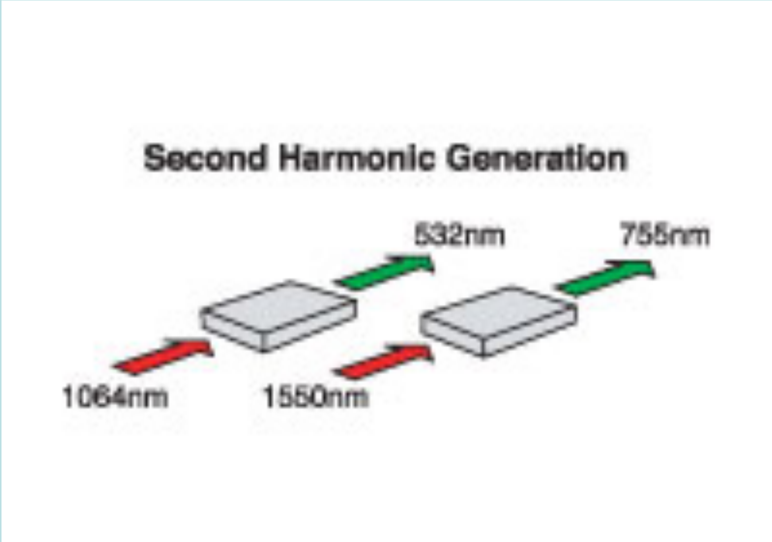
$$\frac{\partial^2 (y_1 + y_2)}{\partial x^2} + a\left(\frac{\partial (y_1 + y_2)}{\partial x}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 (y_1 + y_2)}{\partial x^2} \neq \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 (y_1 + y_2)}{\partial t^2}$$

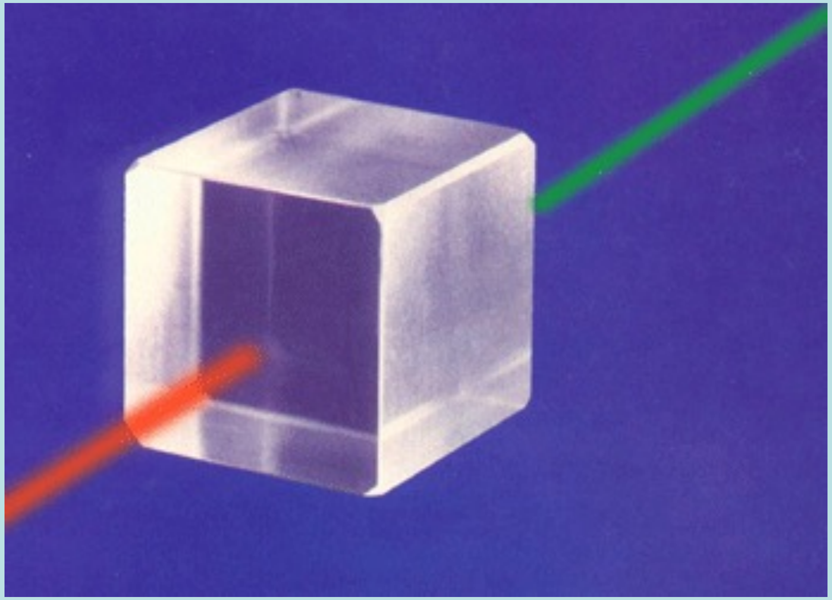
y_1+y_2不再是波方程式的解：

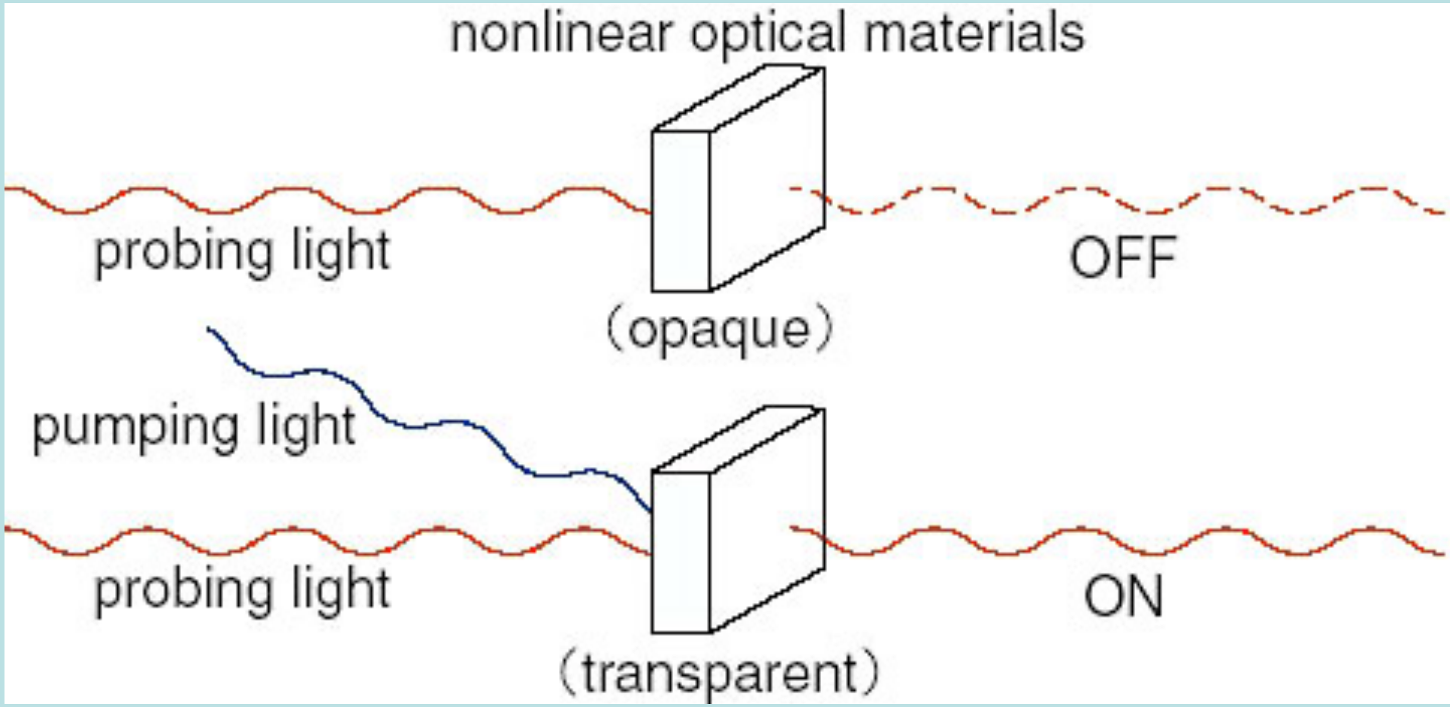
兩個波疊加會產生新的波！

Frequency Doubling Crystal

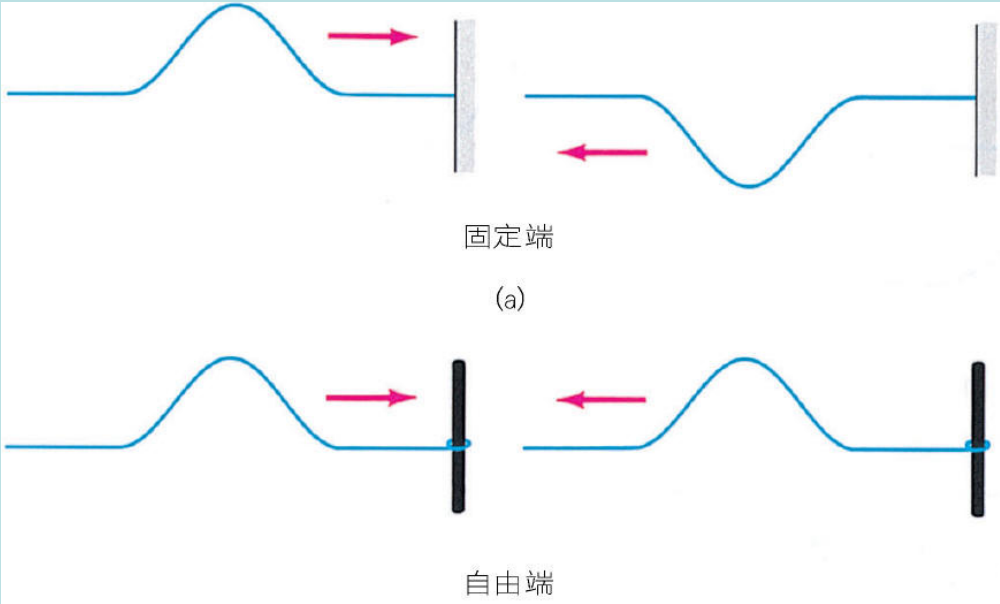







nonlinear optical materials
probing light
OFF
(opaque)
pumping light
probing light
ON
(transparent)

邊界的反射：多一個邊界條件



$$y(x = L, t) = 0$$

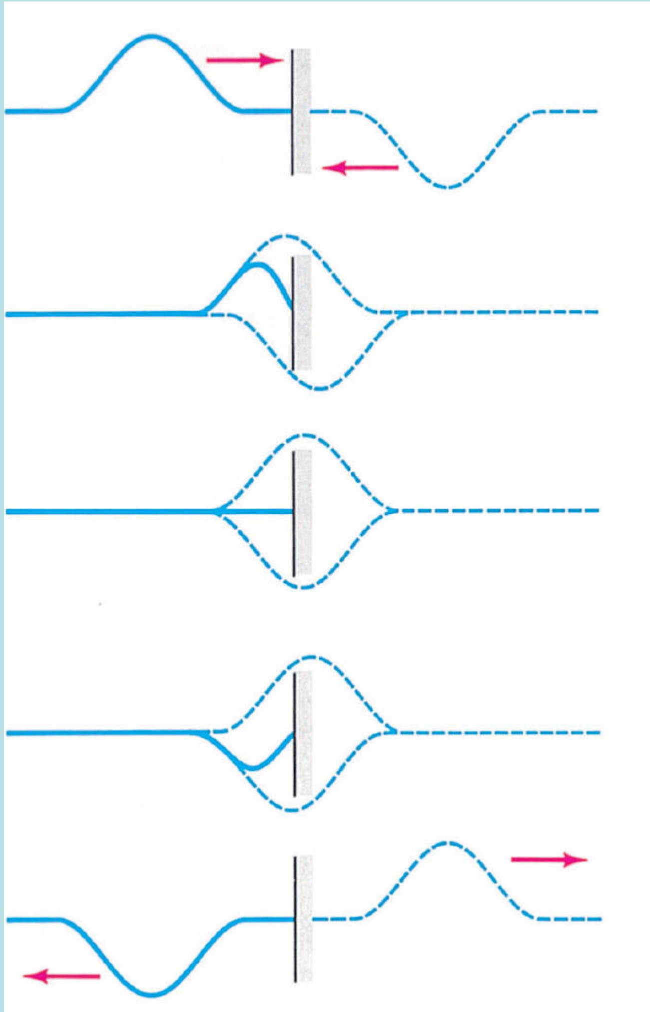
$$\frac{\partial y}{\partial x}(x = L, t) = 0$$

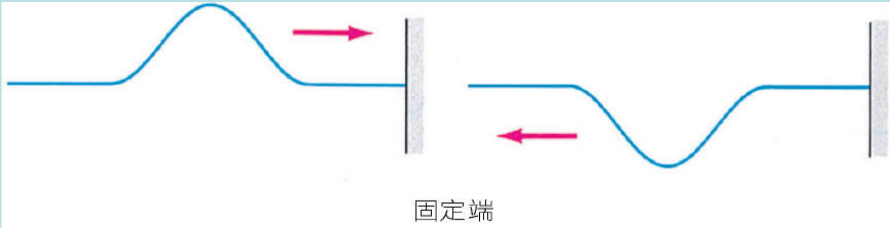
設計在邊界以外有一假想波反向移入，使與真實波疊加後可以達成邊界條件。

若假想波與入射波左右對稱，上下顛倒，則固定點處的波函數將永遠為零。

當入射波通過固定點後離開邊界，假想波就成為反射波進入邊界之內。

反射波與入射波左右對稱，上下顛倒！





$$y(x = L, t) = 0$$

$$f(x - vt) + g(x + vt)$$

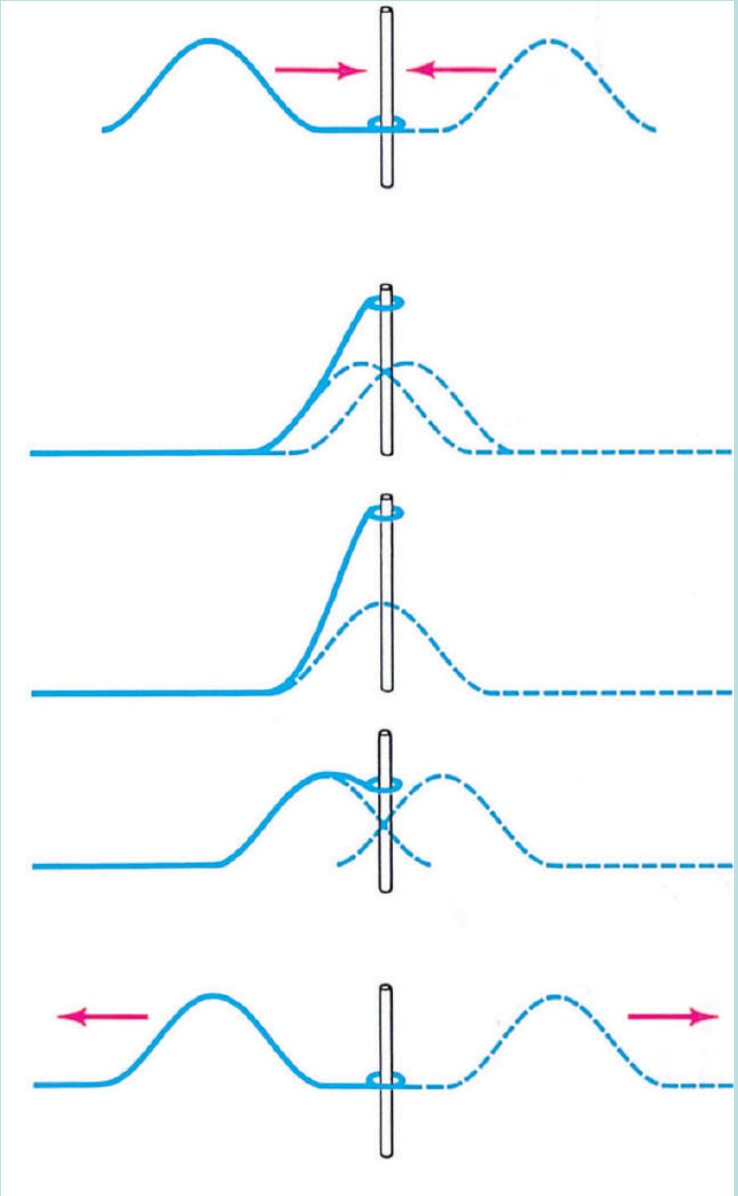
就是弦上波方程式的最普遍解。

因此以上的設計滿足波方程式。

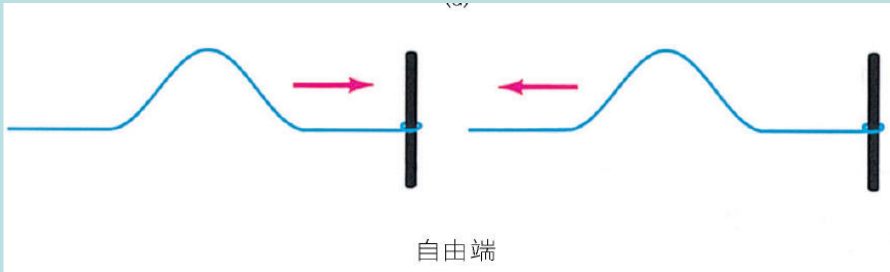
它又滿足起始條件與邊界條件。

因此知道它就是唯一解。

自由端的反射波與入射波左右對稱，上下不顛倒！

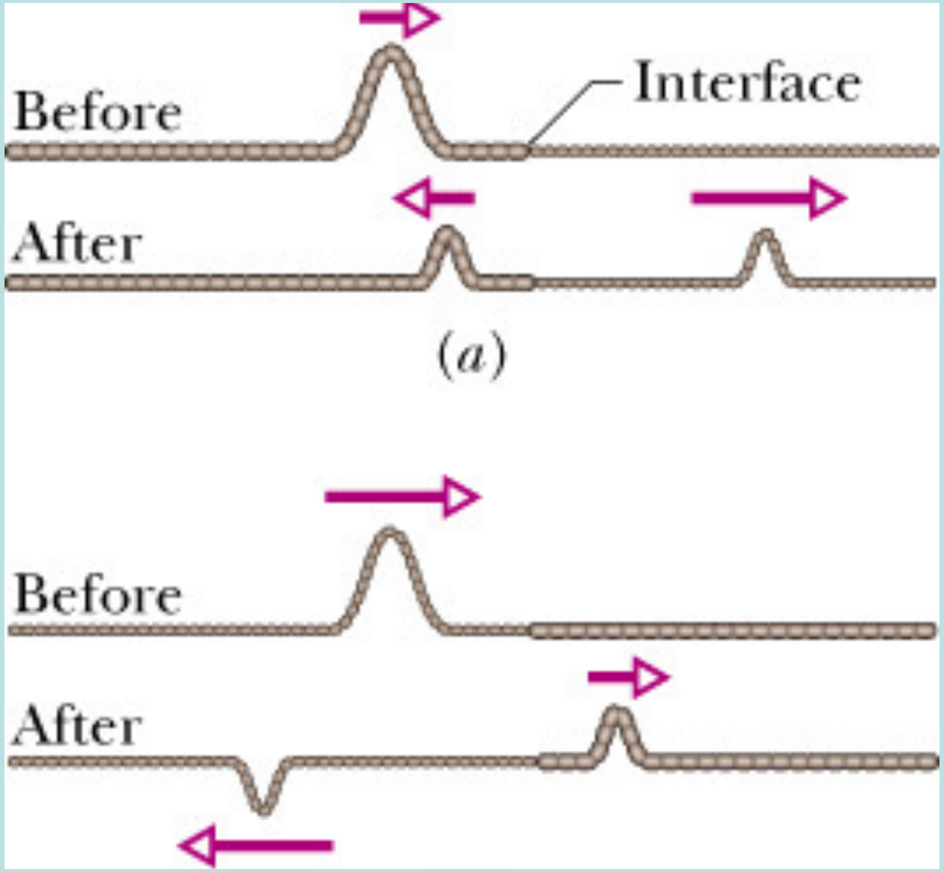


注意兩波的斜率在邊界大小相等，符號相反。



$$\frac{\partial y}{\partial x}(x=L,t)=0$$

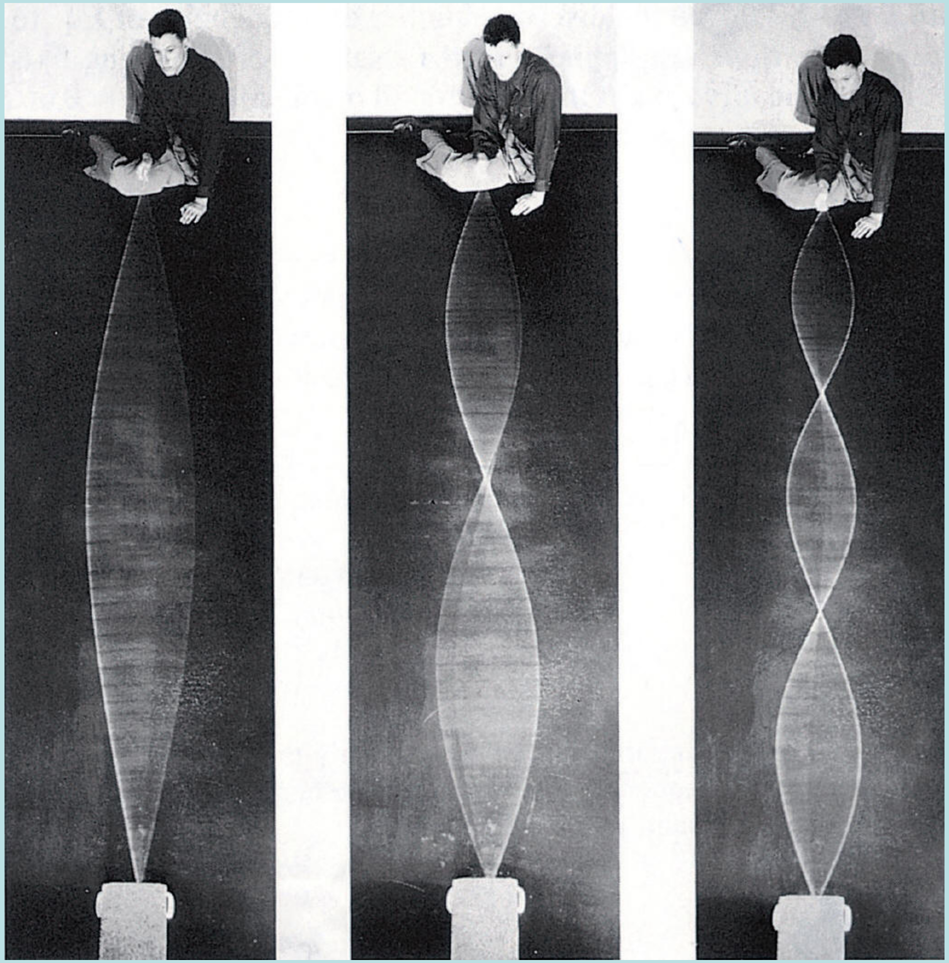
在自由端，繩的斜率為零！



邊界兩邊弦不一樣，波速不同

邊界會產生透射波與反射波。

困於兩邊界之間的波



能量無處傳播，因此不是波

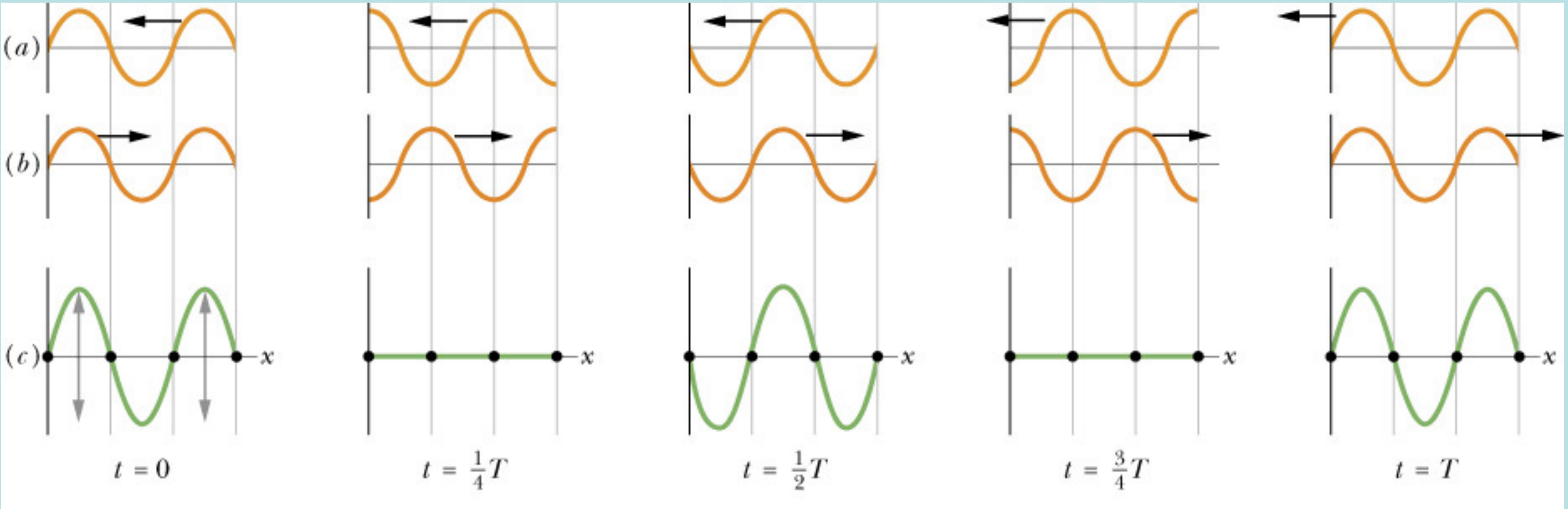
不傳播而穩定的波，稱為駐波 Standing Wave。

駐波能量不傳播，形成自給自足的穩定振盪狀態，這可以達成嗎？

一個向 $+x$傳播的波，在右固定端反射，形成一個向 $-x$ 傳播的波，

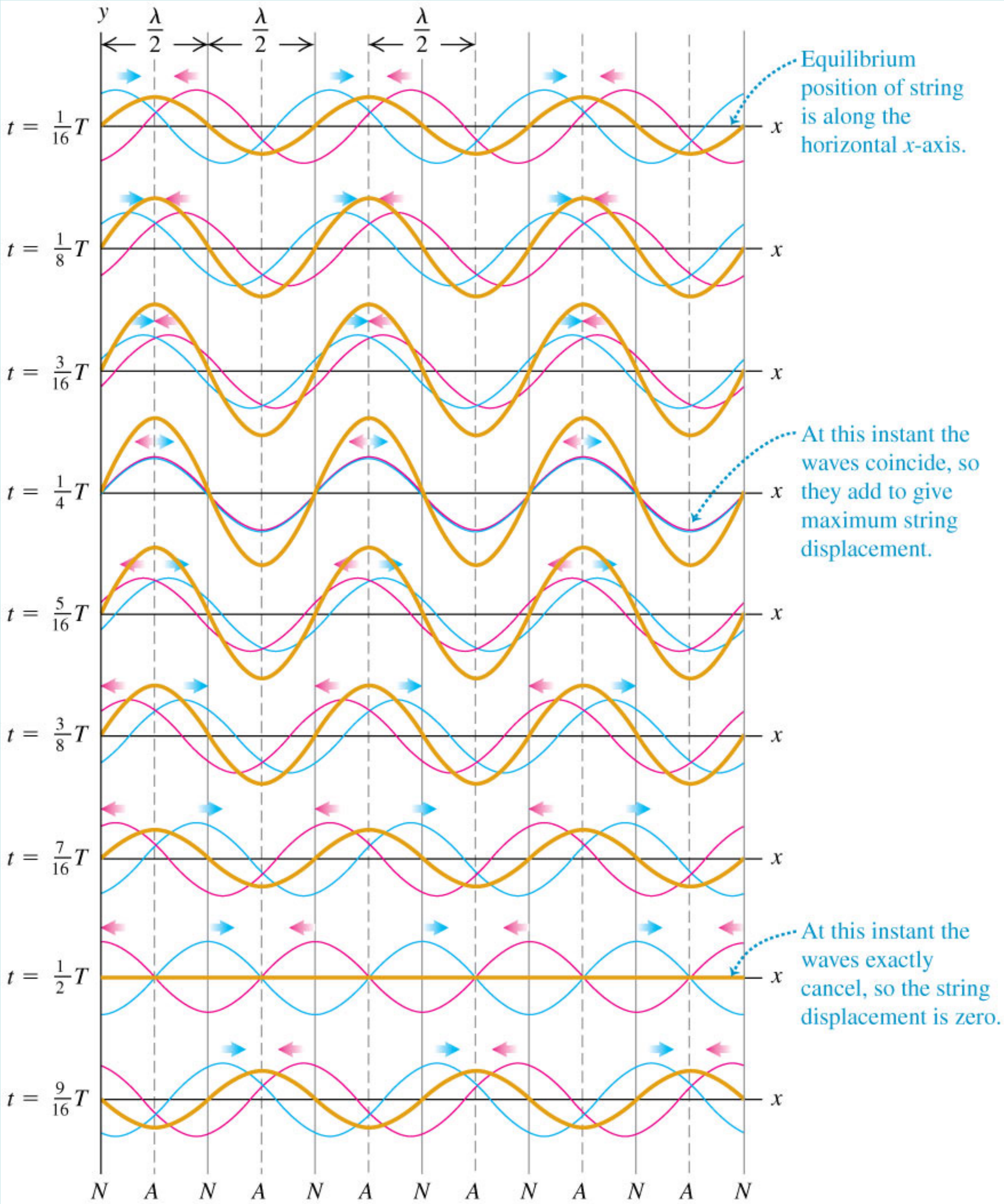
而這個向 $-x$ 傳播的波在左固定端，如果又反射形成向 $+x$傳播的波，

重新補充原來右方入射的波，這樣的波動便能自給自足形成穩定狀態！



設兩個固定端點的位置為： $x = 0$ $x = L$

為了能穩定，波函數必須滿足邊界條件： $y(0, t) = 0$ $y(L, t) = 0$



y
λ/2
λ/2
λ/2
t = 1/16 T
t = 1/8 T
t = 3/16 T
t = 1/4 T
t = 5/16 T
t = 3/8 T
t = 7/16 T
t = 1/2 T
t = 9/16 T
x
Equilibrium position of string is along the horizontal x-axis.
At this instant the waves coincide, so they add to give maximum string displacement.
At this instant the waves exactly cancel, so the string displacement is zero.
N A N A N A N A N A N A N

盡管駐波不如一般的波是傳播的波，

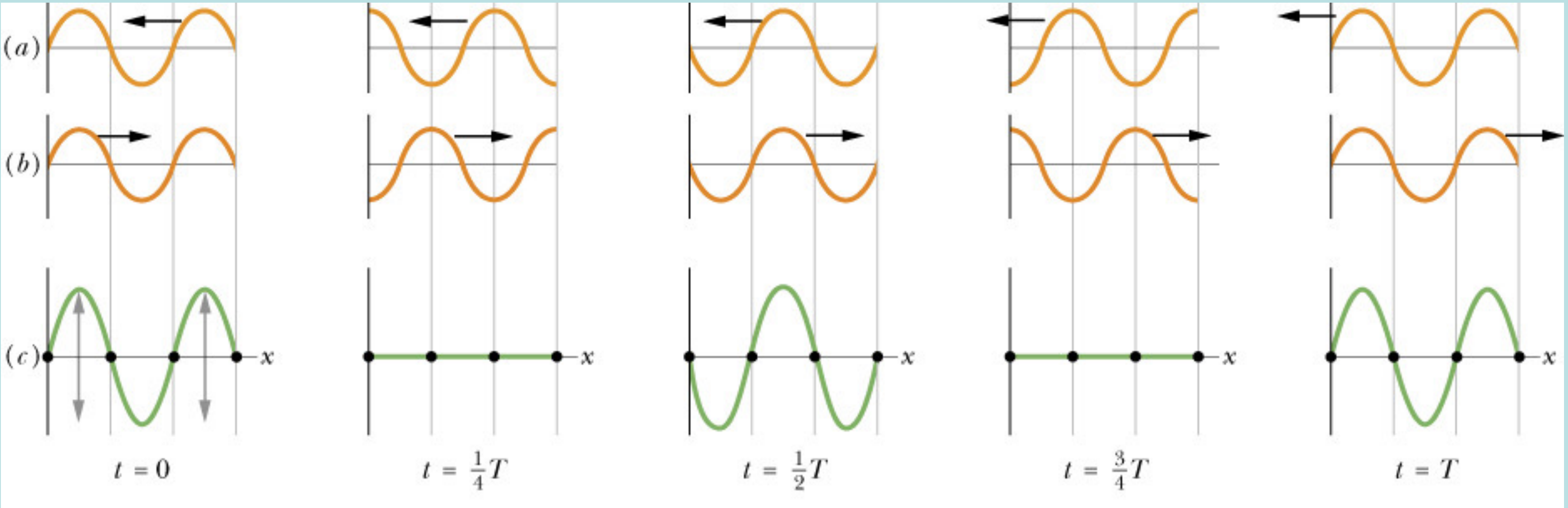
整條繩子依然滿足波方程式，因此解依舊是：

$$y(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

只要一個向$+x$傳播的波與一個向$-x$傳播的波疊加，

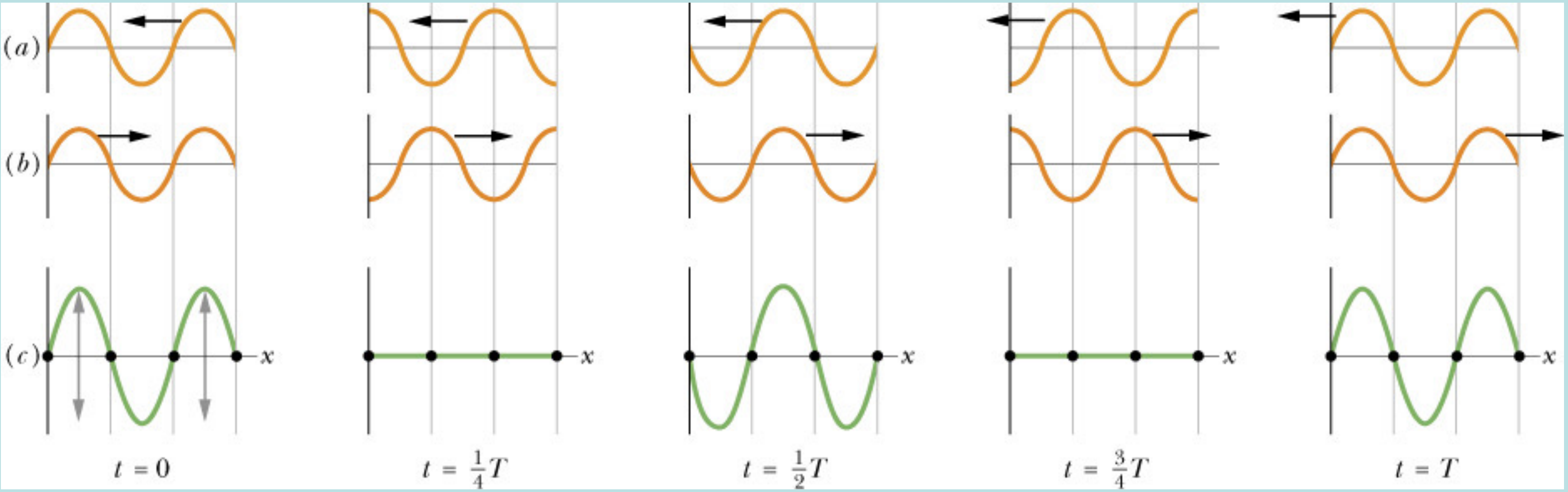
而且同時滿足邊界條件就是所要的解！

兩端固定 $y(0,t) = 0$ $y(L,t) = 0$



http://www.walter-fendt.de/ph14e/stwaverefl.htm

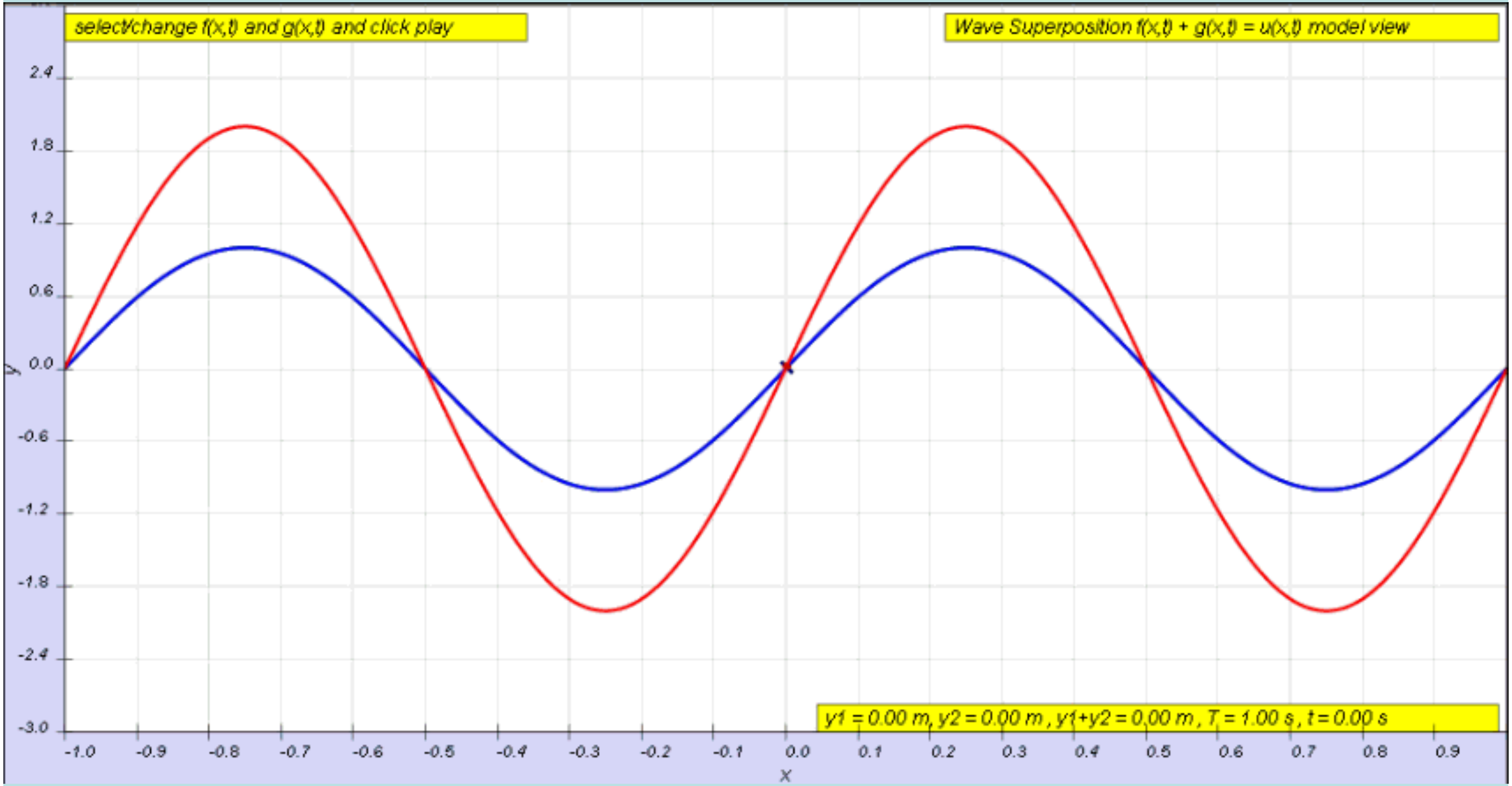
穩定的駐波態



兩個反向但一樣波型的正弦波疊加

$$y_m \sin(kx - \omega t) + y_m \sin(kx + \omega t) =$$

$$2y_m \cdot \sin kx \cdot \cos \omega t$$



select/change f(x,t) and g(x,t) and click play
Wave Superposition f(x,t) + g(x,t) = u(x,t) model view
y1 = 0.00 m, y2 = 0.00 m , y1+y2 = 0.00 m , T = 1.00 s , t = 0.00 s
2.4
1.8
1.2
0.6
0.0
-0.6
-1.2
-1.8
-2.4
-3.0
y
-1.0
-0.9
-0.8
-0.7
-0.6
-0.5
-0.4
-0.3
-0.2
-0.1
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
x

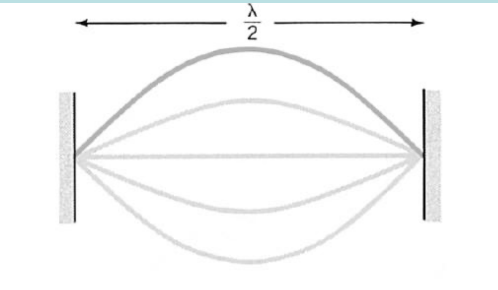
$$y = (2y_m \cdot \sin kx) \cdot \cos \omega t$$

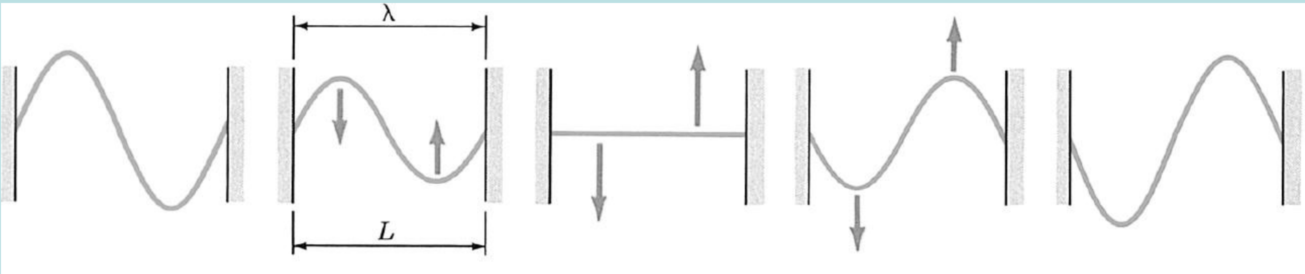
整條弦都被同一個時間函數所控制：

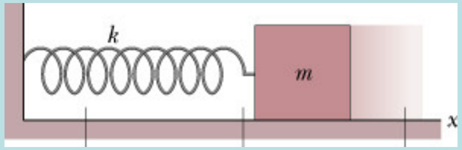
駐波發生時，整條弦一起震盪，

即同一時間，整條弦都處在簡諧振盪周期中的同一相位。

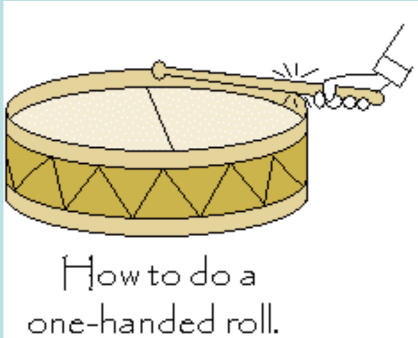
所以駐波是一震盪器，如彈簧一般可以儲存能量。

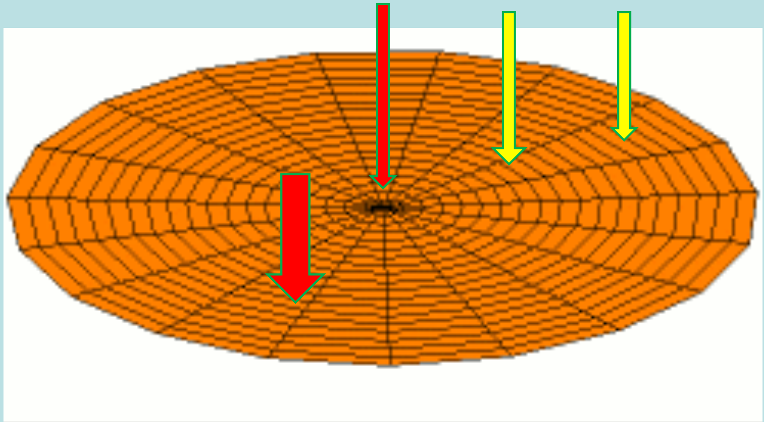






$$x = x_m \cdot \cos \omega t$$





某些特定變形的模式，其隨時間的運動會如同一個彈簧，

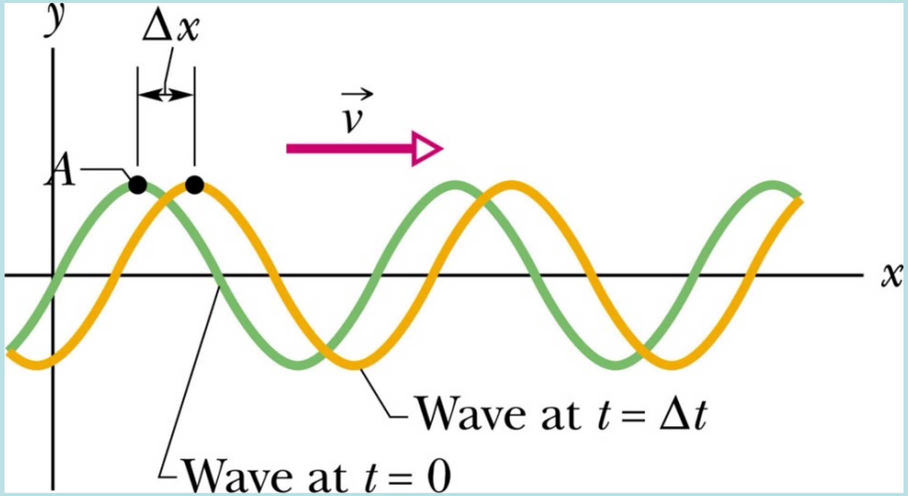
當這些模式被單獨激發時，物體中的每一點都以簡諧運動方式運動：

$y_i(t) = y_{mi} \cdot \cos \omega t$ ⟷ $y = (2y_m \cdot \sin kx) \cdot \cos \omega t$

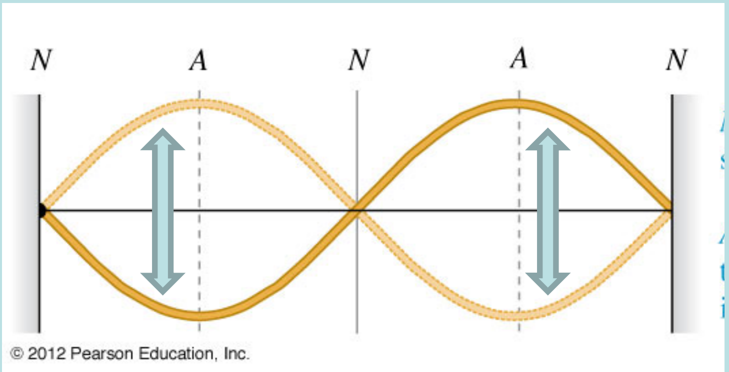
每一點y_i有一特定的振幅y_{mi}。　甚至可能是零或負值。

可以證明：物體的所有變形就是以這些模式，或它們的疊加來進行！

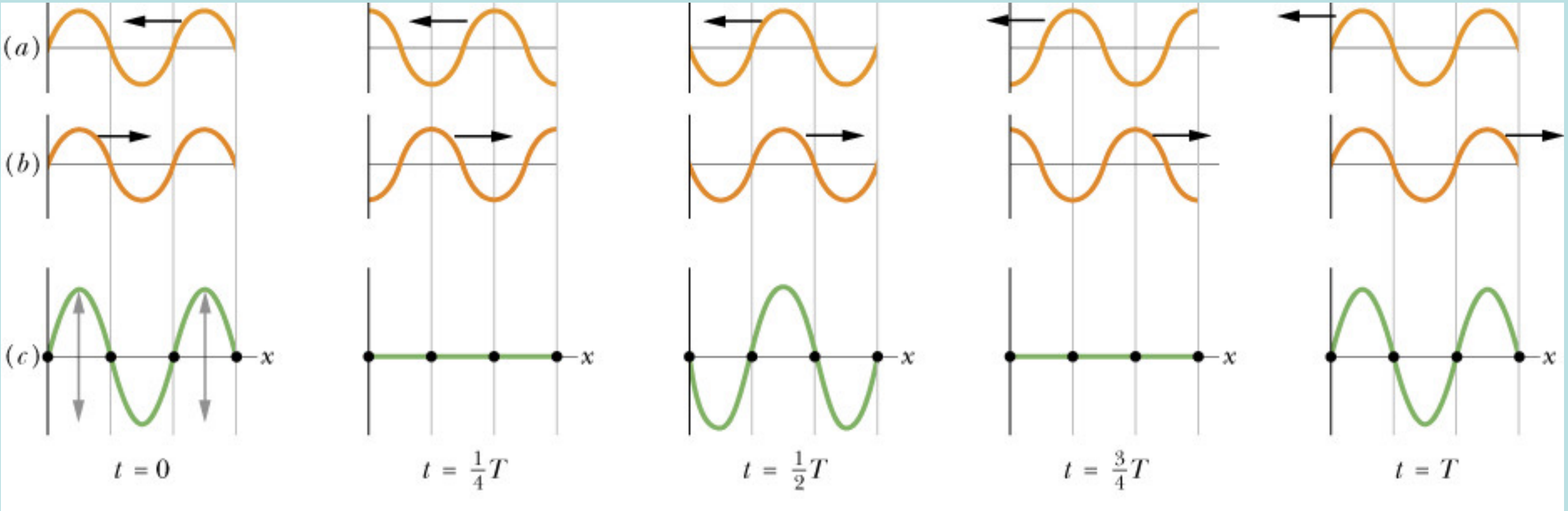
比較駐波與行進波



$$y = y_m \sin(kx - \omega t)$$



$$y = (2y_m \cdot \sin kx) \cdot \cos \omega t$$



穩定的駐波態還必須滿足邊界條件

$$y = (2y_m \cdot \sin kx) \cdot \cos \omega t$$

$y(0,t) = 0$ 自動滿足

滿足另一邊界條件，才能有穩定態 $y(L,t) = 0$

波長不能任意 $kL = n\pi$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n\pi}{L}$$

$$\lambda = \frac{2L}{n}$$

頻率不能任意 $f = \dfrac{v}{\lambda} = n\dfrac{v}{2L}$

穩定的駐波態，另一個觀點

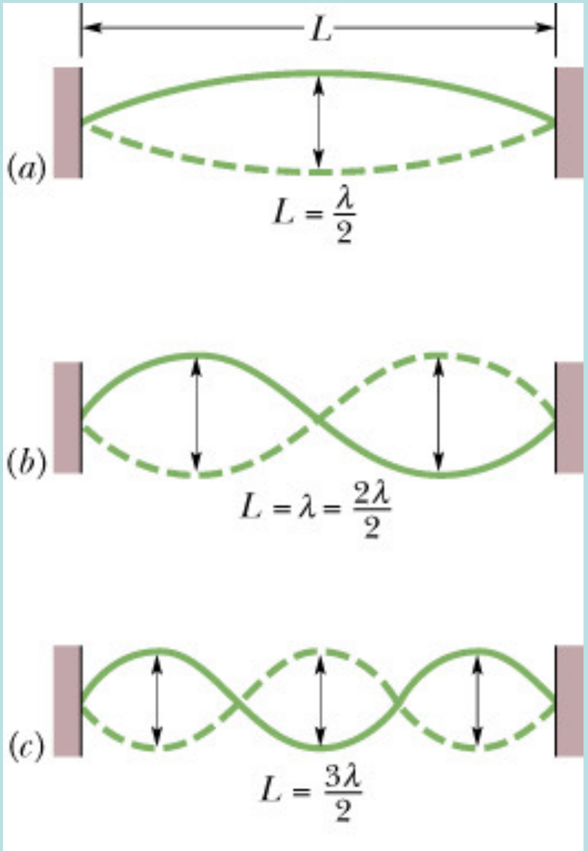
$$y = (2y_m \cdot \sin kx) \cdot \cos \omega t$$

$$kx = n\pi \qquad x = \frac{L}{2}n$$

這些無振動的弦上的點稱為節點 node，

節點之間距離是半波長。

在邊界弦固定，因此兩邊界必然是節點！



節點的距離是半波長，因此弦長必須是半波長的整數倍！ $$L = \frac{\lambda}{2}n$$

若已知弦長，則波長不能任意 $$\lambda = \frac{2L}{n}$$

頻率不能任意 $$f = \frac{v}{\lambda} = n\frac{v}{2L}$$

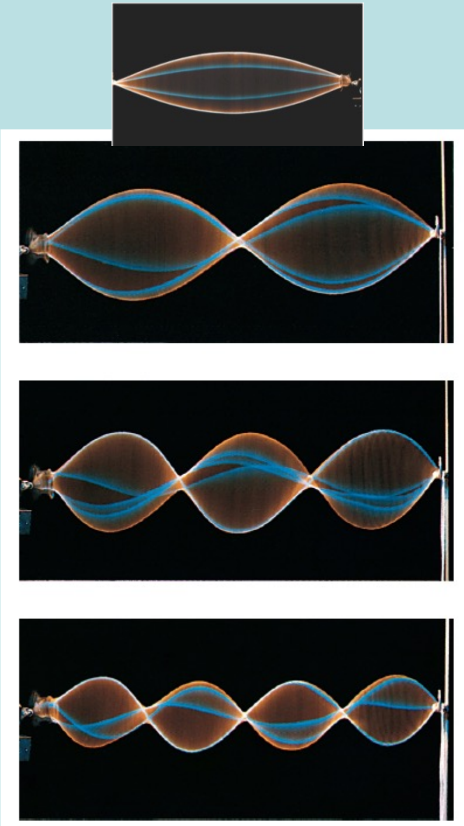
得到一系列的駐波模式，每一個模式由一自然數 n 來標定

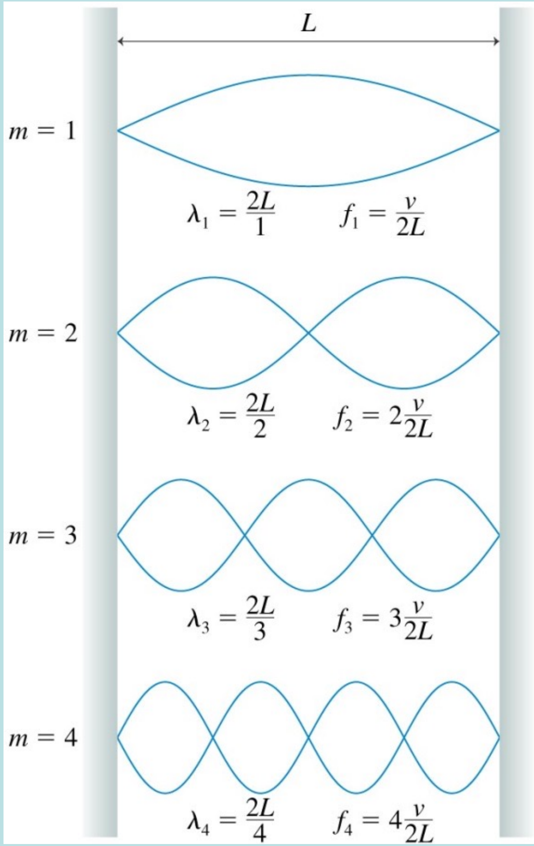
$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad f_n = n\frac{v}{2L} = nf_1 \qquad y = (2y_m \cdot \sin k_n x) \cdot \cos \omega_n t$$

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \qquad \omega_n = n\pi\frac{v}{L}$$

第 n 個模式的頻率是 $v/2L$ 的 n 倍。

不同模式振盪樣式不同，可以用節點數 $n-1$來描述。

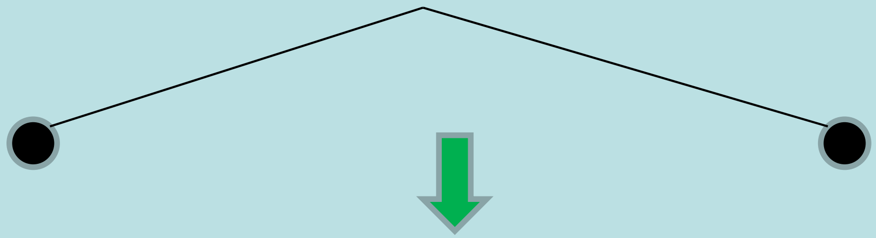




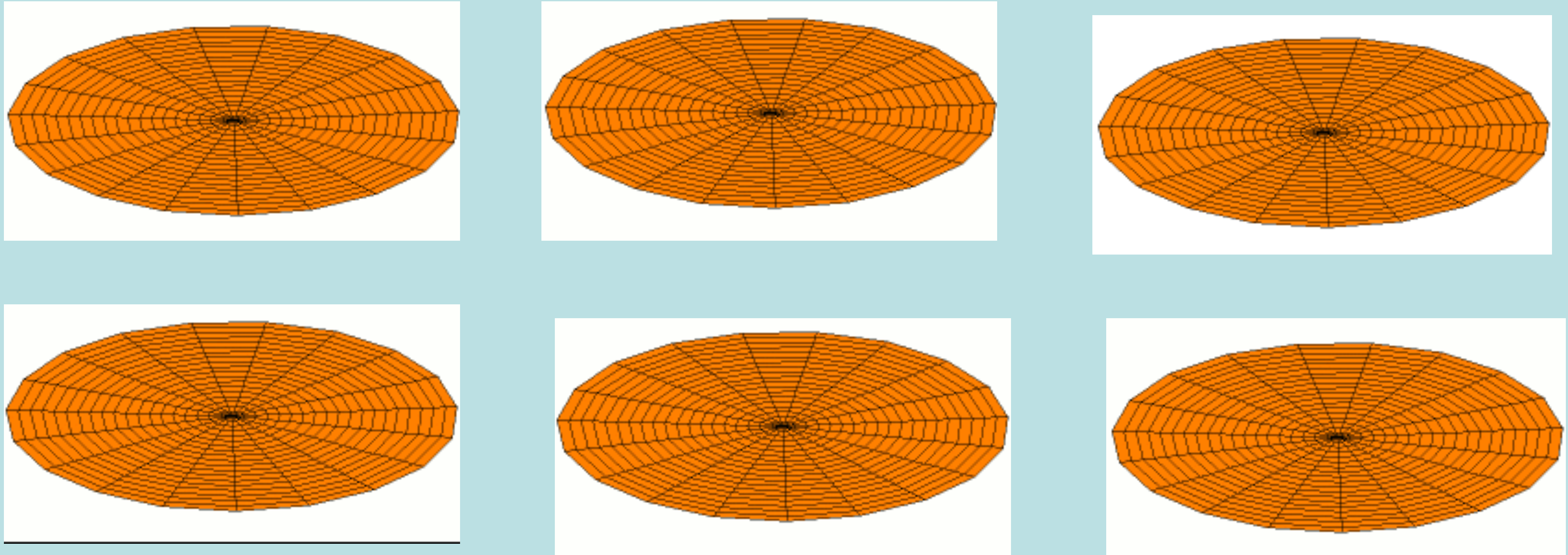
兩個固定點間的一條弦等同於是一系列無限多條獨立彈簧的組合

兩端固定的弦的任一運動可以用駐波模式的疊加來得到

$$y(x,0) = \sin\frac{\pi}{L}x - \frac{1}{9}\sin\frac{3\pi}{L}x + \cdots$$

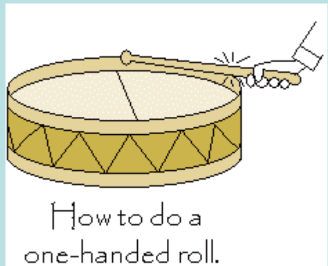


$$y(x,t) = \sin\frac{\pi}{L}x\cos\omega_1 t - \frac{1}{9}\sin\frac{3\pi}{L}x\cos\omega_3 t + \cdots$$



物體的變形模式有無限多個，

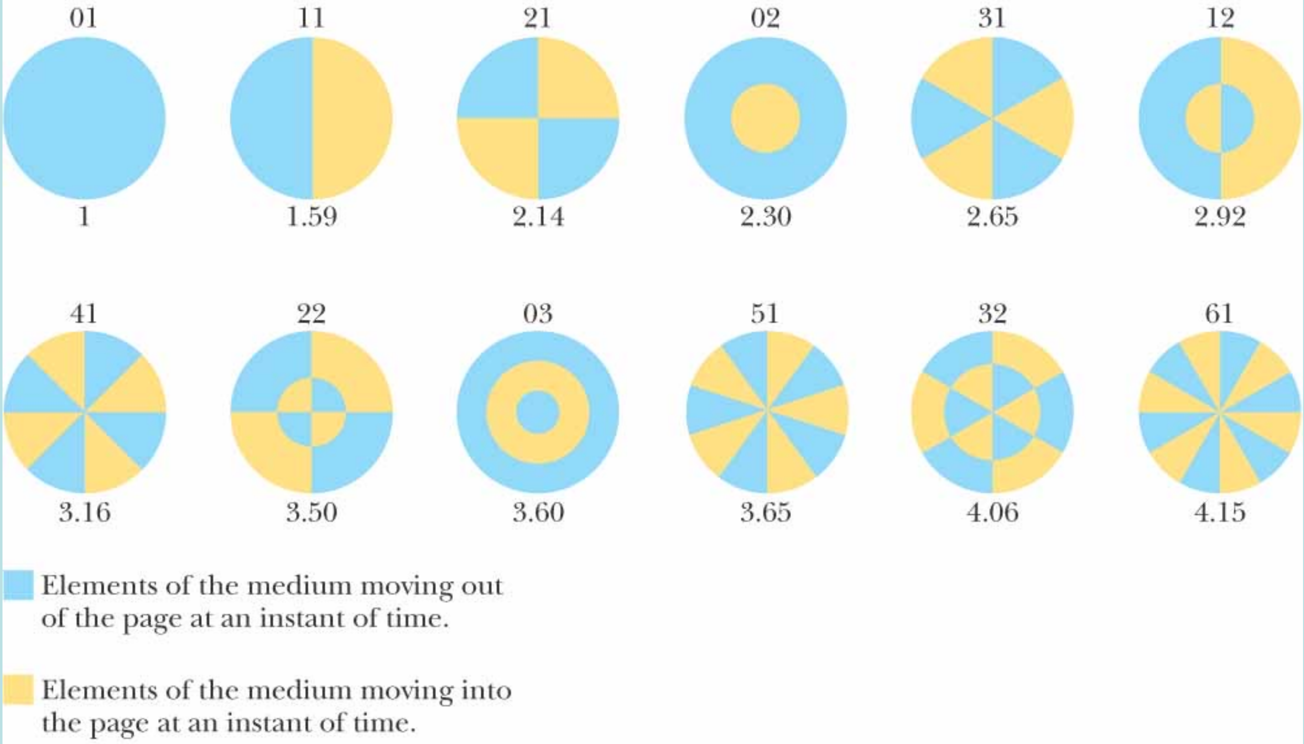
每一個模式的振動頻率不同！



一般來說，越複雜的模式，頻率越高，也越難激發。

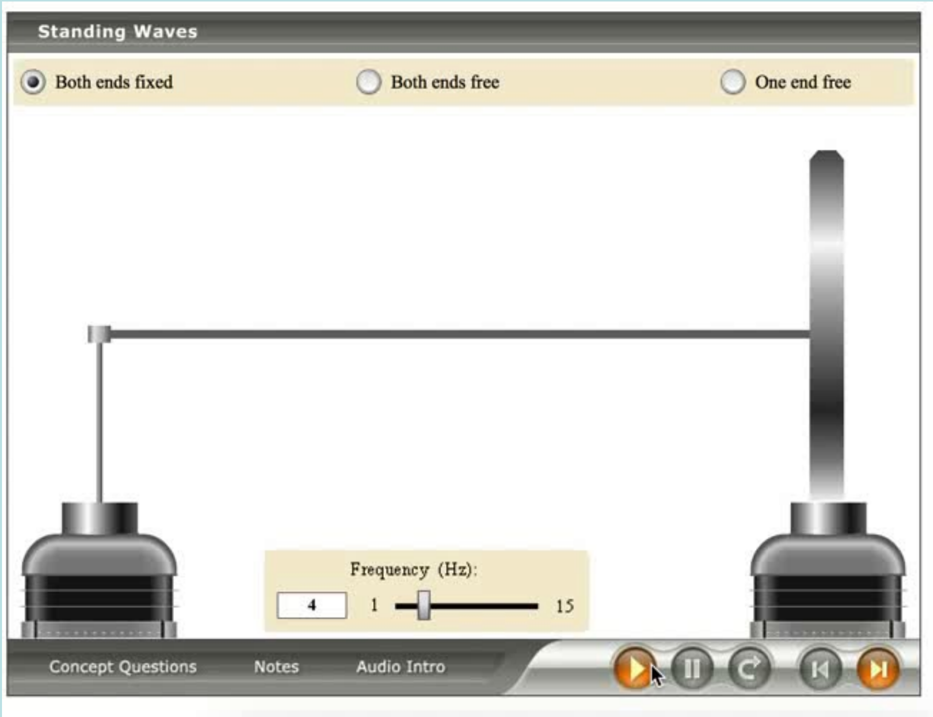
一個物體有那些振盪模式 Norm以及對應的頻率，就是該物體的一個特徵。

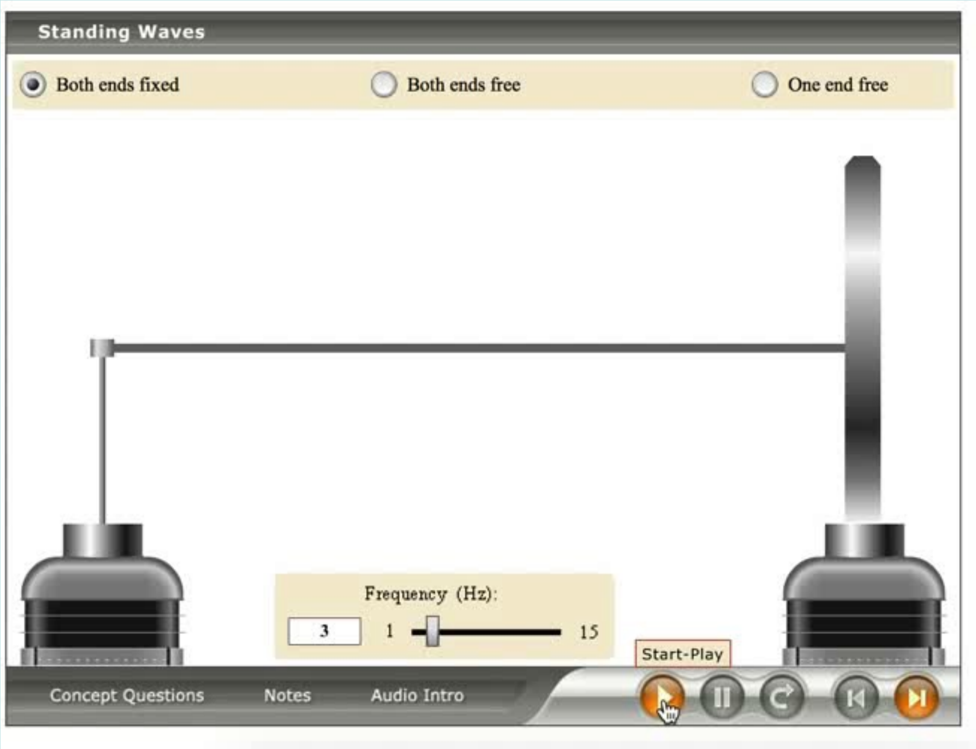
但模式並不是連續分布。因此可以分離地一個一個編號。

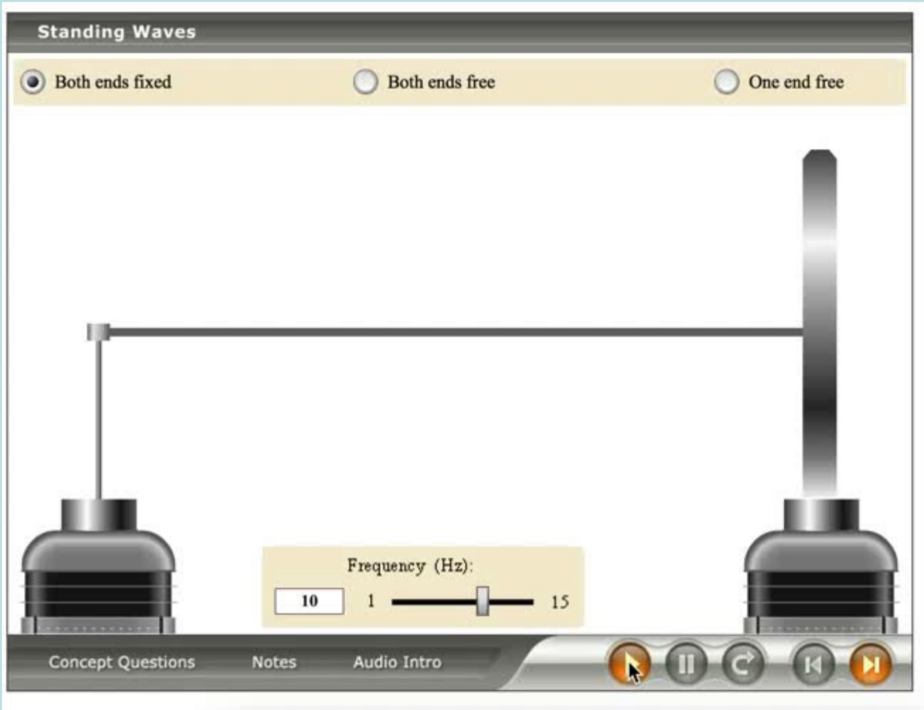


駐波的動畫


Standing Waves
Both ends fixed
Both ends free
One end free
Frequency (Hz):
2
1
15
Concept Questions
Notes
Audio Intro


Standing Waves
Both ends fixed
Both ends free
One end free
Frequency (Hz):
4
1
15
Concept Questions
Notes
Audio Intro


Standing Waves
Both ends fixed
Both ends free
One end free
Frequency (Hz):
3
1
15
Start-Play
Concept Questions
Notes
Audio Intro

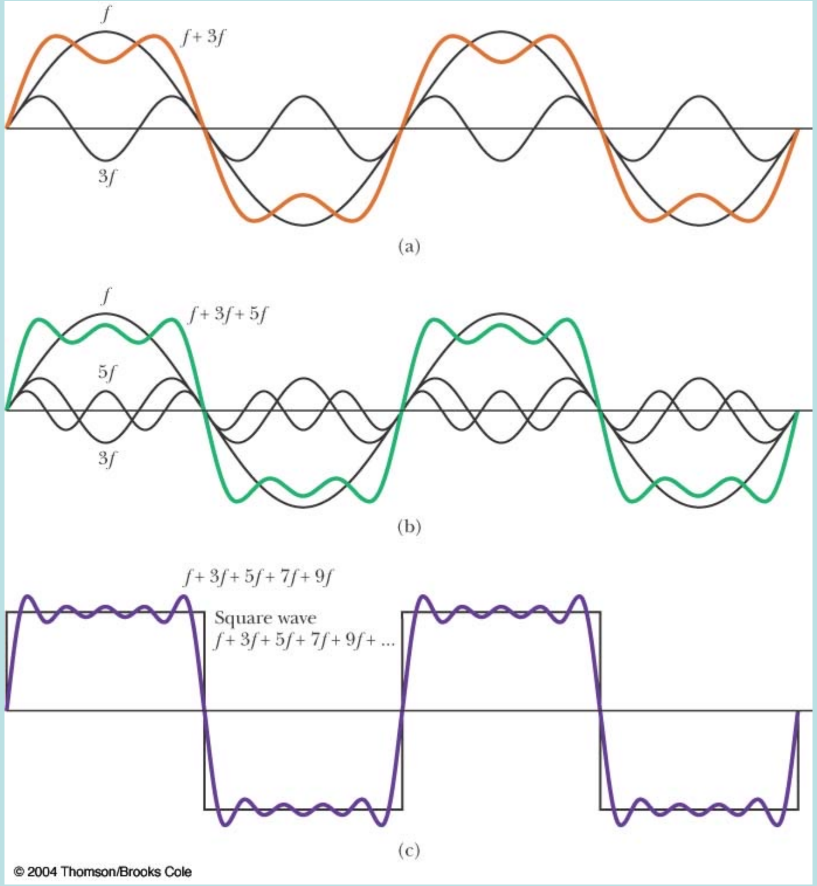

Standing Waves
Both ends fixed
Both ends free
One end free
Frequency (Hz):
10
1
15
Concept Questions
Notes
Audio Intro

Fourier Series

任一週期函數可以寫成一系列正弦及餘弦函數的疊加。

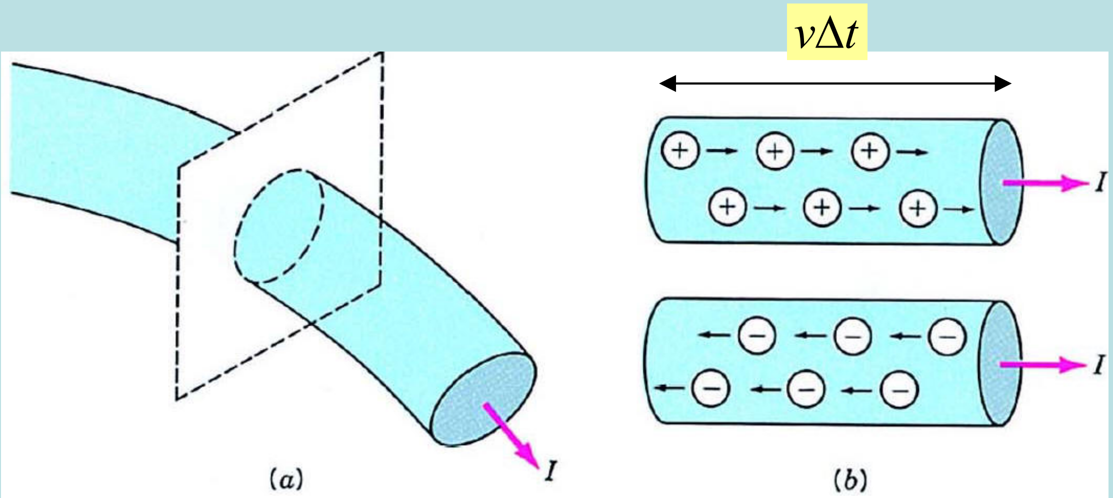
$$y(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \sin 2\pi f_n t + B_n \cos 2\pi f_n t\right)$$

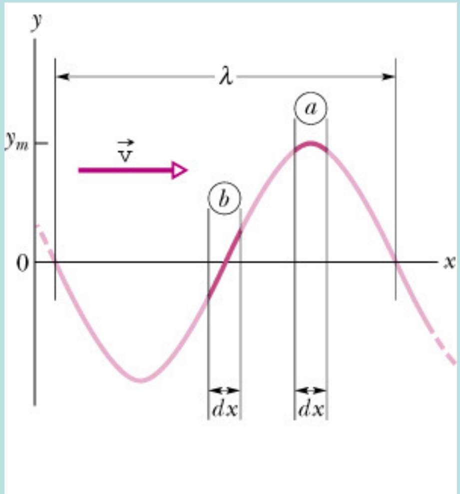
$$f_n = nf = n\frac{1}{T}$$



波的強度 Intensity

$$I \leftrightarrow \text{能量流量} \equiv \frac{\text{Energy}}{\text{Time}} = \frac{\text{Energy Density} \times v\Delta t}{\Delta t} = \text{Energy Density} \times v$$





$$\text{動能密度} = \frac{\frac{1}{2}(\mu\Delta x)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2}{\Delta x} = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$$

$$I \equiv \text{能量流量平均} \propto y_m^2\omega^2$$

在波峰處最小！