自由空間的薛丁格方程式的普遍解

一系列極有用的自由空間電子波解：波包！

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

已知有一系列自由空間的薛丁格方程式的解：自由電子平面波。

$\Psi = Ae^{i(kx-\omega t)}$ $\omega = \dfrac{\hbar}{2m}k^2$ 通常會說這是朝單一方向傳播的自由電子波，

但這電子波機率密度為一常數： $|\Psi(x,t)|^2 = \left|Ae^{ikx}\right|^2 \left|e^{-i\omega t}\right|^2 = |A|^2$

在此狀態的電子，性質與位置無關！

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,t)|^2 \cdot dx = \infty$$

如此這個解根本不可能滿足Normalization Condition.

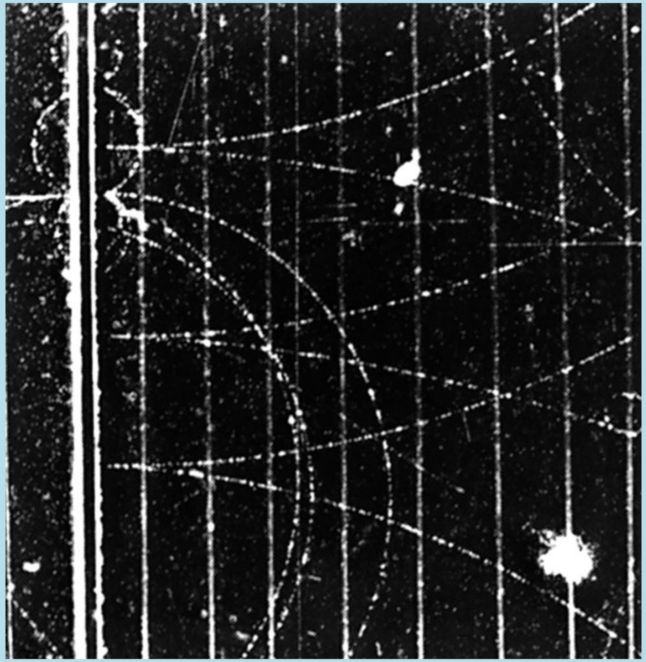
它不是一個合法的解，

因為沒有任何位置資訊，不能稱它為沿+x方向運動的電子，

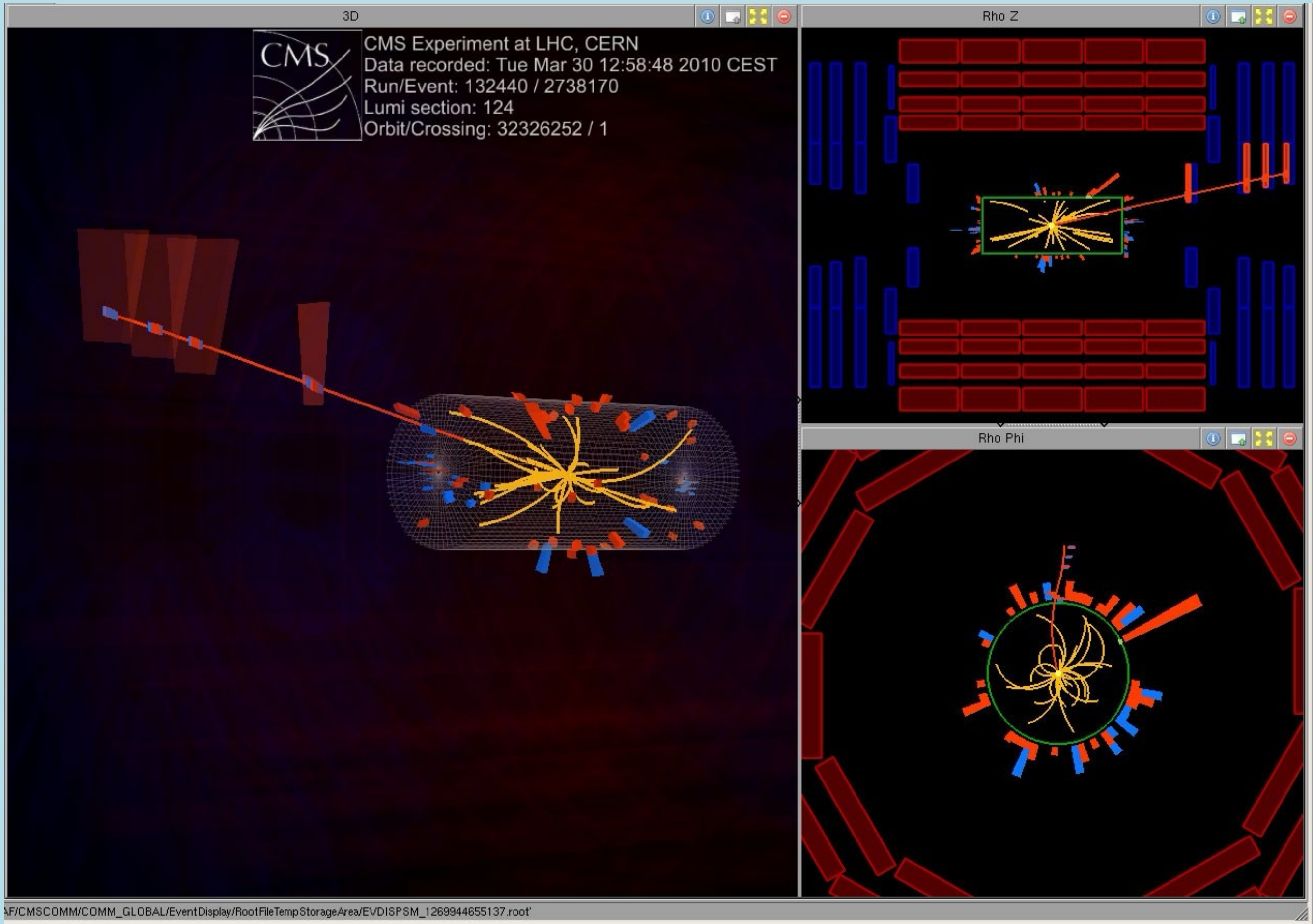
它只是擁有+x方向的動量，但並沒有任何實質東西的位置在改變。

在傳播與運動的是波函數的相位及波形，但那不是可觀察的物理量。

位置完全不確定，完全的全球化。



我們觀察到的粒子總是得有一些地方特色：區域性！



自由電子波波函數$e^{i(kx-\omega t)}$並不能描述圖中一個自由運動的粒子。

$e^{i(kx-\omega t)}$具有確定的波長、確定的動量。因此位置完全不確定。

電子在粒子狀的態的確看來像顆粒，此時波函數只在一個小範圍內不為零。

自由電子波機率密度為一常數： $|\Psi(x,t)|^2 = \left|Ae^{ikx}\right|^2\left|e^{-i\omega t}\right|^2 = |A|^2$

在此狀態的電子，性質也與時間完全無關！

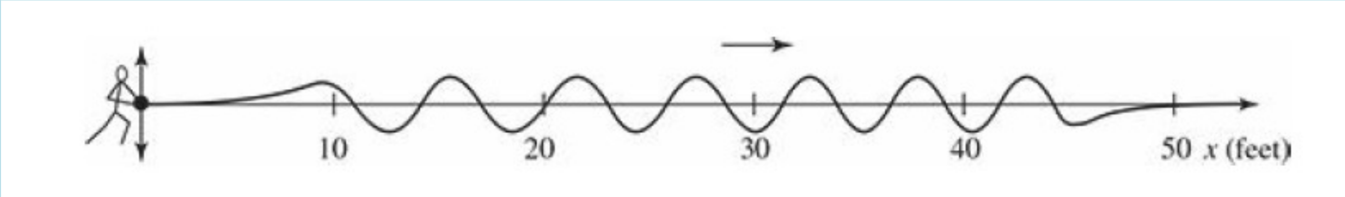
稱為定態 Stationary State，它所有可測量的量都與時間無關。

在定態中，所有對電子的測量結果，都與時間無關！

牛頓力學中，唯一的定態，就是靜止狀態！

但量子力學中，任何位能下的薛丁格方程式幾乎都有許多定態。

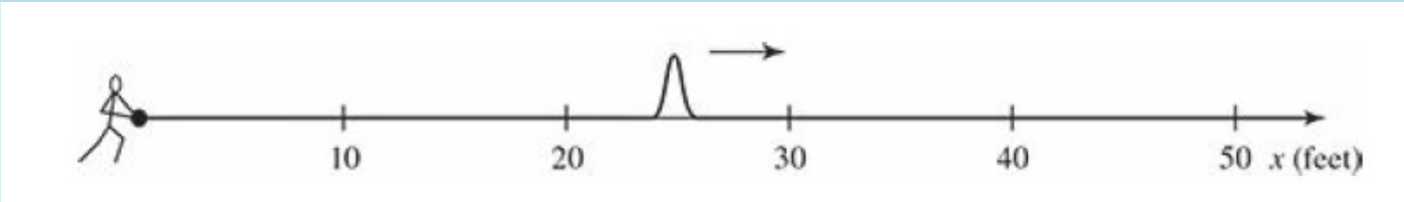
波狀的態的波函數就是自由電子波：$Ae^{i(kx-\omega t)}$。這是定態。



正弦波波長特定，動量特定： $\Delta p = 0$

波的強度是一個常數， $\Delta x \to \infty$

粒子狀的態的波函數則是一個尖針般的波，極窄的波包就是很好的近似。

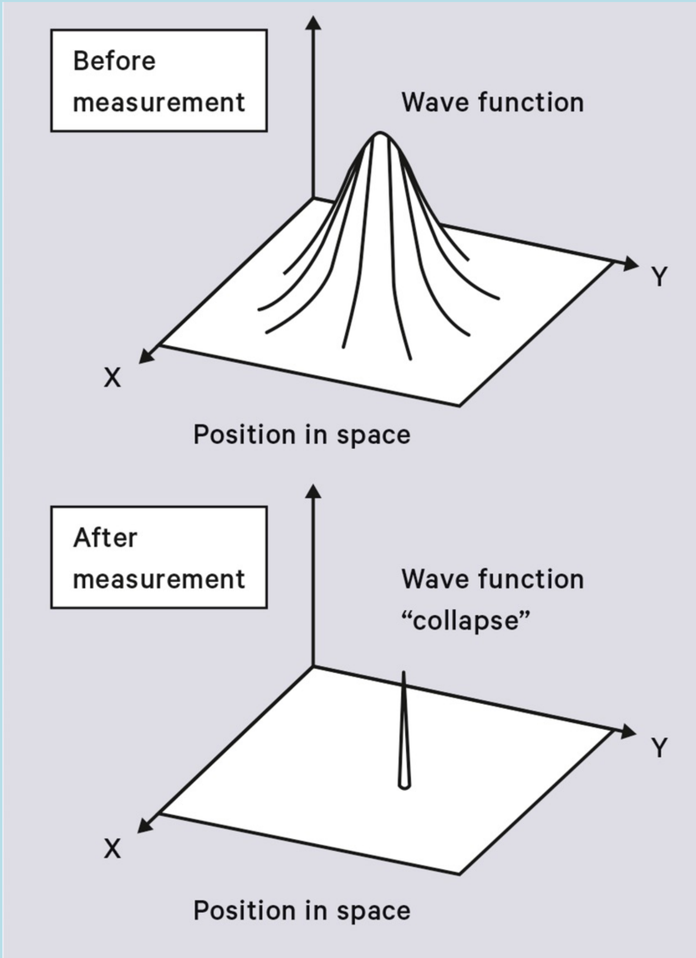


波函數幾乎只在一個位置有值： $\Delta x = 0$

這是由眾多不同波長的正弦波疊加而成： $\Delta p \to \infty$

還有狀態介於兩者間，位置及動量都有不確定性的狀態！ $\Delta x, \Delta p \neq 0$

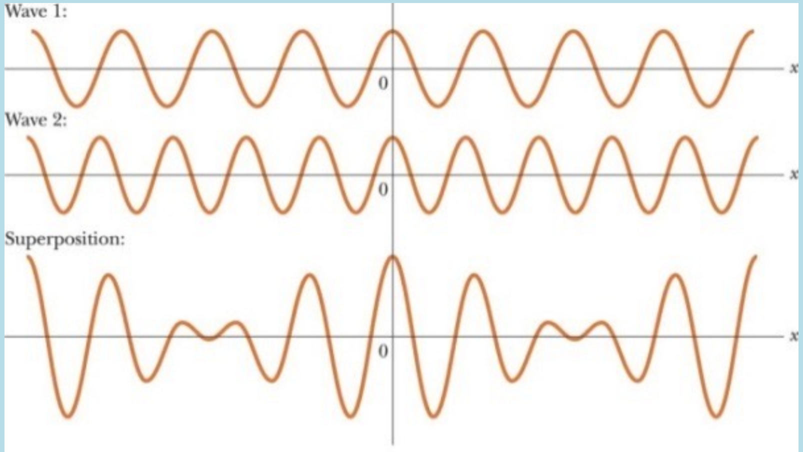
自由空間中，波狀的態是定態，但粒子狀的態顯然不是！

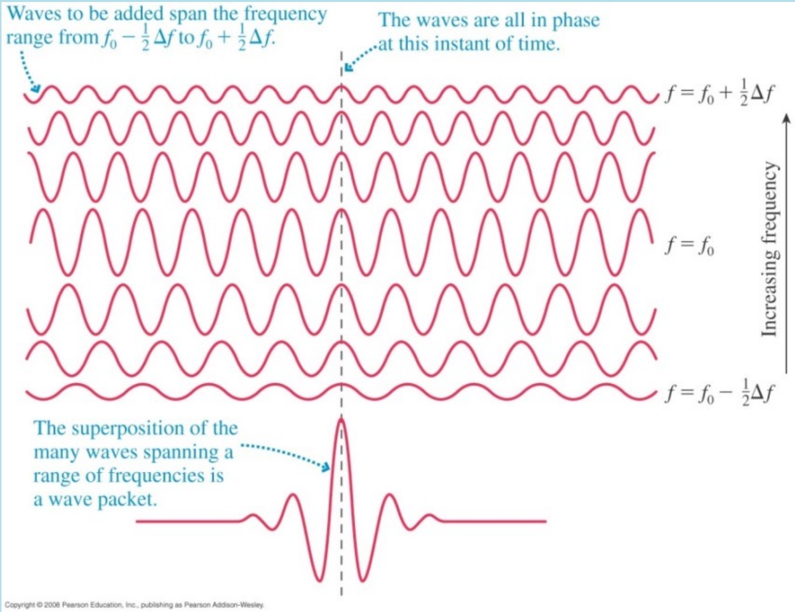


測量電子位置，波函數崩潰後，接下來會如何隨時間演化呢？

一個只在一個小範圍內不為零的波函數如何隨時間演化？

$\Delta x \neq \infty$的狀態，波函數只在一小範圍內不為零。





古典物理中，將角波數k類似$\Delta k \neq 0$的$Ae^{i(kx-\omega t)}$疊加起來，

可製造出只在一個小範圍內波函數不為零的波包！

以$e^{i(kx-\omega t)}$作為材料，建造出比較像觀察到的自由電子的狀態。

CLASSICAL DYNAMICS OF PARTICLES AND SYSTEMS

FIFTH EDITION

Stephen T. Thornton
Professor of Physics, University of Virginia

Jerry B. Marion
Late Professor of Physics, University of Maryland

13.9 Group Velocity and Wave Packets

Thus far, we have considered only the superposition of two waves. If we wish to superpose a system of n waves, we must write

$$\Psi(x, t) = \sum_{r=1}^{n} A_r \exp[i(\omega_r t - k_r x)] \quad \textbf{(13.111a)}$$

where A_r represents the amplitudes of the individual waves. In the event that n becomes very large (strictly, infinite), the frequencies are continuously distributed, and we may replace the summation by an integration, obtaining*

$$\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k)\, e^{i(\omega t - kx)}\, dk \quad \textbf{(13.111b)}$$

因此我們必須開始考慮自由電子波的疊加：

$$\omega(k) = \frac{\hbar}{2m}k^2$$

對任意角波數k，$Ae^{i(kx-\omega(k)t)}$都是薛丁格方程式的解。

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

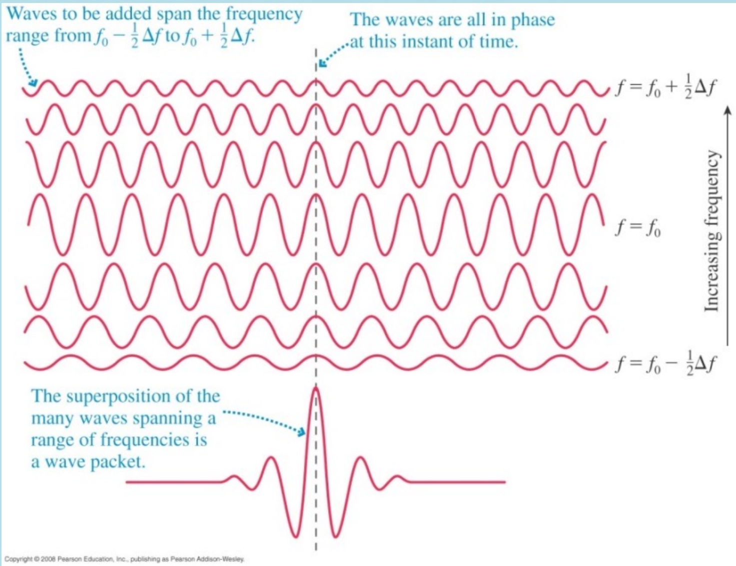
薛丁格方程式是一線性方程式，滿足疊加定理。

以不同配重係數$A(k)$疊加所有角波數k的$Ae^{i(kx-\omega t)}$，依舊滿足薛丁格方程式：

$$\Psi(x,t) = \sum_k A(k)\cdot e^{i\left(kx-\frac{\hbar}{2m}k^2t\right)} \xrightarrow[L\to\infty]{} \int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{i\left(kx-\frac{\hbar}{2m}k^2t\right)}\cdot dk$$

注意：自由空間中k是連續分布的，因此求和就成為積分，

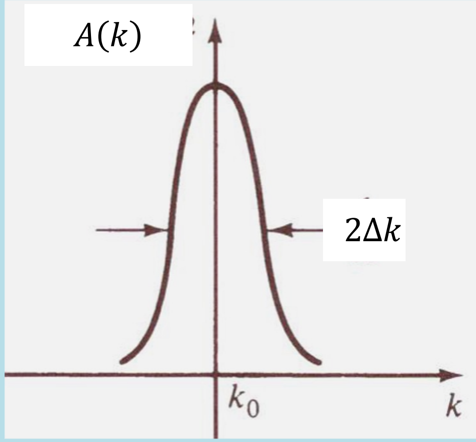
不同的k，依據色散關係對應不同的$\omega(k)$。



波包是最有用的疊加態了，它是疊加稍微不同角波數k的正弦波。

考慮一高斯分佈Gaussian form $A(k)$：

$$A(k) = Ce^{-\frac{\alpha(k-k_0)^2}{2}}$$



這表示是以為k_0中心，形成一離開此值就快速降低的分佈，

若取極值的1/3左右位置，寬度大約是$\Delta k \sim \sqrt{2}/\sqrt{\alpha}$。

k與動量成正比，所疊加出的狀態，在測量動量時，$p_0 = \hbar k_0$的機率應該最大，

合理的猜想：測量結果會有不準度$\Delta p = \hbar \Delta k \sim \hbar\sqrt{2}/\sqrt{\alpha}$ 。

計算$t = 0$時瞬間波函數：$\Psi(x, 0)$。 暫時忽略常數C，最後再用歸一化條件來訂。

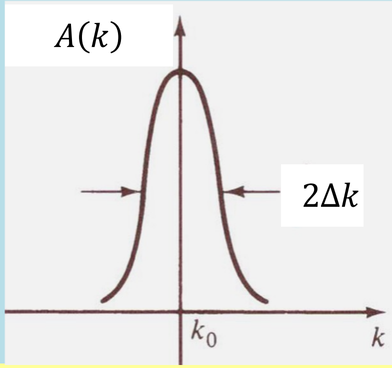
$$\Psi(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\alpha(k-k_0)^2}{2}} \cdot e^{ikx} \cdot dk$$

$A(k)$與$\Psi(x, 0)$互為Fourier Transform。

已知高斯函數的無限積分：

因此要將指數湊成平方：

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$



首先變換變數： $q \equiv k - k_0$ 將$k = q + k_0$代入

$$\Psi(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\alpha(k-k_0)^2}{2}} \cdot e^{ikx} \cdot dk = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\alpha q^2}{2}} \cdot e^{i(q+k_0)x} \cdot dq$$

與q無關！

$$= e^{ik_0x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\alpha q^2}{2}+iqx} \cdot dq$$

接下來湊成平方。

$$= e^{ik_0x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\alpha}} \cdot e^{-\frac{\alpha}{2}\left(q^2-2\frac{ix}{\alpha}q-\frac{x^2}{\alpha^2}\right)} \cdot dq$$

$$q' \equiv q - i\frac{x}{\alpha}$$

$$= e^{ik_0x} e^{-\frac{x^2}{2\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\alpha q'^2}{2}} \cdot dq' = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}}\, e^{ik_0x} e^{-\frac{x^2}{2\alpha}}$$

積分已經與x無關了!就是一個常數。

計算前一頁的常數 $\int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot e^{-ax^2}$

先平方：

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot e^{-ax^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dy \cdot e^{-ay^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dxdy \cdot e^{-ax^2-ay^2}$$

換極座標：

$$= \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\infty} rdr \cdot d\theta \cdot e^{-ar^2} = 2\pi \int_{0}^{\infty} rdr \cdot e^{-ar^2} = \pi \int_{0}^{\infty} dr^2 \cdot e^{-ar^2} = \frac{\pi}{a}$$

開根號：

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\Psi(x,0) = C\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}}e^{ik_0x}e^{-\frac{x^2}{2\alpha}}$$

$$= C\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}}\left(e^{-\frac{x^2}{2\alpha}}\cos k_0x + ie^{-\frac{x^2}{2\alpha}}\sin k_0x\right)$$

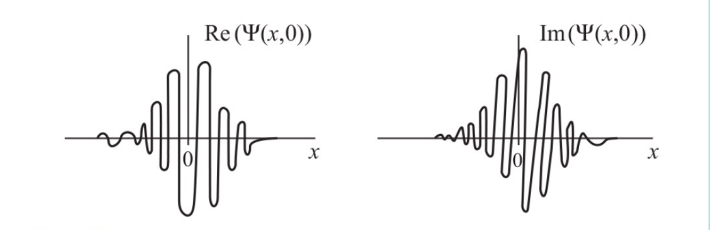
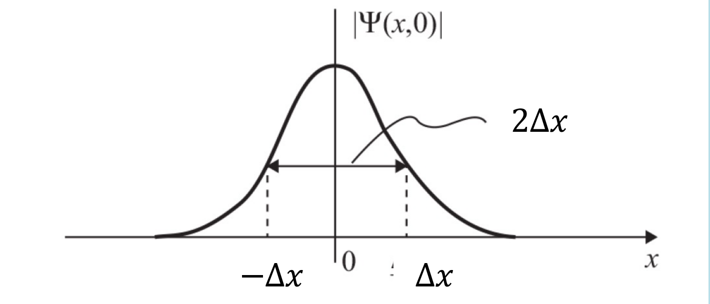


Figure 4.2
The real and imaginary parts of Ψ(x, 0).



在時間為零，波函數是一類似自由電子波e^{ik_0x}的振盪函數，乘上一高斯函數。

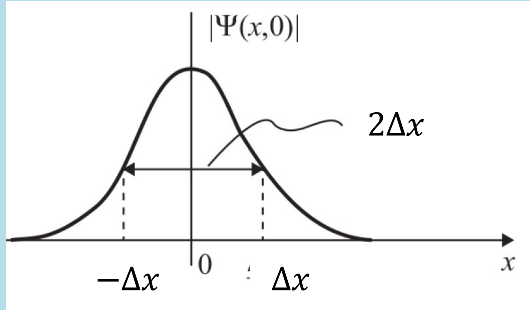
高斯函數 $e^{-\frac{x^2}{2\alpha}}$ 決定了振盪的振幅，也就是波強度：$|\Psi(x,0)|$ 。

因此振幅集中於以原點為中心，寬度由α決定的packet內。稱為波包Wave Packet。

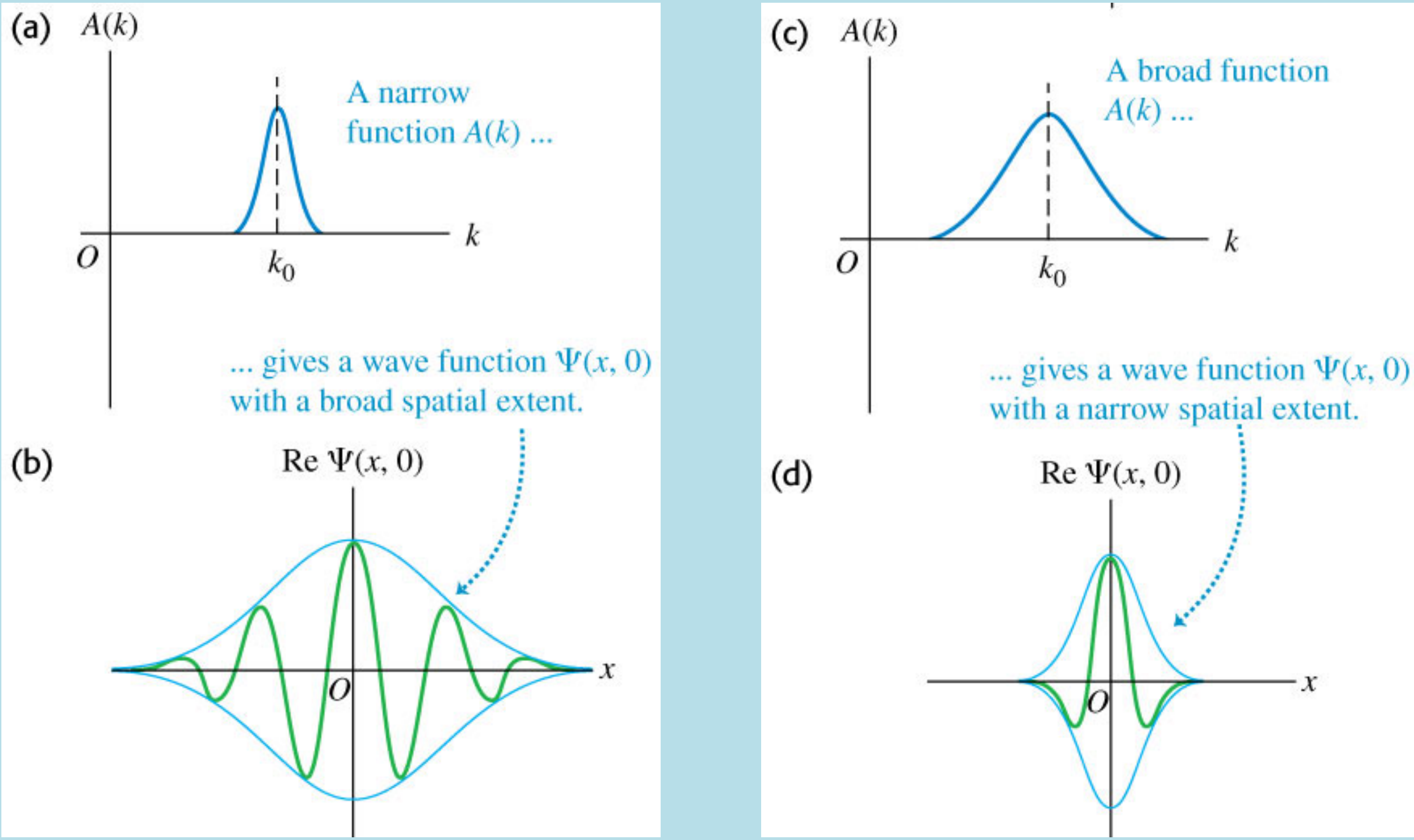
$A(k)$與$|\Psi(x,0)|$都是高斯分佈。若取極值的e^{-1}左右位置為寬度：

$A(k) \sim e^{-\frac{\alpha(k-k_0)^2}{2}}$ 寬度大約是$k-k_0=\Delta k \sim \sqrt{2}/\sqrt{\alpha}$。

$|\Psi(x,0)| \sim e^{-\frac{x^2}{2\alpha}}$ 波函數振幅寬度大約是$\Delta x=\sqrt{2}\sqrt{\alpha}$。



$$\Delta x \cdot \Delta k = 2$$



角波數k範圍越寬，製造出的波包的空間x範圍就可以越窄！

$$\Psi(x,0)=\int_{-\infty}^{\infty}A(k)\cdot e^{ikx}\cdot dk$$

$A(k)$是以e^{ikx}疊加出$\Psi(x,0)$時的配重係數。

$A(k)$與$\Psi(x,0)$互為Fourier Transform。

$A(k)$還有另一個物理意義：

我們可以把對k的積分換成對p的積分！因為兩者成正比。 $p=\hbar k$

$$\Psi(x,0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(p)\cdot e^{ipx/\hbar}\cdot dp$$

$$A(k)=\frac{\sqrt{\hbar}}{\sqrt{2\pi}}\phi(p)$$

$e^{ipx/\hbar}$是$t=0$時，有確定動量p的狀態的瞬間波函數，測量動量永遠得到值p。

因此$\phi(p)$是疊加波函數時，動量為p的狀態的配重。

猜測：動量測量結果為p的機率，也可以寫成： $|\phi(p)|^2$

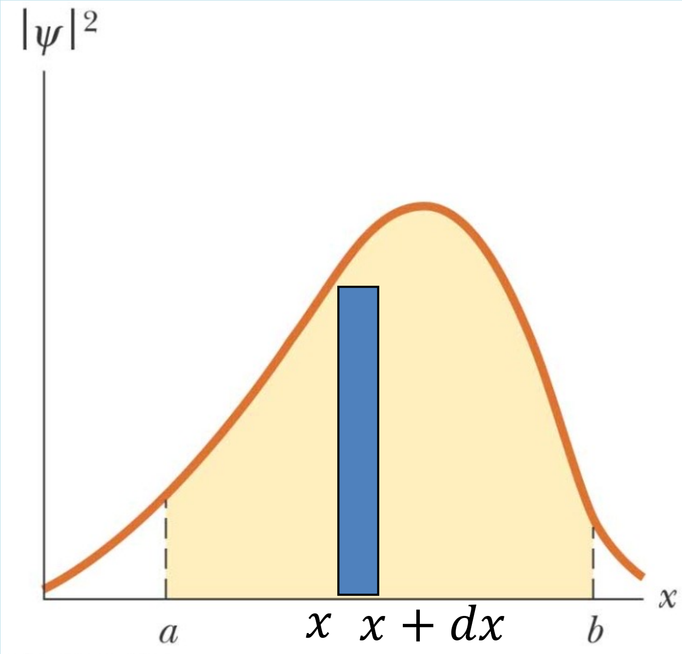
如同測得電子位置為x的機率，是當地波函數絕對值平方！

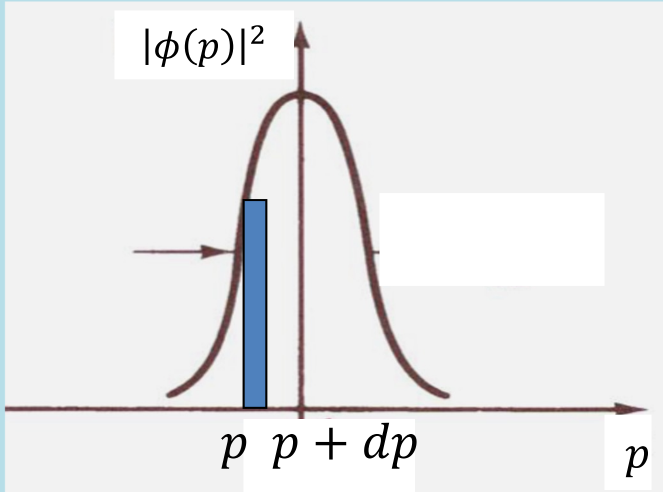
這一點神似一般的波函數$\Psi(x,0)$，$\phi(p)$就可以稱為動量空間的波函數。

在x與$x+dx$之間發現該粒子的機率，可以寫成：

$$P(x)\cdot dx = |\Psi(x)|^2\cdot dx = \Psi^*(x)\cdot\Psi(x)\cdot dx$$

此瞬間t的波函數絕對值平方$|\Psi(x,t)|^2$就是此瞬間的機率密度$P(x)$。





動量測量結果在p與$p+dp$之間發現的機率，可以寫成：

$$|\phi(p)|^2\cdot dp = \phi^*(p)\cdot\phi(p)\cdot dp$$

In the top equation in (4.4.12), $\Phi(p)$ denotes the weight with which we add the momentum state $e^{ipx/\hbar}$ in the superposition that represents $\Psi(x)$. This state $e^{ipx/\hbar}$ is a state with momentum p. This suggests that we can roughly view $\Phi(p)$ as the amplitude for the particle to have momentum p and $|\Phi(p)|^2$ as roughly the probability of the particle having momentum p. Just as we say that $\Psi(x)$ is the wave function in position space x, we can think of $\Phi(p)$ as the **wave function in momentum space** p. Plancherel's identity (4.4.13) suggests that viewing $\Phi(p)$ as a probability amplitude is in fact consistent. Given that a properly normalized $\Psi(x)$ leads to a $\Phi(p)$ that satisfies $\int dp|\Phi(p)|^2 = 1$, we postulate that

$$\boxed{\begin{array}{c} |\Phi(p)|^2 dp \text{ is the probability of finding the particle with} \\ \text{momentum in the range } (p, p+dp). \end{array}} \tag{4.4.14}$$

$$\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(p) \cdot e^{ipx/\hbar} \cdot dp$$

電子在以$\phi(p)$為配重疊加後的狀態$\Psi(x,0)$測量動量時，得到某p的機率，即是$\phi(p)$的絕對值平方：$|\phi(p)|^2$。

這個直覺的猜想事實上可以推廣到動量以外的測量！

將某$\hat{A}$測量有固定測量值a的電子波函數以某amplitude c_a爲配重疊加，

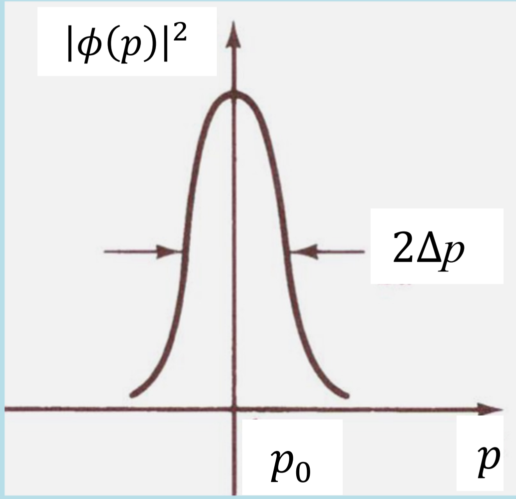
$$\Psi(x,0) = \sum_a c_a \cdot \psi_a(x)$$

$|c_a|^2$是在狀態$\Psi(x,0)$測量$\hat{A}$時得到結果是a的機率！

以上稱為Measurement Theorem，是量子力學的一個基本原則。

波包的寬度

波包的動量測量機率分佈$|\phi(p)|^2$是高斯分布，寬度Δp即是動量測量的不準度：

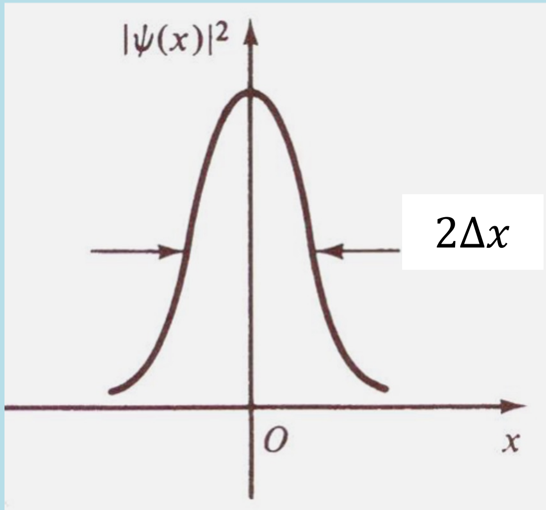


若取極值的$1/e$左右位置為寬度，

$$|\phi(p)|^2 \propto e^{-\frac{\alpha}{\hbar^2}(p-p_0)^2}$$

$$\Delta p = \hbar/\sqrt{\alpha}$$

波函數強度也是一個高斯分布，中心點在原點，寬度Δx即是位置測量的不準度：

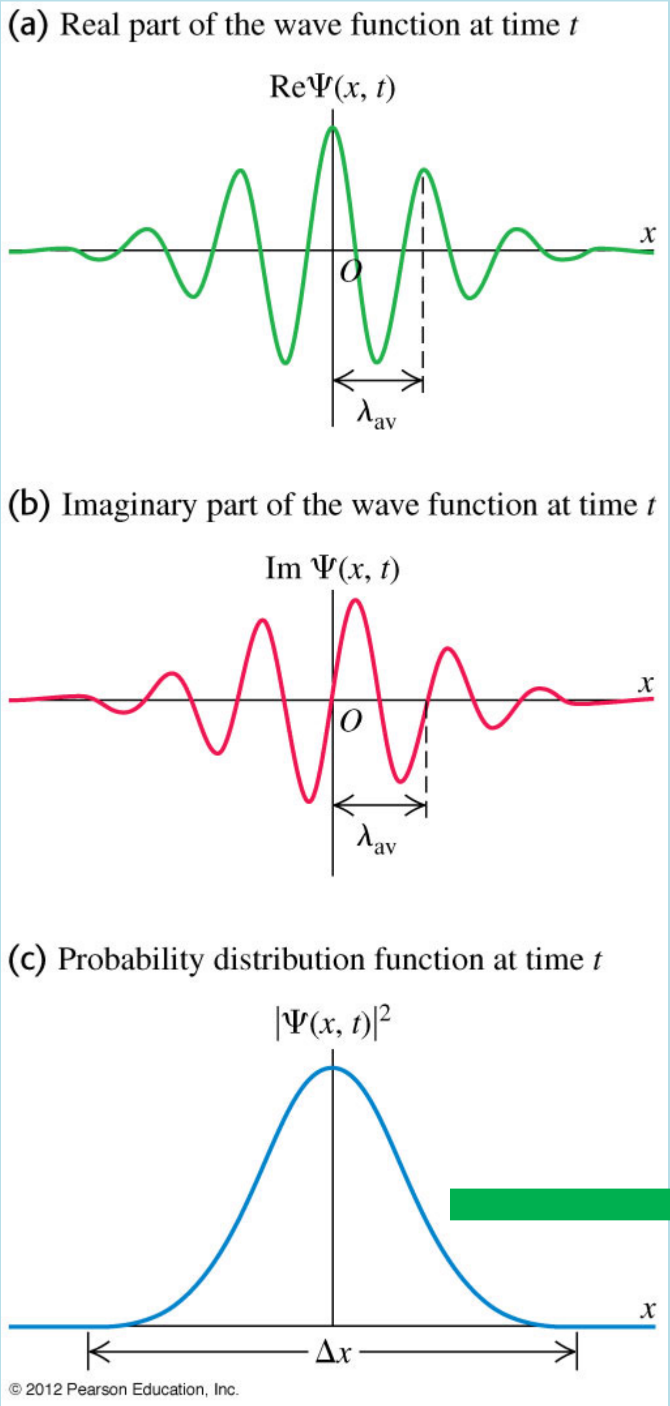


$$|\Psi(x,0)|^2 \propto e^{-\frac{x^2}{\alpha}}$$

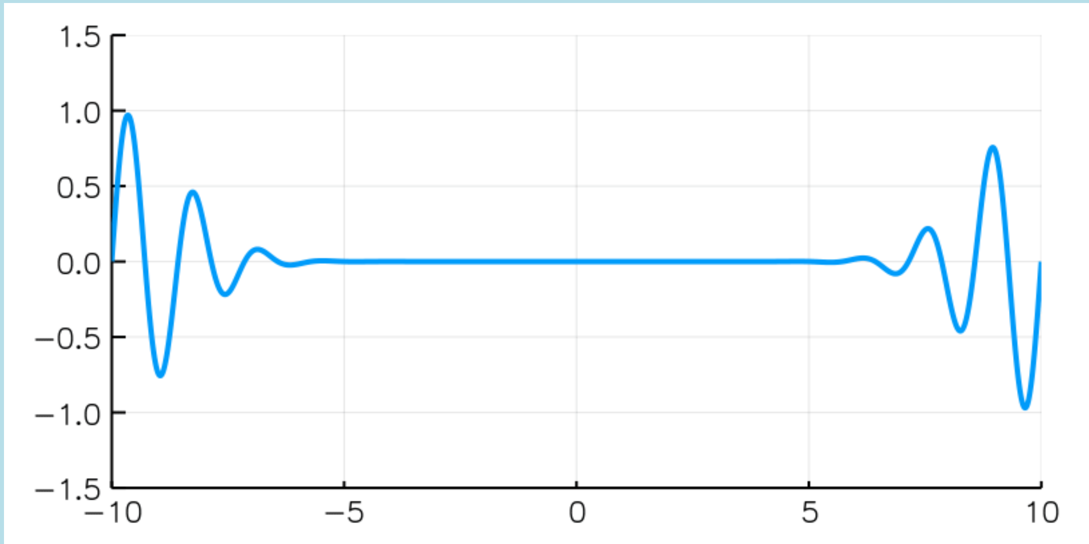
$$\Delta x = \sqrt{\alpha}$$

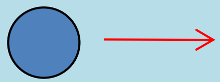
$$\Delta x \cdot \Delta p \sim \hbar$$

對於波包，動量與位置的不準度滿足測不準原理！



波包會隨時間移動嗎？其實答案非常簡單！





波包：高斯分佈的$|\Psi(x,0)|$會怎麼隨時間演化？當初我們是這樣開始討論波包：以配重係數$A(k)$疊加所有k的自由電子波$Ae^{i(kx-\omega t)}$，滿足薛丁格方程式：

$$\Psi(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}A(k)e^{i\left(kx-\frac{\hbar}{2m}k^2t\right)}\cdot dk$$

所以其實我們早已經有答案了！此式顯示e^{ikx}隨時間演化就是乘上 $e^{-\frac{\hbar}{2m}k^2t}$ ！

這是自由電子波的時間演化的特徵：

$$\Psi=Ae^{i(kx-\omega t)}=\left(Ae^{ikx}\right)\cdot e^{-i\omega t}$$

波函數的時間演化部分與空間部分可以完全分離separable。

Ae^{ikx}是時間為零時的瞬間波函數$\Psi(x,0)$，$e^{-i\omega t}$是未來的演化evolution。

$$\Psi(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}A(k)e^{ikx}\cdot e^{-\frac{\hbar}{2m}k^2t}\cdot dk$$

因此隨時間演化的波函數，就是個別e^{ikx}隨時間演化後的疊加！

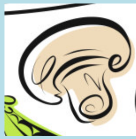
=

各個配料分離烹煮

+

+

+



+

⋮

同樣的方法應該可以普遍適用於非波包的普遍解！

自由空間薛丁格方程式最普遍的求解方式

有了$\Psi(x,0)$，原則上利用色散關係，就可以得到 $\Psi(x,t)$。

$t=0$時，任意$\Psi(x,0)$一定可以寫成e^{ikx}的疊加，係數$A(k)$就是其傅立葉變換：

$$\Psi(x,0)=\int_{-\infty}^{\infty}A(k)\cdot e^{ikx}\cdot dk$$

若$\Psi(x,0)$是高斯函數，$A(k)$也是高斯函數。

我們已經確定e^{ikx}的時間演化為$e^{-i\omega(k)t}$。

$$\omega=\frac{\hbar}{2m}k^2$$

因此$\Psi(x,0)$隨時間的演化，也就是個別e^{ikx}演化後的疊加：

$$\Psi(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}A(k)\cdot e^{ikx}e^{-i\omega(k)t}\cdot dk$$

於是，若有了$A(k)$，自由空間薛丁格方程式的解$\Psi(x,t)$ 就可以寫下：

$$\Psi(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}A(k)\cdot e^{i\left[kx-\frac{\hbar}{2m}k^2t\right]}dk$$

We now have the tools to evolve in time any initial state of a free particle: given the initial wave function $\Psi(x, 0)$ at time zero, we can obtain $\Psi(x, t)$. (This is a preview of a more detailed discussion to come in section 4.3.) Indeed, if we know $\Psi(x, 0)$, we can write:

$$\Psi(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \Phi(k)\, e^{ikx}, \tag{3.2.22}$$

where $\Phi(k)$ is, by definition, the Fourier transform of $\Psi(x, 0)$. The Fourier transform $\Phi(k)$ can be calculated in terms of $\Psi(x, 0)$. Once we know $\Phi(k)$, the time evolution simply requires the replacement

$$e^{ikx} \to e^{ikx} e^{-i\omega(k)t} \tag{3.2.23}$$

in the above integrand so that the answer for the time evolved $\Psi(x, t)$ is in fact given by (3.2.20).

$$\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \Phi(k)\, e^{i(kx-\omega(k)t)}, \tag{3.2.20}$$

CLASSICAL DYNAMICS OF PARTICLES AND SYSTEMS

FIFTH EDITION

Stephen T. Thornton
Professor of Physics, University of Virginia

Jerry B. Marion
Late Professor of Physics, University of Maryland

13.7 Separation of the Wave Equation

If we require a general solution of the wave equation that is harmonic (as for the vibrating string or, for that matter, for a large number of problems of physical interest), we can write

$$\Psi(x, t) = \psi(x)e^{i\omega t} \tag{13.63}$$

so that the one-dimensional wave equation (Equation 13.55) becomes

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{v^2}\psi = 0 \tag{13.64}$$

where ψ is now a function of x only.

現在計算波包波函數對時間的演化，將高斯分佈的$A(k)$代入普遍解的公式：

$$\Psi(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\alpha}{2}(k-k_0)^2}\cdot e^{i\left[kx-\frac{\hbar}{2m}k^2t\right]}\cdot dk$$

如同前面的計算，此積分首先要變換變數：$q\equiv k-k_0$

將$k=q+k_0$代入多出來的$-\frac{\hbar}{2m}k^2t$來：

$$-\frac{\hbar}{2m}(k_0+q)^2t=-\frac{\hbar}{2m}k_0^2t+q\frac{\hbar k_0}{m}t+q^2\frac{\hbar}{2m}t$$

定義兩個常數來簡化符號：

$$v_g\equiv\frac{\hbar k_0}{m}\qquad \beta\equiv\frac{\hbar}{m}$$

$$\Psi(x,t)=e^{i\left[k_0x-\frac{\hbar}{2m}k_0^2t\right]}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\alpha q^2}{2}+ixq-iv_gtq-i\frac{1}{2}\beta tq^2}\cdot dq$$

$$=e^{i\left[k_0x-\frac{\hbar}{2m}k_0^2t\right]}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\alpha+i\beta t)q^2}{2}+i(x-v_gt)q}dq \longleftrightarrow e^{ik_0x}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\alpha q^2}{2}+ixq}dq$$

與時間為零的波包積分完全對應。

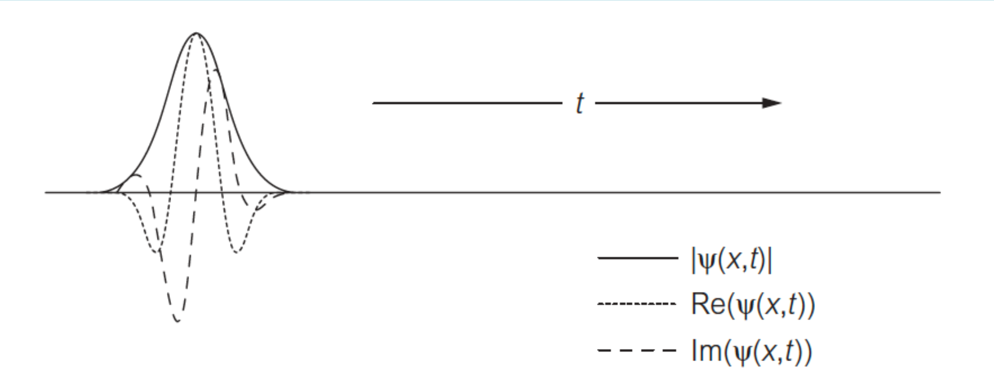
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\alpha q^2}{2}+ixq}dq \quad \Leftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\alpha+i\beta t)q^2}{2}+i(x-v_g t)q}dq$$

只要將x以$x-v_g t$置換， α以$\alpha+i\beta t$置換入左手已計算出來的結果，就算出了右手。

$$=\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}}e^{-\frac{x^2}{2\alpha}} \quad \Rightarrow \quad =\sqrt{\frac{2\pi}{(\alpha+i\beta t)}}e^{-\frac{(x-v_g t)^2}{2(\alpha+i\beta t)}}$$

演化維持還是一個高斯函數。

波包演化還是波包。



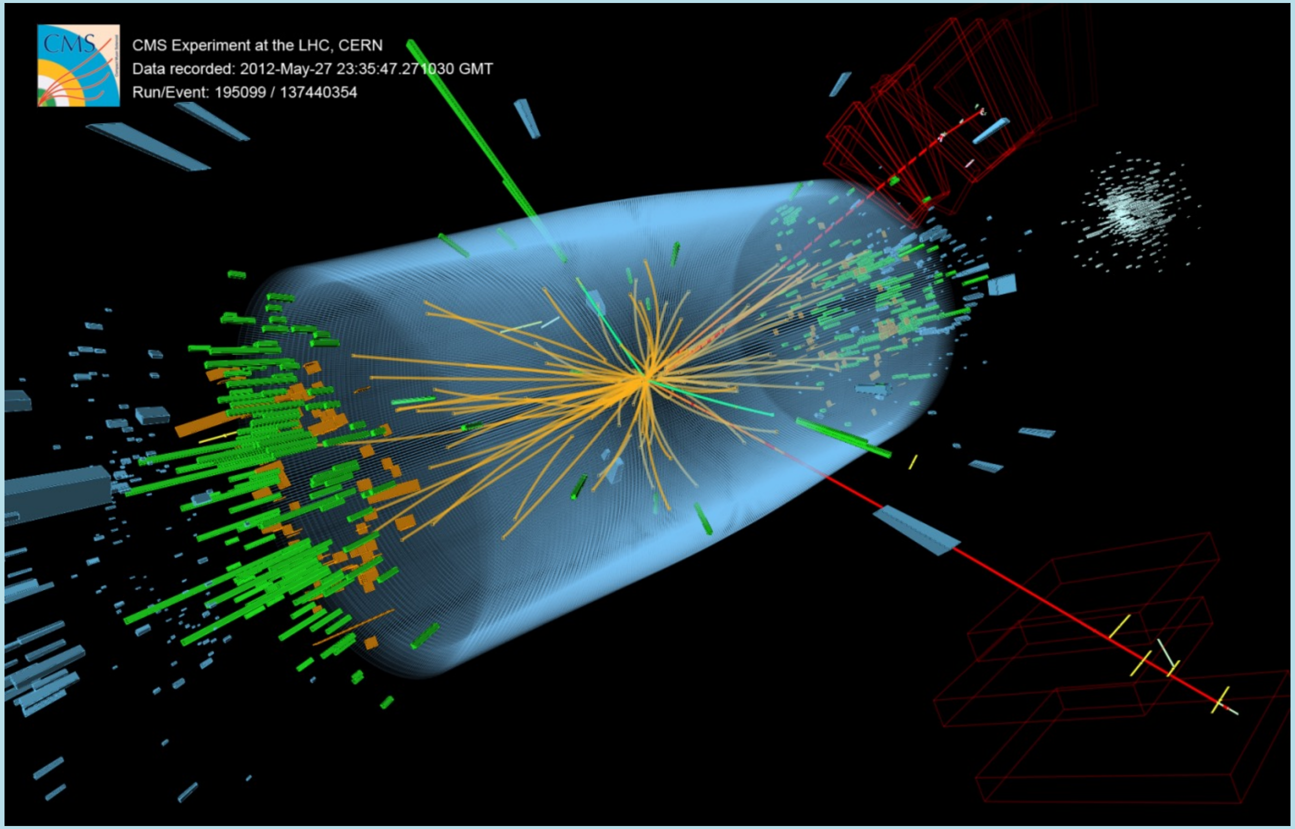
乘上餘下的虛數指數部分：

$$=\sqrt{\frac{2\pi}{(\alpha+i\beta t)}}e^{i\left[k_0 x-\frac{\hbar}{2m}k_0^2 t\right]}e^{-\frac{(x-v_g t)^2}{2(\alpha+i\beta t)}}$$

這是波包隨時間的變化！

波函數是一類似自由電子波的振盪函數，乘上一高斯函數。

$$e^{i\left[k_0 x-\frac{\hbar}{2m}k_0^2 t\right]} \qquad e^{-\frac{(x-v_g t)^2}{2(\alpha+i\beta t)}}$$

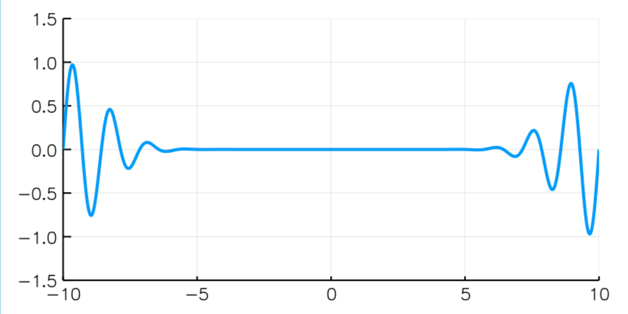


在很多應用上，用$e^{i\left[k_0 x-\frac{\hbar}{2m}k_0^2 t\right]}$來近似，結果相當不錯。例如散射、碰撞。

$p+p\to H+\cdots\to Z+Z+\cdots\to\mu+\bar{\mu}+e+\bar{e}\cdots$

在這散射實驗中，入射的質子及生成的粒子都可以看成極窄的波包。

$$\Psi(x,t) \sim e^{i\left[k_0 x - \frac{\hbar}{2m} k_0^2 t\right]} e^{-\frac{(x - v_g t)^2}{2(\alpha + i\beta t)}}$$



此波包的中心點為$v_g t$，位置隨時間移動，速度為 v_g。

對於自由電子波，群速度v_g可以算出來：

$$v_g = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k}\right)_{k_0} = \left(\frac{\partial \frac{\hbar}{2m} k^2}{\partial k}\right)_{k_0} = \frac{\hbar}{m} k_0 = \frac{p}{m}$$

妙的是波包移動的速度不是波速，而是群速度！恰等於古典電粒子的速度！

開學一個月，我們終於學會了牛頓第一運動定律！自由粒子以等速運動。

波包在各處的機率密度可以計算：

$$P = |\Psi(x,t)|^2 = \frac{2\pi}{|\alpha + i\beta t|} \cdot \left| e^{i\left(k_0 x - \frac{\hbar}{2m} k_0^2 t\right)} \right|^2 \cdot \left| e^{-\frac{(x-v_g t)^2}{2(\alpha+i\beta t)}} \right|^2$$

$$\left| e^{-\frac{(x-v_g t)^2}{2(\alpha+i\beta t)}} \right|^2 = e^{-\frac{(x-v_g t)^2}{2(\alpha-i\beta t)}} e^{-\frac{(x-v_g t)^2}{2(\alpha+i\beta t)}}$$

$$= e^{-\frac{(x-v_g t)^2}{2}\left(\frac{1}{\alpha-i\beta t}+\frac{1}{\alpha+i\beta t}\right)} = e^{-\frac{(x-v_g t)^2}{2}\left(\frac{2\alpha}{\alpha^2+\beta^2 t^2}\right)}$$

$$P = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 t^2}} e^{-\frac{\alpha(x-v_g t)^2}{\alpha^2+\beta^2 t^2}}$$

$$|\Psi(x,t)|^2 \sim e^{-\frac{\alpha(x-v_g t)^2}{\alpha^2+\beta^2 t^2}}$$

$$\beta = \frac{\hbar}{m}$$

$\frac{\alpha^2+\beta^2 t^2}{\alpha}$扮演時間為零時$\alpha$扮演的角色！注意在時間為零時，波包的寬度為 $\Delta x = \sqrt{\alpha}$

波包的寬度會隨時間增加，且時間長以後趨近：

$$\Delta x = \sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2 t^2}{\alpha}} \xrightarrow[t\to\infty]{} \beta t \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

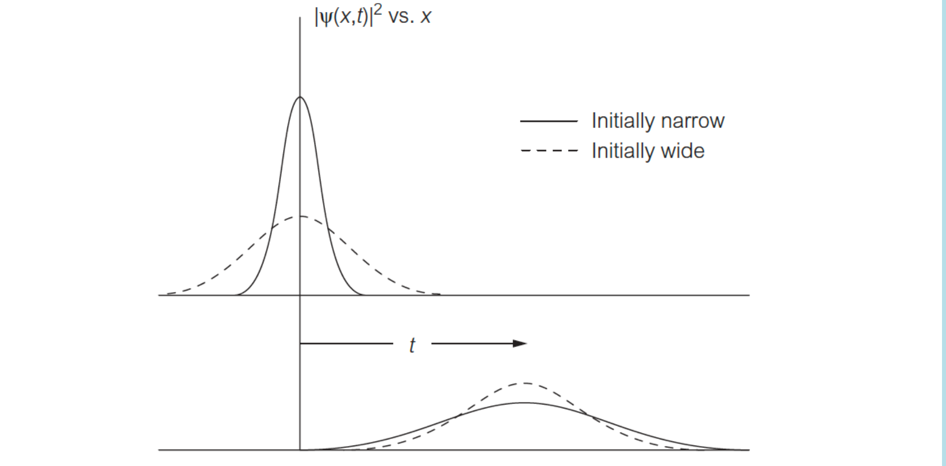
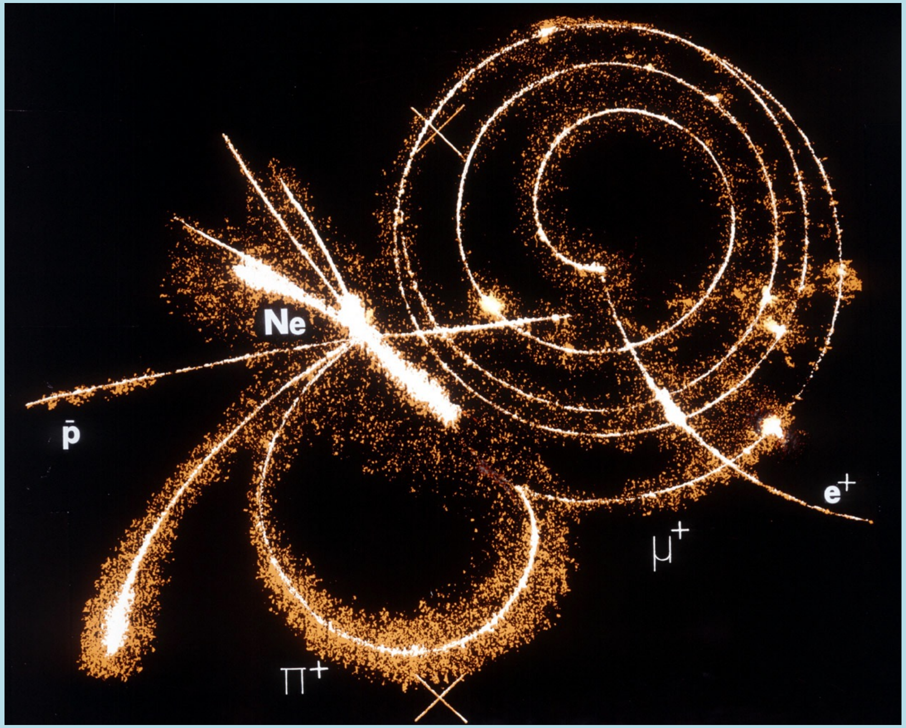


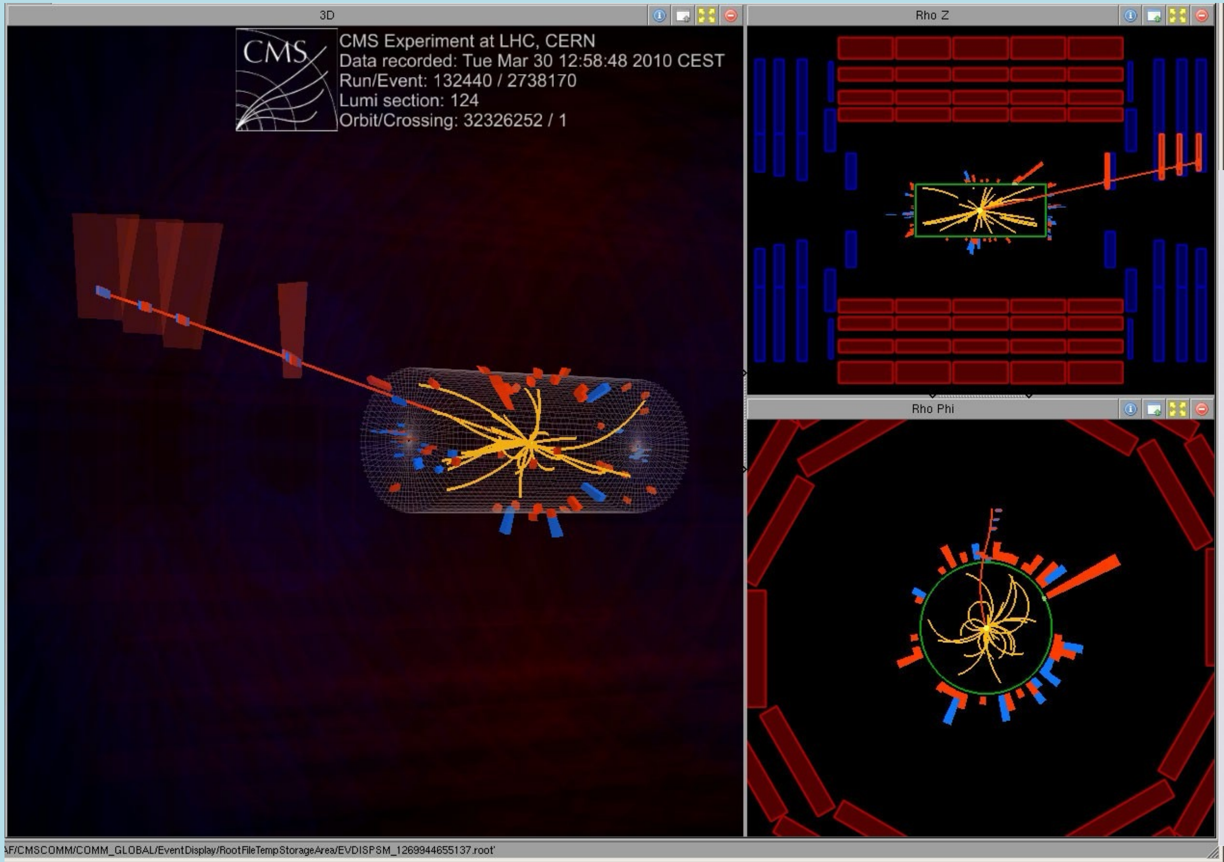
Figure 3.1. Spreading Gaussian wave packets illustrated by plots of $|\psi(x,t)|^2$ versus x at two different times. Note that the initially narrower packet (the solid curve) spreads faster.

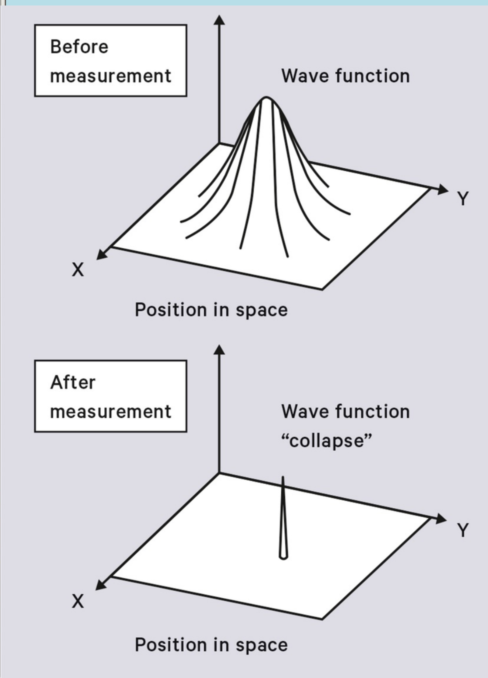
原來較窄α較小的波包（上圖實線），時間一長反而變寬了，擴散較快！

原來較寬α較大的波包（上圖虛線），擴散較慢！



波包的意義就是在全球化的波動現象中，實現區域性的波函數！

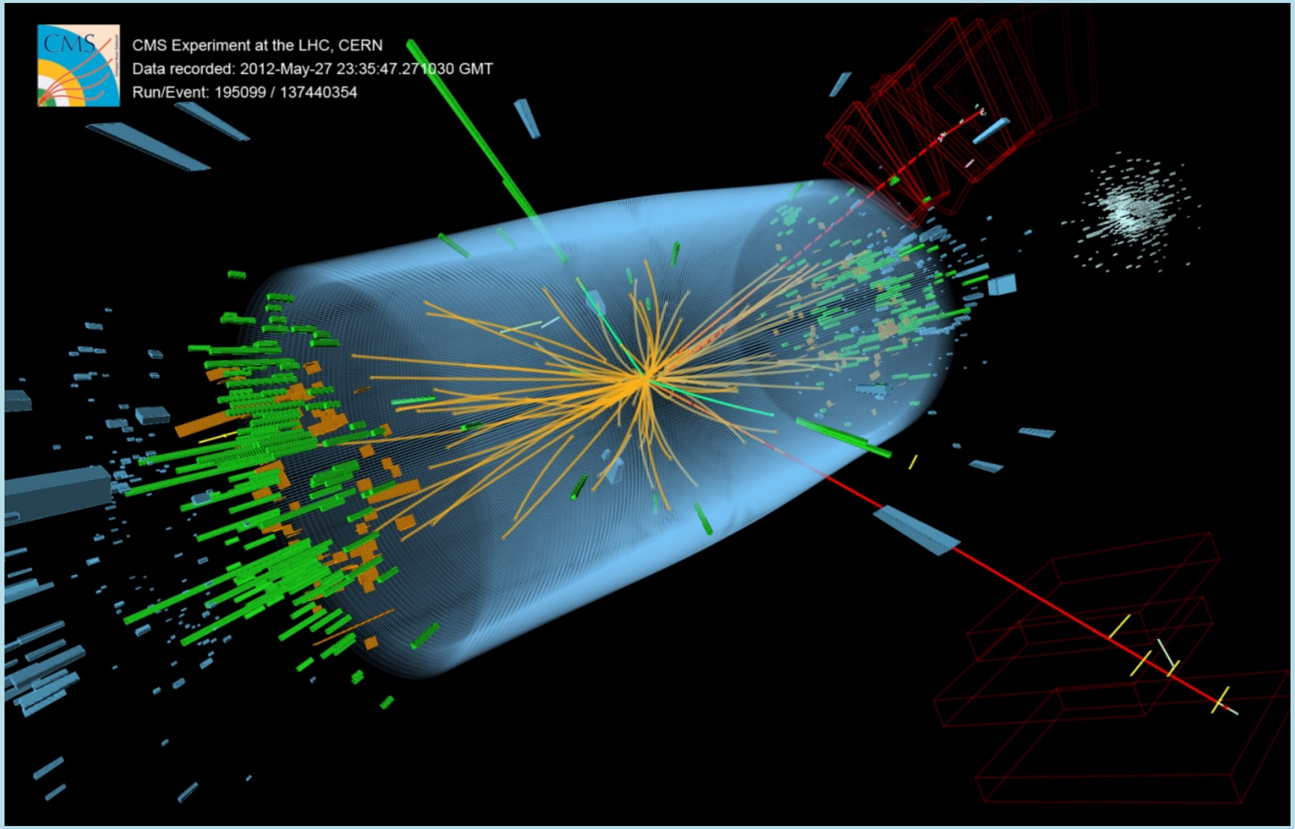




波包的應用最具體的應用就是粒子的散射！

粒子在散射後一出現路徑就等於對位置作了測量，

作了測量，波函數就崩潰為極窄的波包，接著波包的演化就是等速移動。



$$p + p \rightarrow H + \cdots \rightarrow Z + Z + \cdots \rightarrow \mu + \bar{\mu} + e + \bar{e} \cdots$$

在這散射實驗中，入射的質子及生成的粒子都是波包。

但用 $e^{i(kx-\omega t)}$ 來近似波包，結果相當不錯。