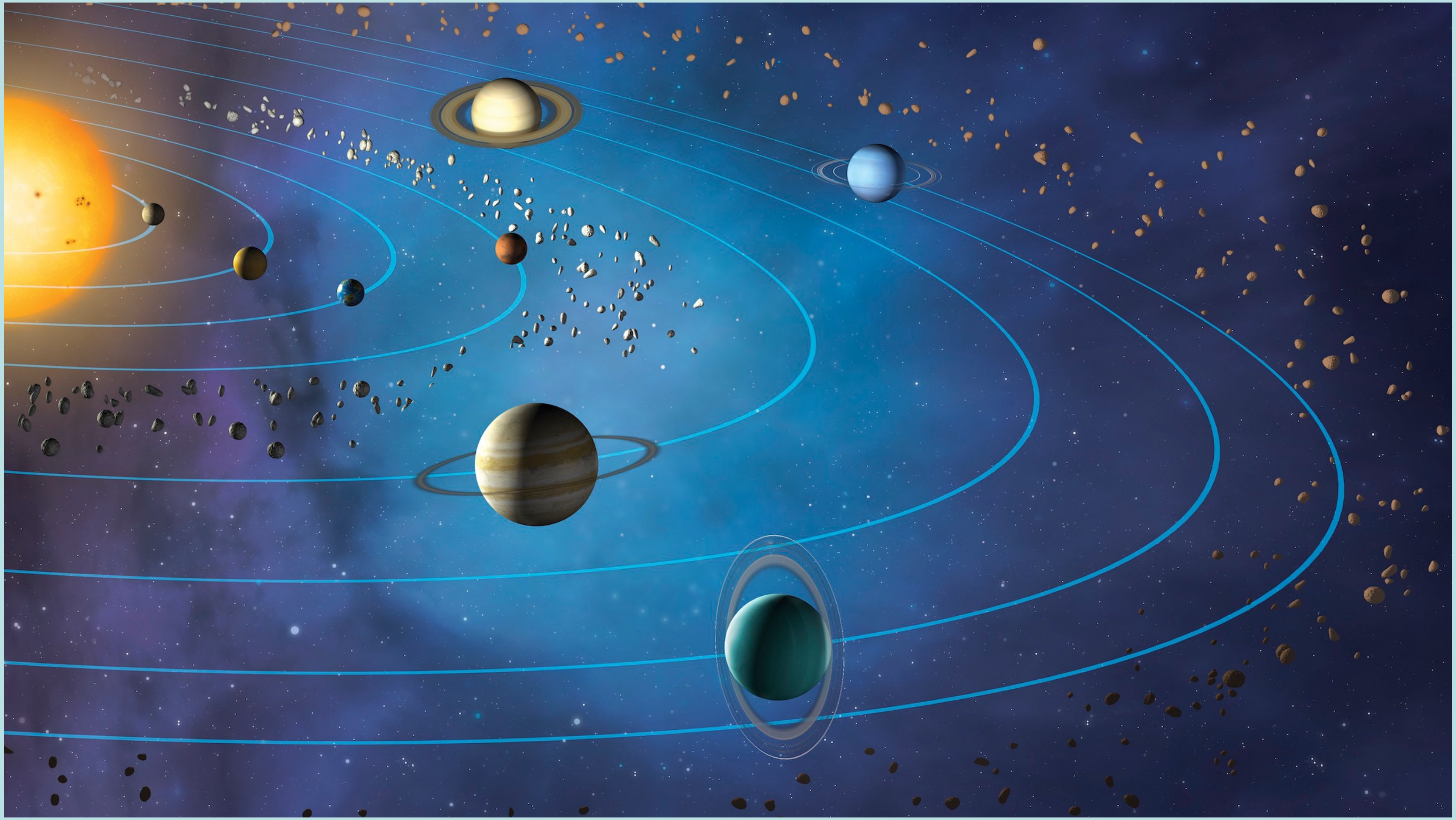
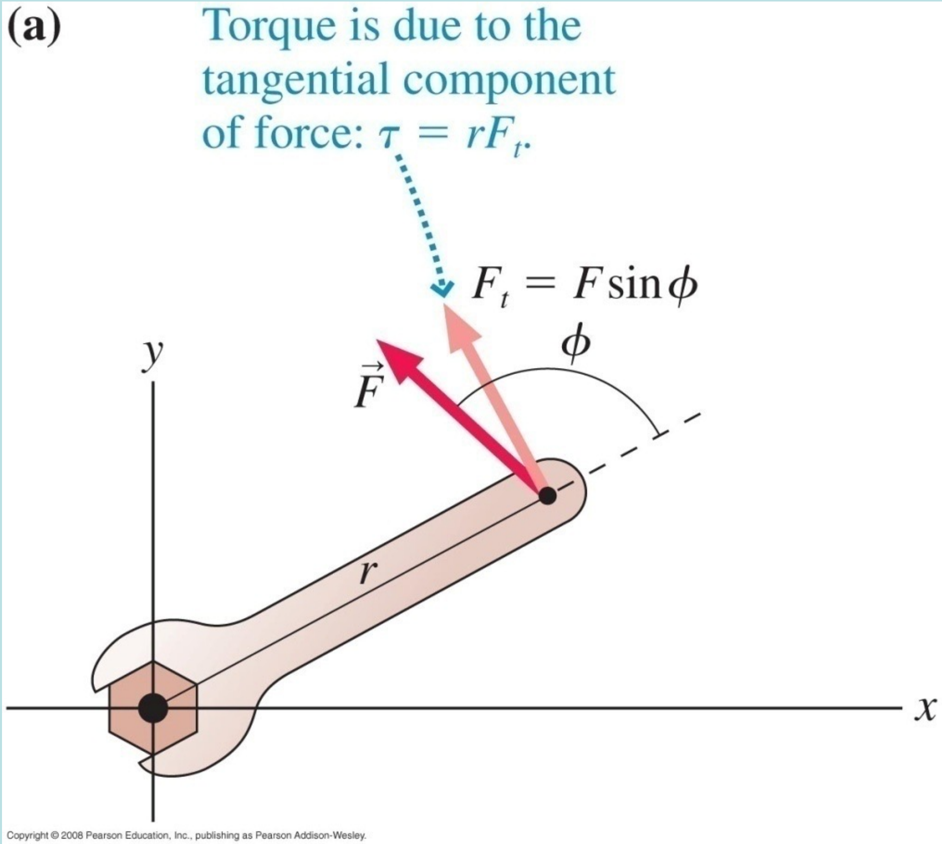
粒子在外力影響下作旋轉運動 Rotation

旋轉運動依舊由牛頓運動定律控制，但可以作一些設計使討論更容易！



物體也可受力旋轉！

造成旋轉的物理量，應該與力、力的方向、及施力的位置同時有關！



平行於力臂的力對旋轉沒有幫助！因此將垂直力臂的力乘上力臂。

$$F_t \cdot r = F\sin\phi \cdot r \equiv \tau$$

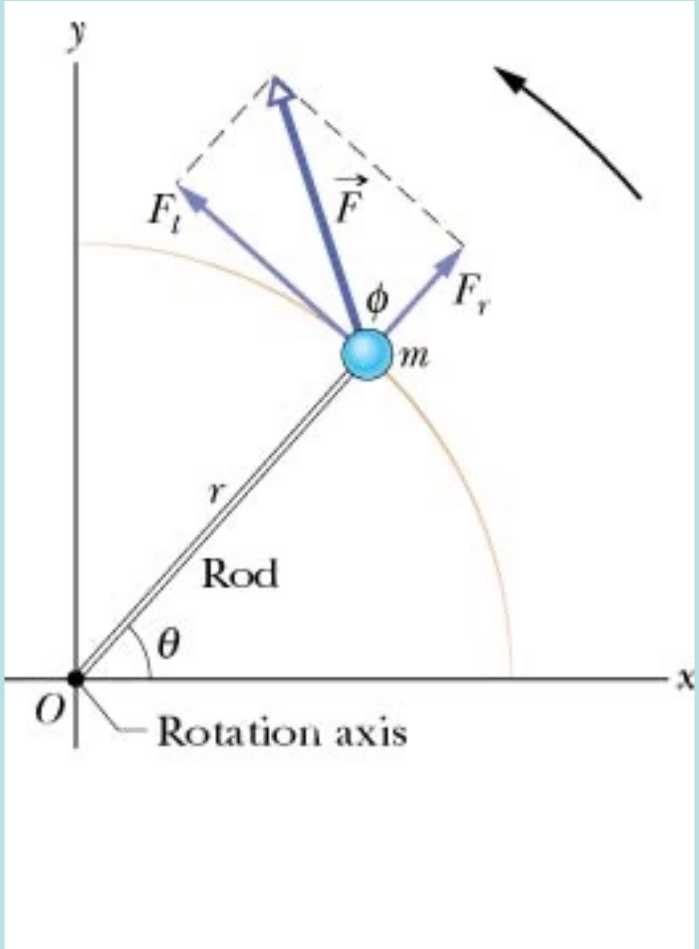
力矩 Torque 扭力

利用功來推理：

$$W = \vec{F}_t \cdot \Delta\vec{r}_t = F_t \cdot \Delta s = F_t \cdot r\Delta\theta \equiv \tau\Delta\theta$$

正好與一維運動的功對應：

$$W = F \cdot \Delta x$$



大膽的猜想：力在旋動運動的對應力矩！

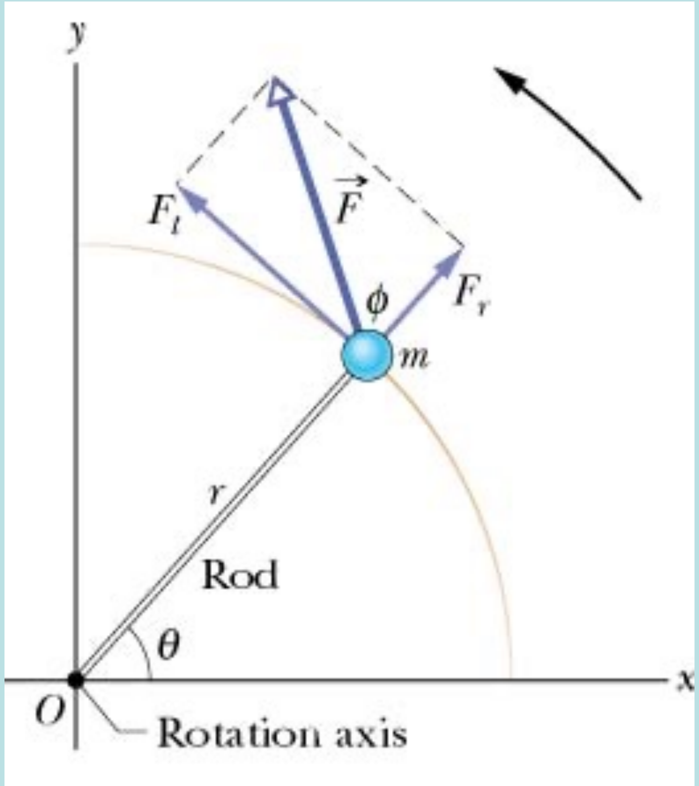
力矩 Torque 扭力

$\tau \longleftrightarrow F$

$$\tau = r \cdot F_t = r \cdot F \sin\phi = \left|\vec{r} \times \vec{F}\right|$$

如此可以定義力矩為一向量$\vec{\tau}$：

$$\vec{\tau} \equiv \vec{r} \times \vec{F}$$



$\vec{\tau} \equiv \vec{r}\times\vec{F}$ 這樣的定義有用嗎？

考慮力矩作用於一個粒子之上所產生的效應。

$$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F} = \vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p}) - \cancel{\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p}} = \frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p})$$

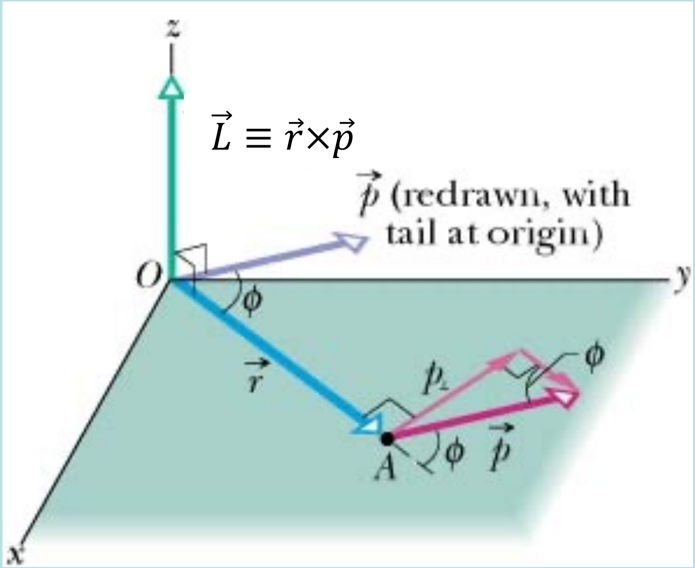
$$\vec{v}\times m\vec{v} = 0$$

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

力矩可以寫成一個向量物理量的變化率：

$$\vec{L} \equiv \vec{r}\times\vec{p}$$

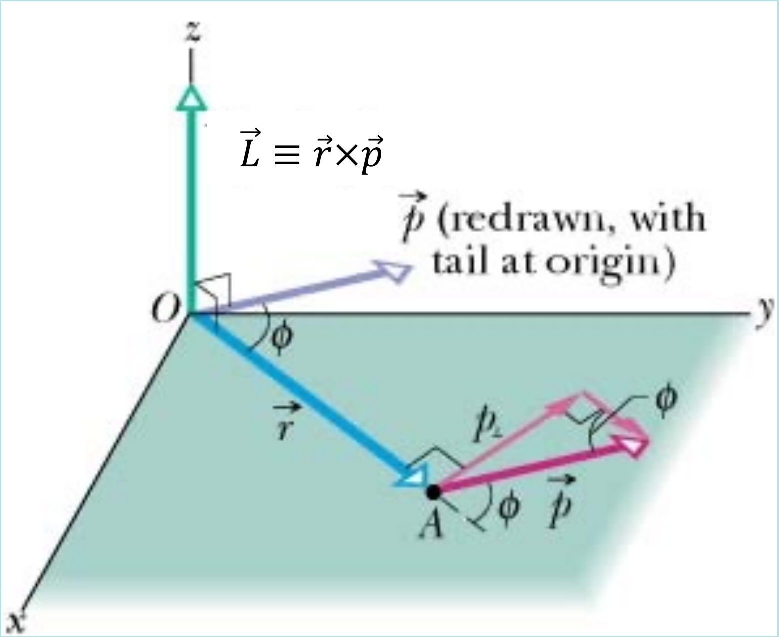
一個粒子的角動量



此公式決定了粒子的旋轉運動。

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

如同牛頓第二定律。



$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

力矩真的可以寫成一個向量物理量的變化率：

$$\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p}$$

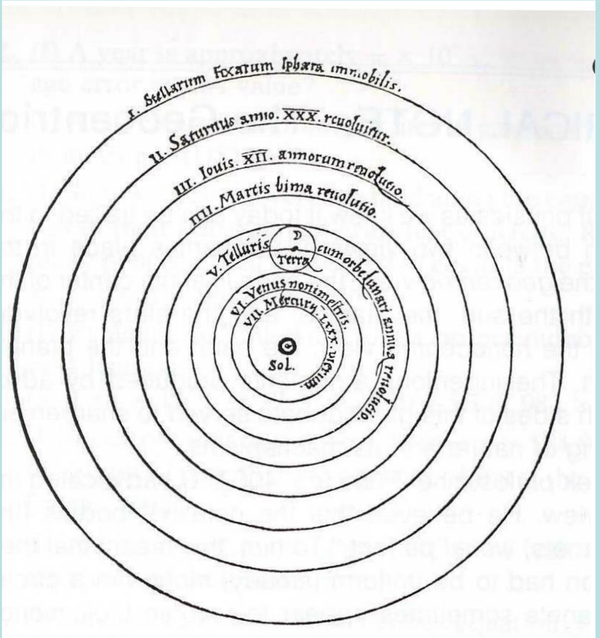
一個粒子的角動量

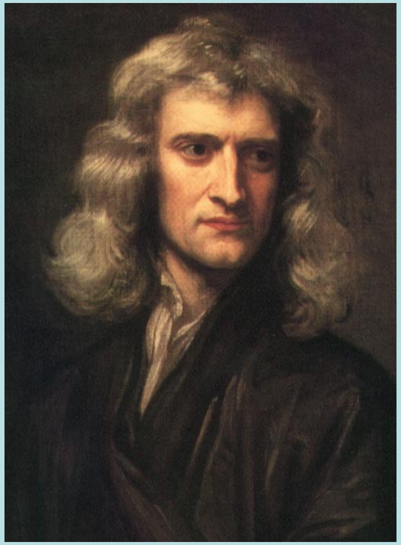
對於一平面運動的粒子，角度量是垂直於此平面的！

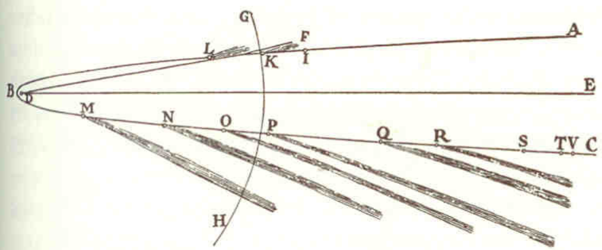
即使直線前進的粒子也有角動量！角動量不只適用於旋轉現象。

角動量與原點的選擇有關！

行星、彗星繞太陽是由於太陽的萬有引力：



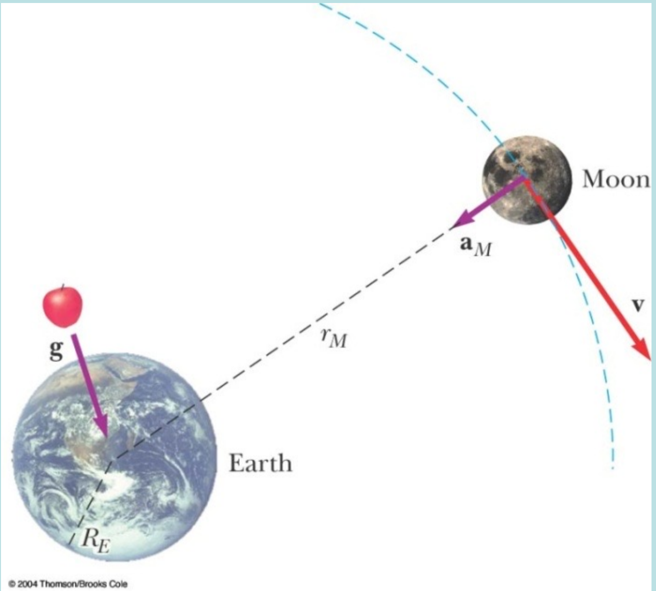




EVERY BODY PERSEVERES

The comet of 1680—"as observed by Flamsteed" and "corrected by Dr. Halley." Newton also collated sightings by Ponthio in Rome, Gallet in Avignon, Ango at La Fleche, "a young man" at Cambridge, and Mr. Arthur Storer near Hunting Creek, in Maryland, in the confines of Virginia. "Thinking it would not be improper, I have given . . . a true representation of the orbit which this comet described, and of the tail which it emitted in several places." He concludes that the tails of comets always rise away from the sun and "must be derived from some reflecting matter"—smoke, or vapor.

萬有引力是指向施力者：$\vec{F} = -G\dfrac{mM}{r^2}\hat{r}$

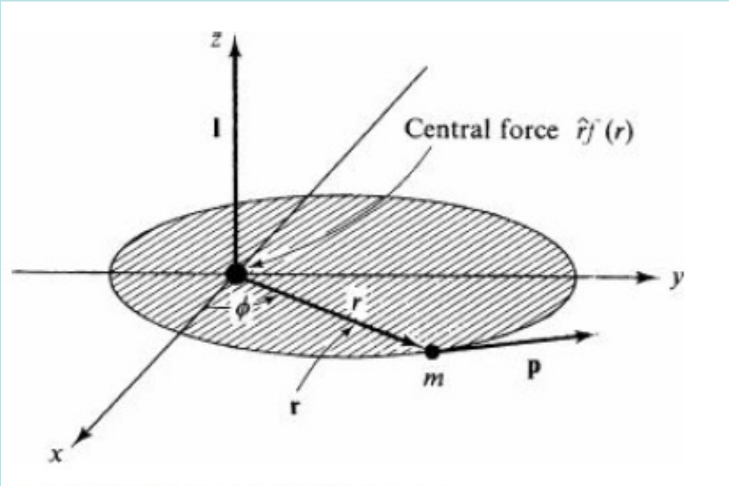


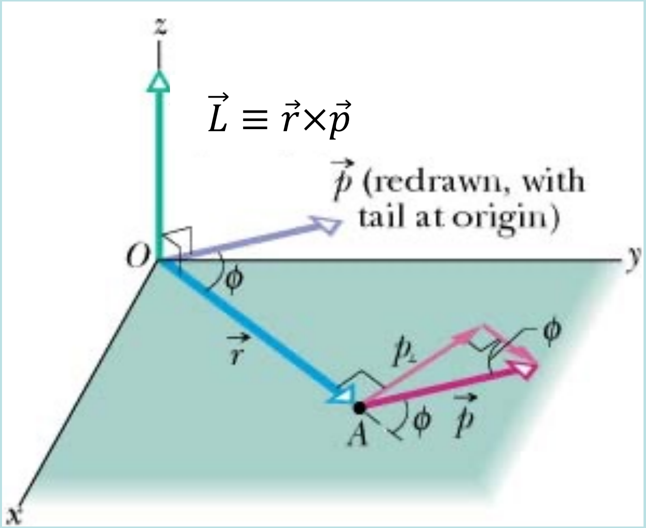
$$\tau = \left|\vec{r}\times\vec{F}\right| \sim |\vec{r}\times\hat{r}| = 0$$

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

若$\vec{\tau} = 0$，則角動量$\vec{L}$守恆。

如此一般粒子會維持在一垂直於$\vec{L} \equiv \vec{r}\times\vec{p}$的平面上運動。





行星運動是Central Force Problem 中心力問題的一個特例！

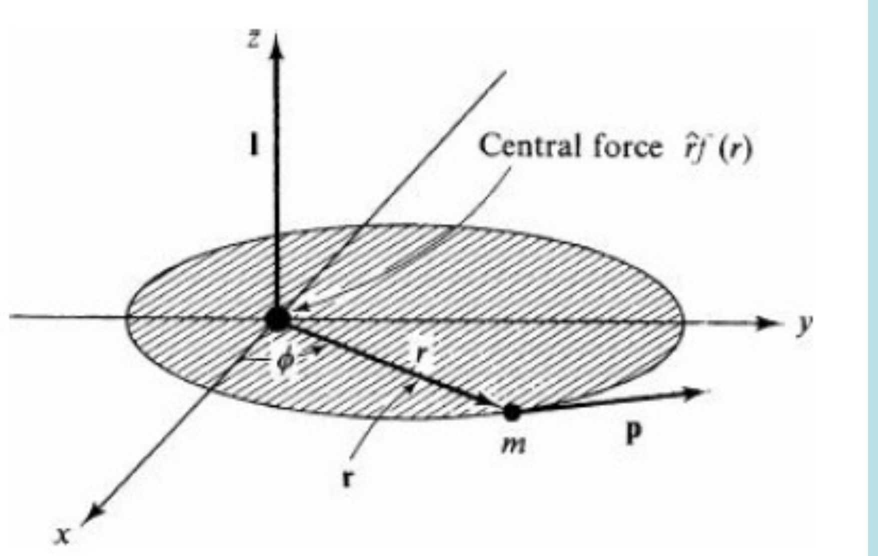


Figure 3.1 The central-force problem.

一個粒子在另一個固定的粒子周圍運動。

若兩者之間的作用力可以寫成：$\vec{F} = f(r) \cdot \hat{r}$ $\tau = |\vec{r} \times \vec{F}| \sim |\vec{r} \times \hat{r}| = 0$

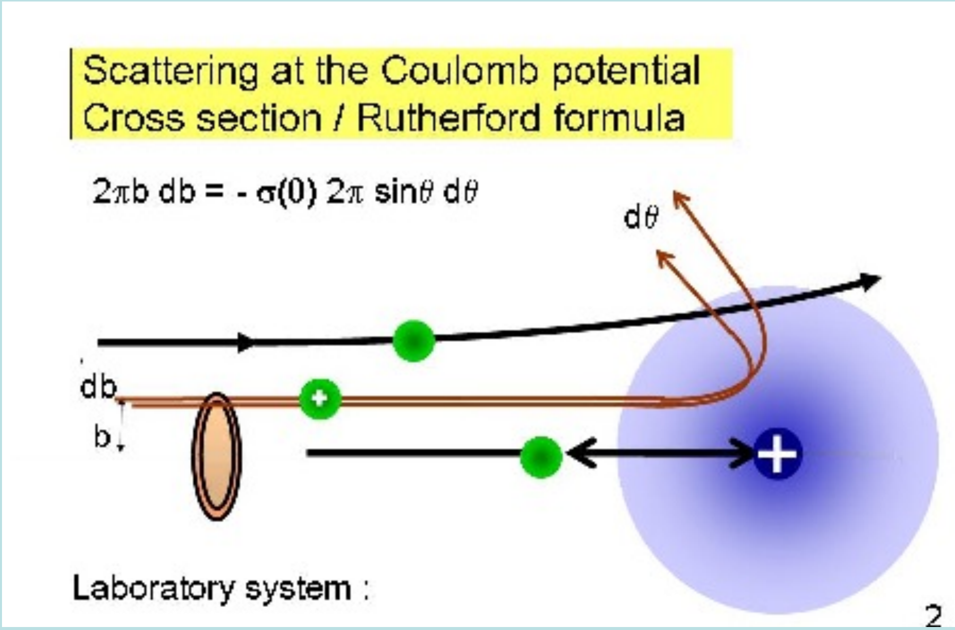
因此角度量守恆！

此粒子會在一個平面上運動！固定粒子也在這平面上。

中心力是保守力，可以用一個由r決定的位能$V(r)$來描述！

行星繞恆星的運動顯然屬於這個範圍！

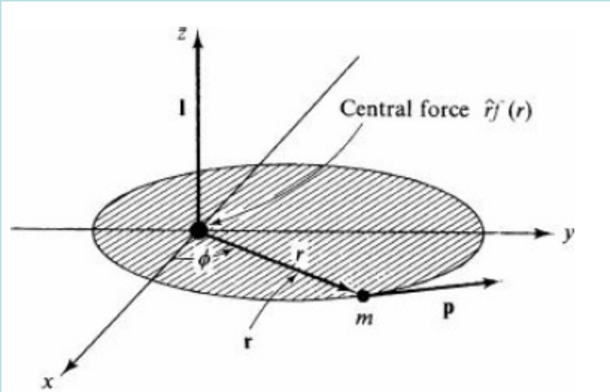
散射

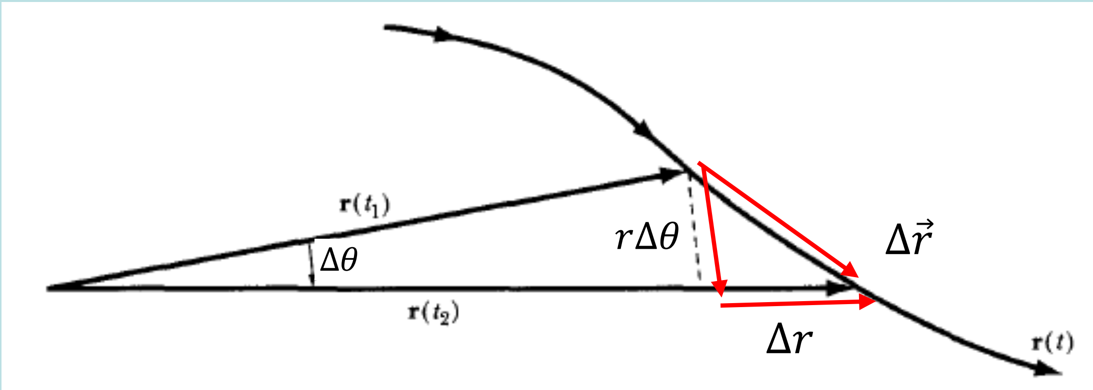


造成散射的庫侖靜電力也是中心力，散射粒子的角動量是守恆的！

考慮行星軌道運動的如下一小段。

如果把粒子的位置以極座標r, θ表示：



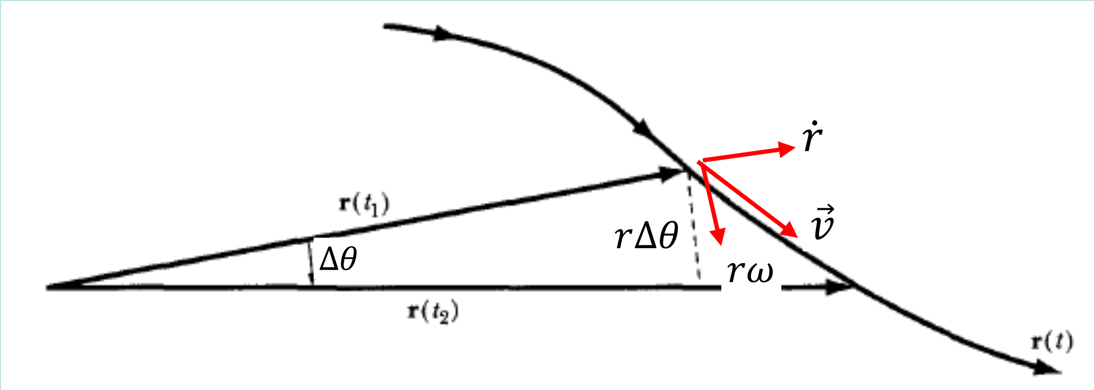


粒子運動$\Delta\vec{r}$時，一邊改變與原點的距離r，一邊繞原點旋轉！

改變與原點的距離r的運動位移是沿r的徑向：Δr。

繞原點旋轉位移近似是一個弧長，與弧角$\Delta\theta$對應： $\Delta s(t) = r\Delta\theta(t)$

關鍵是：這兩種運動近似是彼此垂直的！



粒子的速度$\vec{v}$也可以分解成沿$\hat{r}$的方向的分量及垂直於$\hat{r}$的方向的分量。

這兩個速度$\vec{v}$分量分別對應距離的變化率、及旋轉的快慢。

速度$\vec{v}$沿$\hat{r}$的方向的分量，就是距離的變化率！

$$\frac{\Delta r}{\Delta t} \to \frac{dr}{dt}$$

沿垂直於$\hat{r}$的方向的分量，就是旋轉的速率。

$$\frac{r\Delta\theta}{\Delta t} \to r\frac{d\theta}{dt} = r\omega$$

這兩個分量彼此垂直，速度大小就可以寫成：

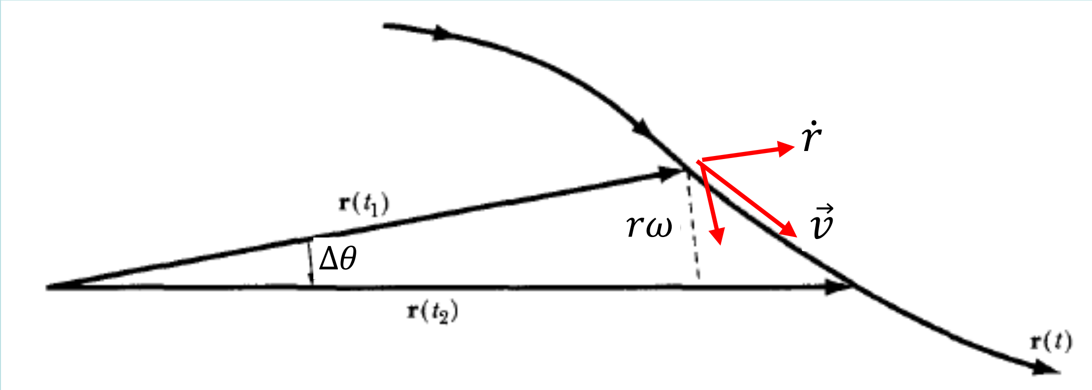
$$\omega \equiv \frac{d\theta}{dt}$$

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\omega^2$$

轉動動能

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\omega^2\right]$$

似乎轉動與徑向運動可以分開看！



中心力的力矩為零，因此粒子的角動量守恆：

將粒子的角動量以極座標表示：

$$L \equiv |\vec{r}\times\vec{p}| = r\cdot p_{\perp} = r\cdot mr\omega = mr^2\omega$$

守恆的角動量大小記為l。

$$\omega = \frac{l}{mr^2}$$

角速度ω由距離決定！

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}mr^2\omega^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + V_{\text{eff}}(r)$$

轉動動能如同位能一樣！將轉動動能併入位能之中！

二維運動等效於一個在有效位能$V_{\text{eff}}(r)$作用下的一維運動！

$$V_{\text{eff}}(r) \equiv \frac{l^2}{2mr^2} + V(r)$$

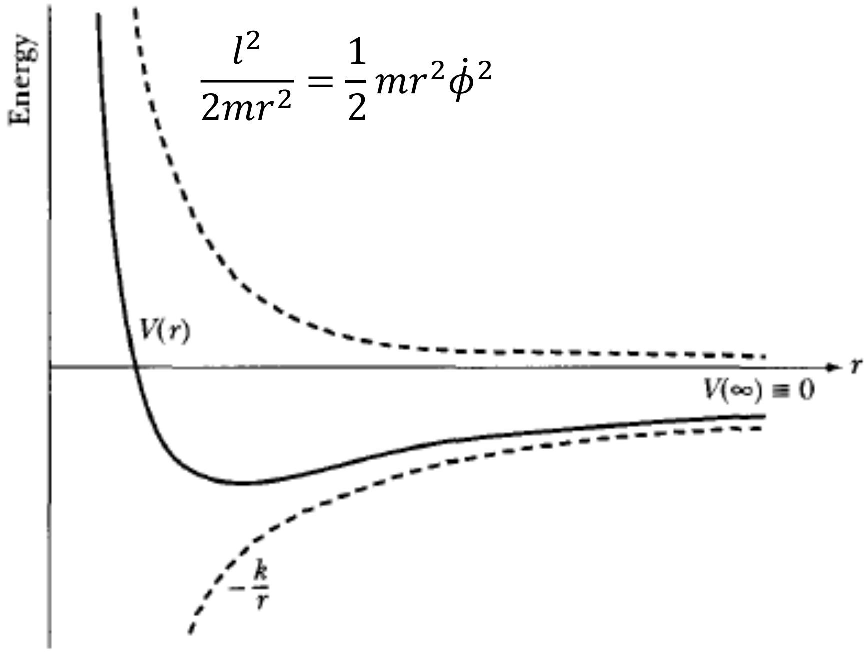
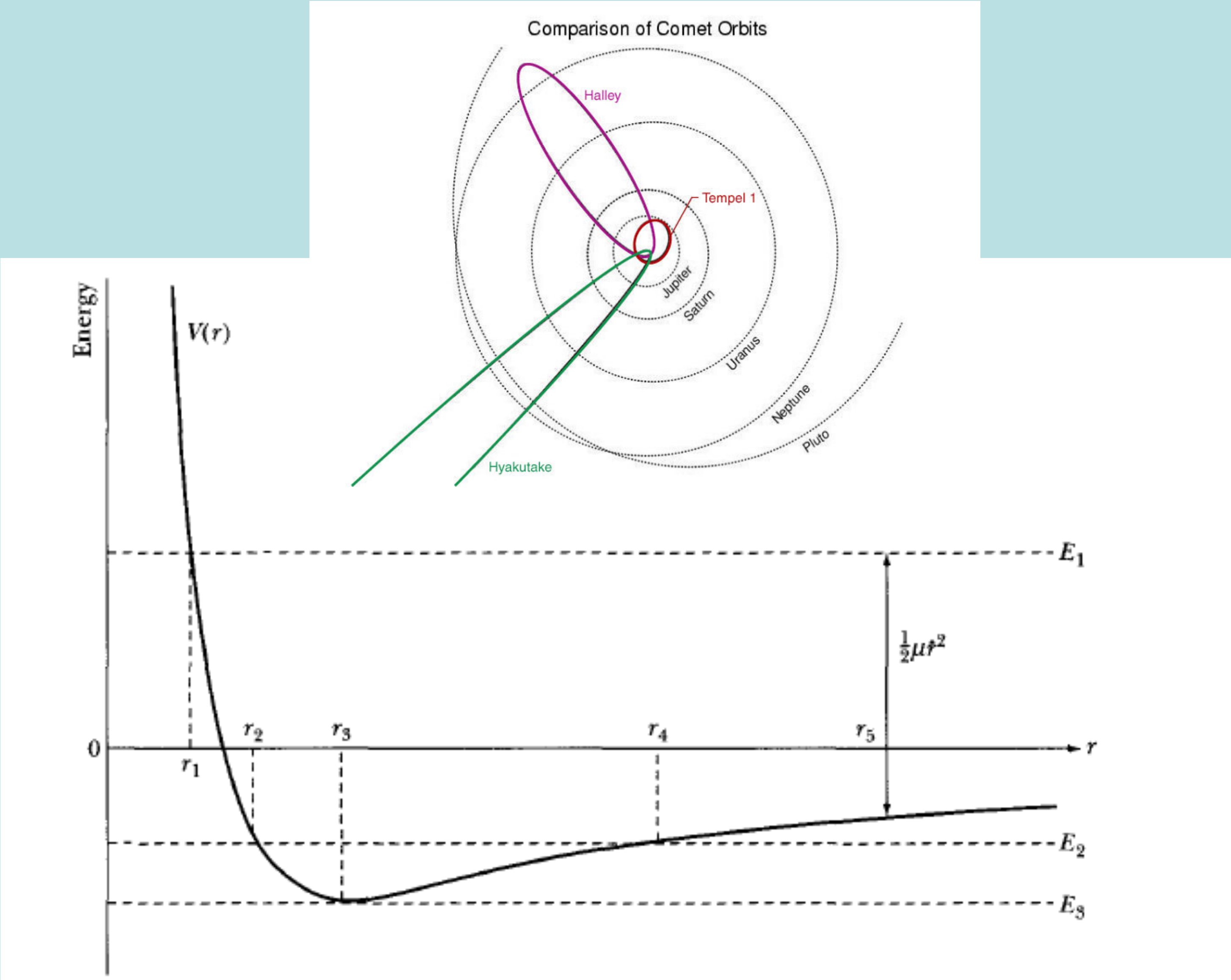


FIGURE 8-5 The effective potential for gravitational attraction $V(r)$ is composed of the real potential $-k/r$ term and the centrifugal potential energy $l^2/2\mu r^2$.

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$



$E = E_1 > 0$ 則粒子成自由態。如彗星、或是散射一般。

$E = E_2 < 0$ 則粒子成束縛態。距離在$r_2 < r < r_4$。橢圓形軌道。

$E = E_3 < 0$ 則粒子軌道是圓形。距離在$r = r_3$。

粒子永遠不會墜入到原點。

$$E=\frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{l^2}{2mr^2}+V(r)=\frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+V_{\mathrm{eff}}(r)$$

有了兩個守恆量l,E做標記，粒子的運動可以解出來：

$$\frac{dr}{dt}=\sqrt{2m^{-1}}\cdot\sqrt{E-V_{\mathrm{eff}}(r)}$$

$$\sqrt{\frac{m}{2}}\,dr\cdot\frac{1}{\sqrt{E-V_{\mathrm{eff}}(r)}}=dt$$

$$\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{r_0}^{r}dr\cdot\frac{1}{\sqrt{E-V_{\mathrm{eff}}(r)}}=t$$

兩邊積分

距離 r 與時間 t 的關係可以解出來！

$$\frac{dr}{d\phi}=\frac{\dot r}{\dot\phi}=\frac{mr^2}{l}\sqrt{2m^{-1}}\cdot\sqrt{E-V_{\mathrm{eff}}(r)}$$

$$l\sqrt{\frac{1}{2m}}\int_{r_0}^{r}dr\cdot\frac{1}{r^2\sqrt{E-V_{\mathrm{eff}}(r)}}=\phi-\phi_0$$

距離r與角度ϕ的關係，也就是整個軌跡，可以解出來！

The equation for the path of a particle moving under the influence of a central force whose magnitude is inversely proportional to the square of the distance between the particle and the force center can be obtained (see Equation 8.17) from

$$\theta(r) = \int \frac{(l/r^2)\,dr}{\sqrt{2\mu\left(E + \frac{k}{r} - \frac{l^2}{2\mu r^2}\right)}} + \text{constant} \tag{8.38}$$

The integral can be evaluated if the variable is changed to $u \equiv l/r$ (see Problem 8-2). If we define the origin of θ so that the minimum value of r is at $\theta = 0$, we find

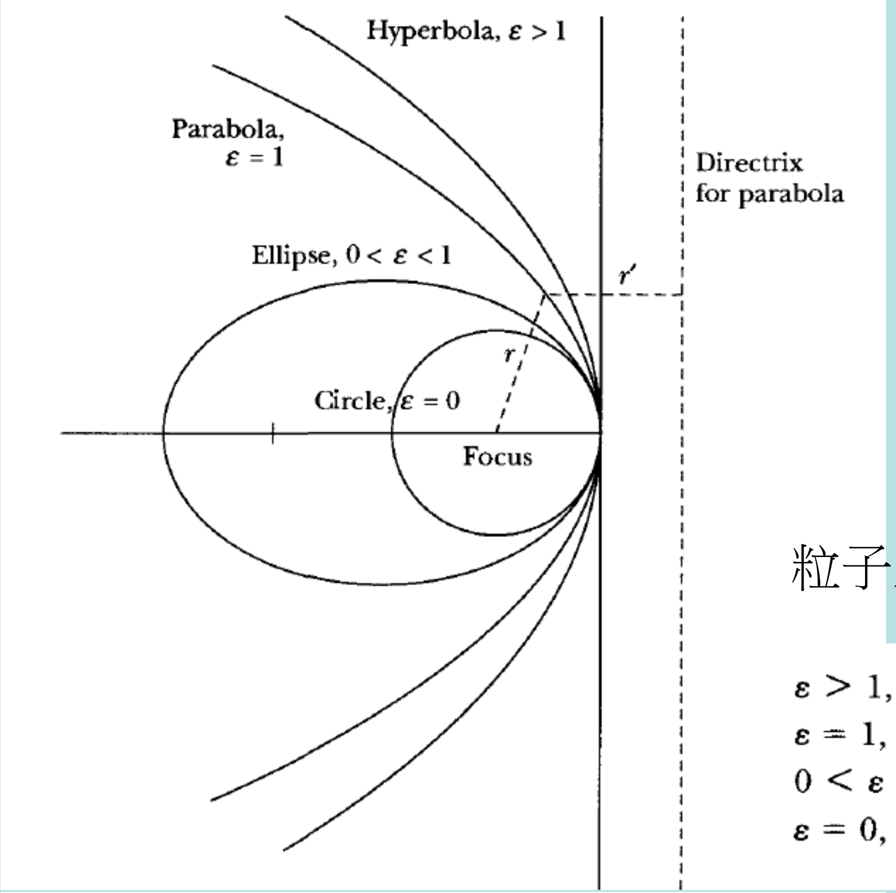
$$\cos\theta = \frac{\frac{l^2}{\mu k}\cdot\frac{1}{r} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}}} \tag{8.39}$$

Let us now define the following constants:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &\equiv \frac{l^2}{\mu k} \\ \varepsilon &\equiv \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}} \end{aligned}\right\} \tag{8.40}$$

Equation 8.39 can thus be written as

$$\boxed{\frac{\alpha}{r} = 1 + \varepsilon\cos\theta} \tag{8.41}$$



粒子永遠不會墜入到原點。

$\varepsilon > 1,$	$E > 0$	Hyperbola
$\varepsilon = 1,$	$E = 0$	Parabola
$0 < \varepsilon < 1,$	$V_{min} < E < 0$	Ellipse
$\varepsilon = 0,$	$E = V_{min}$	Circle

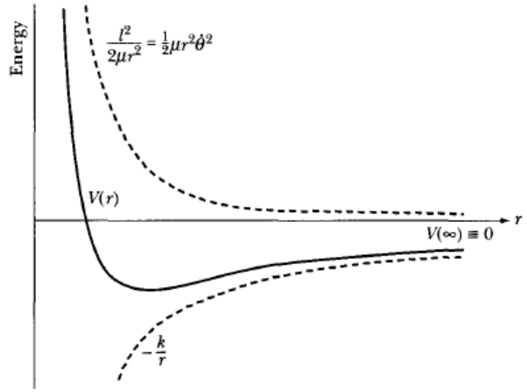


FIGURE 8-5 The effective potential for gravitational attraction $V(r)$ is composed of the real potential $-k/r$ term and the centrifugal potential energy $l^2/2\mu r^2$.

$$a = \frac{\alpha}{1 - \varepsilon^2} = \frac{k}{2|E|}$$

$$b = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \frac{l}{\sqrt{2\mu|E|}}$$

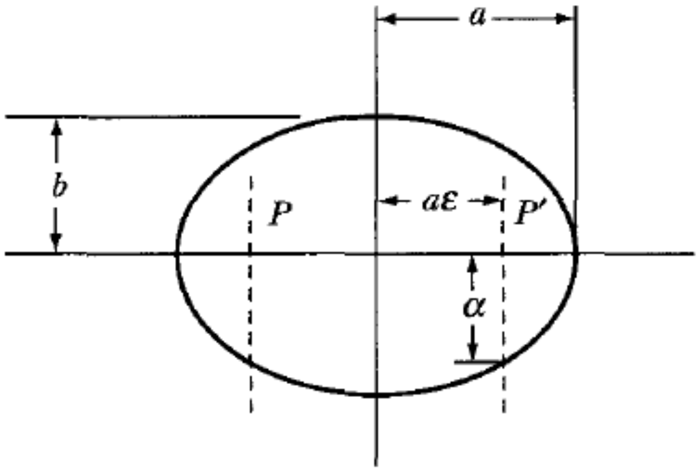
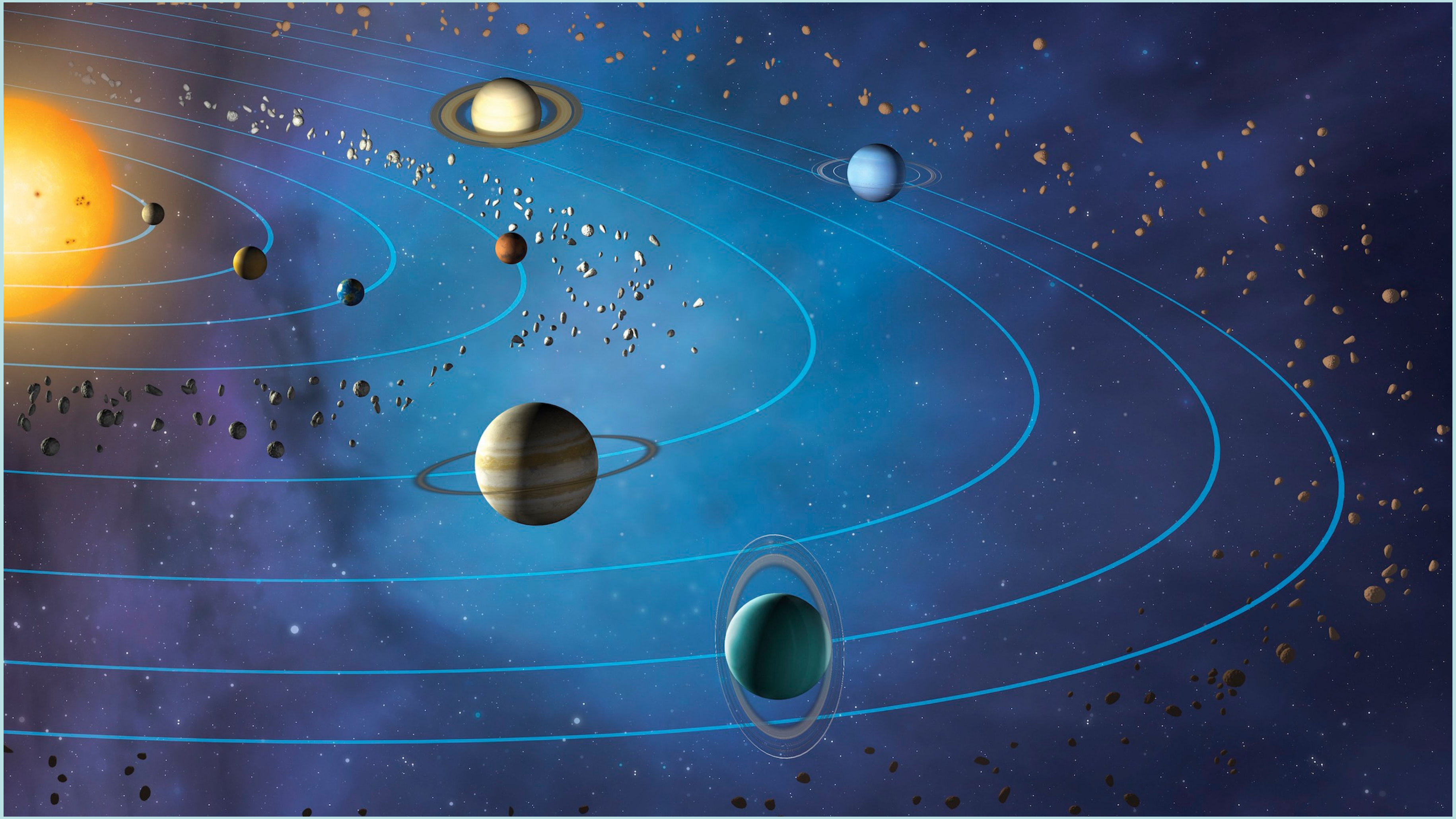


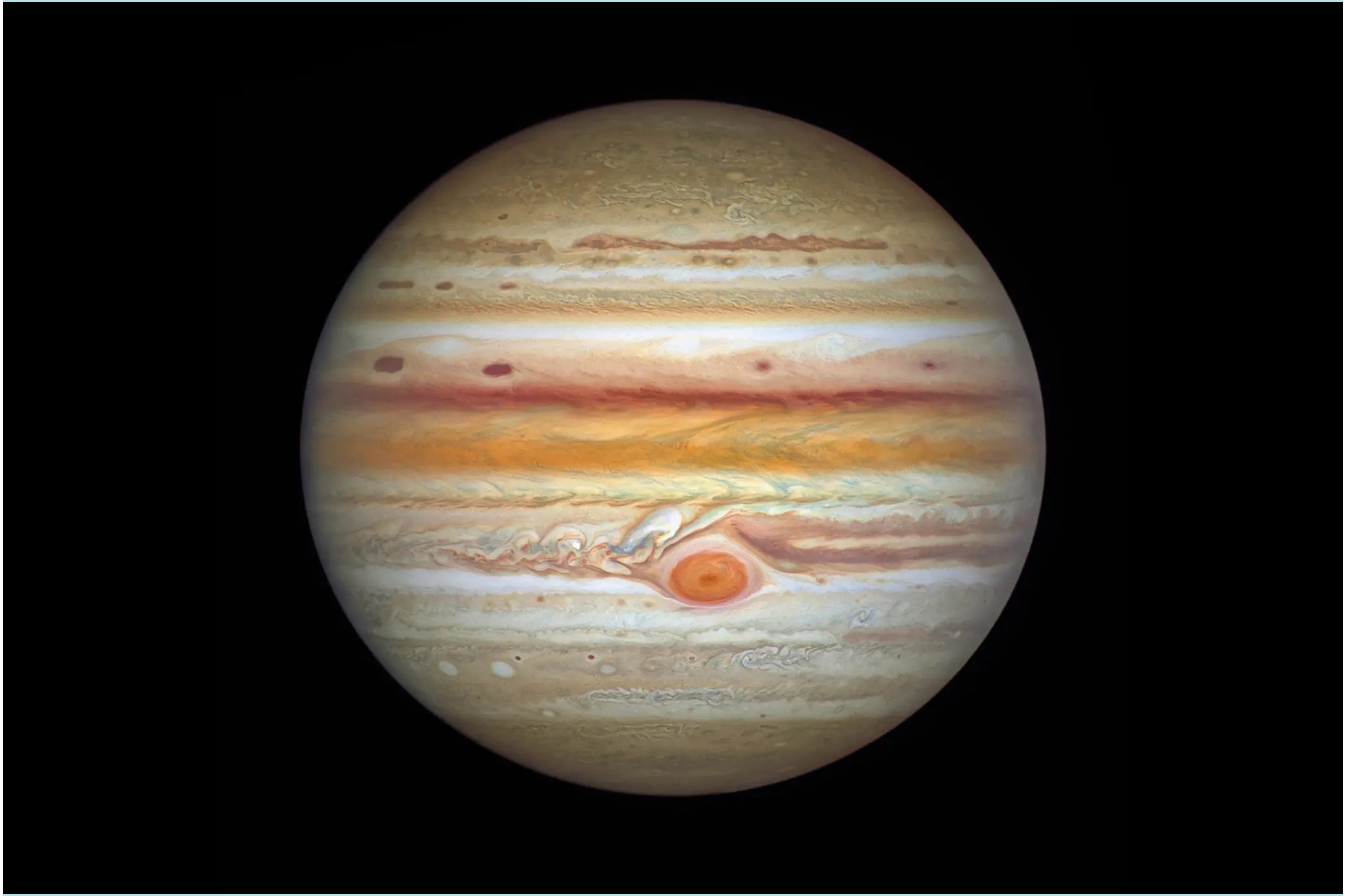
FIGURE 8-9 The geometry of elliptic orbits is shown in terms of parameters α, ε, a, and b. P and P' are the foci.

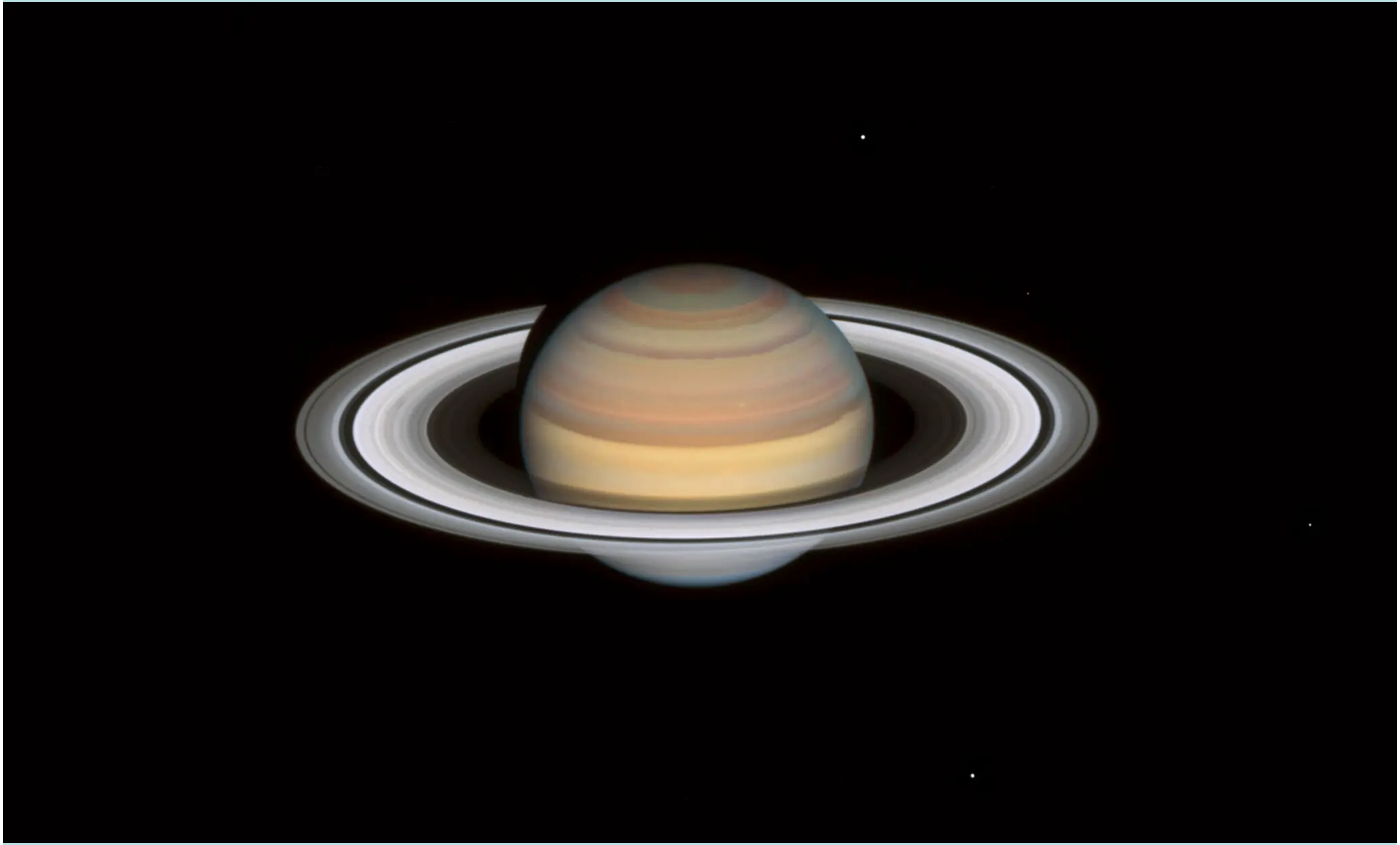
and P' are the foci. From this diagram, we see that the apsidal distances ($r_{\min}$ and $r_{\max}$ as measured from the foci to the orbit) are given by

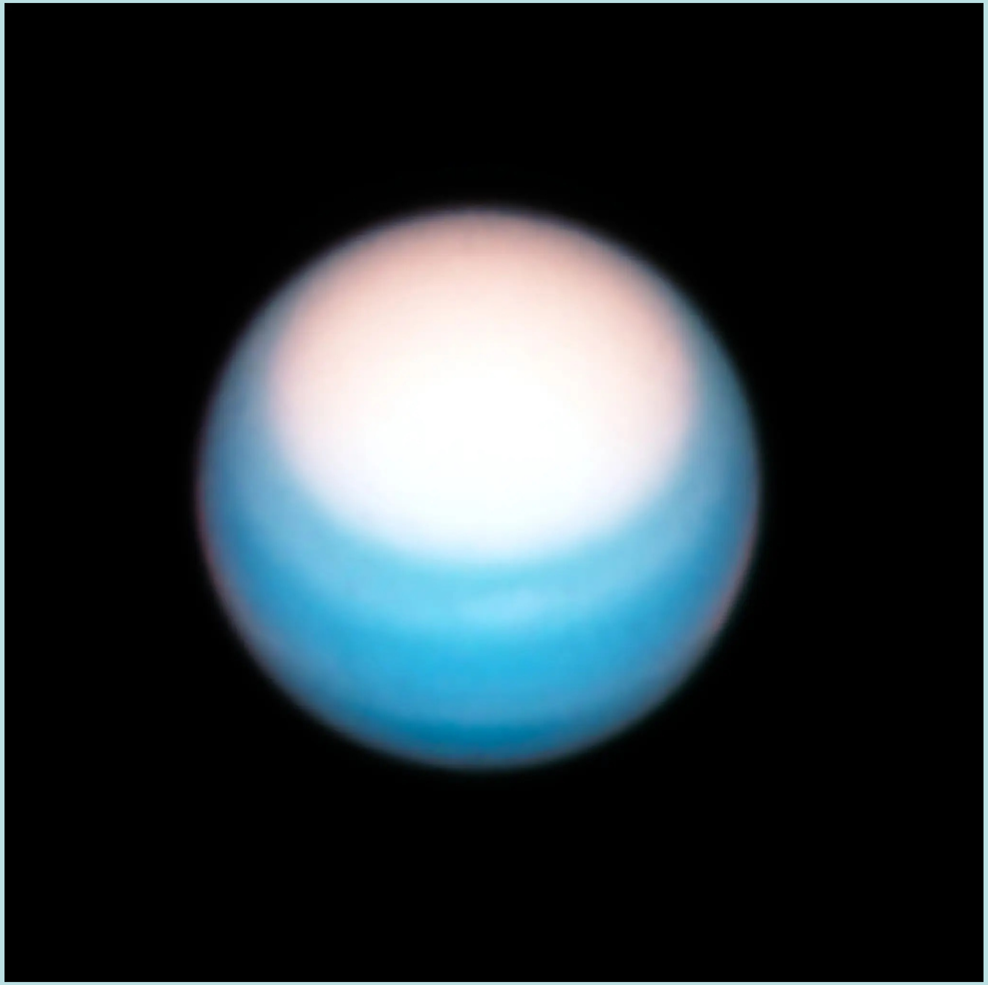
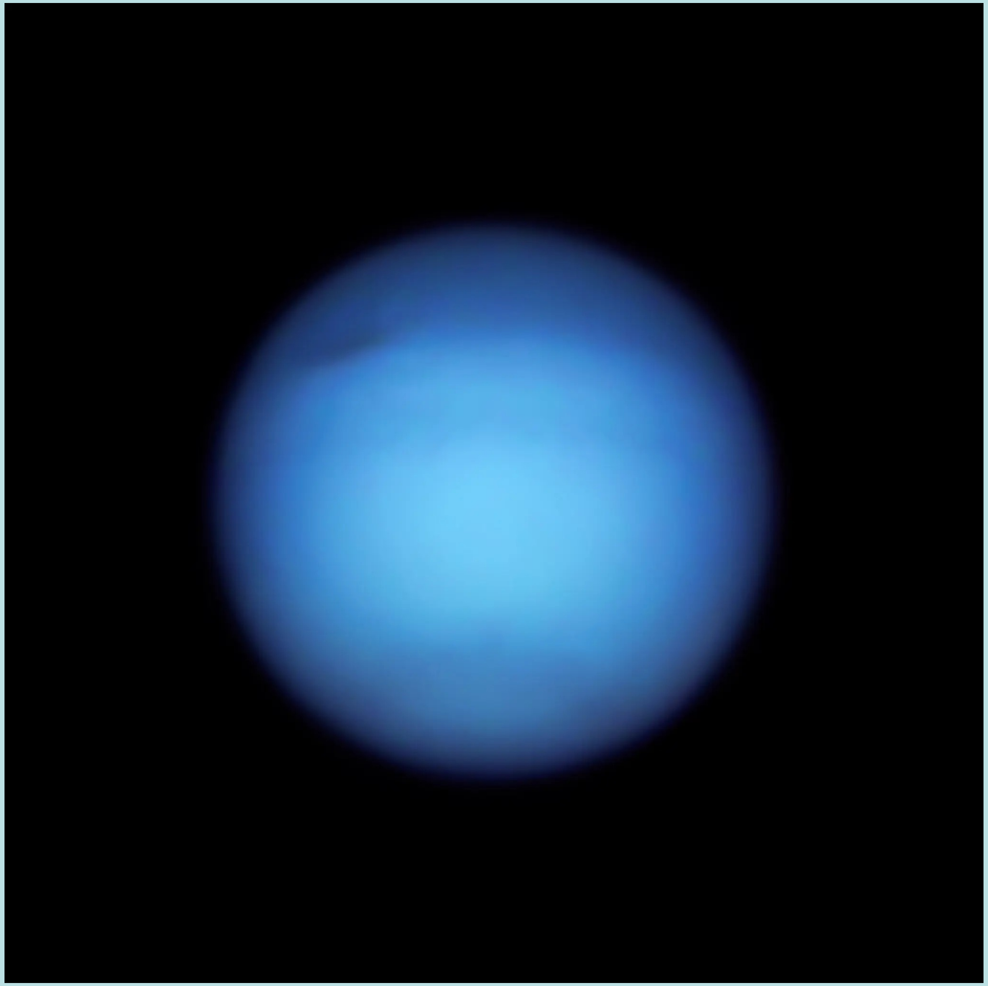
$$\left.\begin{aligned} r_{\min} &= a(1 - \varepsilon) = \frac{\alpha}{1 + \varepsilon} \\ r_{\max} &= a(1 + \varepsilon) = \frac{\alpha}{1 - \varepsilon} \end{aligned}\right\} \tag{8.44}$$

行星還有自轉，這時就不能把行星看成粒子！







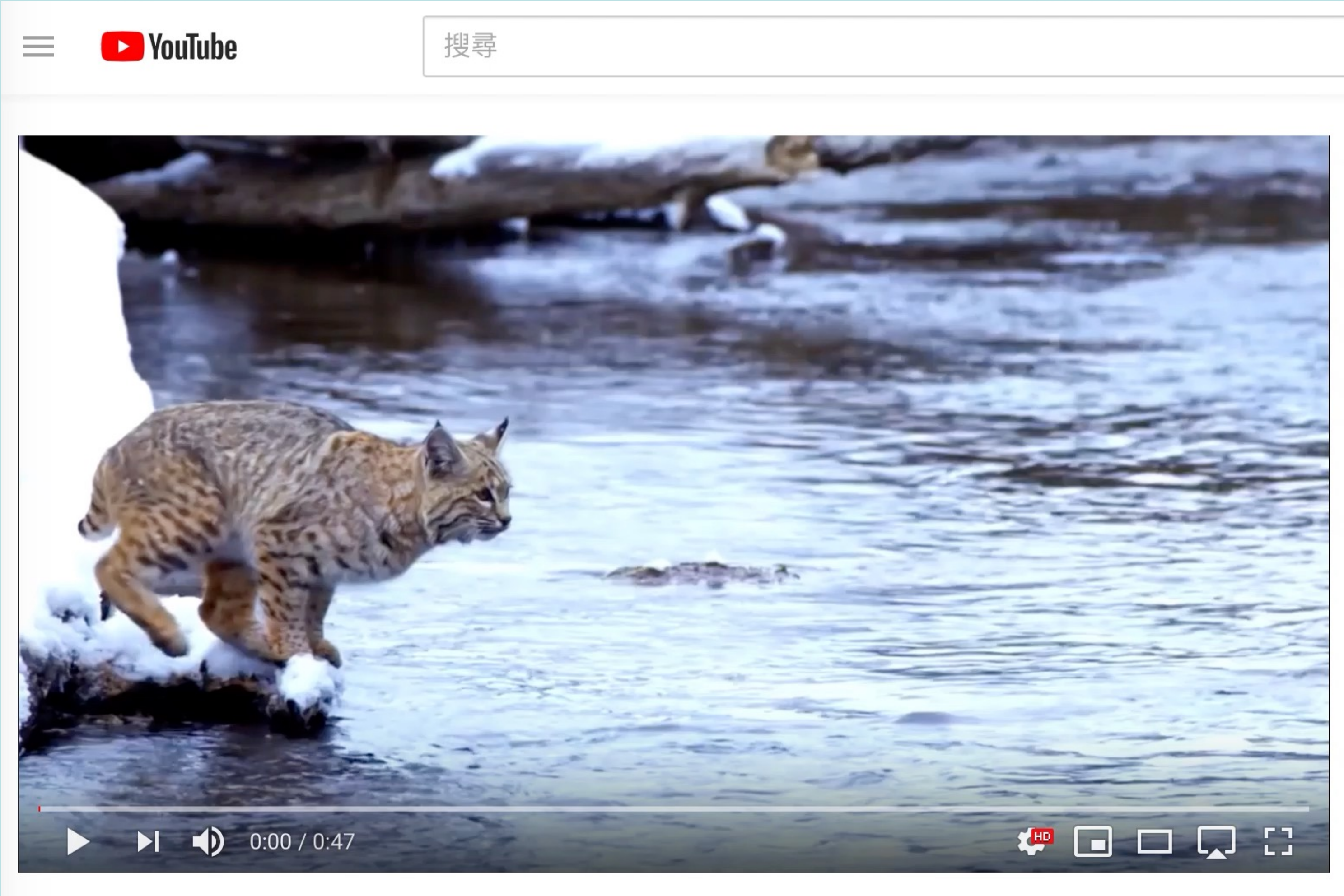



剛體　Rigid Body 是一種特別的質點系統

剛體是任兩個粒子的距離不變的粒子系統！

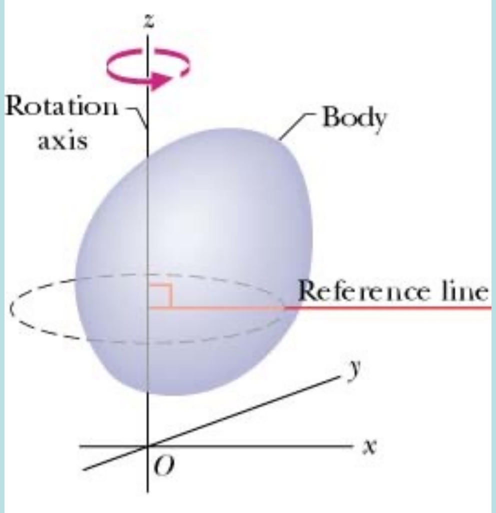
非剛體的質點系統

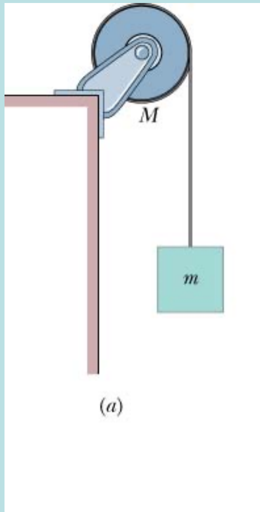
前後為剛體的質點系統


YouTube
搜尋
0:00 / 0:47
HD

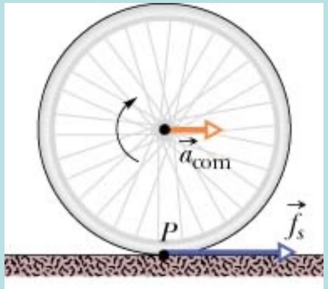
剛體的旋轉 Rotation of Rigid Body

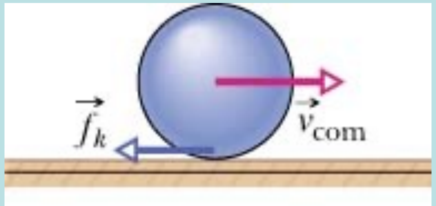
剛體繞一固定軸轉動



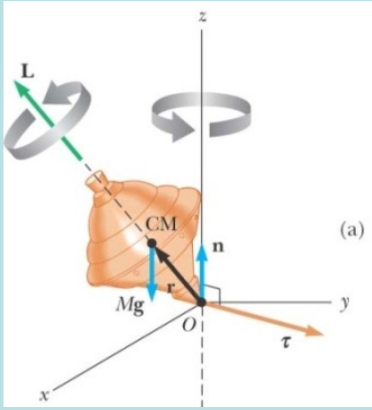


旋轉軸可以在垂直方向平移

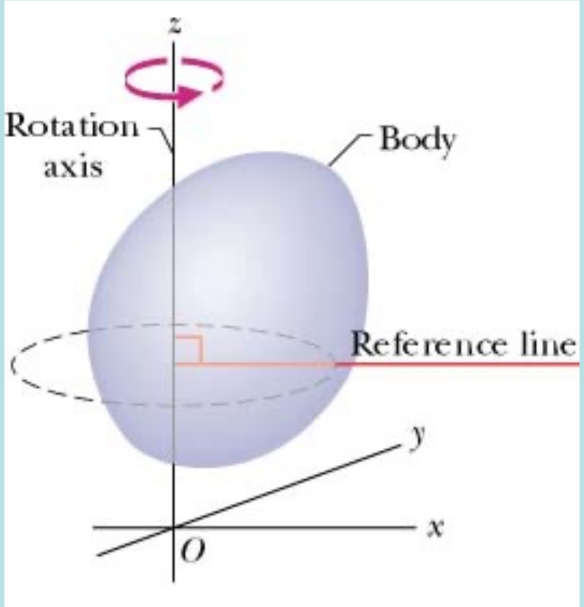




旋轉軸可隨時間變化



剛體繞固定軸的旋轉



剛體由質點組成。我們可以先把剛體拆開來看。

讓我們先從組成剛體的質點的運動開始研究。

如有固定旋轉軸，剛體中任一點，與固定旋轉軸的距離r_i不隨時間改變！

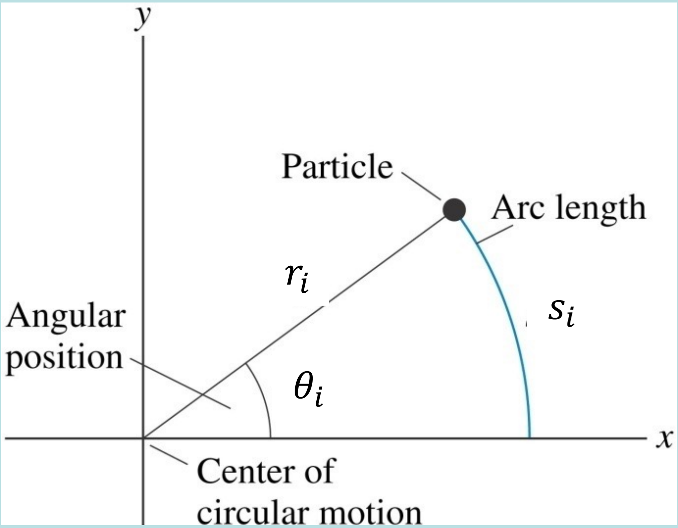
因此當剛體旋轉時，任一粒子的運動，是一圓周上的運動（不一定等速）。

因此只有旋轉，而沒有距離的改變Δr！

圓周上的運動以弧長表示最方便。

第i個質點在此圓周上的弧長記為 $s_i(t)$：時間的函數。

弧長可用轉角表示：由軸至質點取垂直於旋轉軸的線段$\overline{Oi}$，與x軸間的角度θ_i ！

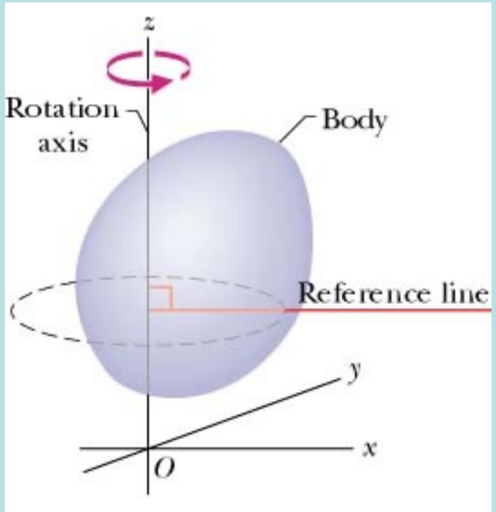


$$s_i(t) = r_i\theta_i(t)$$

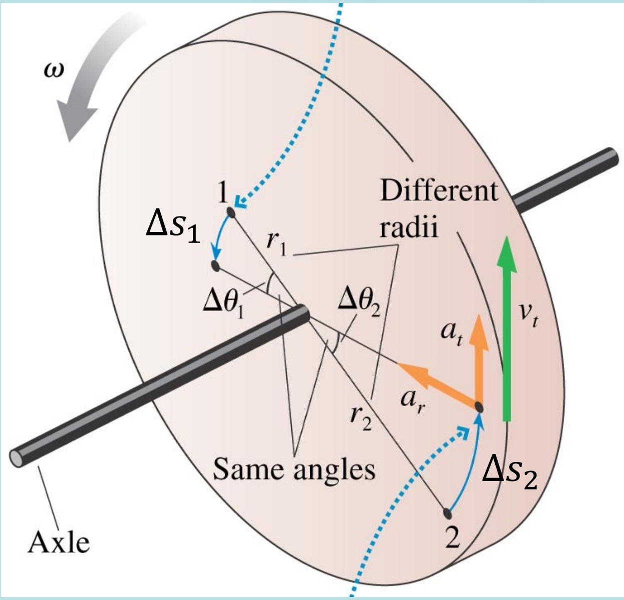
$$\Delta s_i(t) = r_i\Delta\theta_i(t)$$

角度以徑度為單位。

r_i 是距離固定軸的垂直距離。



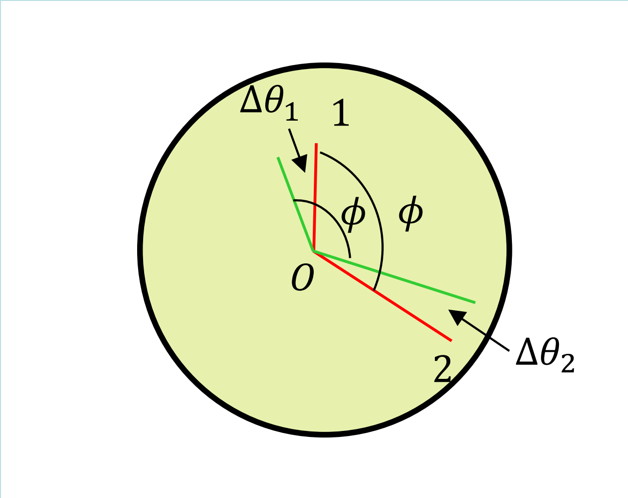
剛體是任兩個粒子的距離不變的粒子系統！



考慮剛體內任兩點：

點1,2的位移：

$$\Delta s_1 = r_1 \Delta\theta_1 \qquad \Delta s_2 = r_2 \Delta\theta_2$$



設$\overline{O1}$及$\overline{O2}$之間的夾角為ϕ。

旋轉後會保持此角度ϕ不變。

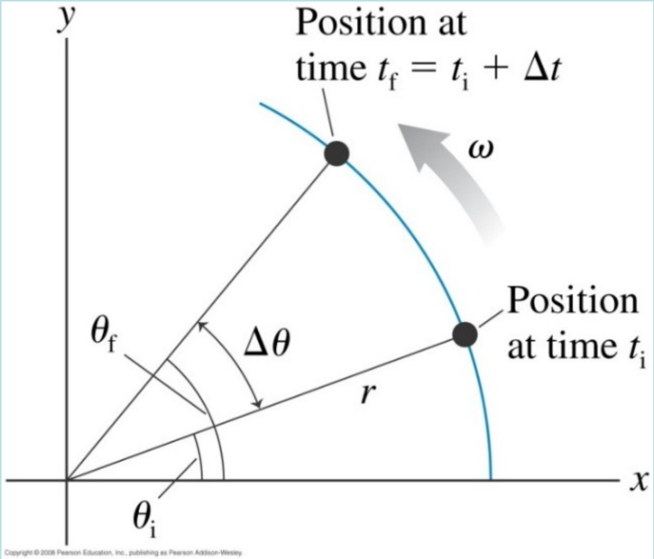
由圖見， $\overline{O1}$旋轉的角$\overline{O2}$旋轉的角相等。

$$\Delta\theta_1 = \Delta\theta_2 \equiv \Delta\theta$$

整個剛體只有一個大家共用的角位移$\Delta\theta$。

$$\Delta s_i(t) = r_i \cdot \Delta\theta(t)$$

剛體中不同位置的粒子，r不同，位移不同。但轉角卻是一樣的$\Delta\theta$。



整個剛體只有一個角位移θ。

剛體內所有的粒子都是一起旋轉，有同一個角位移θ。

所有運動弧長用同一轉角表示：

$$\Delta s_i = r_i \cdot \Delta\theta$$

質點的運動速度可以算：

$$v_t = \frac{ds_i}{dt} = r_i \frac{d\theta}{dt} \equiv r_i \omega$$

r_i不隨時間改變。

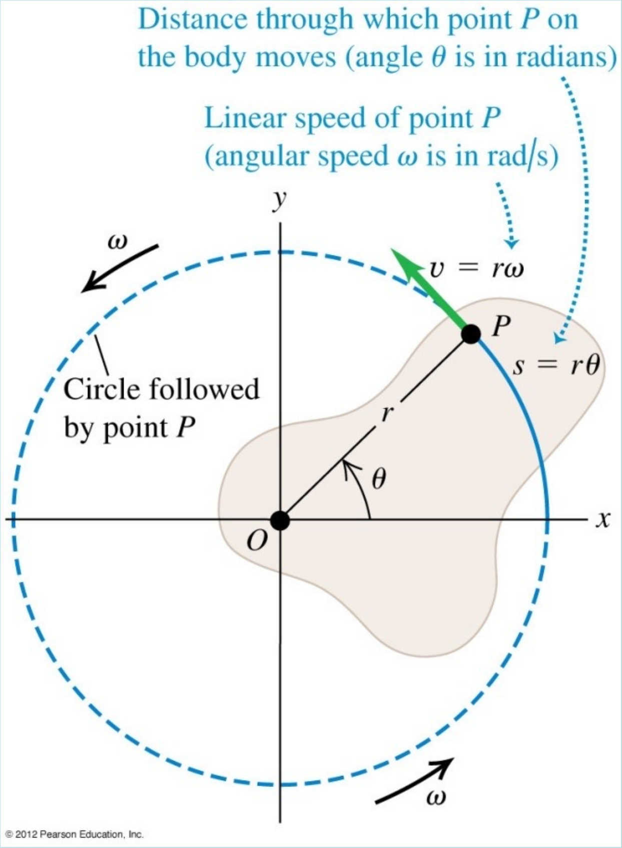
$$\omega \equiv \frac{d\theta}{dt}$$

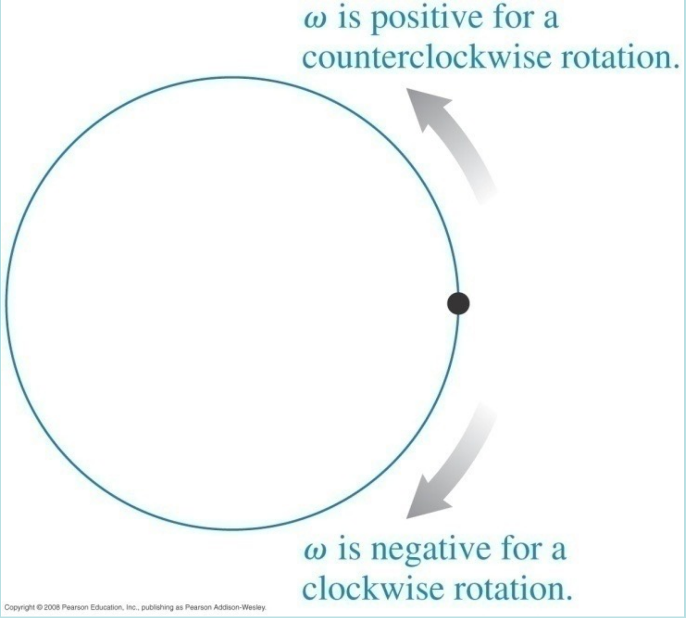
所有質點的運動速度都可以用此一轉角的變化率表示！

Angular Velocity 角速度

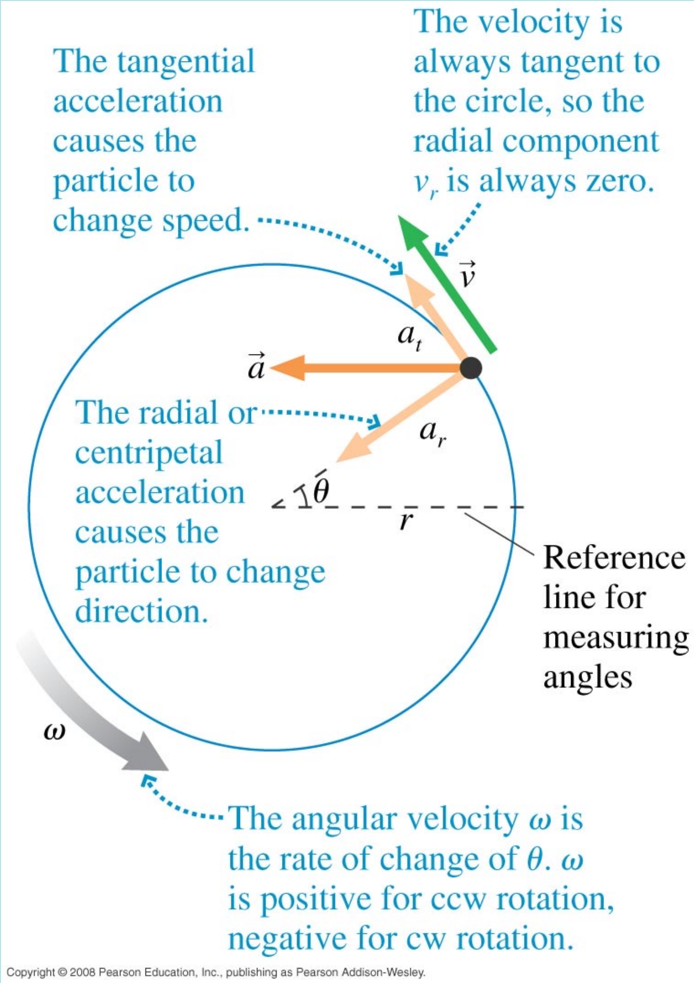
$$\omega(t) \equiv \frac{d\theta}{dt}$$

$$v_{it} = r_i\omega$$





同理：質點沿切線方向的的運動加速度可以用角速度的變化率表示：



Angular Acceleration

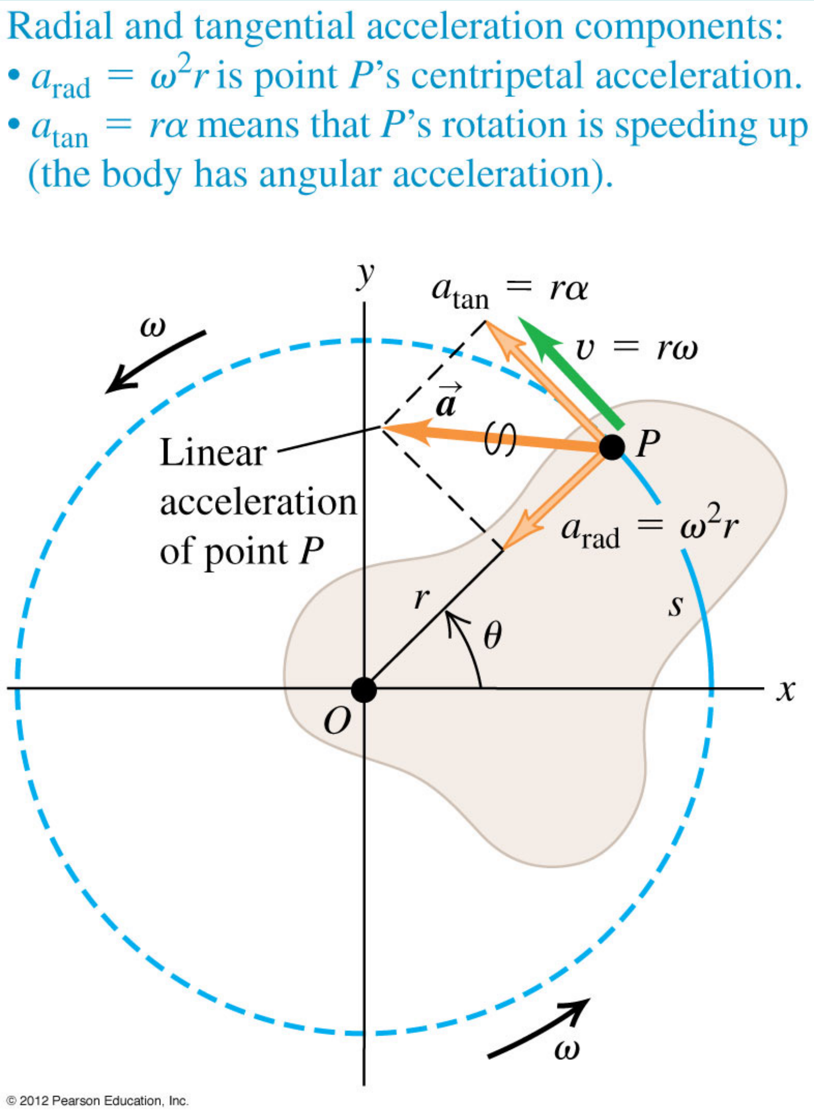
$$\alpha(t) \equiv \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$v_{it} = r_i\omega$$

$$a_{it} = \frac{dv_{it}}{dt} = \frac{d(r_i\omega)}{dt} = r_i\frac{d\omega}{dt} = r_i\frac{d^2\theta}{dt^2} = r_i\alpha$$

$$a_{it} = r_i\alpha$$

質點沿向心方向的的加速度有剛體本身為維持剛體特性無限供應。



$$s = r\theta$$

$$\theta$$

$$v_t = r\omega$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$a_t = r\alpha$$

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

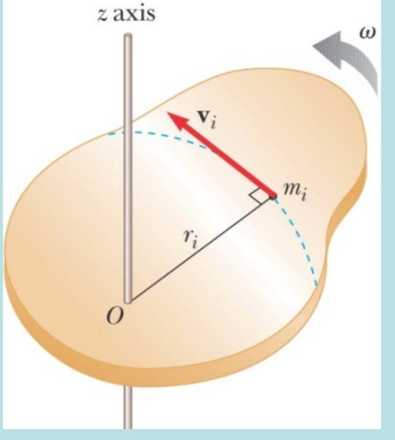
剛體內粒子只有旋轉，而沒有距離的改變Δr！

剛體內所有的粒子都是一起旋轉，有同一個角位移θ。

一個剛體的旋轉狀態可以用一個時間函數來表示：旋轉角：$\theta(t)$

它的作用如同一維運動的座標一般，但θ不是位置座標，

對剛體中的一個粒子來說位置是 s。s 才是真正的運動座標。



注意不同處的粒子 r 不同，但 θ 都一樣

$s_i = r_i\theta$ $\quad v_{it} = r_i\omega$ $\quad a_{it} = r_i\alpha$

了解此一維運動就了解整個剛體所有粒子的運動了！

$\theta(t)$ ⟷ $x(t)$

Angular speed $\omega = d\theta/dt$

Angular acceleration $\alpha = d\omega/dt$

Linear speed $v = dx/dt$

Linear acceleration $a = dv/dt$

剛體繞固定軸的轉動與一維運動似乎有一對一對應

例如等角加速度運動：

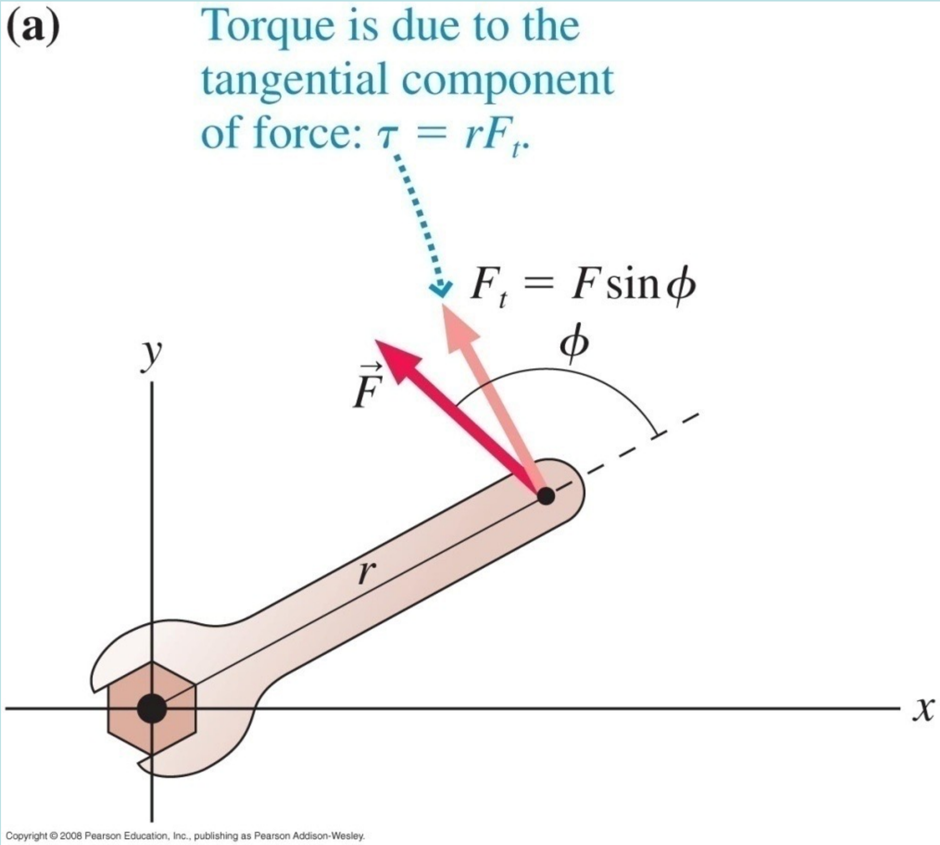
If α = constant $\begin{cases} \omega_f = \omega_i + \alpha_t \\ \theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i) \end{cases}$

If a = constant $\begin{cases} v_f = v_i + at \\ x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2}at^2 \\ v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i) \end{cases}$

那一維運動的力在剛體轉動的對應是甚麼？

? ⟷ F

此 "力的對應" 應該與力及施力的位置同時有關！



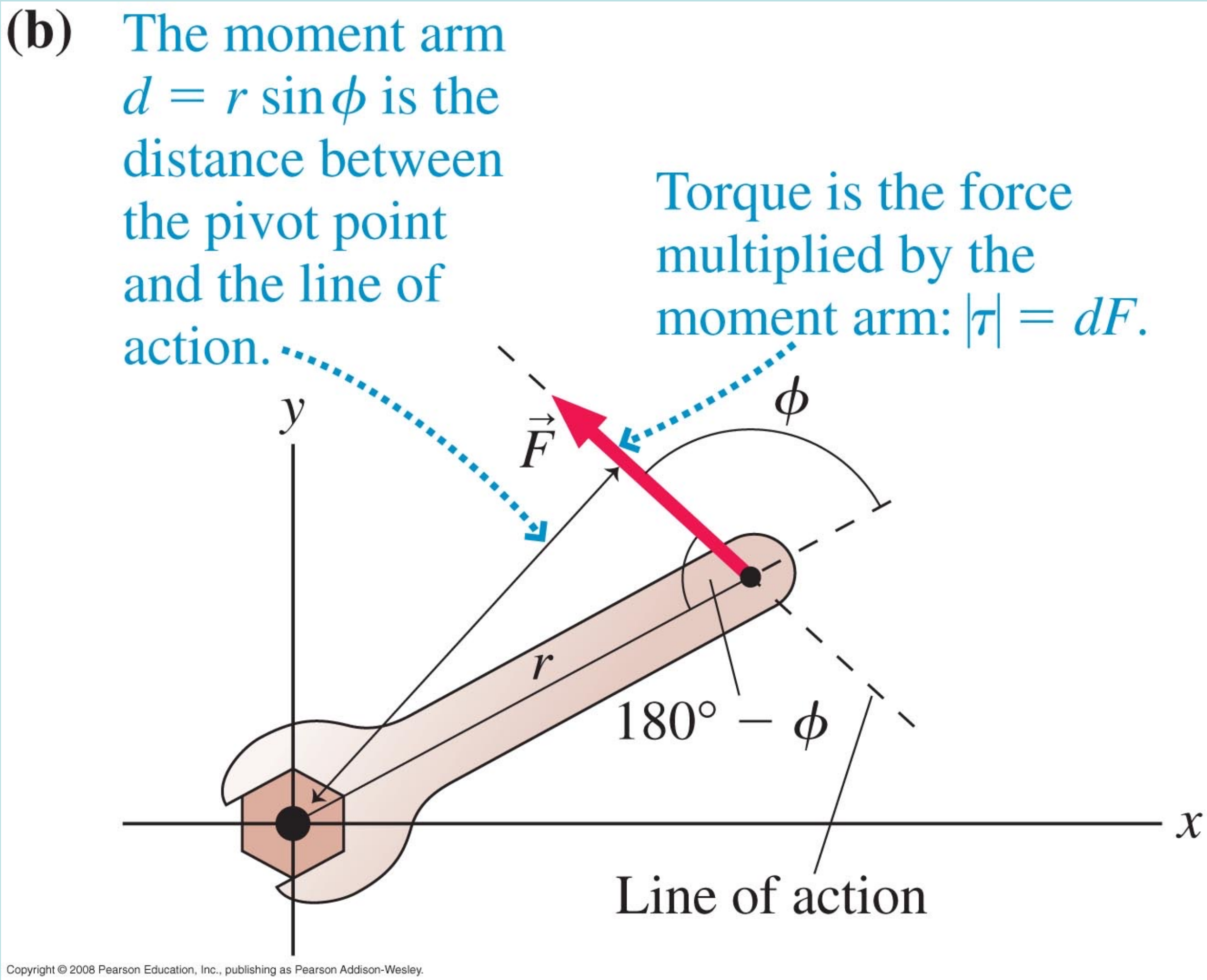
而平行於 r 的力分量因為剛體形狀不變，沒有效果。

因此，將垂直於r的力分量乘上r ，這個物理量可以帶動「旋轉的增加」！

$$F_t \cdot r = F\sin\phi \cdot r \equiv \tau$$

$$F_t \cdot r = F \sin\phi \cdot r = Fd$$

此式也可用力臂表示！

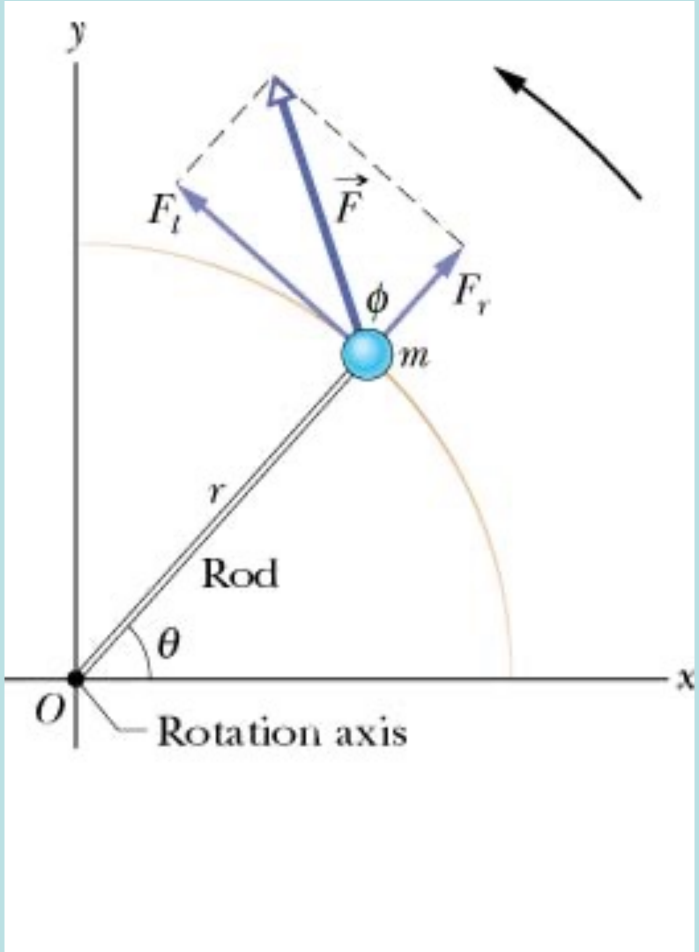


利用”功”來推理

$$W = \vec{F}_t \cdot \Delta\vec{r}_t = F_t \cdot \Delta s = F_t \cdot r\Delta\theta \equiv \tau\Delta\theta$$

正好與一維運動的功對應：

$$W = F \cdot \Delta x$$

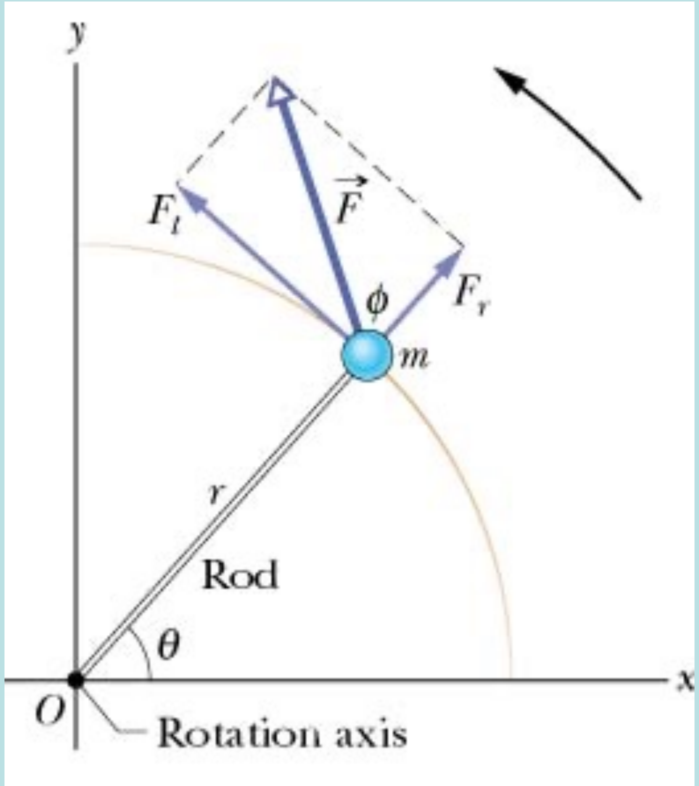


大膽的猜想：一維運動的力在剛體轉動的對應是力矩！

力矩 Torque 扭力

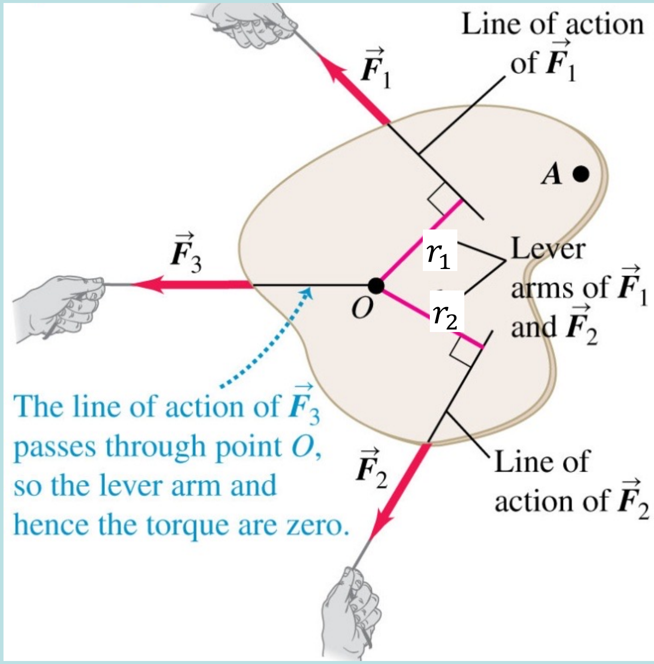
$\tau \longleftrightarrow F$

$$\tau = r \cdot F_t = r \cdot F \sin\phi = \left|\vec{r} \times \vec{F}\right|$$



考慮一個剛體所受的總力矩：

設剛體中第 i 個粒子，所受力矩為τ_i：



$$\tau_i = r_i \cdot F_{it} = r_i \cdot m_i a_{it} = r_i \cdot m_i r_i \alpha = m_i r_i^2 \alpha$$

$$a_{it} = r_i \alpha$$

對整個剛體來說，總力矩為：

$$\tau = \sum_i \tau_i = \sum_i (m_i r_i^2 \alpha) = \left[\sum_i (m_i r_i^2)\right] \cdot \alpha \equiv I\alpha$$

$$I \equiv \sum_i (m_i r_i^2)$$

內力的力矩正好抵消

只有外力矩需要考慮

與運動狀態無關

由剛體形狀決定

完全由運動狀態決定

對應的牛頓第二定律 $\tau = I\alpha$

$I \longleftrightarrow m$

轉動慣量

一維運動的質量在剛體轉動的對應是轉動慣量！

$\theta(t)$ $\longleftrightarrow$ $x(t)$

Angular speed $\omega = d\theta/dt$	Linear speed $v = dx/dt$
Angular acceleration $\alpha = d\omega/dt$	Linear acceleration $a = dv/dt$

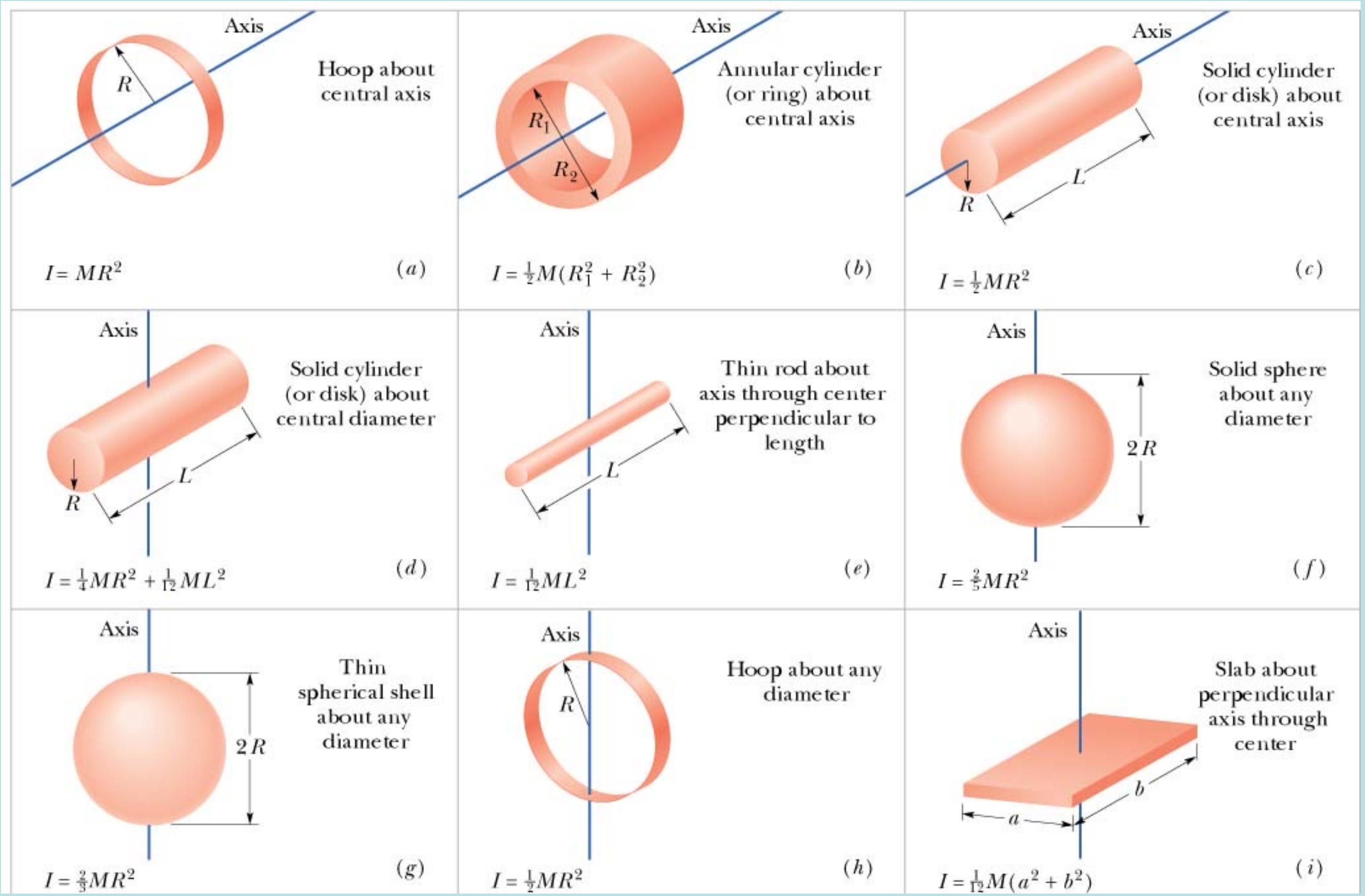
轉動與一維運動似乎有一對一對應

τ $\longleftrightarrow$ F

$\tau = I\alpha$ $\longleftrightarrow$ $F = ma$

一維的角運動由對應的牛頓第二定律控制

轉動慣量 I



$$I \equiv \sum_i (m_i r_i^2)$$

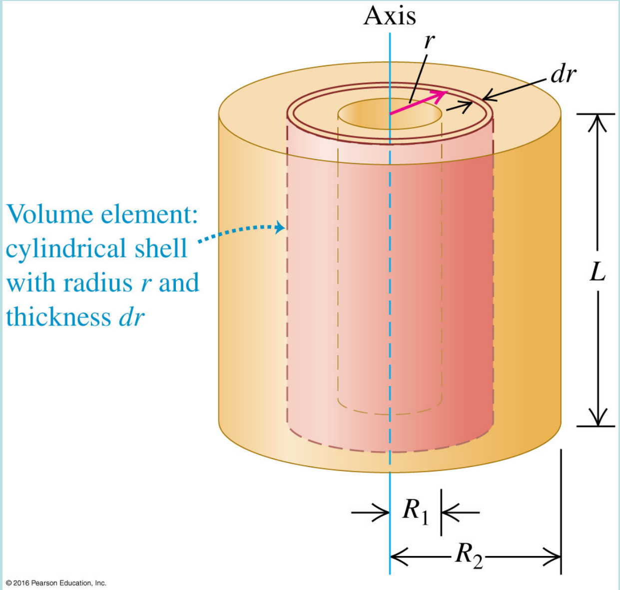
$$I = \lim_{\substack{\Delta m_i \to 0 \\ N \to \infty}} \sum_i (\Delta m_i \cdot r_i^2)$$

物質若連續分佈

$$I \equiv \int r^2 dm$$

慣量是一體積分

計算中空圓柱的轉動慣量！



$$I \equiv \int r^2 dm$$

注意r是距固定軸的垂直距離！

收集所積函數相同的體積，在此就是相同 r 的物質，計算其體積：

$$I \equiv \int r^2 \rho dV = \int_{R_1}^{R_2} r^2 \rho (2\pi r L) \cdot dr = 2\pi\rho L \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr$$

$$= \frac{2\pi\rho L}{4}(R_1^4 - R_2^4) = \frac{\pi\rho L}{2}(R_1^2 - R_2^2)(R_1^2 + R_2^2)$$

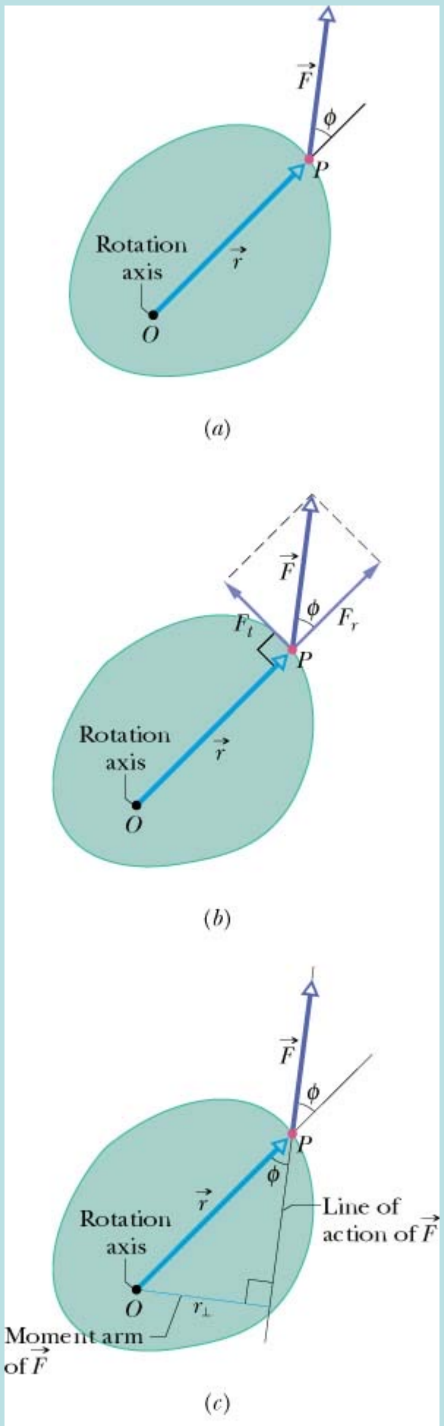
積分就是求和再取極限。

$$M = \rho V = L\rho\pi(R_1^2 - R_2^2)$$

$$I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2) \xrightarrow[R_1=0, R_2=R]{} I = \frac{1}{2}MR^2$$

力矩 Torque

$$\tau = F_t \cdot r = F \cdot r_t = \left|\vec{r} \times \vec{F}\right|$$



剛體轉動對應的牛頓第二定律：

$$\tau = I\alpha = \frac{d(I\omega)}{dt} \equiv \frac{dL}{dt}$$

$$L = I\omega$$

角動量 Angular Momentum

$$\tau = 0 \rightarrow \Delta L = 0$$

角動量守恆

旋轉動能

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \sum_i \left(m_i r_i^2 \right) \cdot \omega^2 \equiv \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

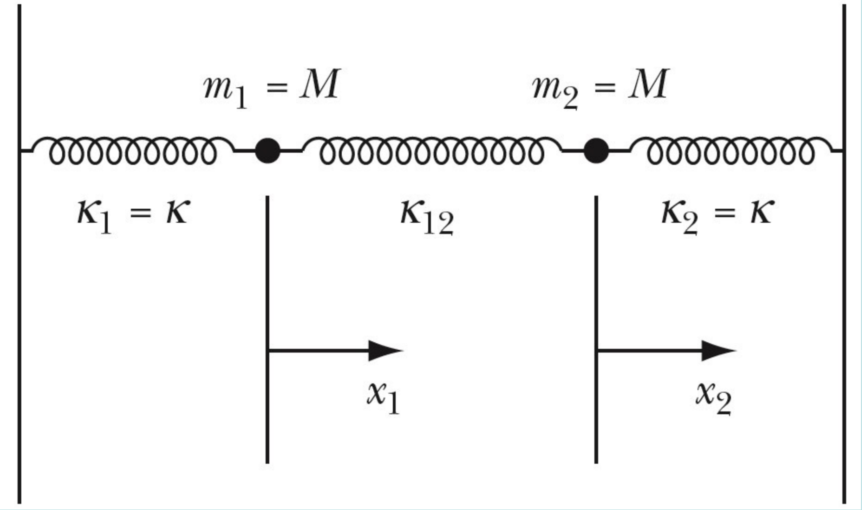
Useful Equations in Rotational and Linear Motion

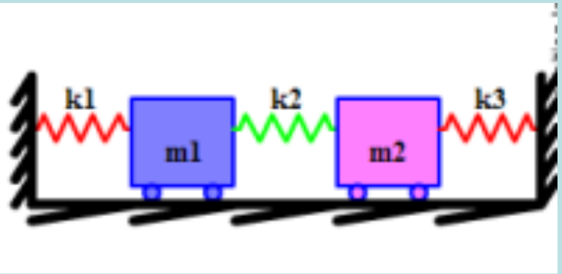
Rotational Motion About a Fixed Axis	Linear Motion
Angular speed $\omega = d\theta/dt$	Linear speed $v = dx/dt$
Angular acceleration $\alpha = d\omega/dt$	Linear acceleration $a = dv/dt$
Net torque $\Sigma\tau = I\alpha$	Net force $\Sigma F = ma$
If α = constant $\begin{cases} \omega_f = \omega_i + \alpha_t \\ \theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i) \end{cases}$	If a = constant $\begin{cases} v_f = v_i + at \\ x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2}at^2 \\ v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i) \end{cases}$
Work $W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau\, d\theta$	Work $W = \int_{x_i}^{x_f} F_x\, dx$
Rotational kinetic energy $K_R = \frac{1}{2}I\omega^2$	Kinetic energy $K = \frac{1}{2}mv^2$
Power $\mathcal{P} = \tau\omega$	Power $\mathcal{P} = Fv$
Angular momentum $L = I\omega$	Linear momentum $p = mv$
Net torque $\Sigma\tau = dL/dt$	Net force $\Sigma F = dp/dt$

繞固定軸的剛體旋轉與一維平移運動有一對一的對應

旋轉角稱為廣義座標 $\theta(t) \longleftrightarrow x(t)$

很類似的耦合振盪





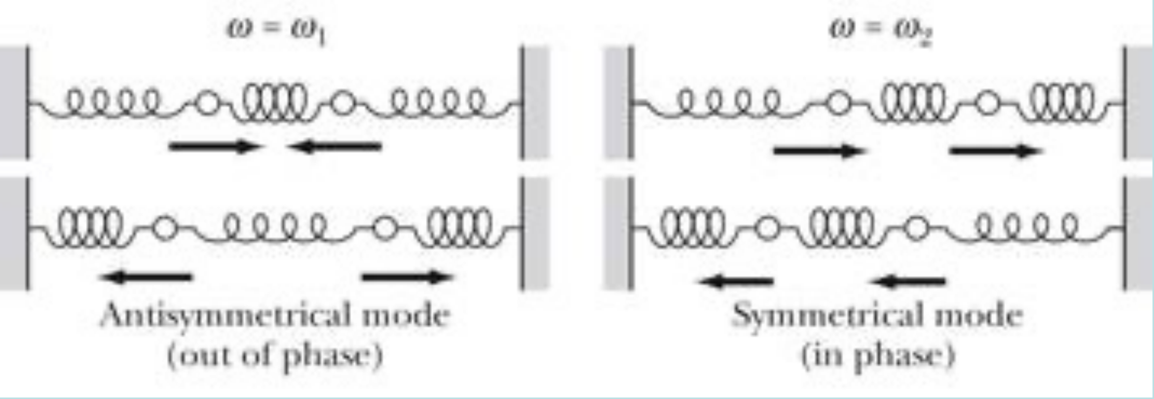
廣義座標：

$$q_1 \equiv x_1 + x_2$$

$$q_2 \equiv x_1 - x_2$$

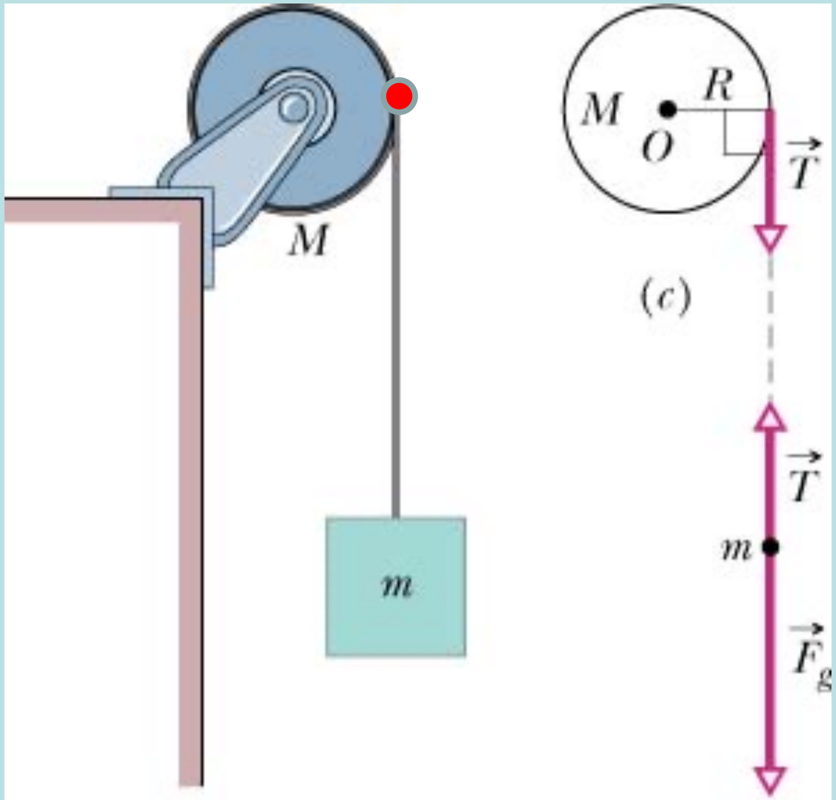
$$\frac{d^2 q_1}{dt^2} = -\omega_1^2 q_1$$

$$\frac{d^2 q_2}{dt^2} = -\omega_2^2 q_2$$



每一個粒子的平移有一個牛頓第二定律。

每一個剛體的旋轉也有一個牛頓第二定律。



$$TR = I\alpha$$

$$mg - T = ma$$

$$a = R\alpha = \frac{TR^2}{I}$$

$$mg - T = \frac{mR^2}{I}T$$

$$T = \frac{mg}{1 + \frac{mR^2}{I}}$$

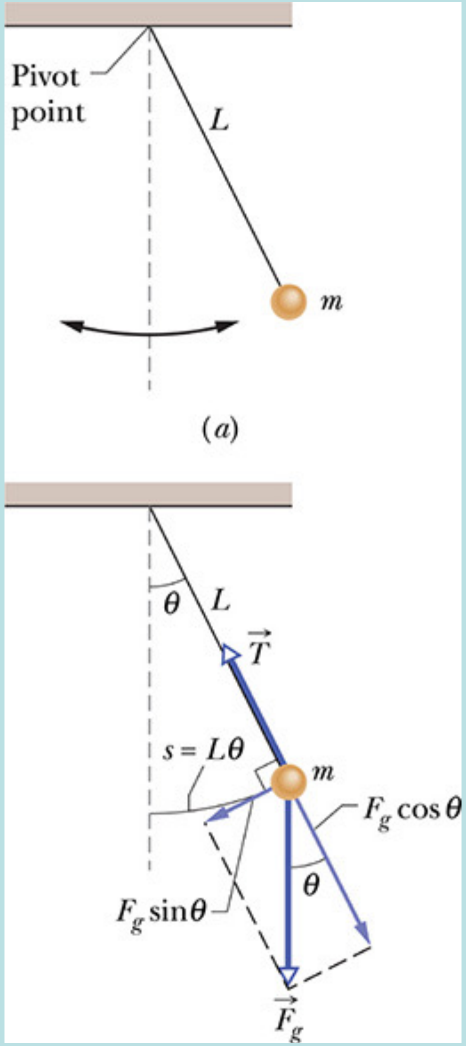
$$a = \frac{g}{1 + \frac{I}{mR^2}}$$

$$\alpha = \frac{a}{R}$$

$$\omega = \alpha t$$

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2$$

有了旋轉的牛頓第二定律，就可以寫下廣義座標θ的運動方程式：



$$\tau = I\alpha$$

$$mgL\sin\theta = mL^2\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

小角度近似： $\sin\theta \sim \theta$

$$L^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = gL\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{g}{L}\theta \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

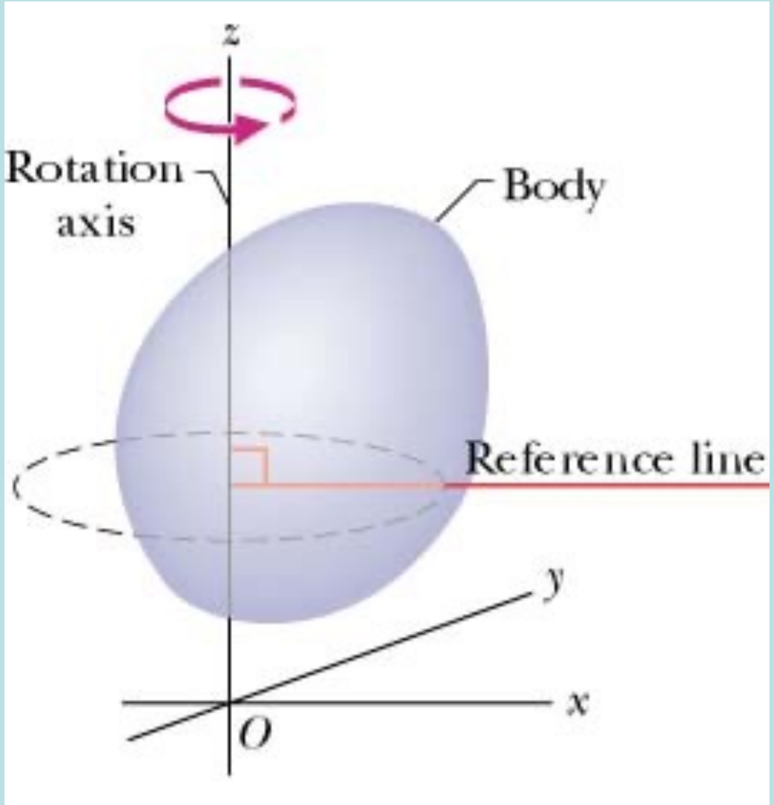
單擺運動與簡諧運動滿足一模一樣的運動方程式·：

因此，解完全相同。

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

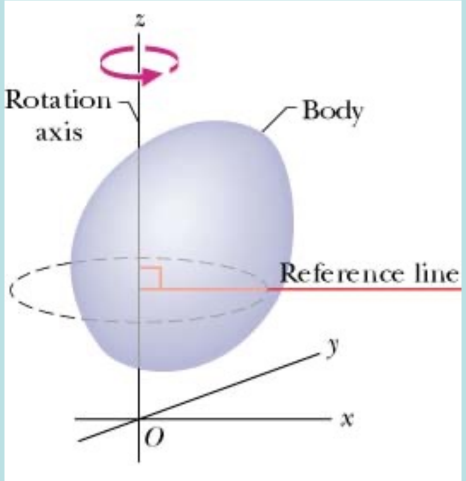
簡諧運動的週期 T 等於

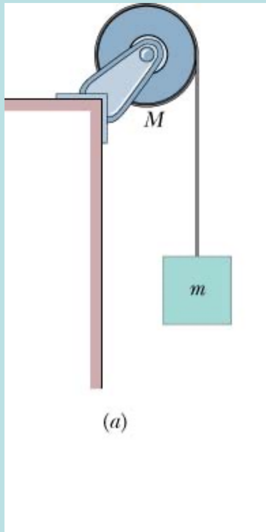
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$



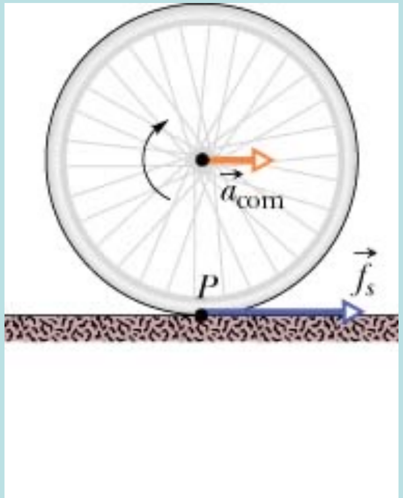
繞固定軸轉動是一個一維運動，由一個廣義座標 θ 來描述。

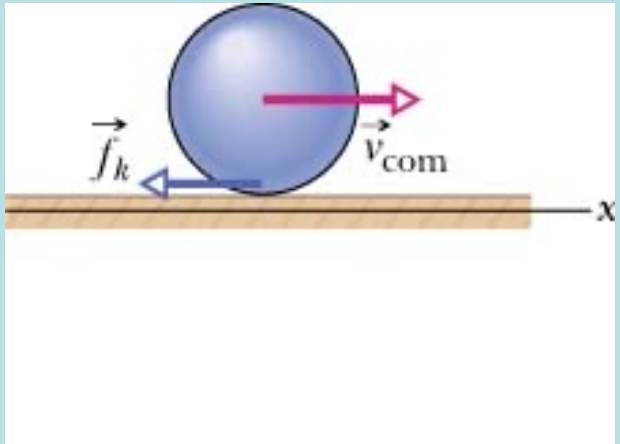
剛體繞一固定軸轉動



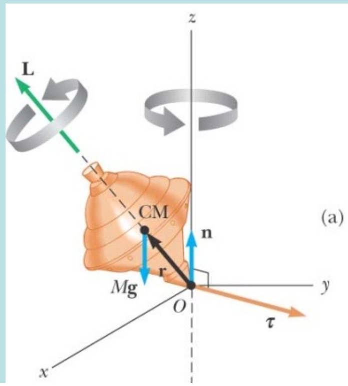


旋轉軸可以在垂直方向平移

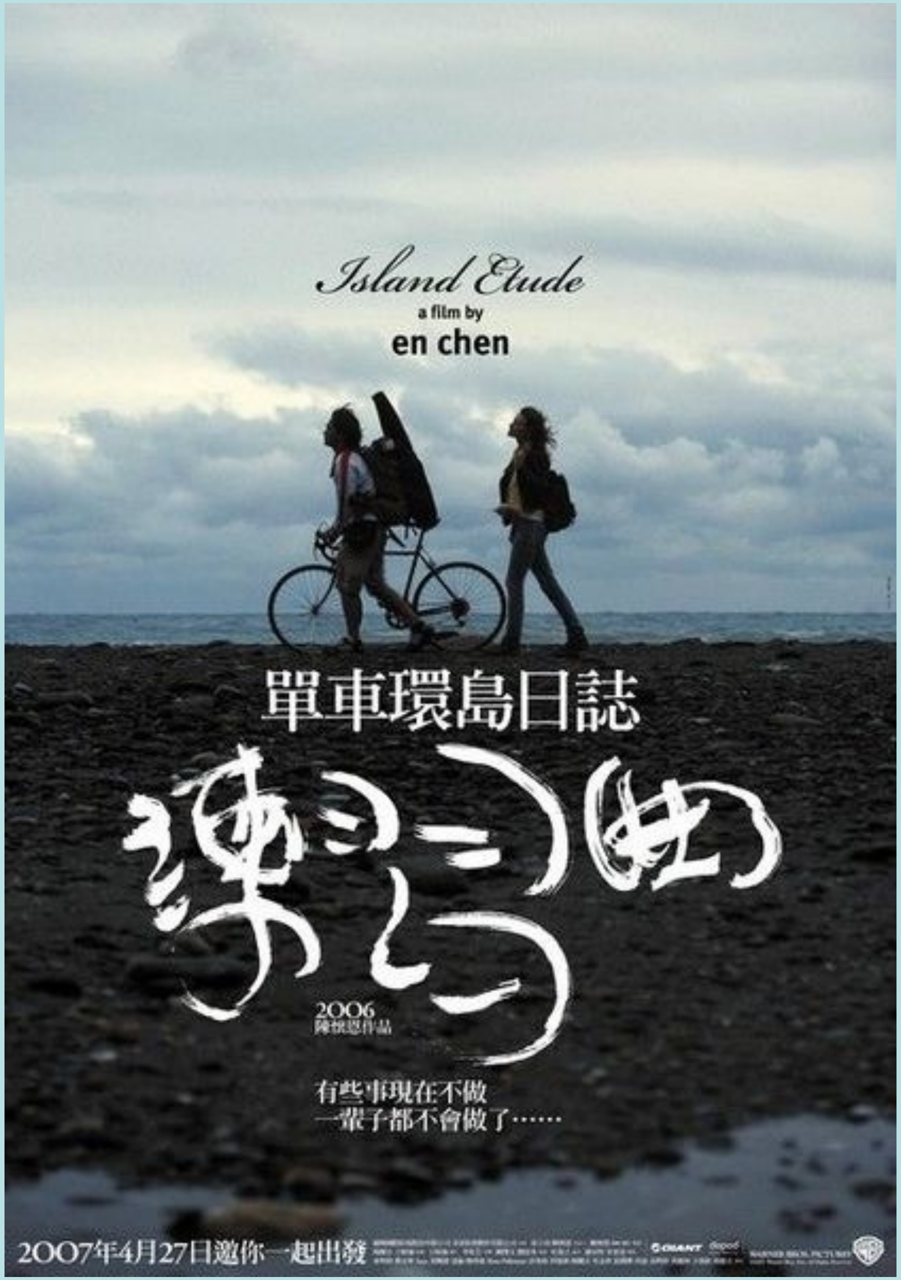


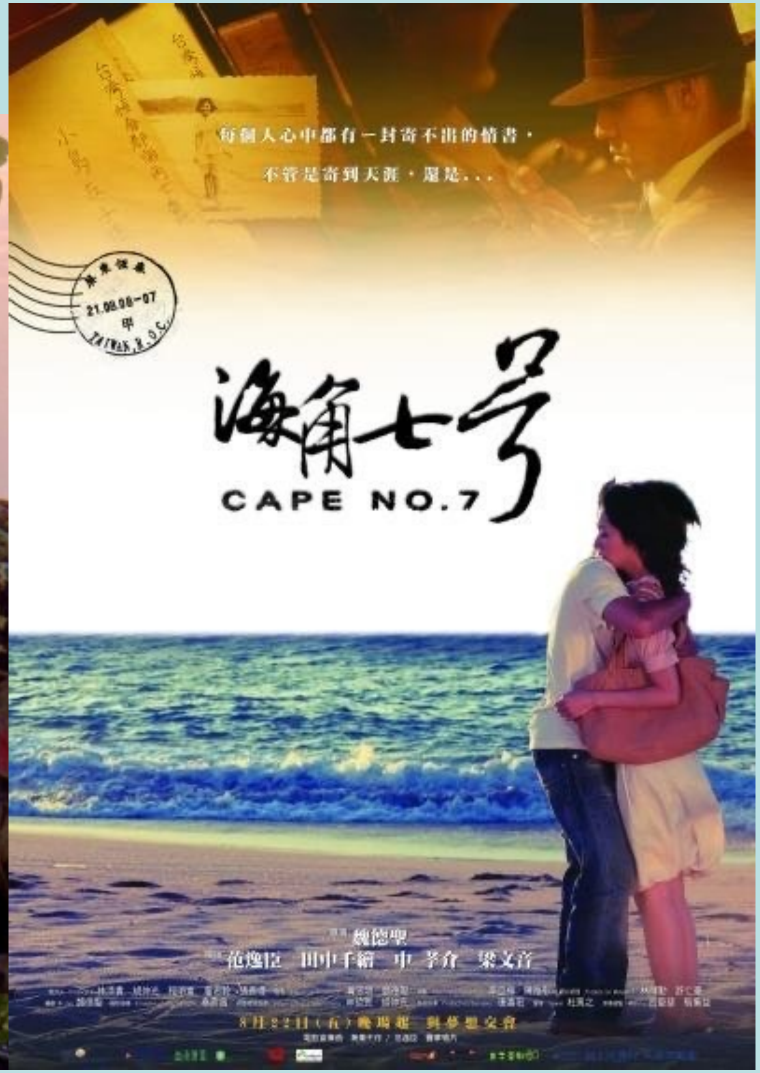


旋轉軸可隨時間變化



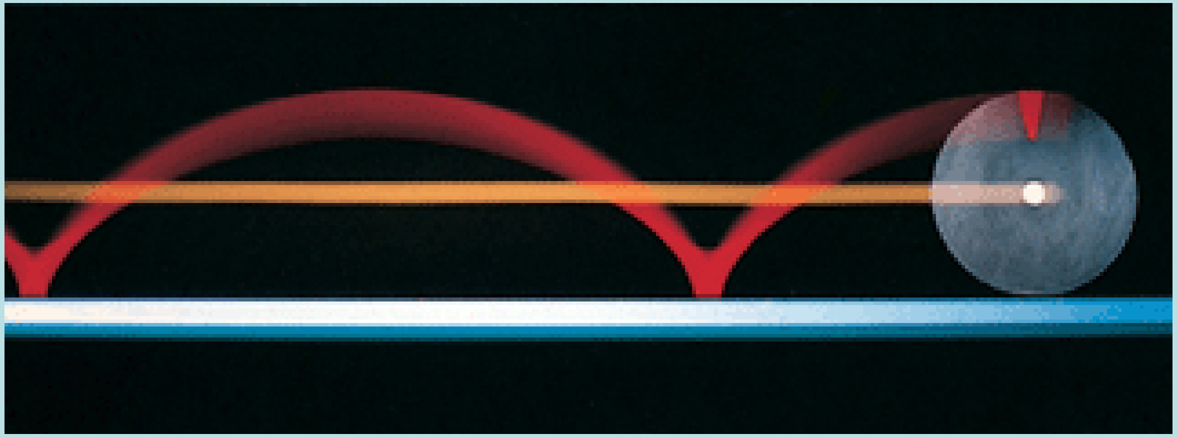
旋轉軸可以在垂直方向平移的剛體旋轉一般稱為滾動！


Island Etude
a film by
en chen
單車環島日誌
練習曲
2006
陳懷恩作品
有些事現在不做
一輩子都不會做了……
2007年4月27日邀你一起出發



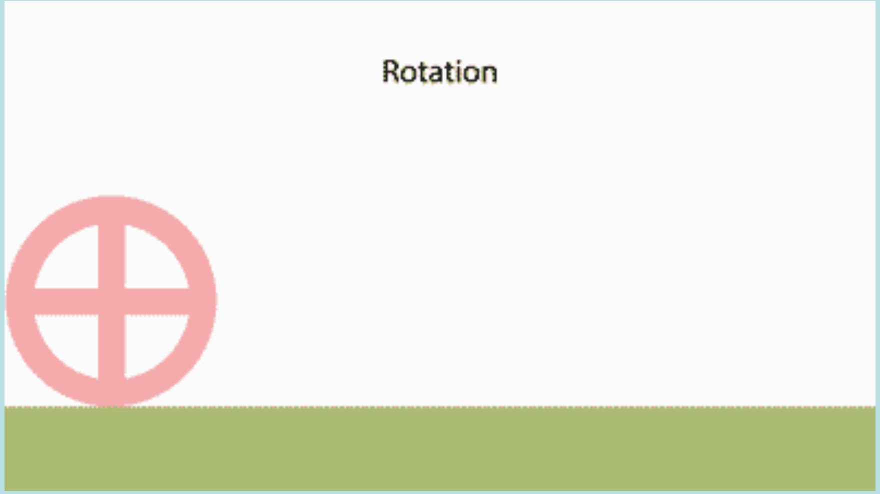
每個人心中都有一封寄不出的情書，
不管是寄到天涯，還是...
海角七号
CAPE NO.7
魏德聖
范逸臣 田中千繪 中孝介 梁文音

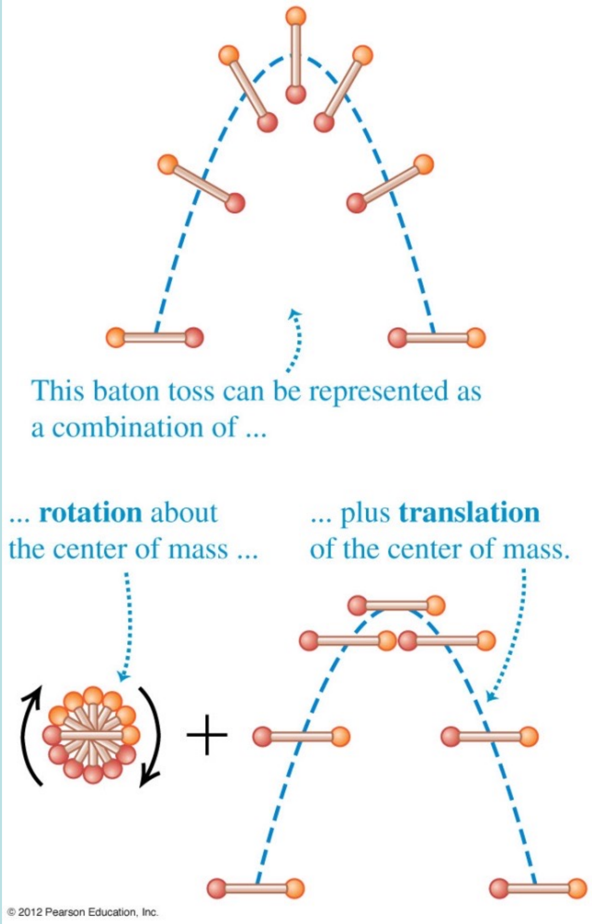
滾動是平移與轉動的組合



在質心座標系，輪子作一繞固定軸的純轉動

滾動是平移與轉動的組合

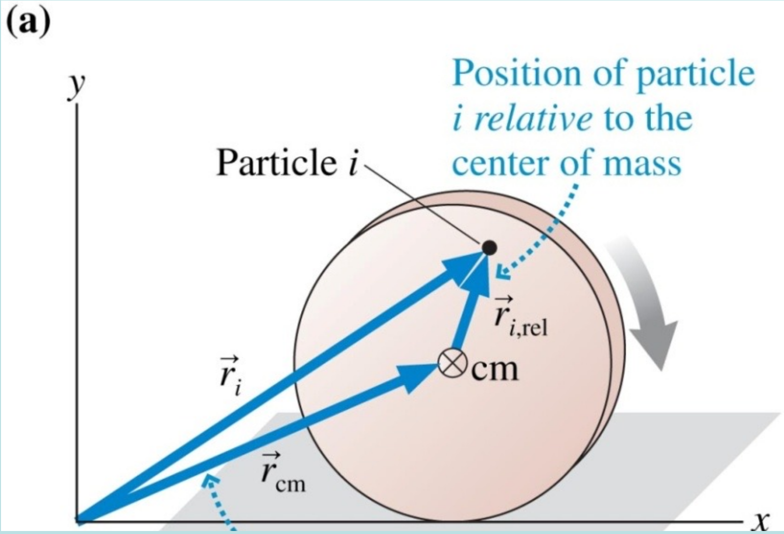


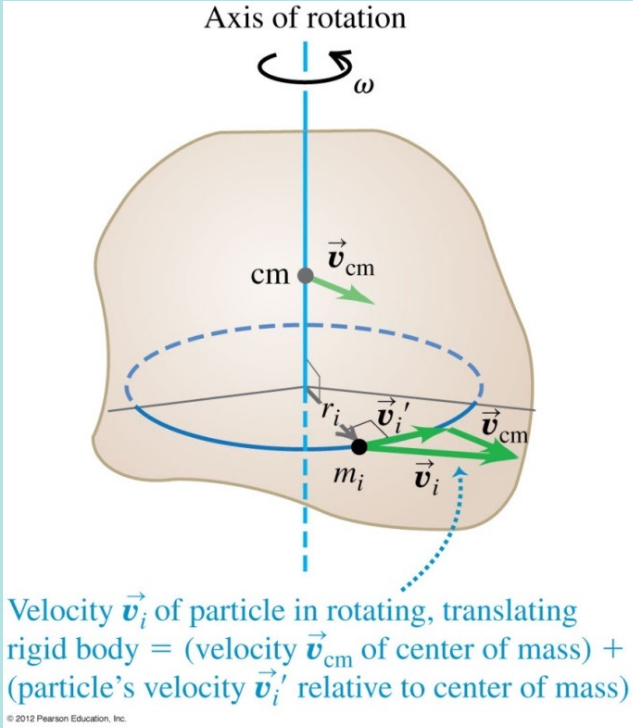


如果從一個隨質心一起運動的觀察者（質心坐標系）看來，

剛體只能繞通過質心的一個固定軸作旋轉運動。

因此，之前的固定軸旋轉討論，在質心座標系內可以適用。





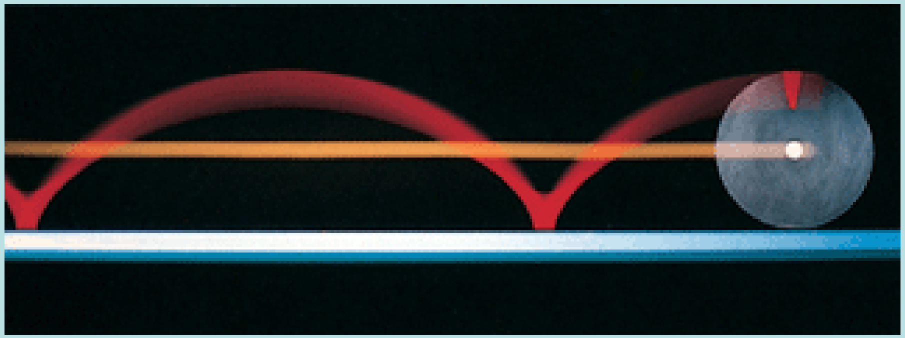
反過來說，將質心的平移與剛體繞固定軸的旋轉疊加，即是滾動！

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{i,\mathrm{rel}} + \vec{r}_{\mathrm{cm}}$$

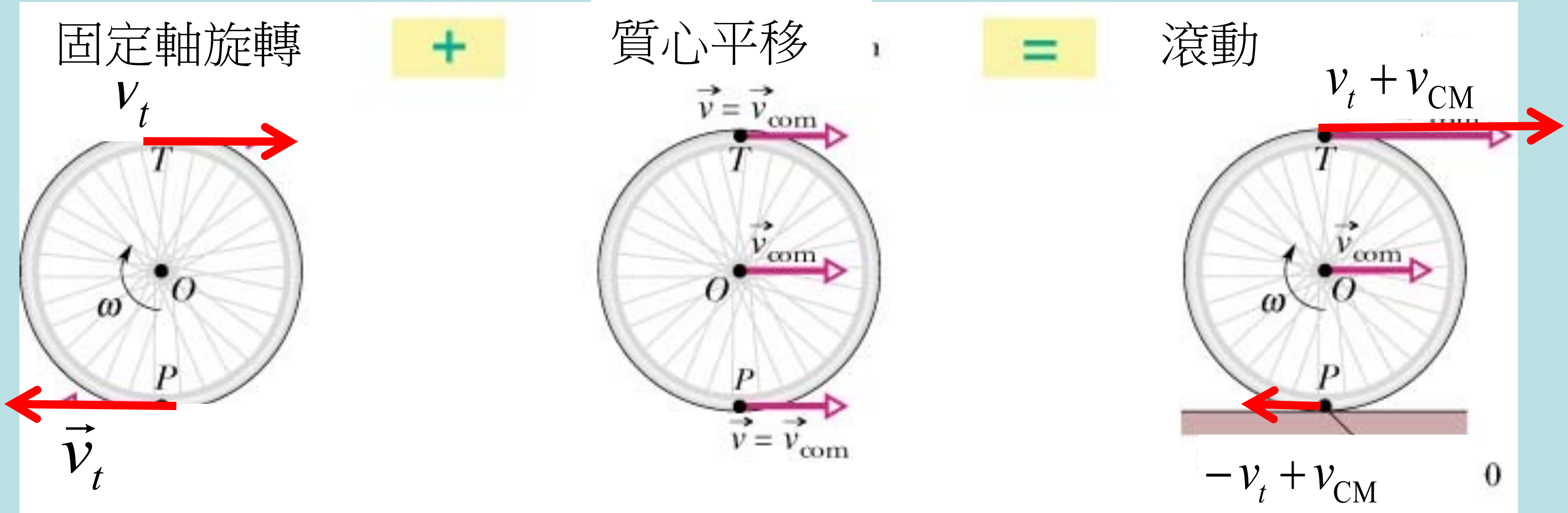
$$\vec{v}_i = \vec{v}_{i,\mathrm{rel}} + \vec{v}_{\mathrm{cm}}$$

$\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_{i,\mathrm{rel}}$ 旋轉

$\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_{\mathrm{cm}}$ 平移



滾動是平移與轉動的組合



在質心座標系中為繞固定軸旋轉

質心平移

$$\tau = I\alpha$$

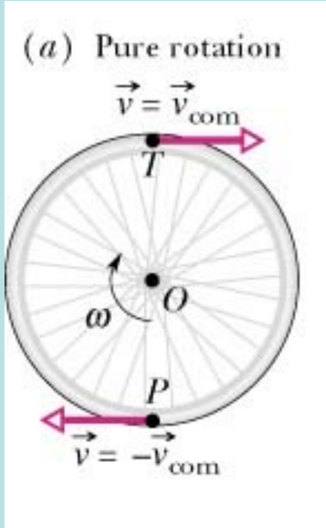
$$F_{ext} = Ma_{cm}$$

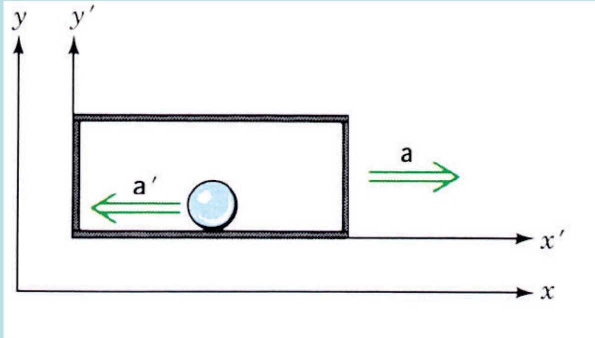
可是質心座標系不是慣性座標系！

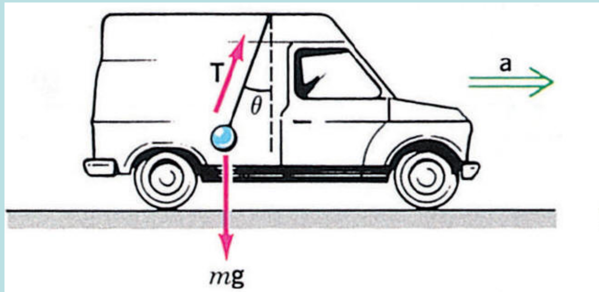
質心座標系不是慣性座標系！

牛頓第二定律必須加入一個沒有來源的虛力Virtual Force。

$\vec{F}_{i\,\mathrm{vir}} = -m_i\vec{a}$ 　　對任一物體，虛力的加速度是一樣的。







計算虛力所做的力矩，$r_\perp$是力臂：投影於垂直方向的距離：

$r_\perp$是力臂：投影於垂直$\vec{F}_{i\,\mathrm{vir}} = -m_i\vec{a}$方向的距離：

$$\tau_{\mathrm{vir}} = \sum_i (r_\perp \cdot F_{i\,\mathrm{vir}}) = -\sum_i (r_\perp \cdot m_i a) = -\left[\sum_i (r_\perp \cdot m_i)\right] \cdot a = 0$$

在質心座標系中
為繞固定軸旋轉

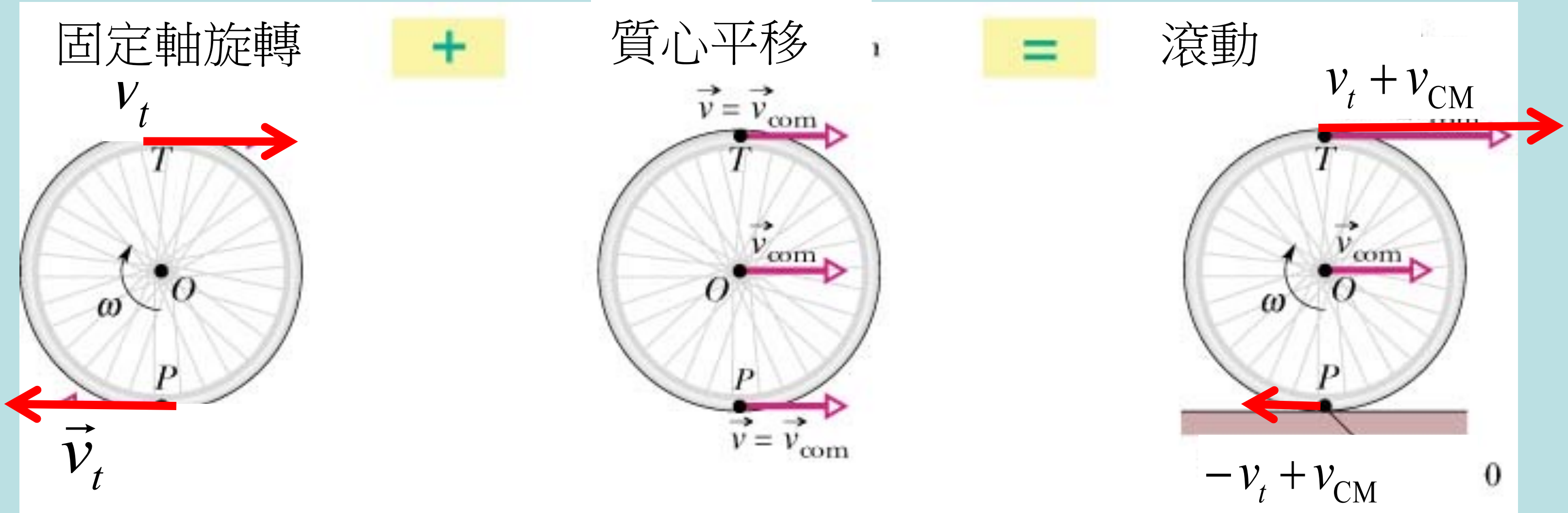
$\tau = I\alpha$

因為質心在原點，距離 r_{cm} 為零。 $\sum_i (r_\perp \cdot m_i) = M r_{\mathrm{CM}\perp} = 0$

零距離投影於垂直$-\vec{a}$方向的距離$r_{\mathrm{cm}\perp}$還是零：

在質心座標系，虛力的力矩正好抵消

滾動由兩個牛頓動定律來描述



繞固定軸旋轉的剛體的牛頓第二定律

$\tau = I\alpha$

質心遵守的牛頓第二運動定律

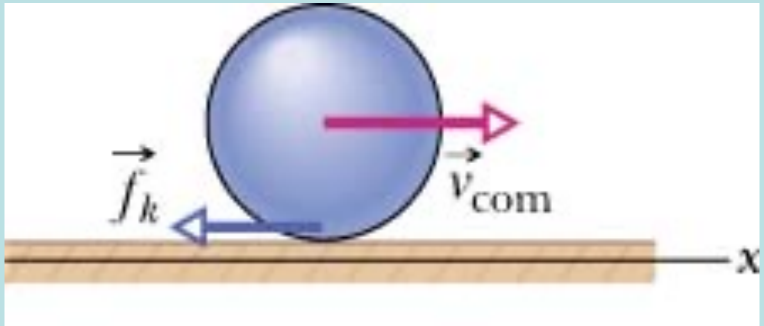
$F_{ext} = Ma_{cm}$

摩擦力在滾動現象扮演重要角色：

一種滾動是帶著滑動的滾動

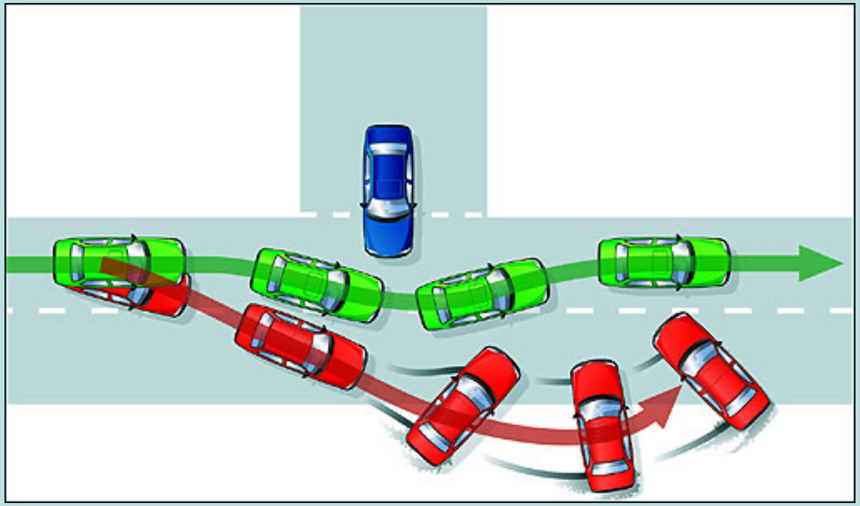
球緣與地面的接觸點相對於地面是滑動的！

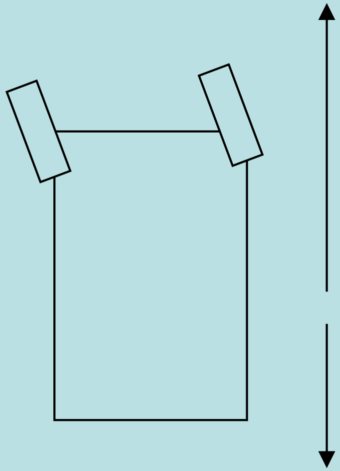
地面對球施予動摩擦力：摩擦力完全由正向力決定。



質心平移	$-f_k = -Mg\mu_k = Ma_{cm}$	$\longrightarrow$	$a_{cm} = -g\mu_k$	減速
旋轉（設順時針為正）	$\tau = Rf_k = RMg\mu_k = I\alpha$	$\longrightarrow$	$\alpha = \dfrac{RMg\mu_k}{I}$	加速旋轉

質心平移運動與相對於質心的旋轉，基本上是獨立分離的兩個運動。

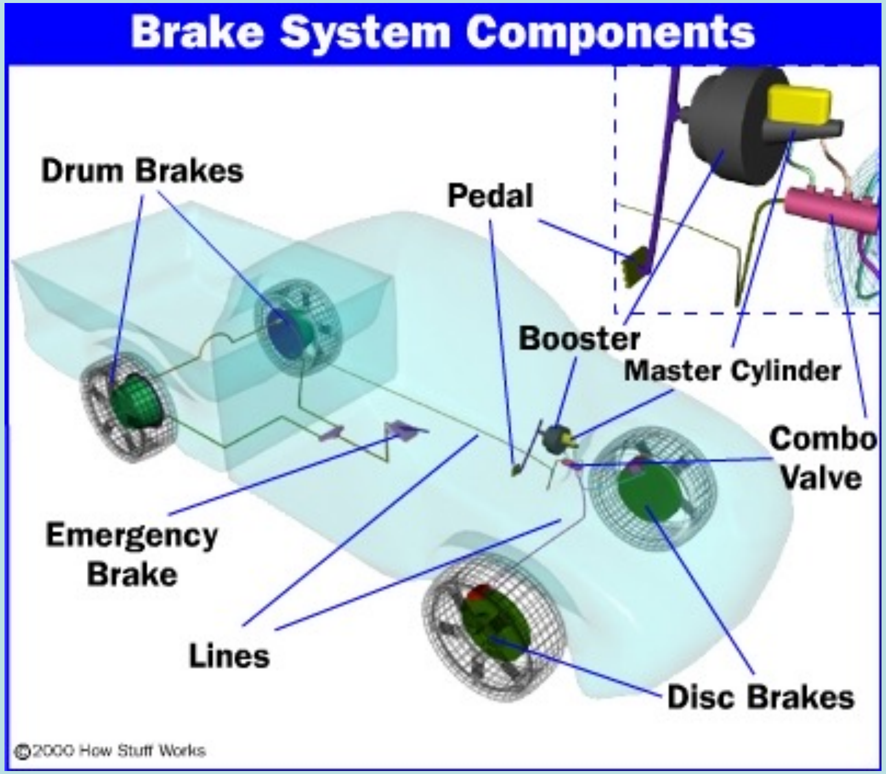


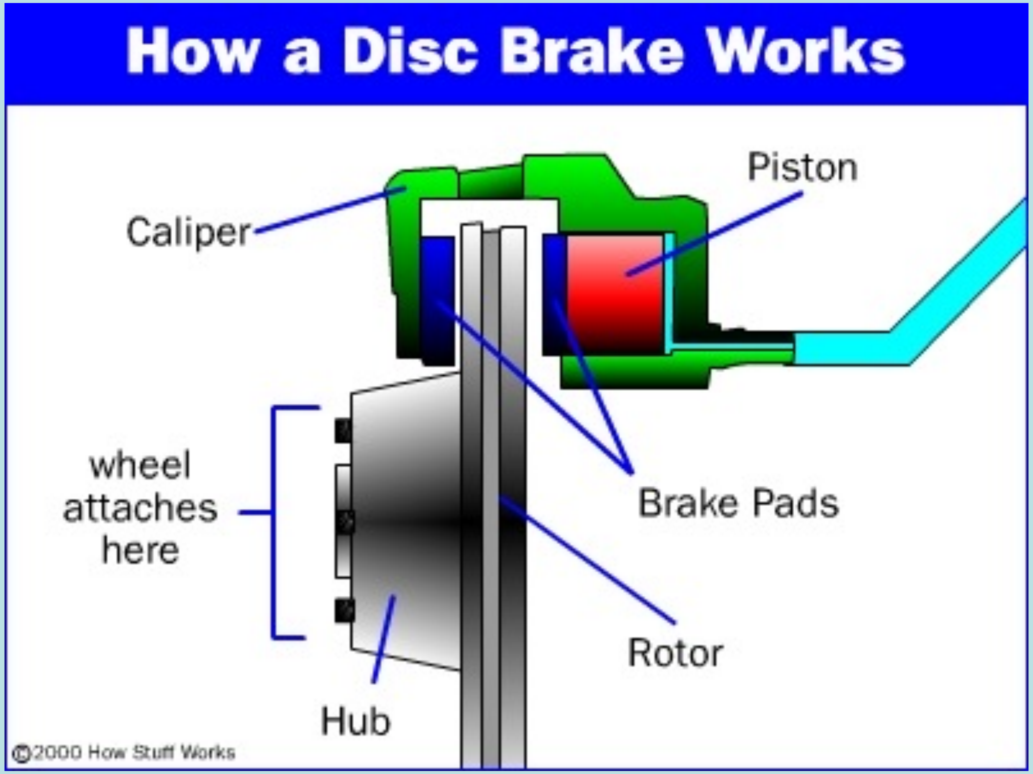


帶著滑動的滾動並不是正常的汽車行駛狀態，

如果旋轉與平移獨立，你操控輪胎的旋轉，將無法影響車子的平移！

車子的剎車是車子的一部分，並不直接施力於車子的平移運動！





剎車是作用於輪軸，
所以是減小輪子的轉動速度。
踩煞車是使輪胎轉動變慢！

正常的汽車行駛狀態

平滑滾動，Smooth Rolling

無滑動的滾動 Rolling without slipping

平滑滾動，球緣與地面的接觸點相對於地面是靜止的！

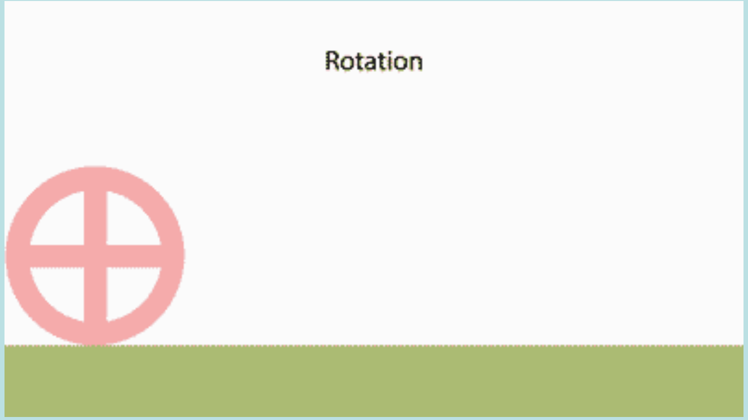
地面對球施予靜摩擦力。摩擦力大小由情況決定。

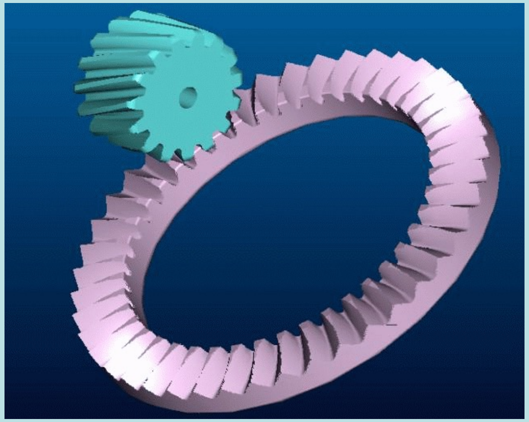
為了保持球緣與地面的接觸點是靜止的（平滑滾動）

滾動是移動與轉動兩者協調進行！

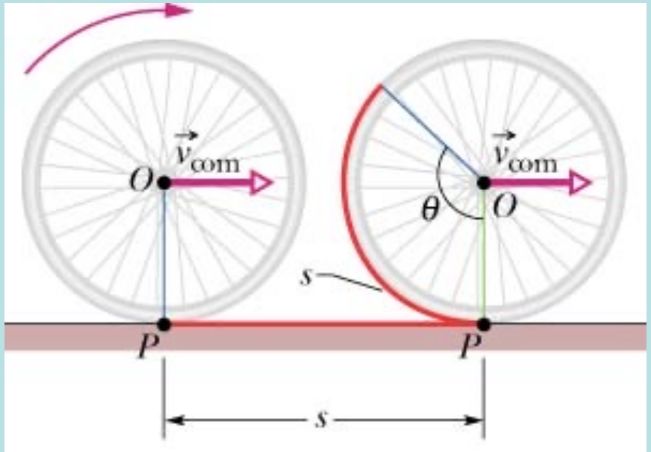
質心平移與旋轉相關。

踩煞車使輪胎轉動變慢，同時也會使平移變慢！





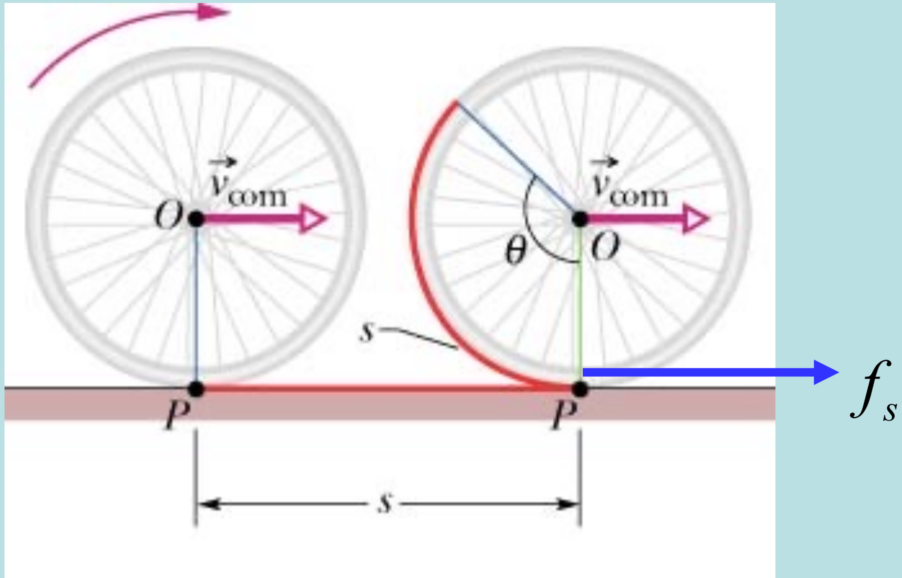
質心的移動距離必須等於，起始時，輪緣上的接觸點，所轉過的弧長！



$$\Delta x_{cm} = s = R\theta$$

平滑滾動條件

質心的移動距離必須等於，輪緣上的接觸點，所轉過的弧長！

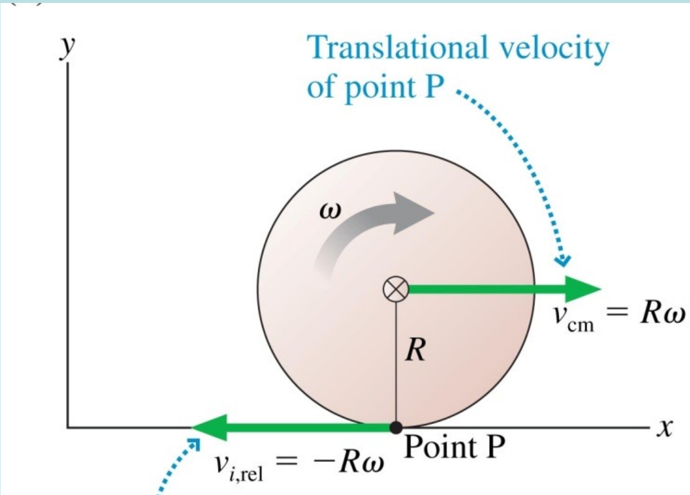


$$x_{\mathrm{cm}} = s = R\theta$$

取微分：

$$v_{\mathrm{cm}} = R\omega$$

$$a_{\mathrm{cm}} = R\alpha$$

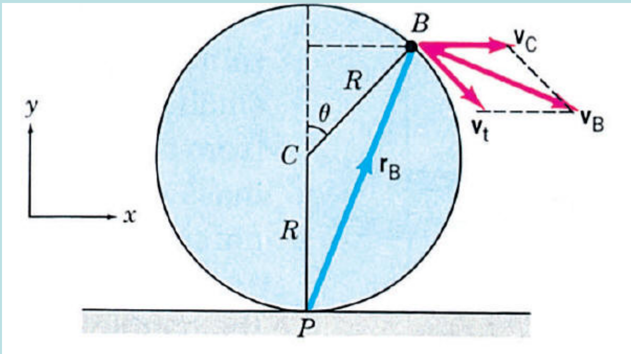


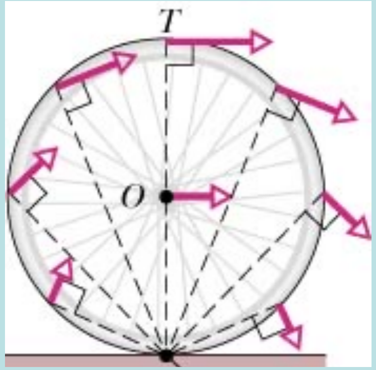
質心平移與旋轉是連鎖的！

因為無滑動，輪面與地面之間是靜摩擦

這個條件決定了靜摩擦力的大小。

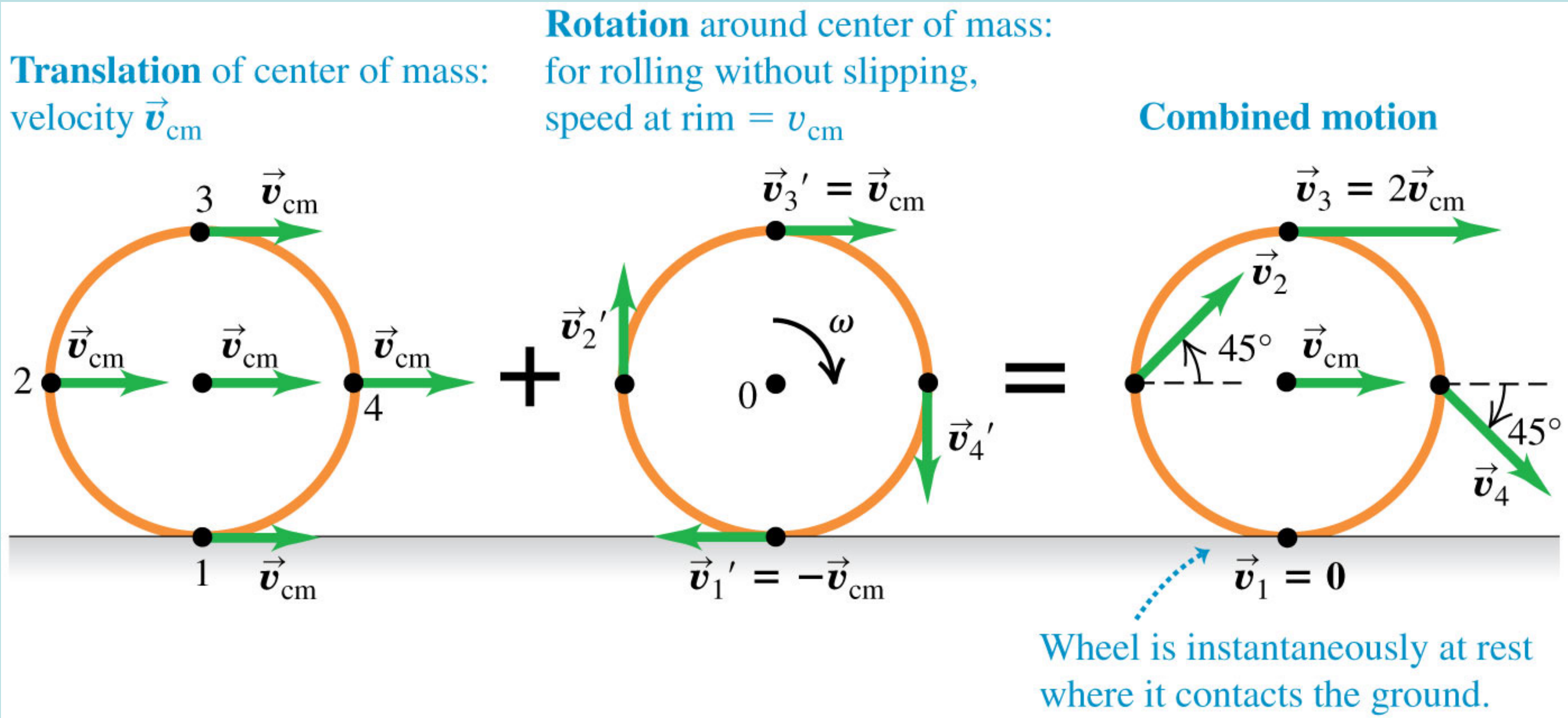
純滾動等於平移與對應的轉動的組合。

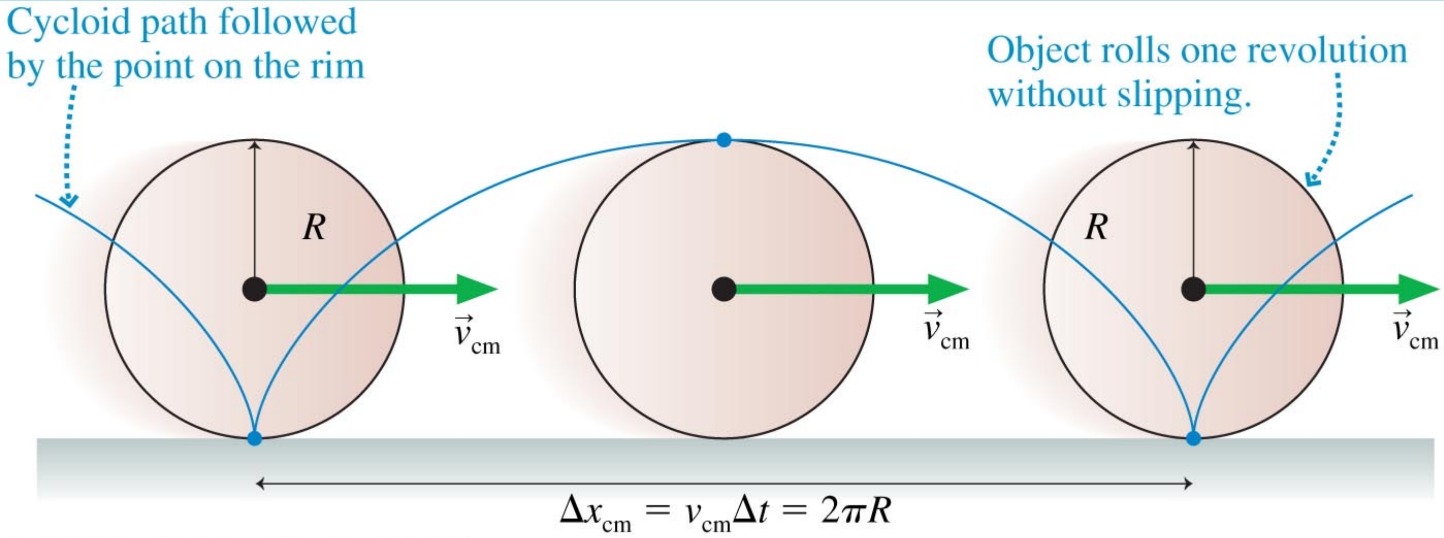




$\vec{v}_i = \vec{v}_{i,\mathrm{rel}} + \vec{v}_{\mathrm{cm}}$

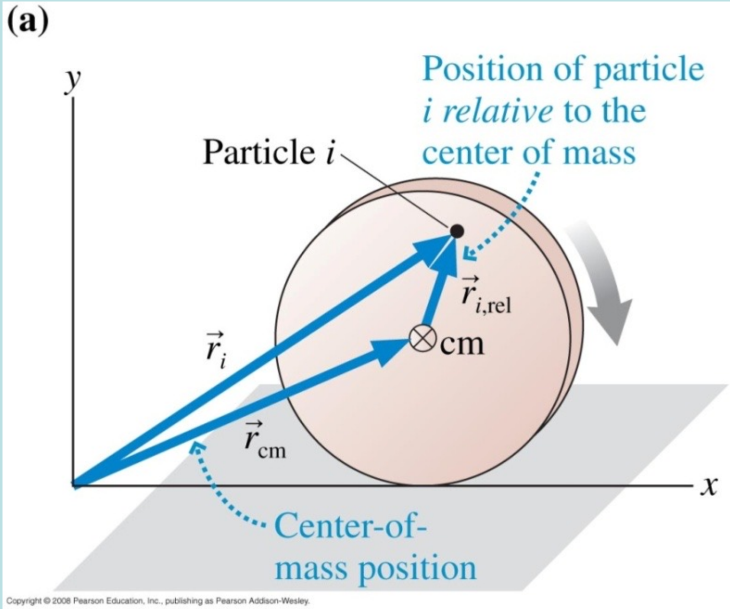
$v_{i,\mathrm{rel}} = r_i\omega$ $\quad v_{\mathrm{cm}} = R\omega$





$$\vec{r}_i = \vec{r}_{i,\mathrm{rel}} + \vec{r}_{\mathrm{cm}}$$

滾動是平移與轉動的組合



對邊緣上的一點：

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{i,\mathrm{rel}} + \vec{r}_{\mathrm{cm}}$$

$$\vec{r}_{\mathrm{cm}} = (v_{\mathrm{cm}}t, 0)$$

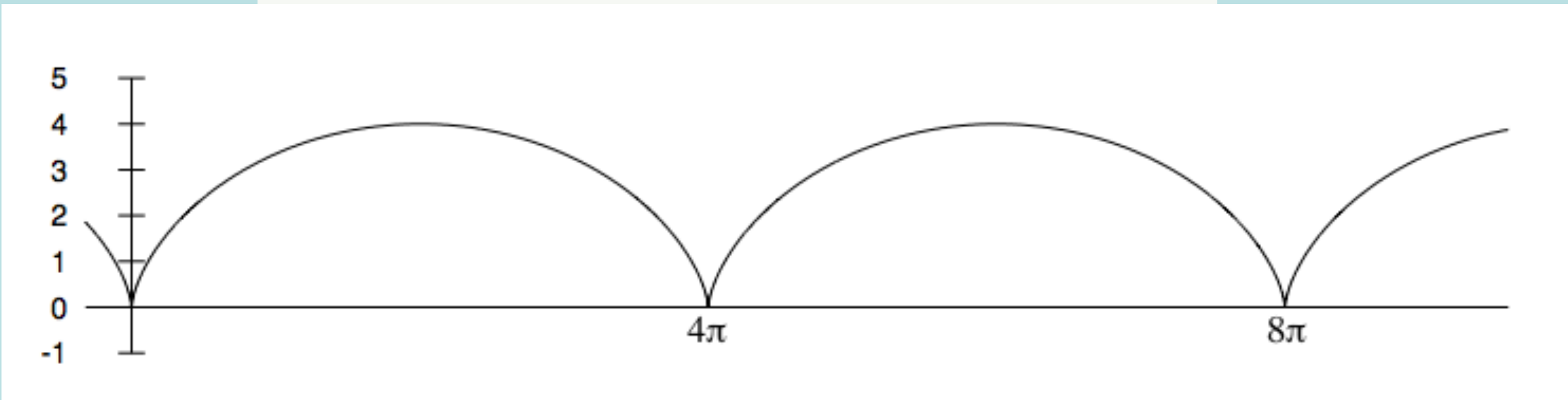
$$\vec{r}_i = \vec{r}_{i,\mathrm{rel}} = (R\cos\omega t\,, R\sin\omega t + R)$$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{i,\mathrm{rel}} + \vec{r}_{\mathrm{cm}} = (v_{\mathrm{cm}}t + R\cos\omega t\,, R\sin\omega t + R)$$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{i,\mathrm{rel}} + \vec{r}_{\mathrm{cm}} = (v_{\mathrm{cm}} t + R\cos\omega t \,, R\sin\omega t + R)$$

$$x = R\sin^{-1}\left(\frac{y}{R} - 1\right) + \sqrt{R - (y - R)^2}$$

擺線Cycloid



例一：斜面上的平滑滾動

$$Mg\sin\theta - f_s = Ma_{cm}$$

質心平移。

摩擦力的方向：

先假設無摩擦，判斷接觸點相對斜面移動方向，此方向的反方向即為摩擦力的方向。

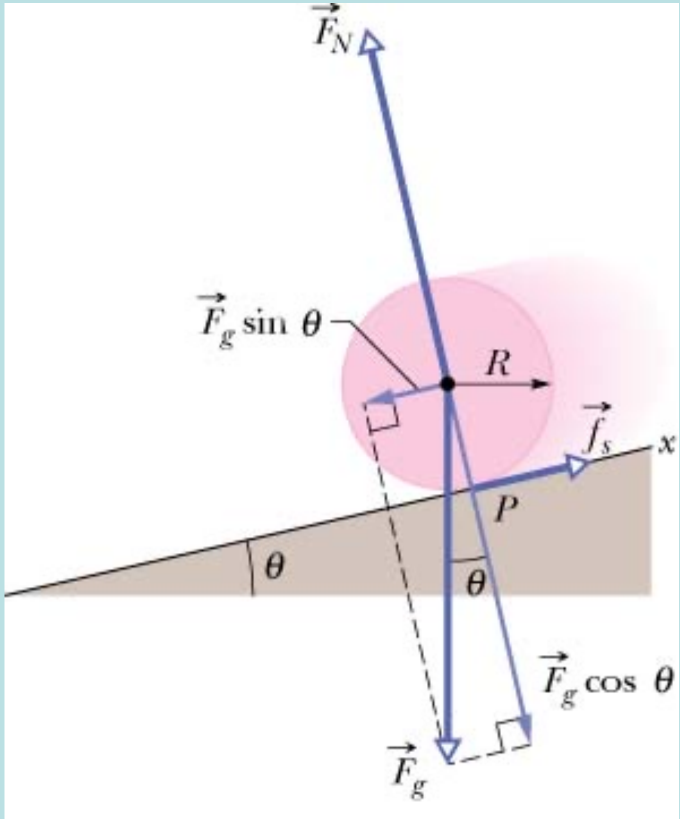
$$\tau = Rf_s = I\alpha$$

旋轉，重力通過質心故無力矩。

旋轉的力矩來自靜摩擦力。

$$a_{cm} = R\alpha$$

無滑動條件。



$$a_{cm} = \frac{g\sin\theta}{1+\dfrac{I}{MR^2}}$$

摩擦力可求出：

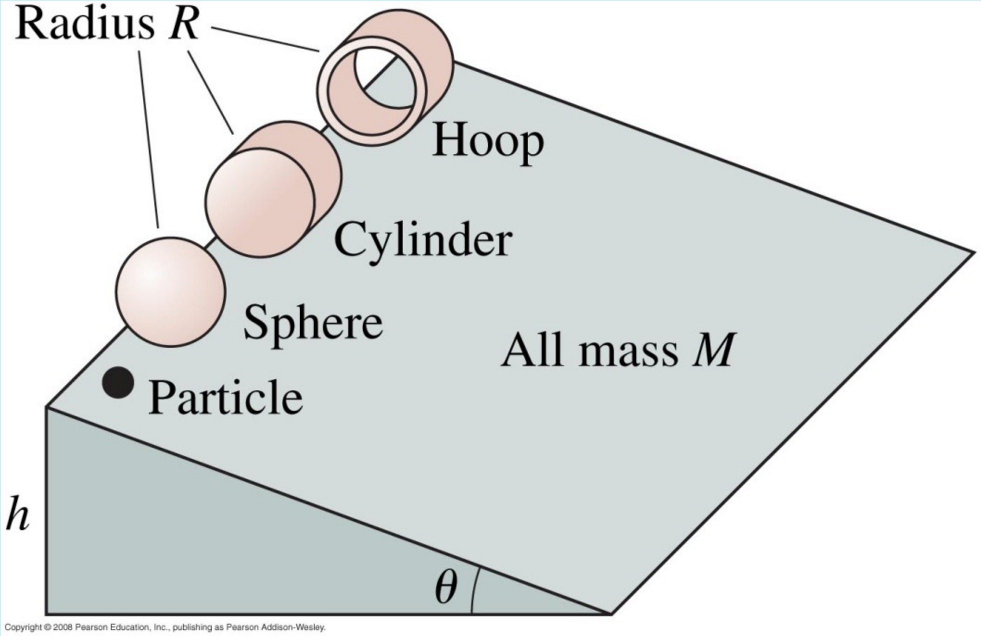
$$f_s = \frac{I}{R^2}\frac{g\sin\theta}{1+\dfrac{I}{MR^2}}$$

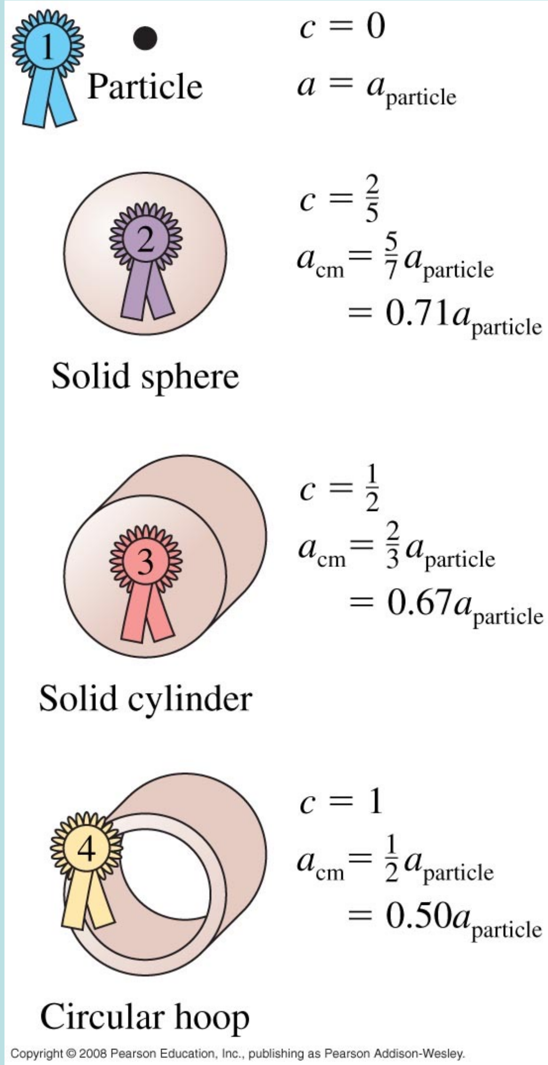
加速度小於單純的粒子下滑。

另一種作法：能量

剛體的動能：移動 + 旋轉

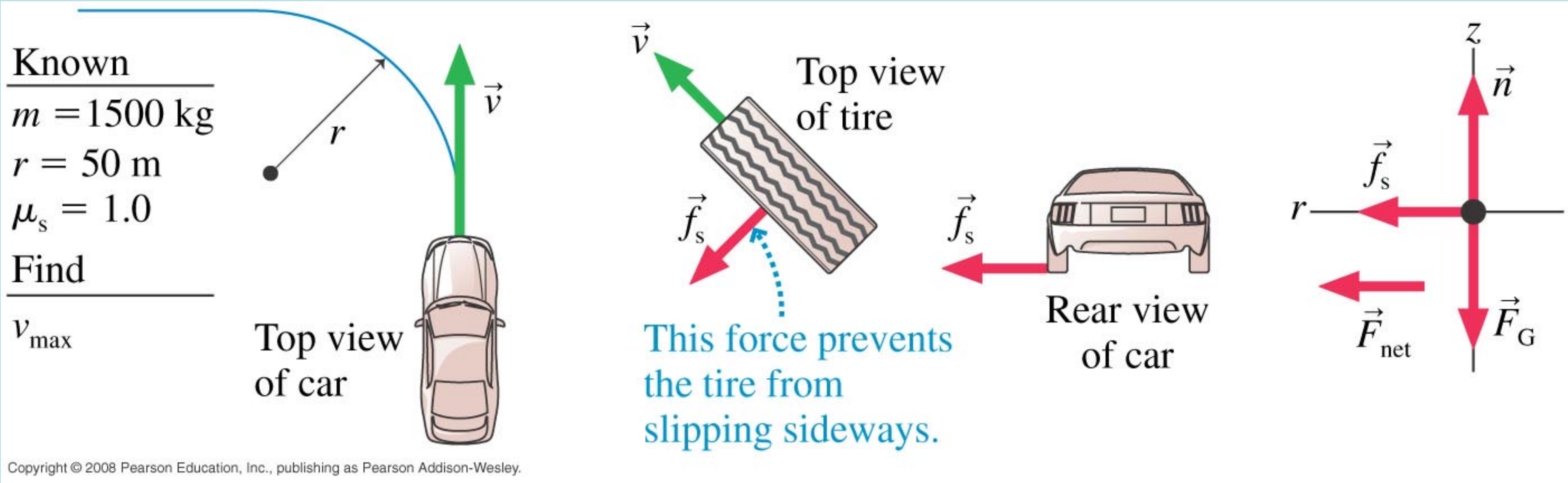
$$K = \frac{1}{2} I_{\mathrm{cm}} \omega_2 + \frac{1}{2} M v_{\mathrm{cm}}^2$$





$$K = \frac{1}{2} I_{\text{cm}} \omega_2 + \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 = Mgh$$

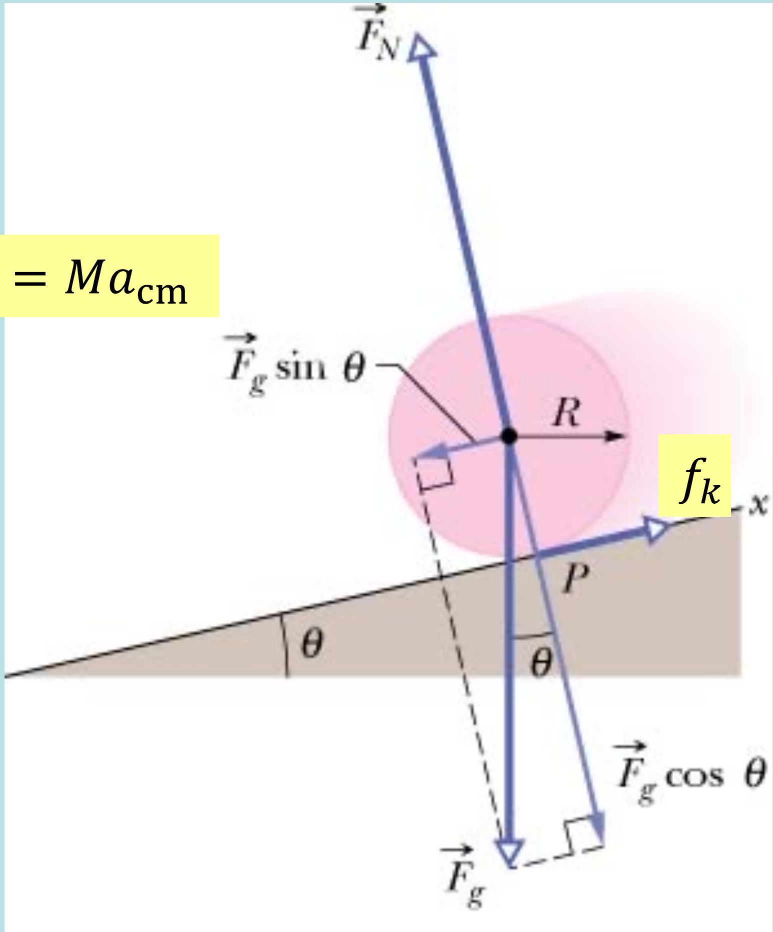
$v_{\text{cm}} = R\omega$ 純滾動條件


Known
$m = 1500$ kg
$r = 50$ m
$\mu_s = 1.0$
Find
v_{max}
r
$\vec{v}$
Top view of car
$\vec{v}$
Top view of tire
$\vec{f}_s$
This force prevents the tire from slipping sideways.
$\vec{f}_s$
Rear view of car
z
$\vec{n}$
$\vec{f}_s$
r
$\vec{F}_{net}$
$\vec{F}_G$

若斜角太大，靜摩擦大於最大靜摩擦，球就開始滑動

$$f_s = \frac{I}{R^2}\frac{g\sin\theta}{1+\frac{I}{MR^2}} > Mg\cos\theta\,\mu_s$$

例二：斜面上的非平滑滾動



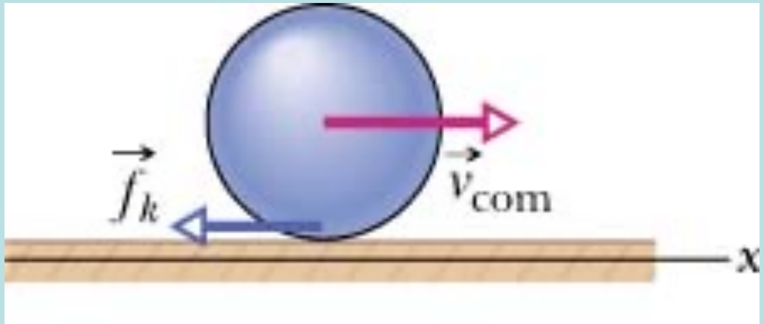
$$Mg\sin\theta - f_k = Mg\sin\theta - RMg\cos\theta\,\mu_k = Ma_{\mathrm{cm}}$$

質心平移

$$\tau = Rf_k = RMg\cos\theta\,\mu_k = I\alpha$$

旋轉

注意動摩擦力已知。



質心平移 $-f_k = -Mg\mu_k = Ma_{\text{cm}}$ $\longrightarrow$ $a_{\text{cm}} = -g\mu_k$ 減速

旋轉 $\tau = Rf_k = RMg\mu_k = I\alpha$ $\longrightarrow$ $\alpha = \dfrac{RMg\mu_k}{I} = \dfrac{5g\mu_k}{2R}$ 加速旋轉

$$v_{\text{cm}} = v_{\text{cm0}} - g\mu_k t \qquad \omega = \frac{5g\mu_k}{2R}t$$

與地面接觸點速度 $v = v_{\text{cm}} - R\omega = v_{\text{cm0}} - g\mu_k t - \dfrac{5g\mu_k}{2}t = v_{\text{cm0}} - \dfrac{7g\mu_k}{2}t$

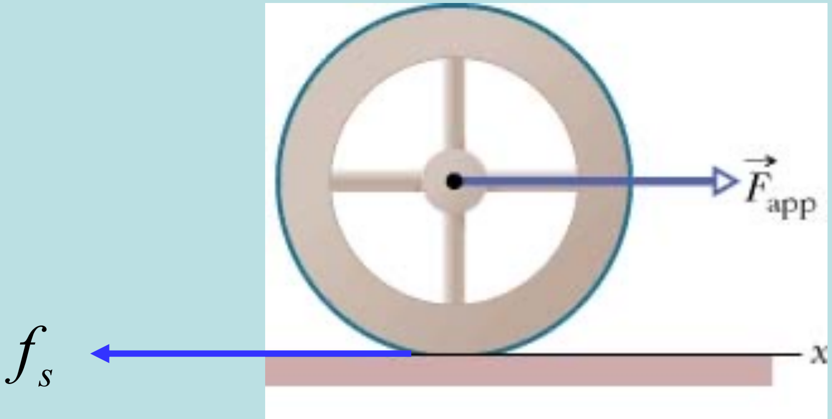
過了一段時間後，此速度為零，從此滾動成為平滑滾動！

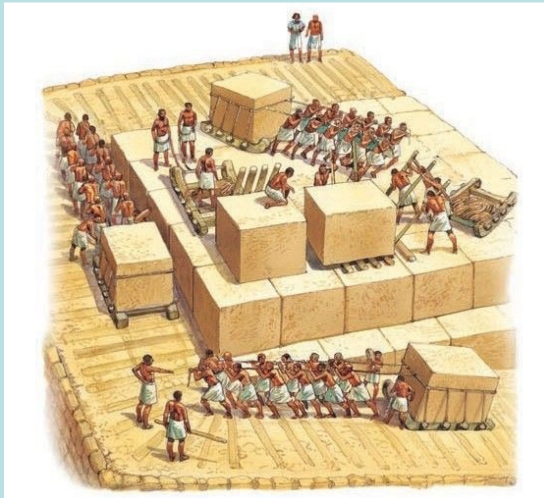
例三：以外力驅動的平面滾動

$$F_{\text{app}} - f_s = Ma_{\text{cm}}$$

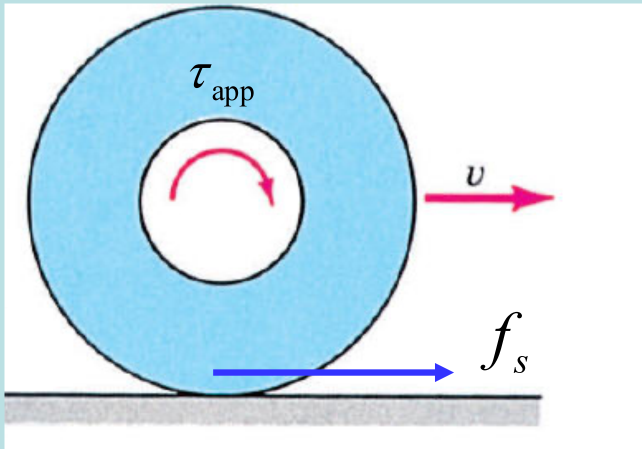
$$\tau = Rf_s = I\alpha$$

$$a_{\text{cm}} = R\alpha$$





例四：以內力矩驅動的平面滾動



$$f_s = Ma_{\text{cm}}$$

$$\tau_{\text{app}} - Rf_s = I\alpha$$

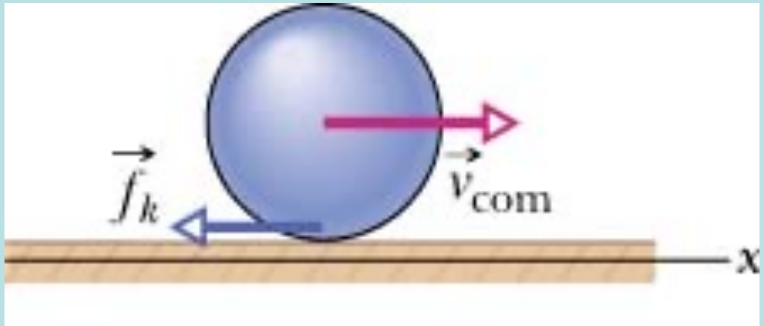
$$a_{\text{cm}} = R\alpha$$

帶著滑動的滾動

無滑動的滾動 Rolling without slipping

球緣與地面的接觸點相對於地面是滑動的！
地面對球施予動摩擦力。

球緣與地面的接觸點相對於地面是靜止的！
地面對球施予靜摩擦力。



質心平移 $-f_k = -Mg\mu_k = Ma_{\mathrm{cm}}$

$f_s - Mg\sin\theta = Ma_{\mathrm{cm}}$

旋轉 $\tau = Rf_k = RMg\mu_k = I\alpha$

$\tau = Rf_s = I\alpha$

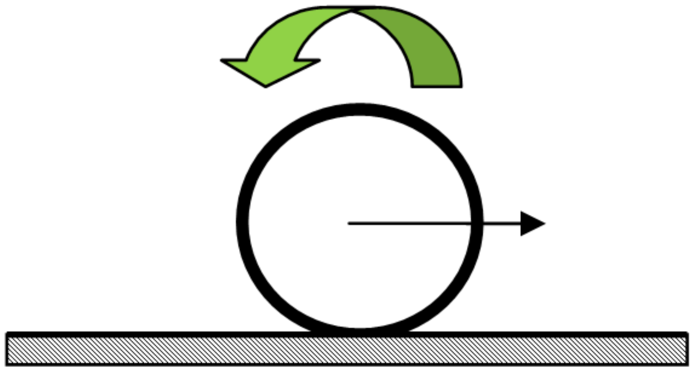
$a_{\mathrm{cm}} = R\alpha$

平移與旋轉基本上分離。

滾動是移動與轉動兩者協調進行！

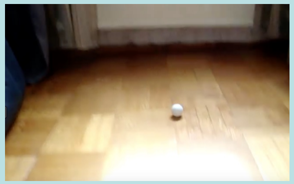
24. 想讓鐵環像聰明的寵物般會出門後自動回家嗎？考慮一空心鐵環（半徑 $R = 1.0$ m，質量 $M = 1.0$ kg）。自原點將它以環心的平移速度 4.0 m/s 向 $+x$ 方向擲出著地的同時，使它繞環心以 20 rad/s 的角速度逆時鐘快速旋轉。假設地面與鐵環之間的動摩擦係數 $\mu_k = 0.21$，靜摩擦係數 $\mu_s = 0.5$。著地的時間設為 $t = 0$。

(1)在鐵環著地後，地面對於鐵環會施予摩擦力，此摩擦力會使質心速度及旋轉都減

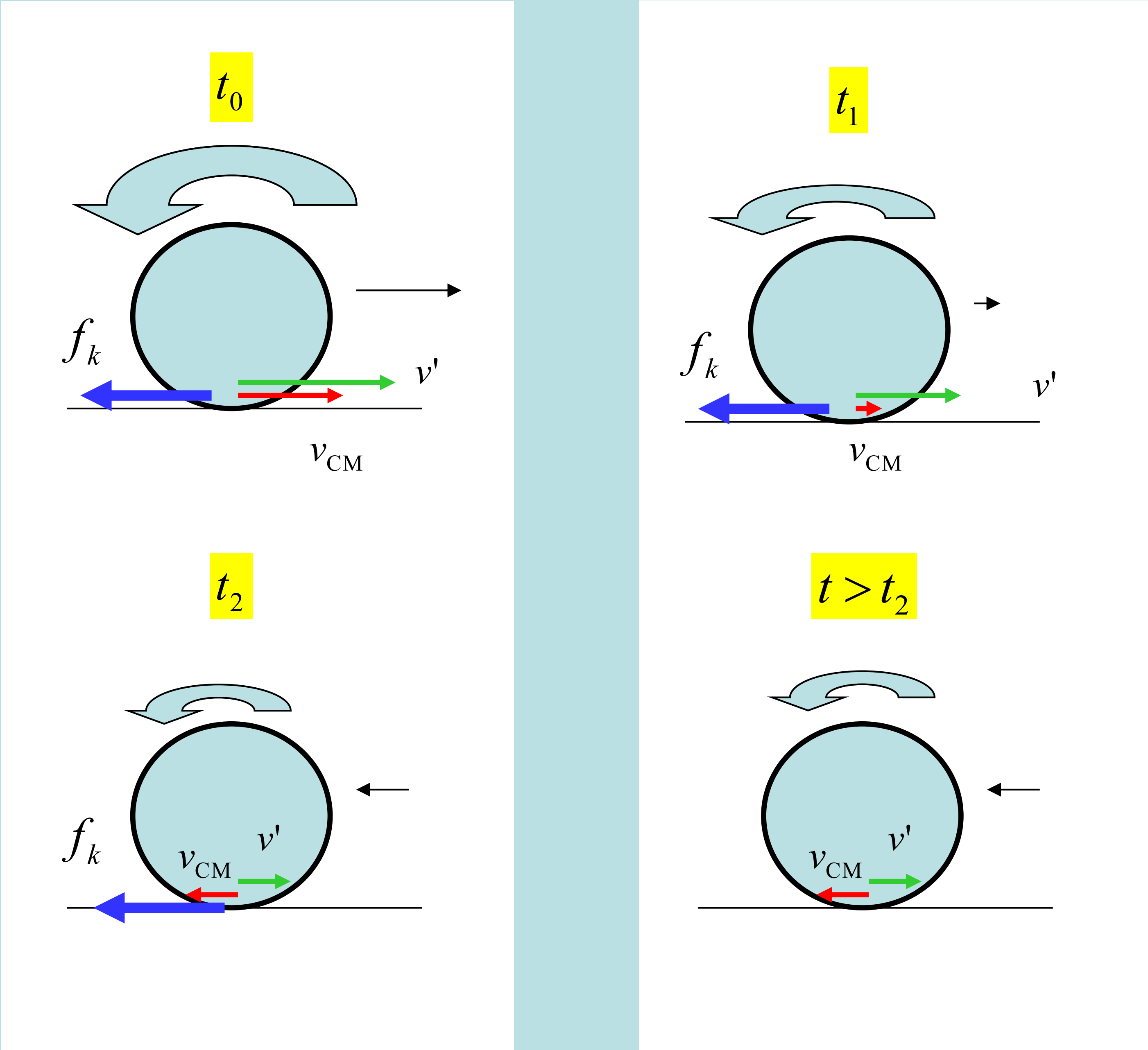


速，質心的平移甚至會在一段時間後轉向，朝 $-x$ 方向運動。計算環的平移運動向右到達的最遠處，與出發點的距離。

(2)轉向之後，到了時間 t 時（由出發時算起），接觸點相對於地面的速度變成零，鐵環開始無滑動的滾動，問此時間 t 是多少 s？



回家鐵環



(1) 當環著地時，接觸點相對於質心的速度為 20 m/s。接觸點相對於地為 $20+4=24$ m/s，向 $+x$ 方向，因此動摩擦力為向 $-x$ 方向，大小為 $f_k=\mu_k\times Mg=0.21\times 9.8=2.06\text{N}$。此力是常數，因此質心作等減速運動，加速度為 $-2.06\ \text{m/s}^2$。當質心速度減至零時，$t_1=4/2.06=1.94\,\text{s}$。因此距離出發點為 $4\times 1.94-\dfrac{1}{2}\times 2.06\times 1.94^2=3.88\text{m}$。

(2) 繞質心的旋轉所受力矩為 $\tau=f_k\times R=2.06\,\text{N}\cdot\text{m}$，轉動慣量 $I=MR^2=1.0\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$，轉動角加速度為 $\alpha=\dfrac{\tau}{I}=2.06\ \text{rad/s}^2$。如此在 $t_1=4/2.06=1.94\,\text{s}$ 時的角速度為：$20-2.06\times 1.94=16.0\ \text{rad/s}$，很明顯旋轉依舊是逆時針方向，接觸點對地的速度是 $v_{\text{cm}}+\omega R=16.0\,\text{m/s}$ 向+x 方向，因此摩擦力依舊向 $-x$ 方向，所以質心從靜止開始朝 $-x$ 方向移動。動摩擦力大小並沒有改變，接觸點對地速度為

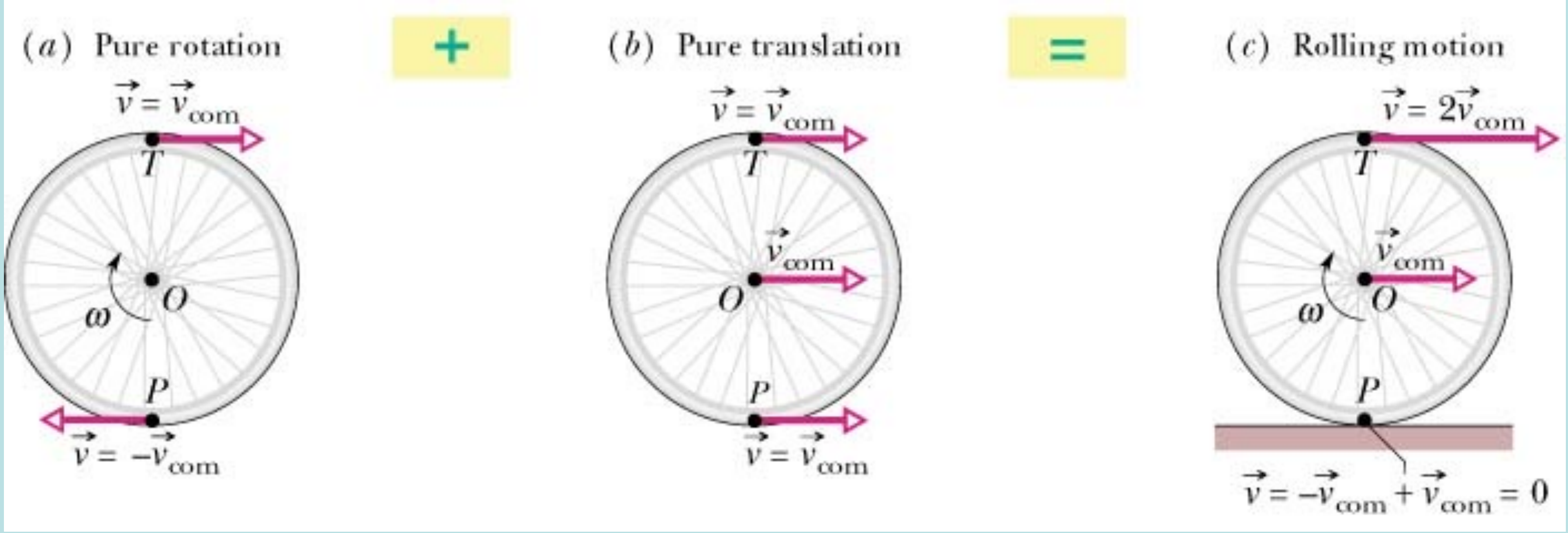
$v_{cm}+\omega R=-2.06\cdot(t-t_1)+\left(20-\alpha t\right)\cdot R=-2.06\cdot(t-1.94)+\left(20-2.06t\right)$，當此速度為零時，時間為 $t=5.8\ \text{s}$。

無滑動的滾動

$\vec{v}_i = \vec{v}_{i,\text{rel}} + \vec{v}_{\text{cm}}$

$v_{\text{cm}} = R\omega$

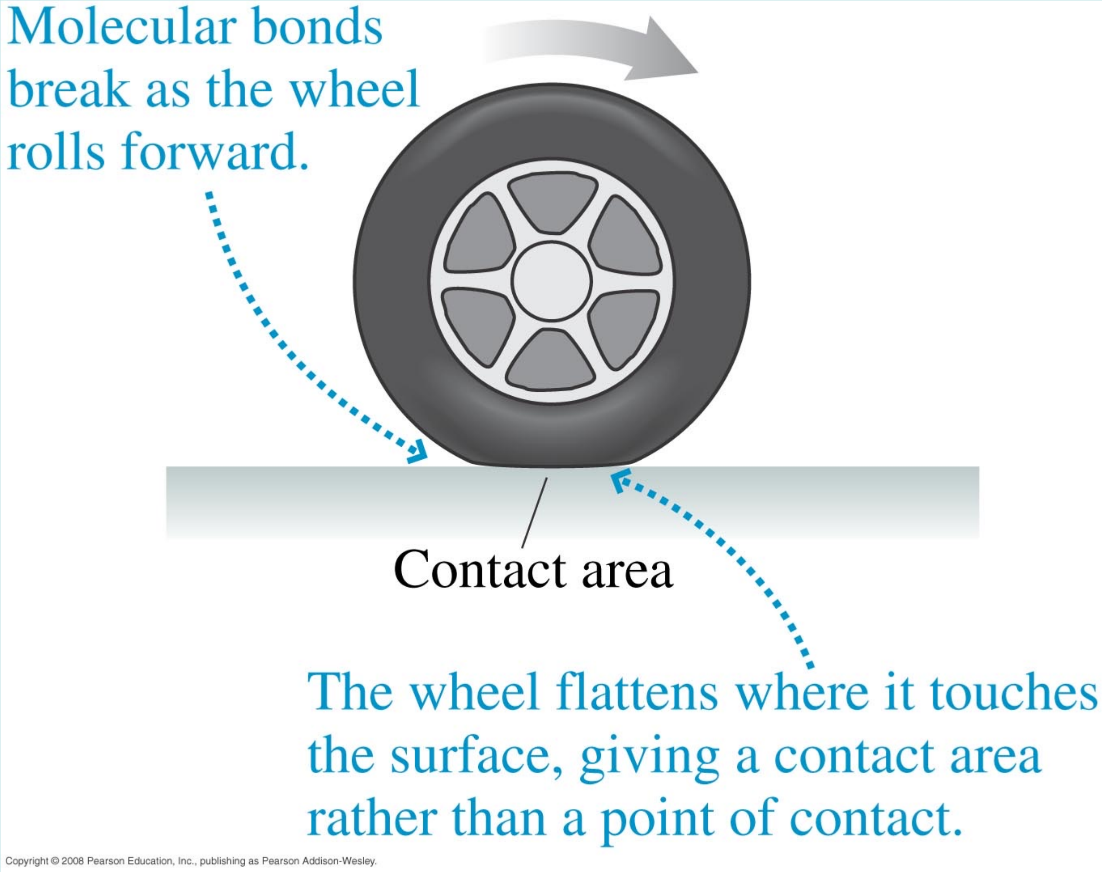
$v_{\text{接觸點}} = v_{\text{cm}} - R\omega = 0$

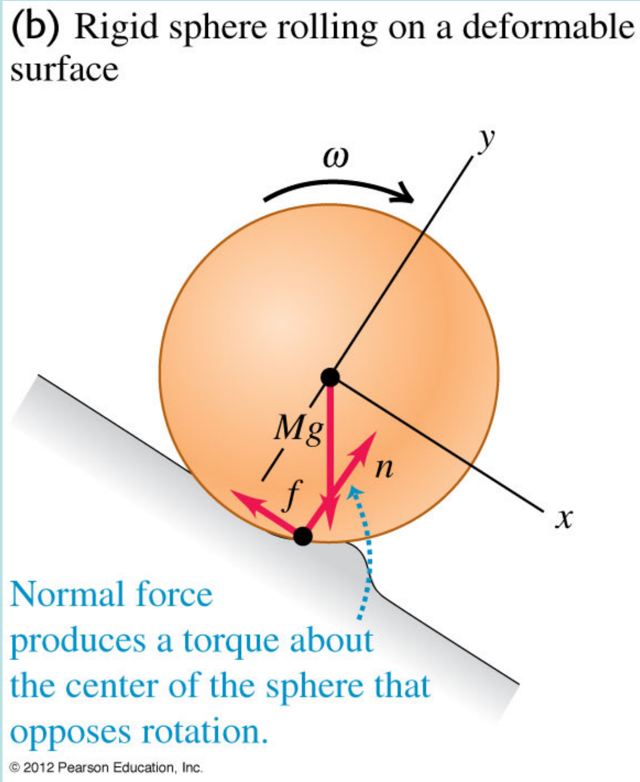


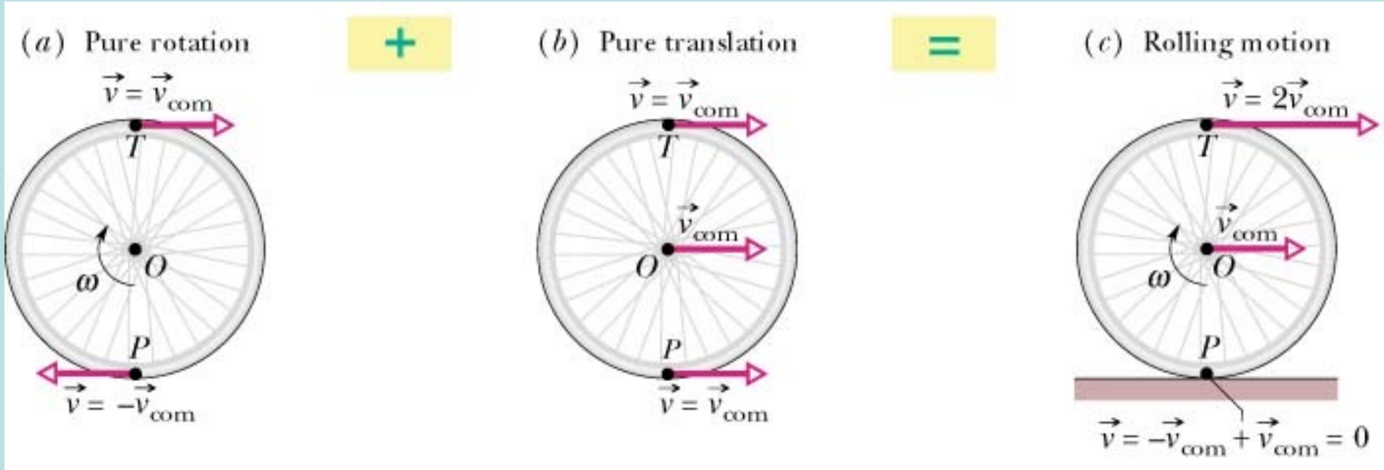
接觸點是靜止的。靜摩擦力不作功！

原則上是永遠沒有能量消耗！可以一直滾下去！

但事實上剛體只是一個理想的近似！







在質心座標系中
為繞固定軸旋轉

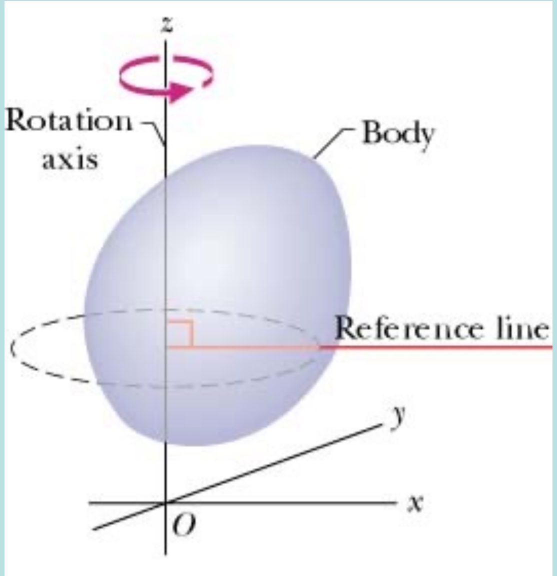
$$\tau = I\alpha$$

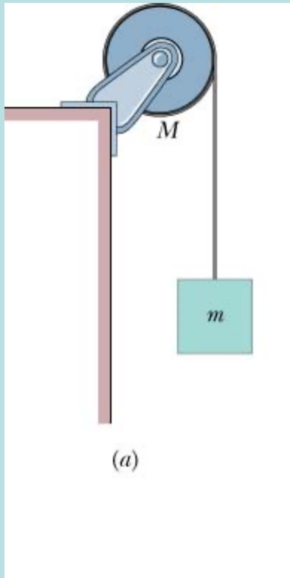
質心第二運
動定律

$$F_{ext} = Ma_{cm}$$

二維剛體運動由一個平移及一個轉動所構成，分別由一個牛頓動定律來描述！

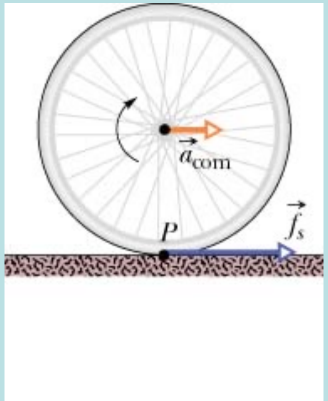
剛體的旋轉 Rotation of Rigid Body

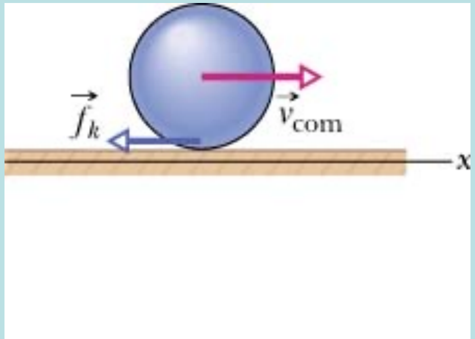


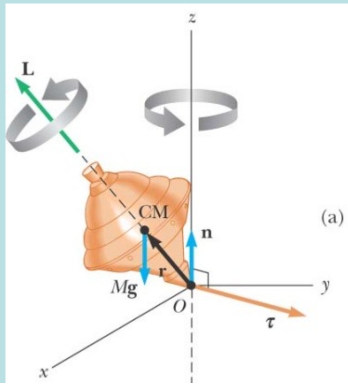


剛體繞一固定軸轉動

旋轉軸可以在垂直方向平移







旋轉軸可隨時間變化