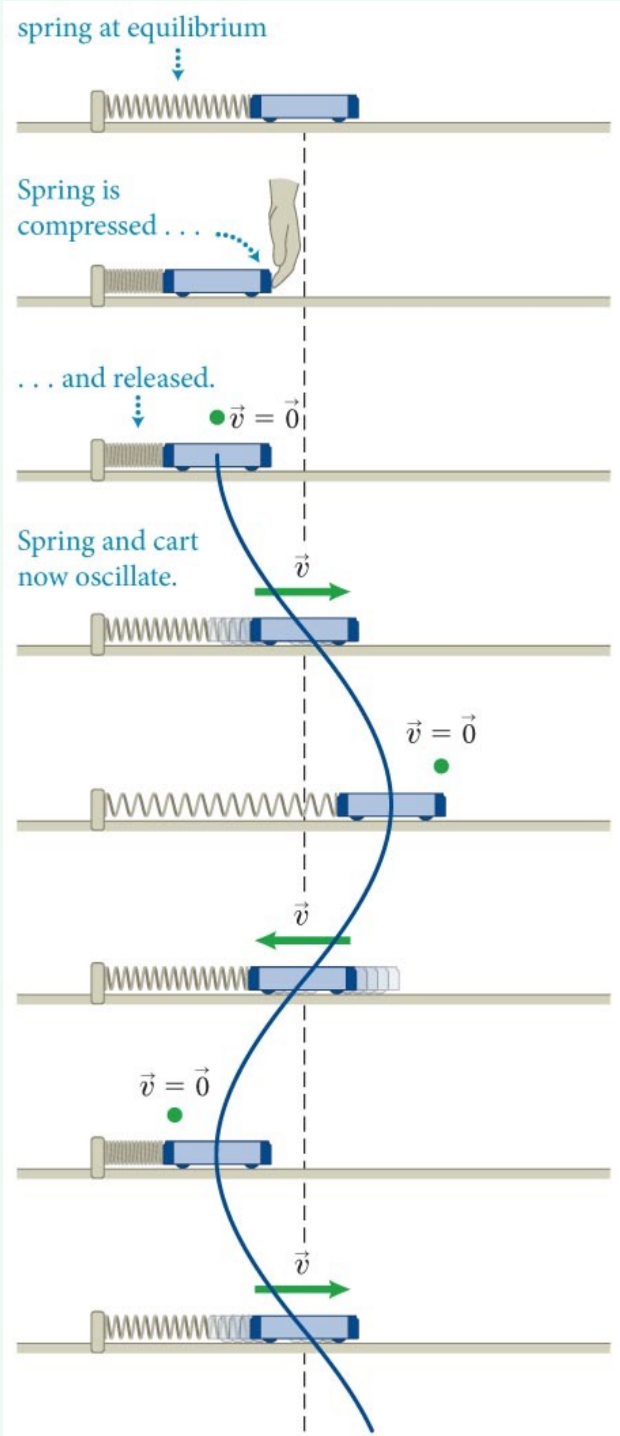
彈簧的簡諧運動

Simple Harmonic Motion SHM

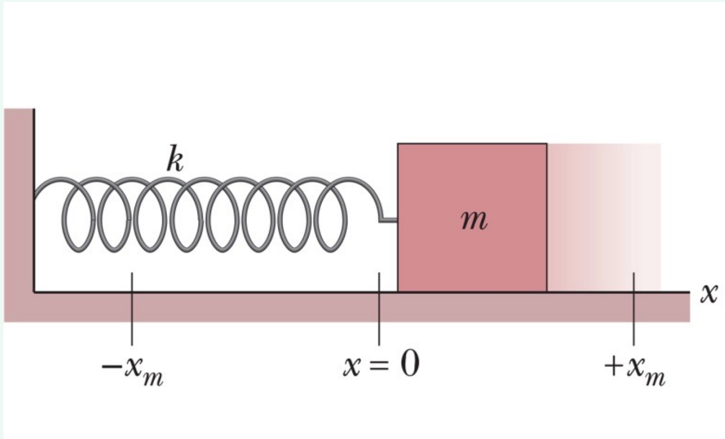
簡諧運動是週期運動。



簡諧運動 最簡單的週期運動

Simple Harmonic Motion Periodic Motion

Simple Harmonic Oscillation 簡諧振盪

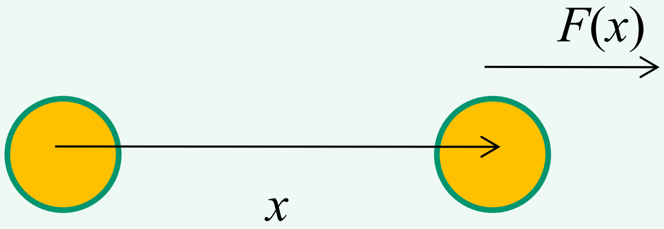


$F = -kx$

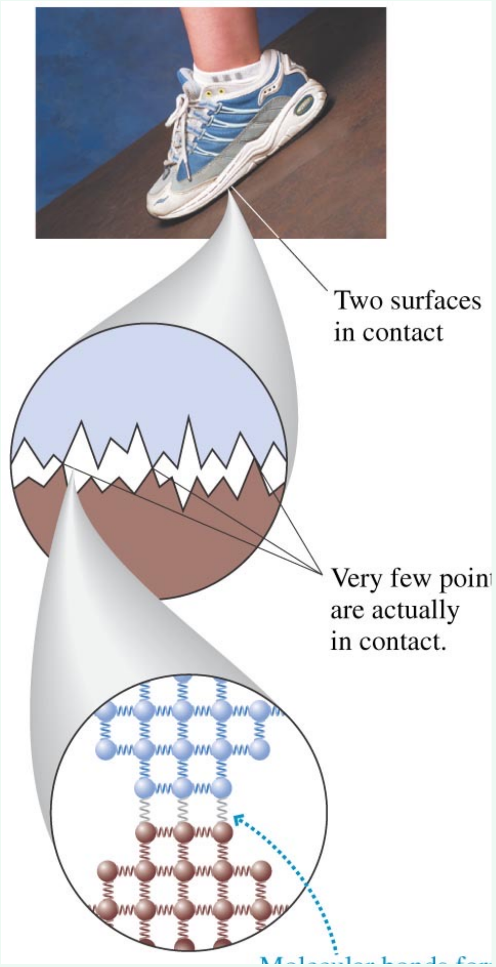
這是受力只與位置有關的粒子的運動方程式。

任一個在平衡點附近的小範圍周期運動，都是簡諧運動！

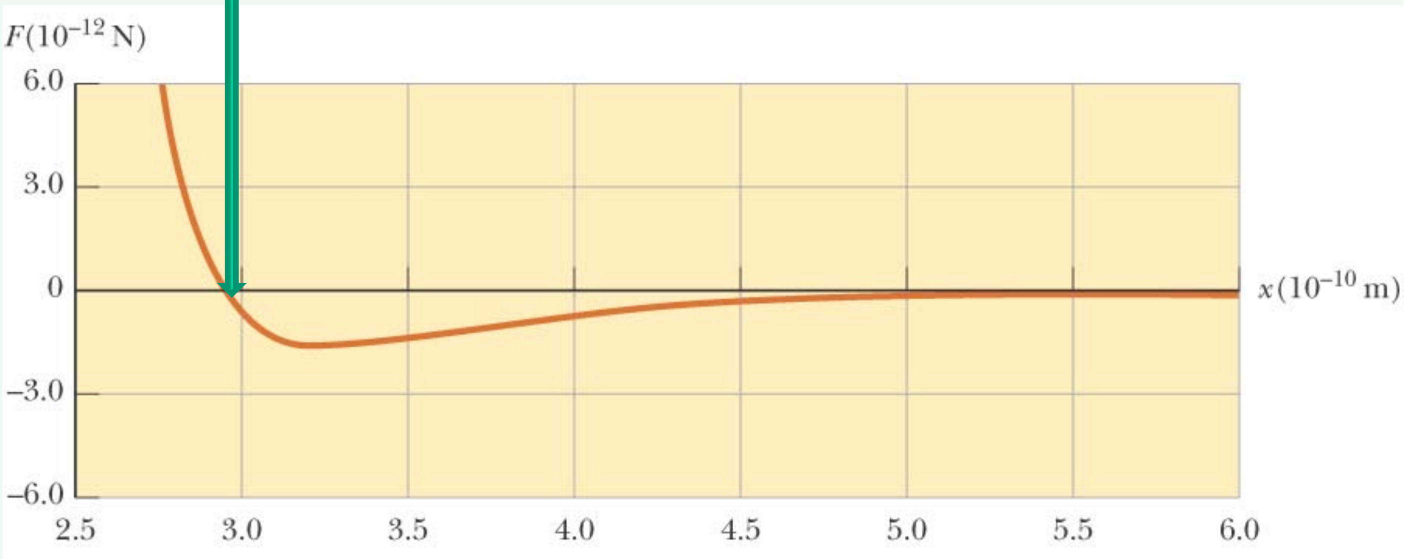
原子力



正力為排斥力，力為負則為吸引力

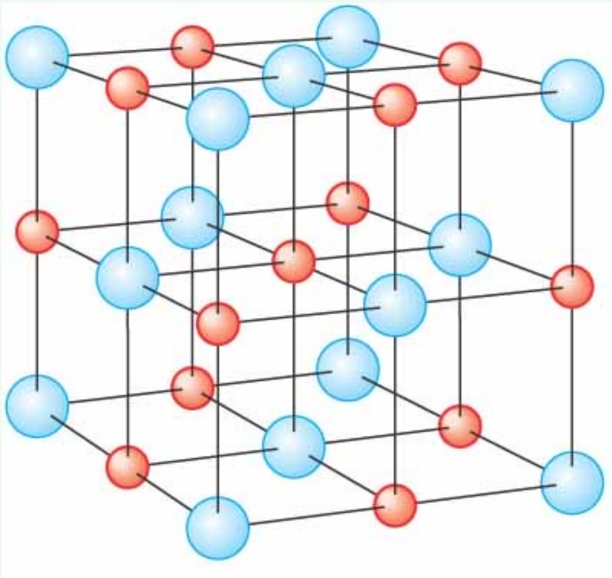


原子力有一平衡點，力剛好為零：



摩擦力的根源是原子力

如果把原子安排使得其距離恰在原子力的平衡點上，
這些原子可以組成有大規模秩序的晶格，此晶格會是平衡的，
晶格的大小與形狀處於平衡穩定狀態，這就是固態！

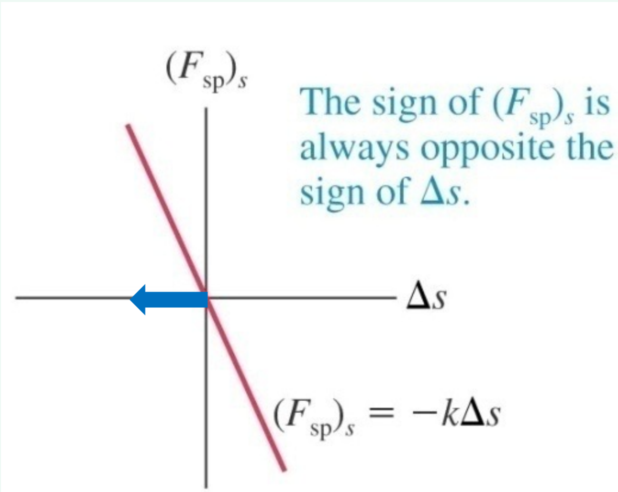


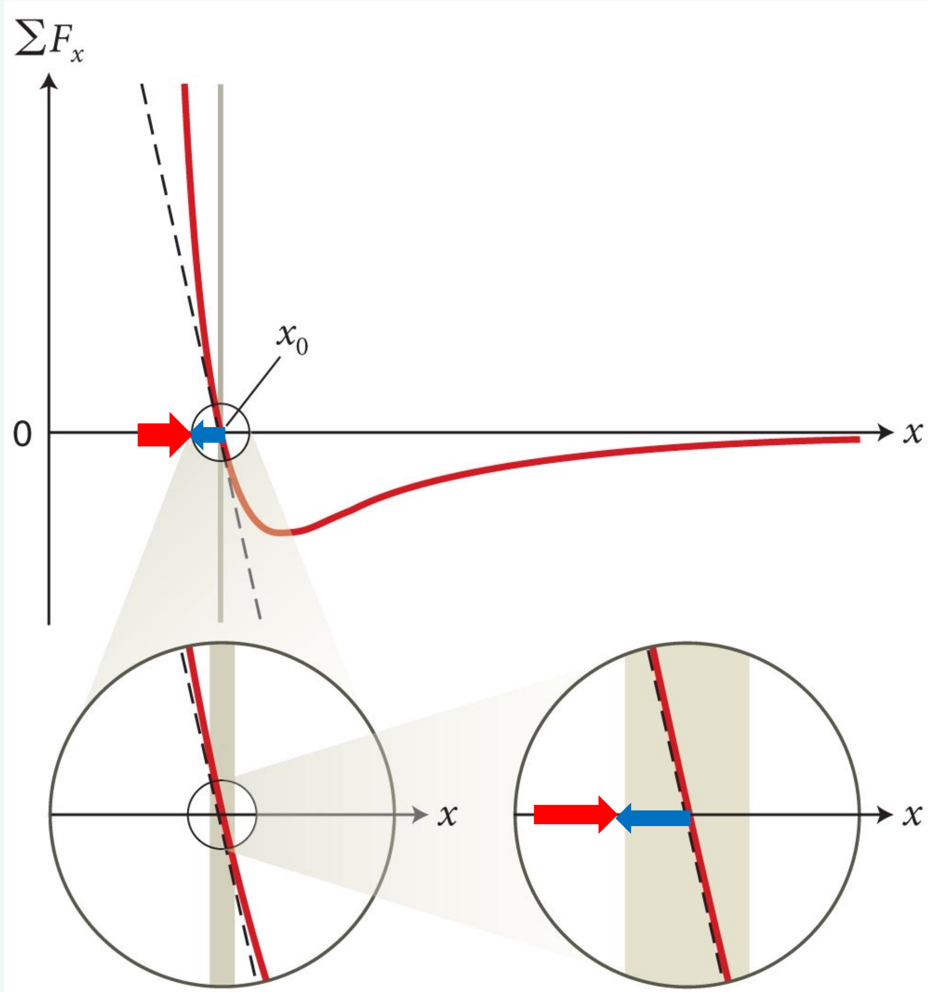
晶格會是穩定狀態的嗎？在小擾動作用下會回復原狀稱為穩定。

設想若固體中的原子向內離開平衡點，

正的原子排斥力會將原子推回平衡點。

定性上會如彈簧一樣。





在相當接近平衡點的附近，原子力的曲線大致上可以用一條直線來近似。

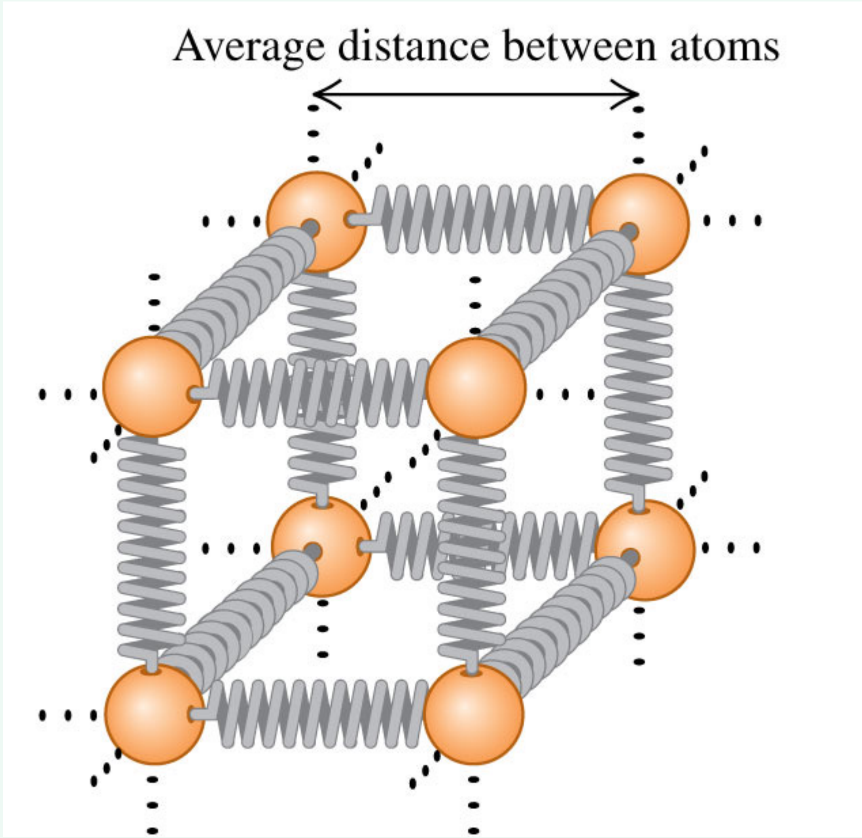
力正比於平衡點算起的位移，定量上也與與彈簧是相同的： $F = -k\Delta x$

所以在平衡點附近的小範圍運動，都近似是一個簡諧運動！

如果嘗試改變固體大小，固體會反彈如同彈簧！

固體中原子彼此之間，如同以彈簧連接。

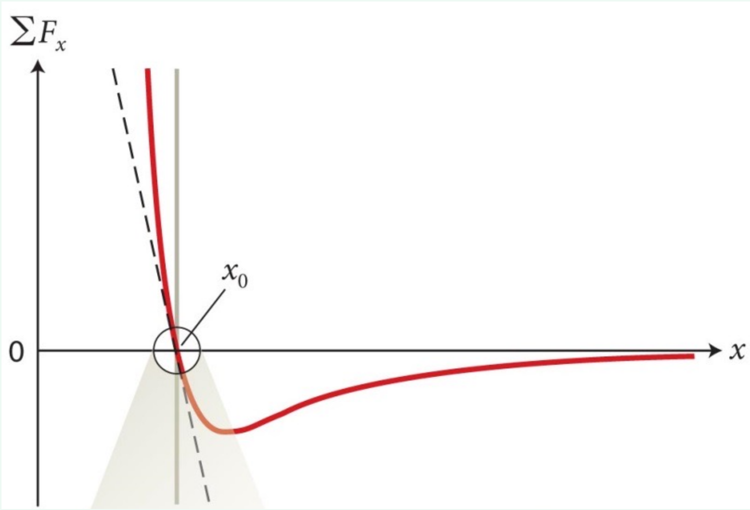
固體的晶格會是穩定的！

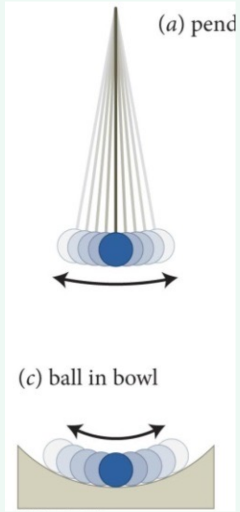


這是固體的彈性（變形回復力）的來源。

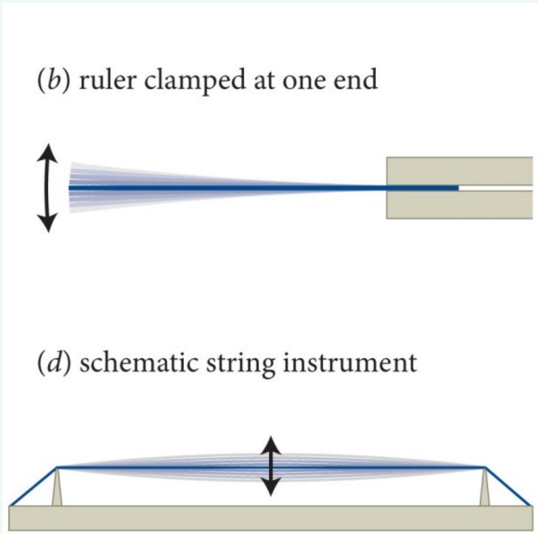
任一個有稳定平衡點的力，小範圍在平衡點附近，力的函數都可以以直線近似！

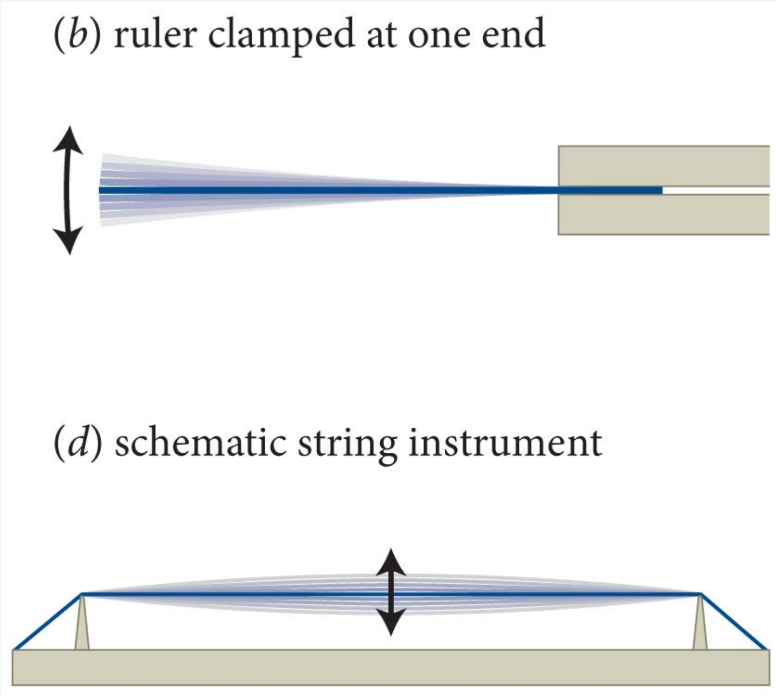
因此任一個小範圍在穩定平衡點附近的運動，都可以以簡諧運動近似！





固體的原始形狀就是一平衡點，因此固體的變形運動，近似地是一個簡諧運動。



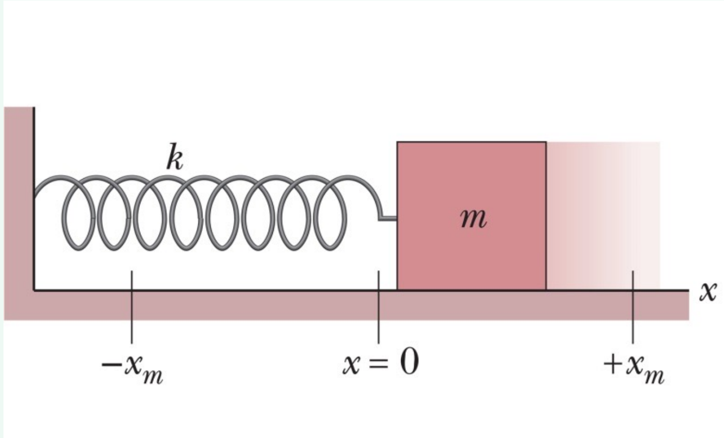


這些結構體都有簡諧運動。


輕颱康芮本島脫離暴風圈
CTS華視新聞資訊
桃機
星宇狂風中降落
失敗重飛驚險畫面曝
畫面翻攝 外國人在台灣 臉書
颱風災情
截至昨20時 土石災情54件
前2日累積雨量
台東海端528.5mm
屏東 25° 31°
康芮狂吹"101阻尼器"動了 左右搖晃33秒影片曝
訂閱華視
颱風及外圍環流影響 高屏山區防豪雨或
0:30 / 1:17


蘇迪勒暴走
華視 CTS
華視HD台
捍以輕心。
鹿港天后宮
媽祖花燈遭吹倒
蘇迪勒重創
釀6死4失蹤
101阻尼器晃動1米 比地震更搖!
訂閱
華視
19:28:26
颱風資訊
桃園大溪區武陵嶺橋恢復通車
0:10 / 1:26

簡諧運動的運動方程式



$$F = -kx$$

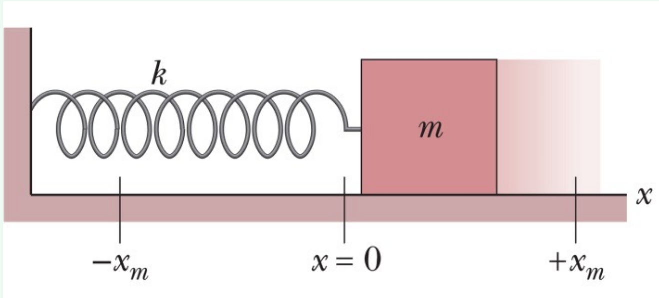
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x = -\omega^2 x$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

一個簡諧運動，完全由一個特徵常數ω（角頻率）決定！

具有相同的ω的簡諧運動，運動方程式的解就完全一樣。

簡諧運動的運動方程式求解



$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

位置函數的兩次微分與自己成正比：多項式不符合。

因為式中的負號，指數函數也不行！

三角函數正好具有這樣的性質！

$$\frac{d(\cos\omega t)}{dt} = \frac{d\cos\omega t}{d(\omega t)} \cdot \frac{d}{dt}(\omega t) = -\,\omega\sin\omega t$$

$$-\omega\frac{d(\sin\omega t)}{dt} = -\omega^2\cos\omega t$$

$$\frac{d^2(\cos\omega t)}{dt^2} = -\omega^2\cos\omega t$$

$$\frac{d^2(\sin\omega t)}{dt^2} = -\omega^2\sin\omega t$$

找到兩個解

定理

如果已找到兩個函數$x_1(t), x_2(t)$都滿足方程式：$\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$

那麼任一線性組合 linear combination $ax_1(t) + bx_2(t)$ 也滿足該方程式！

$$a \quad \frac{d^2x_1}{dt^2} + \omega^2 x_1 = 0 \quad + \quad b \quad \frac{d^2x_2}{dt^2} + \omega^2 x_2 = 0$$

$$\frac{d^2(ax_1 + bx_2)}{dt^2} + \omega^2(ax_1 + bx_2) = 0$$

得證

定理

如果已找到兩個函數$x_1(t), x_2(t)$都滿足齊次 Homogeneous方程式：

$$\sum_n a_n \cdot \frac{d^n x}{dt^n} = 0$$

完全由函數微分的一次項組成的微分方程式。

那麼任一線性組合 linear combination $ax_1(t) + bx_2(t)$ 也滿足該方程式！

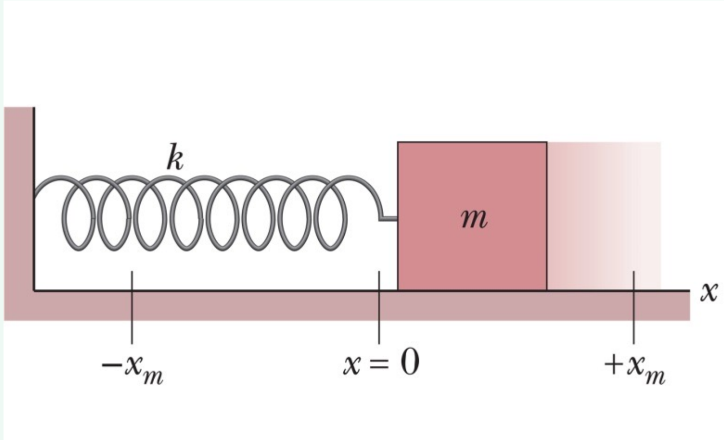
$$a \quad \sum_n a_n \cdot \frac{d^n x_1}{dt^n} = 0 \quad + \quad b \quad \sum_n a_n \cdot \frac{d^n x_2}{dt^n} = 0$$

$$\sum_n a_n \cdot \frac{d^n (ax_1 + bx_2)}{dt^n} = 0$$

得證

簡諧運動的解

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$



正弦函數與餘弦函數的兩次微分都和負的自己成正比！

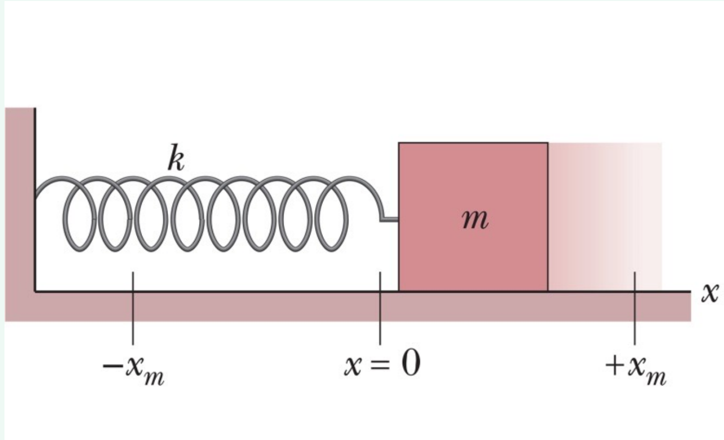
因此很容易就找到兩個解 $x_1 = \sin \omega t$ $x_2 = \cos \omega t$

那麼任一線性組合 $x = a \cos \omega t + b \sin \omega t$ 也是解！

我們得到無限多個解！

微分方程式的解需要讓自己挪出足夠的空間，這樣才能滿足起始條件。

$$x = a\cos\omega t + b\sin\omega t$$



$$v = -\omega a\sin\omega t + \omega b\cos\omega t$$

a, b由起始條件決定

$$x(0) = a = x_0$$

$$v(0) = \omega b = v_0$$

$$b = \frac{v_0}{\omega}$$

$$x = x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$$

這個函數同時滿足運動方程式以及兩個起始條件，因此是唯一的解！

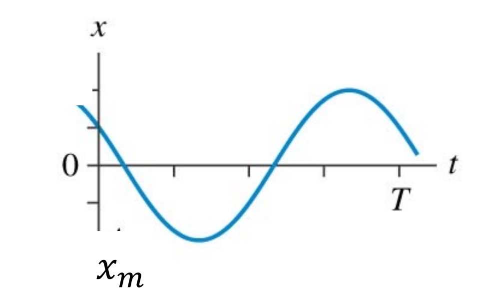
不用再找了！

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

這個式子較適合運動方程式求解。

較容易明瞭其物理意義的表示式是：

$$x = x_m \cos(\omega t + \phi)$$



這兩個數學式是一樣的，因為：

$$x = x_m \cos(\omega t + \phi) = x_m \cos \phi \cos \omega t - x_m \sin \phi \sin \omega t$$

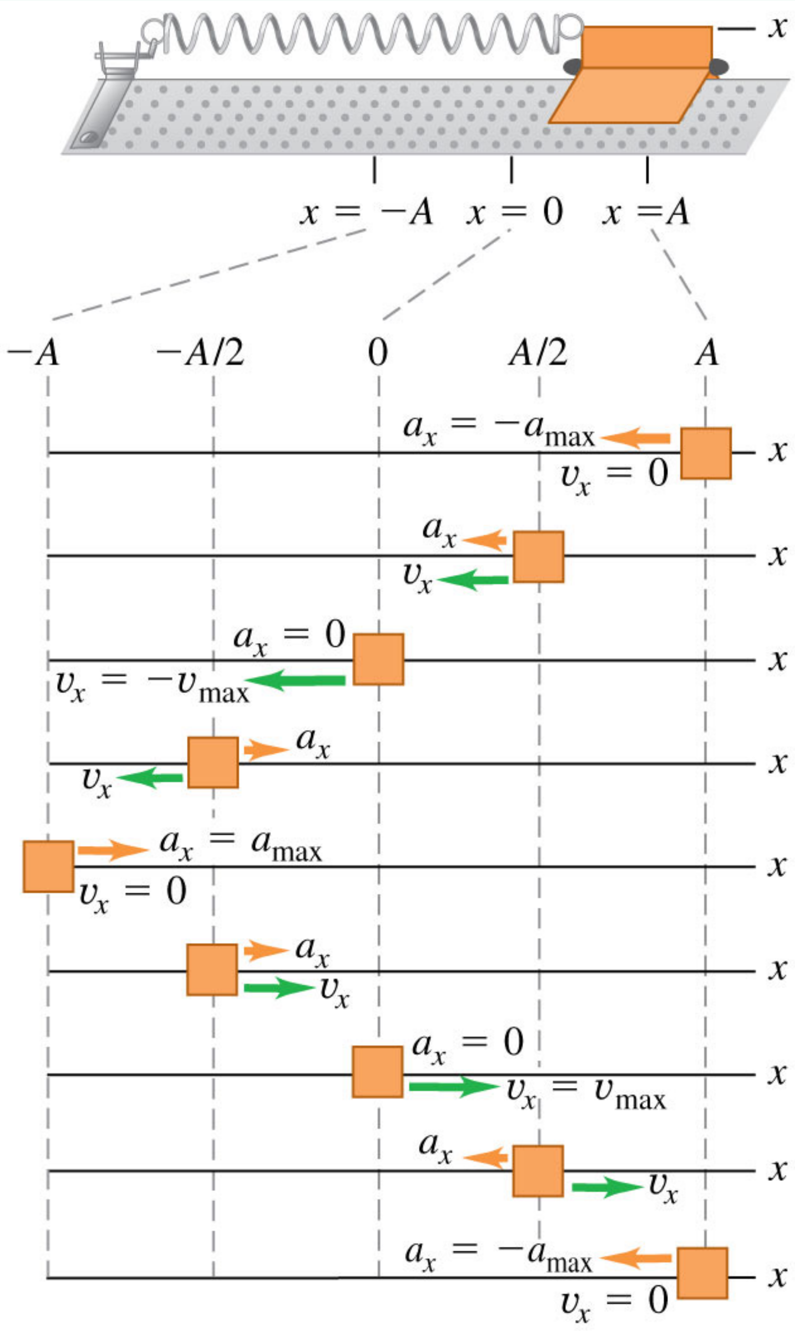
兩組常數之間的關係：

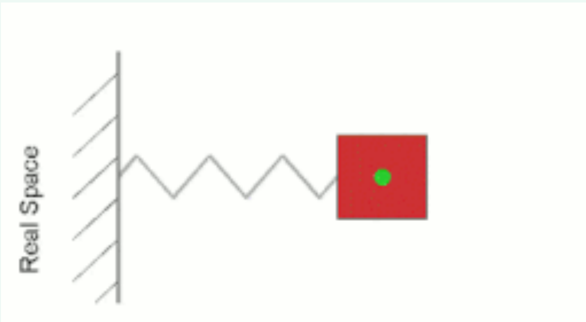
$$x_0 = x_m \cos \phi \, , \frac{v_0}{\omega} = -x_m \sin \phi$$

$$x_m = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$

$$\tan \phi = -\frac{v_0}{\omega x_0}$$

簡諧運動的解就是時間平移過的一個三角函數！

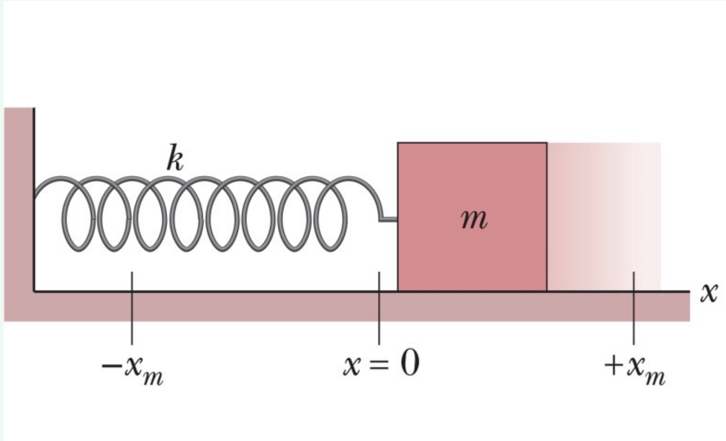


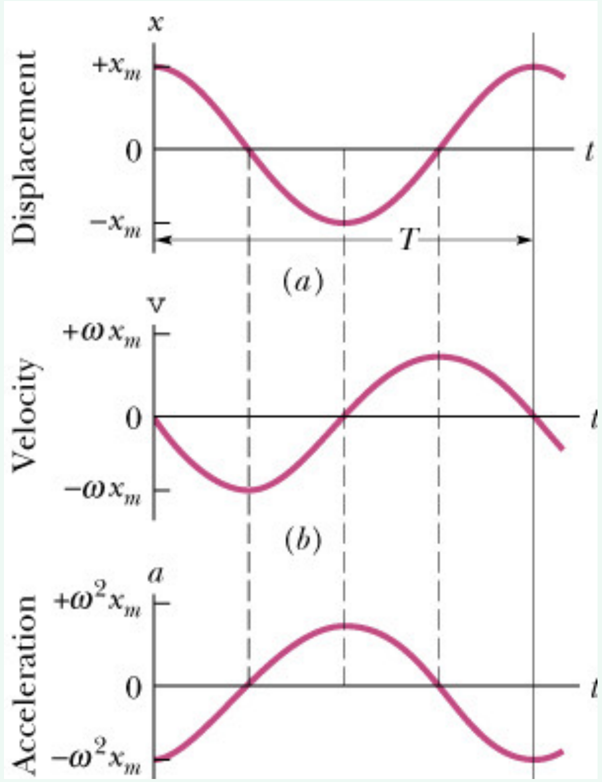


[動畫 Simulation]

Spray Paint Oscillator

MIT Department of Physics
Technical Services Group





$$x = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi)$$

x_m 及 ϕ 兩個常數是由起始條件決定：

對個別的運動，所取的值不同。

$$x_m = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$

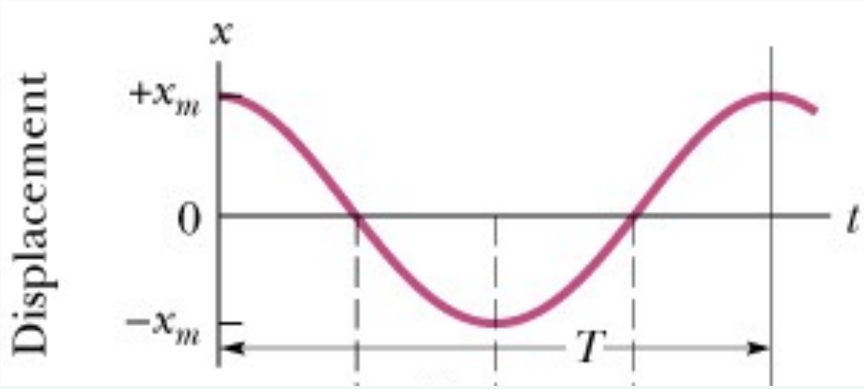
ω是由簡諧振盪子的性質決定：

同一個彈簧組，只有一個值。

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

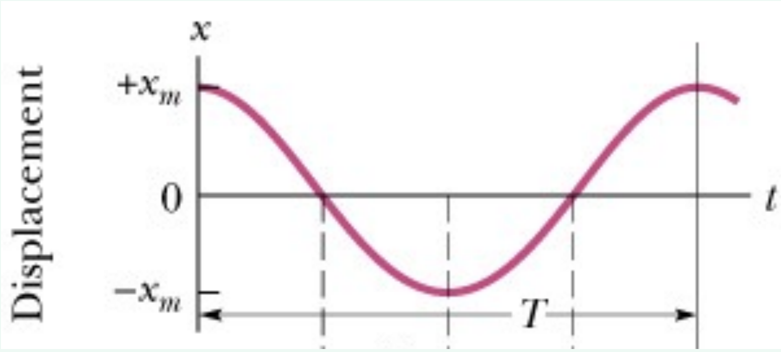
$$x = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

常數的物理意義：



x_m振幅 Amplitude 是振動的極大值

$x = x_m \cos(\omega t + \phi)$ 三角函數是一個週期函數。 ω 決定了振盪的週期 T。



$x(t) = x(t+T)$ $\rightarrow \cos(\omega t + \phi) = \cos(\omega t + \omega T + \phi)$

三角函數一個週期後，角度增加2π。 $\omega T = 2\pi$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ω稱為角頻率 Angular Frequency。

簡諧運動的週期 T 等於

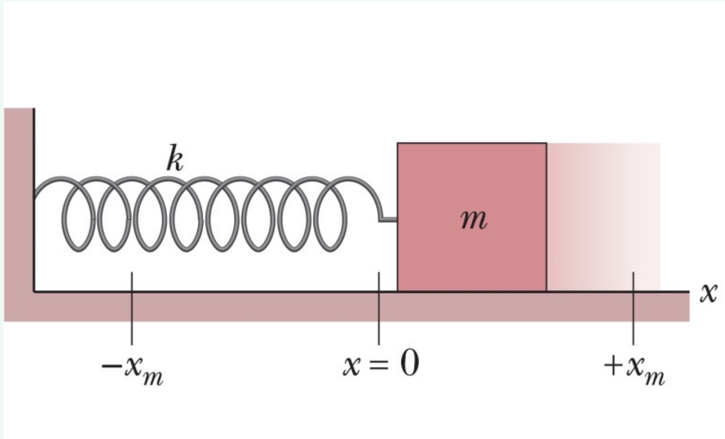
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

頻率Frequency: $f = 1/T$ 每秒進行了幾個周期。單位 s^{-1} = Hz。

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

簡諧運動的運動方程式



$$F = -kx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

一個簡諧運動，只由一個特徵常數 ω（角頻率）決定！

簡諧運動內在的特質 ω 決定了振盪的週期 T。

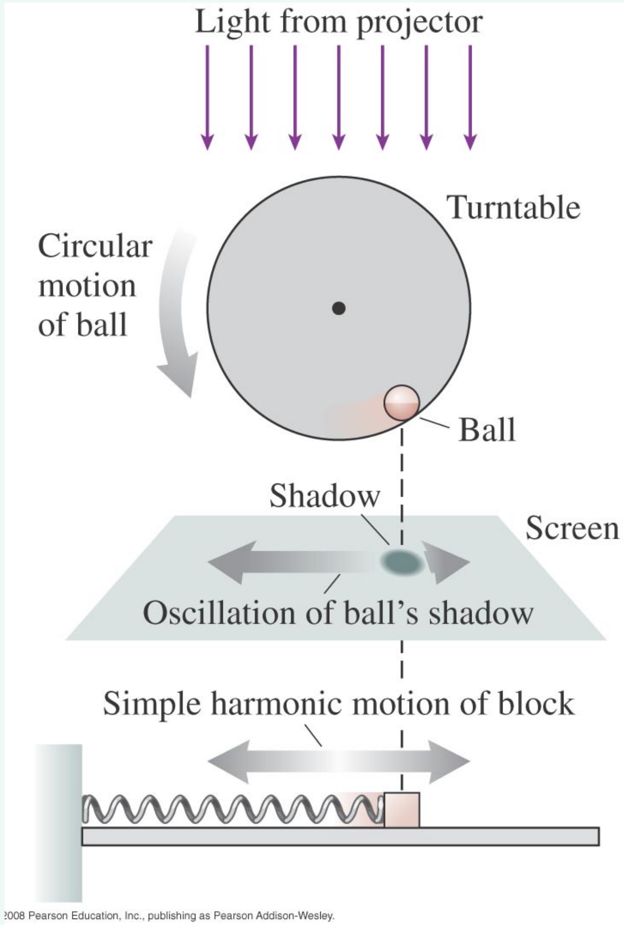
簡諧運動的週期與振盪的振幅無關！

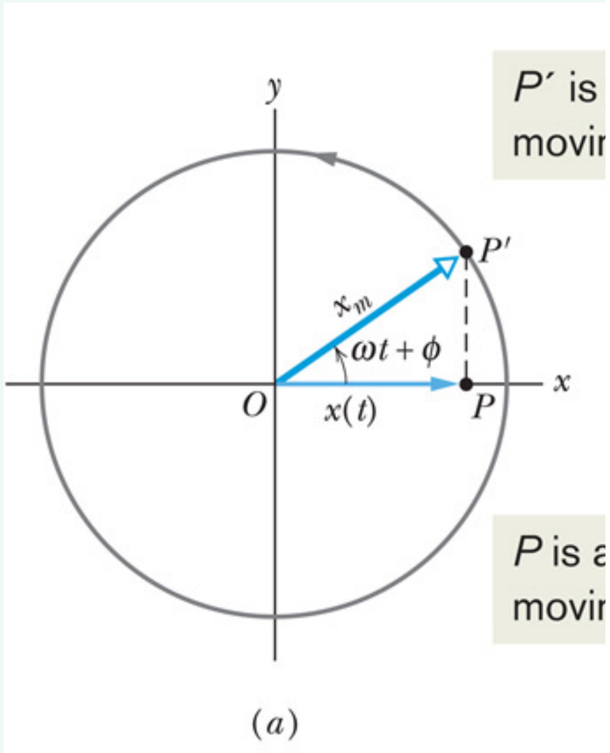
$$x = x_m \cos(\omega t + \phi) \qquad \omega T = 2\pi$$

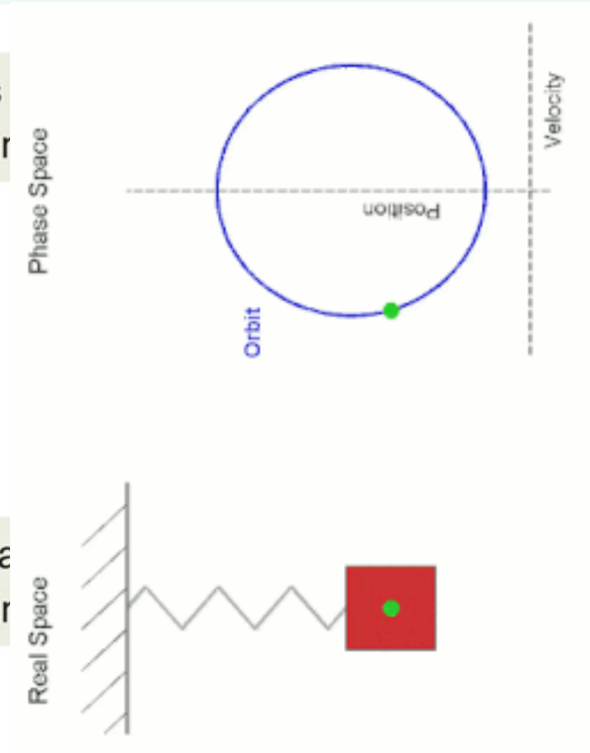
正好是一個半徑為x_m的等速圓周運動的水平分量。

此等速圓周運動的速度與加速度的水平分量也好與簡諧運動相等。

一個等速圓周運動位置的水平投影就等於一個簡諧運動。





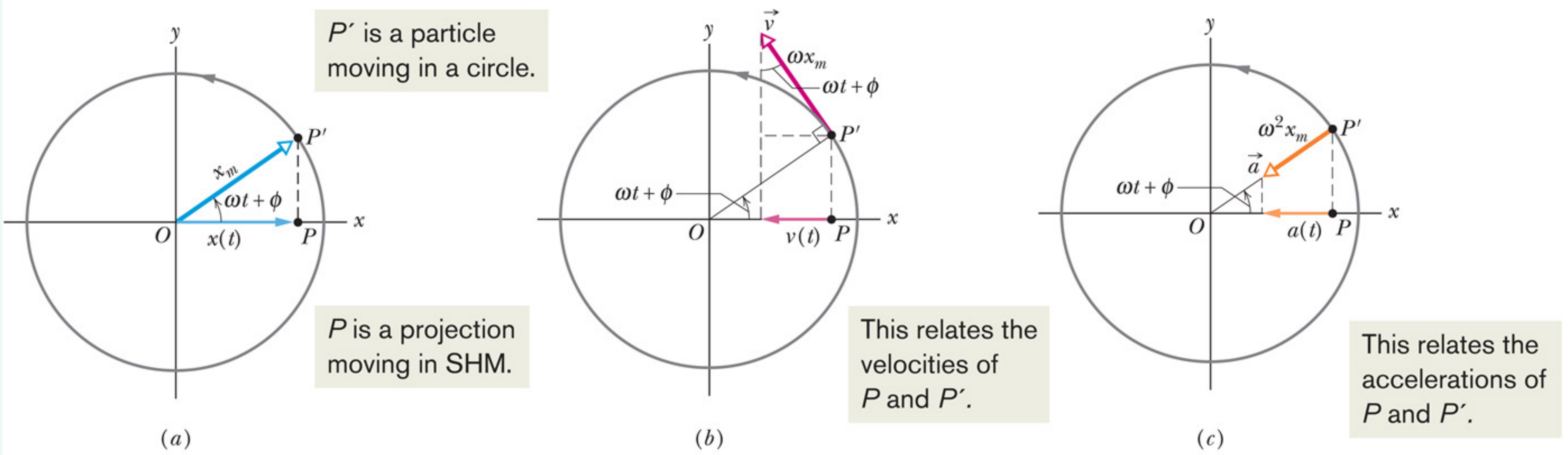


假想圓是一個很好的工具，但不是真的有一個圓！

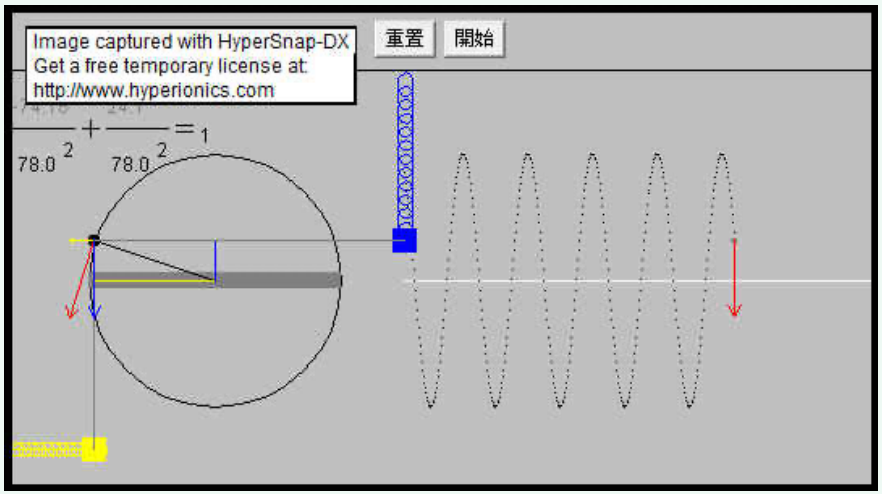
一個等速圓周運動位置的水平投影就是一個簡諧運動。

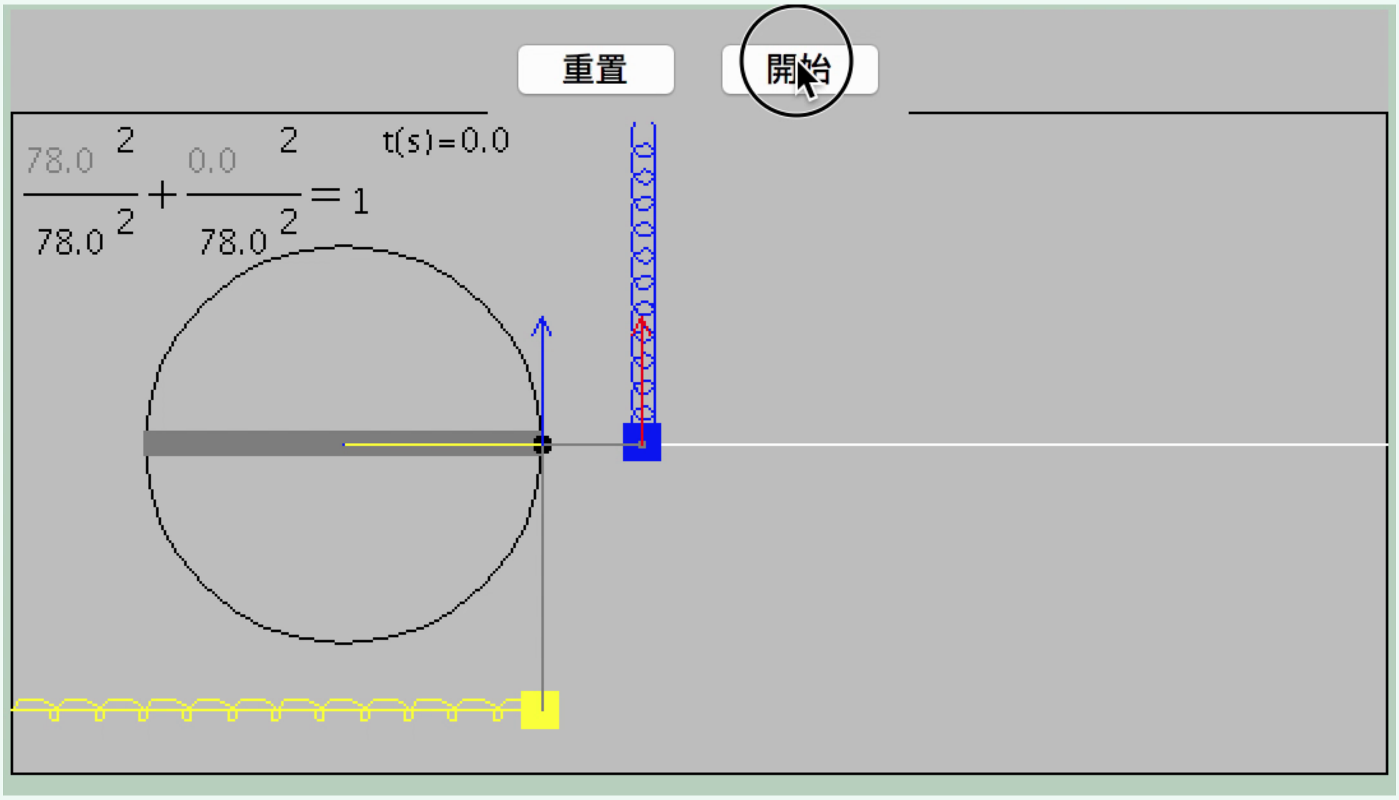
這也適用於速度及加速度。

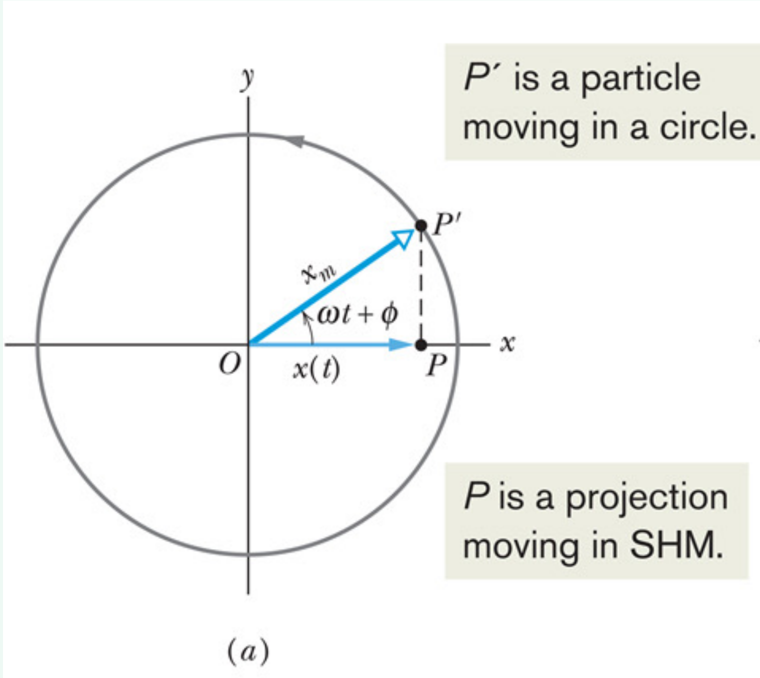
$x = x_m \cos(\omega t + \phi)$ $v = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi)$

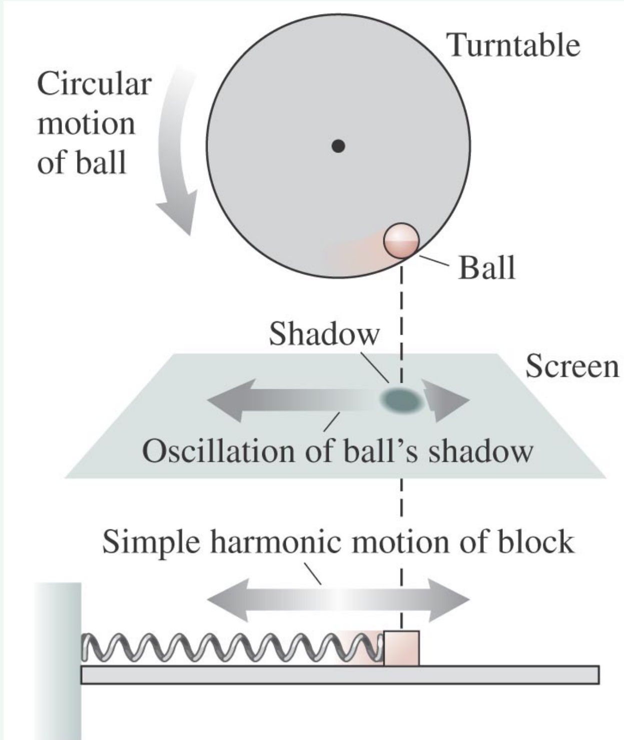


http://www.phy.ntnu.edu.tw/moodle/mod/resource/view.php?id=102




重置
開始
t(s)=0.0
78.0 2 / 78.0 2 + 0.0 2 / 78.0 2 = 1





簡諧運動中的每一個階段都會對應圓周運動中一特定的角度：稱為相角 Phase。

簡諧運動的相角是等速增加，以這個意義來說，ω 就是角速度： $\omega t + \phi$

這樣的圖像化思考對許多簡諧運動的計算很有用，

例如計算從一特定位置移動到另一特定位置所花的時間！

先找到前後特定位置對應的相角。再算花多少時間可以得到所需的相角差。

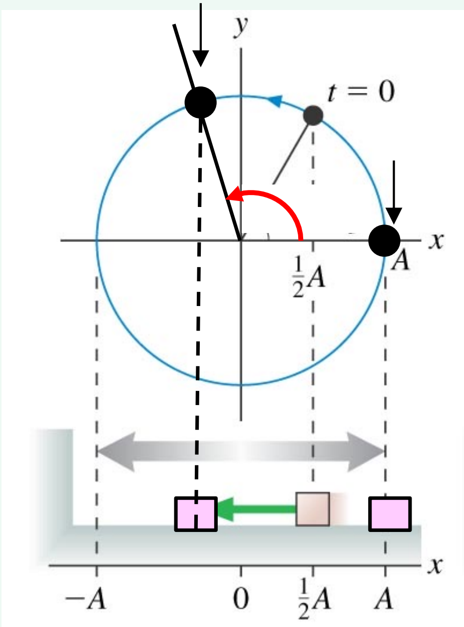
14.66 ••• An object is undergoing SHM with period 0.300 s and amplitude 6.00 cm. At $t = 0$ the object is instantaneously at rest at $x = 6.00$ cm. Calculate the time it takes the object to go from $x = 6.00$ cm to $x = -1.50$ cm.

SET UP: $x = A$ at $t = 0$, so $\phi = 0$. $A = 6.00$ cm. $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{0.300\text{ s}} = 20.9$ rad/s, so

$x(t) = (6.00\text{ cm})\cos)([20.9\text{ rad/s}]t)$.

EXECUTE: $t = 0$ at $x = 6.00$ cm. $x = -1.50$ cm when $-1.50\text{ cm} = (6.00\text{ cm})\cos((20.9\text{ rad/s})t)$.

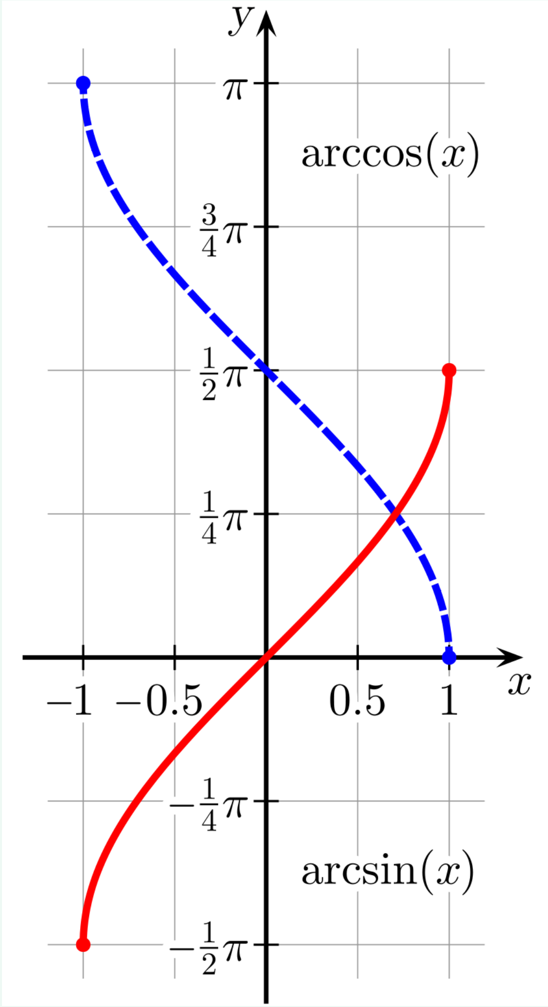
$t = \left(\dfrac{1}{20.9\text{ rad/s}}\right)\cos^{-1}\left(-\dfrac{1.5}{6.0}\right) = 0.0872$ s. It takes 0.0872 s.



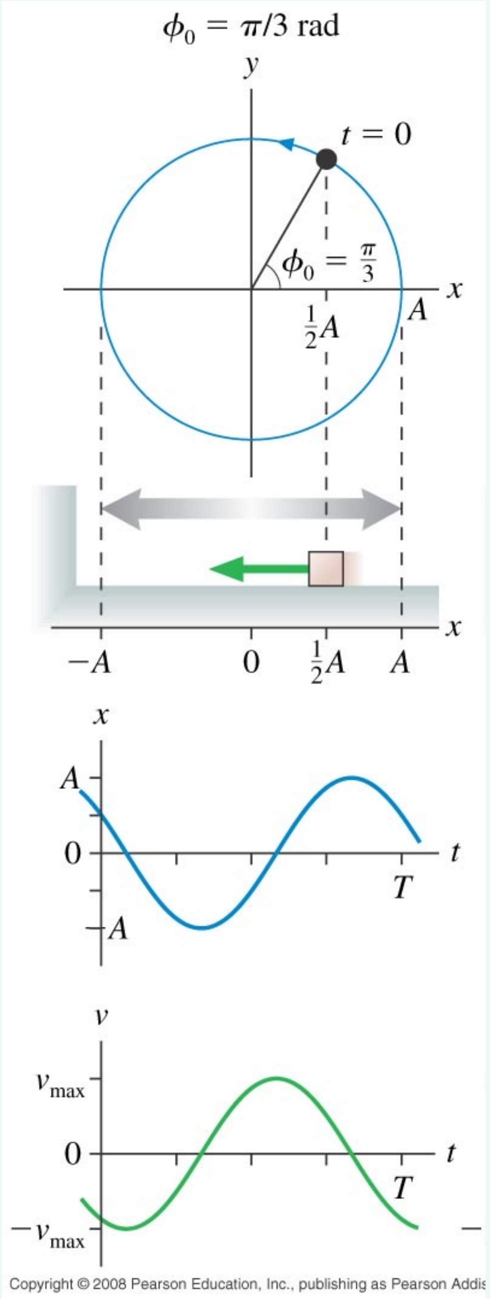
相角差等於：$\Delta\phi = \frac{\pi}{2} + \cos^{-1}\frac{1.5}{6.0}$

or $\cos^{-1}\left(-\frac{1.5}{6.0}\right)$

需要時間：$\dfrac{\Delta\phi}{\omega}$



要注意反三角 $\cos^{-1} x$ 函數主值的範圍



$$x = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

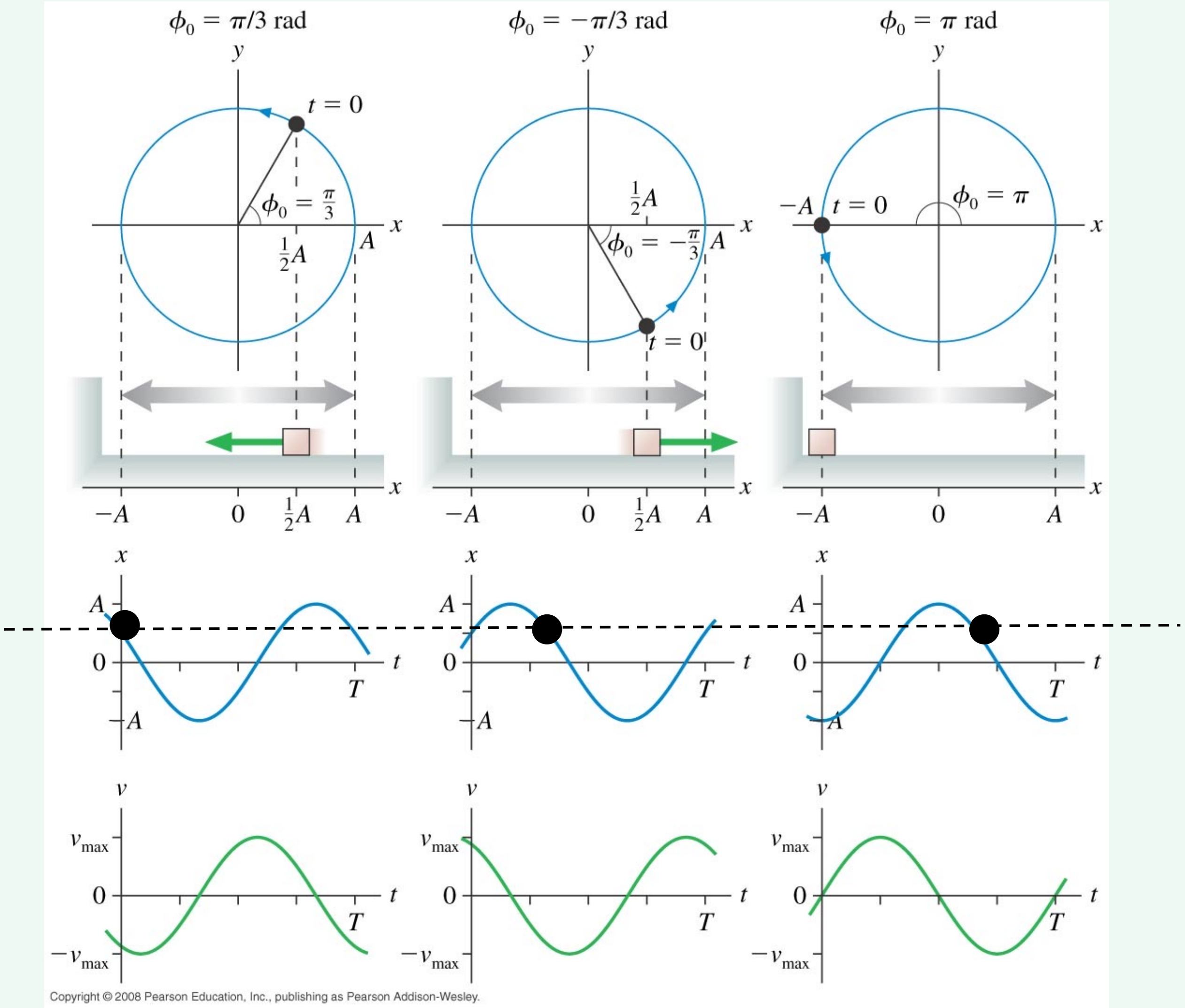
相角是等速增加：$\omega t + \phi$

起始相角就是相常數 ϕ

相常數由起始位置與起始速度的比值決定：

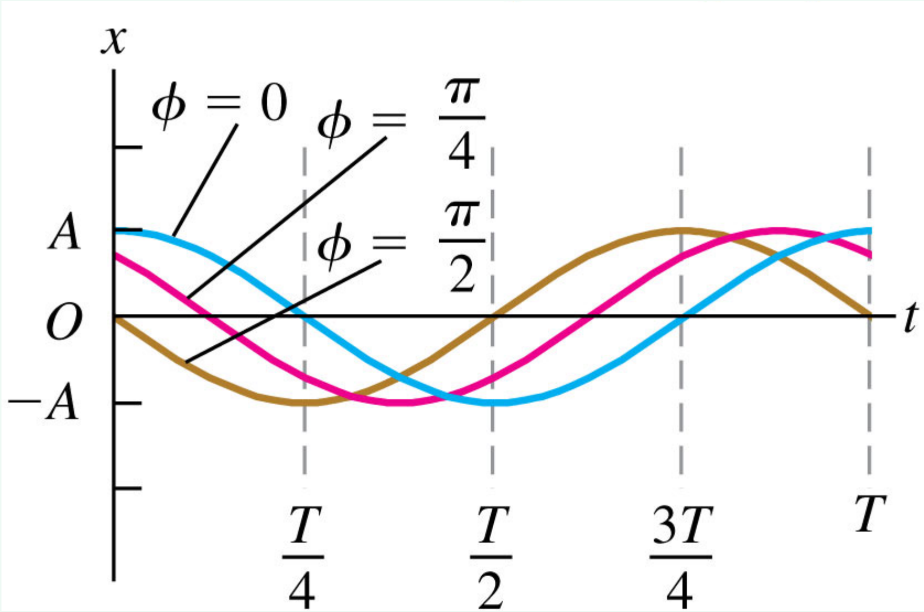
$$\tan\phi = -\frac{b}{a} = -\frac{v_0}{\omega x_0}$$

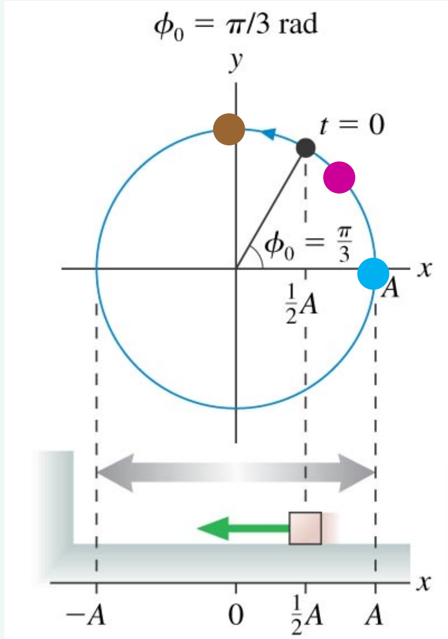
動畫 Simulation



第一個震盪比第二個震盪領先相角120°。

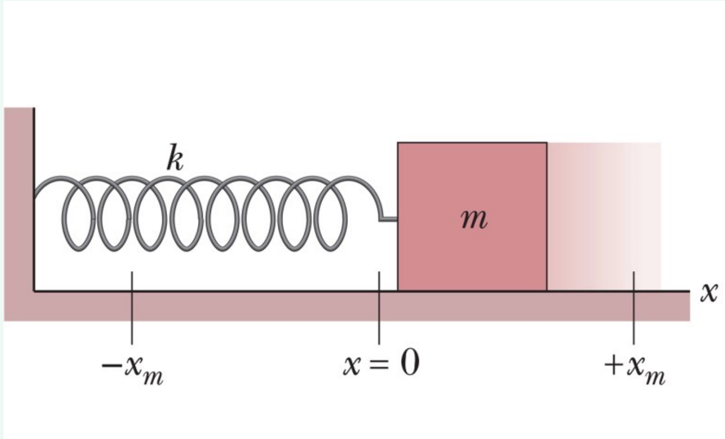
第二個震盪比第三個震盪領先120°。





$\phi = 0$ 是從最大振幅由靜止出發： $x = x_m \cos(\omega t)$

$\phi = \frac{\pi}{2}$ 是從平衡點以最大速度出發： $x = x_m \sin(\omega t)$



$$x = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

一個簡諧運動，有一個特有的內在的振動頻率f！

角頻率ω與振幅及相常數無關，同一個彈簧組，只有一個值。

振幅x_m及相常數ϕ由起始條件決定，

同一個彈簧組，對個別的運動，所取的值可以不同。

14.13 • The point of the needle of a sewing machine moves in SHM along the x-axis with a frequency of 2.5 Hz. At $t = 0$ its position and velocity components are $+1.1$ cm and -15 cm/s, respectively. (a) Find the acceleration component of the needle at $t = 0$. (b) Write equations giving the position, velocity, and acceleration components of the point as a function of time.

14.13. **IDENTIFY:** For SHM, $a_x = -\omega^2 x = -(2\pi f)^2 x$. Apply Eqs. (14.13), (14.15) and (14.16), with A and ϕ from Eqs. (14.18) and (14.19).

SET UP: $x = 1.1$ cm, $v_{0x} = -15$ cm/s. $\omega = 2\pi f$, with $f = 2.5$ Hz.

EXECUTE: **(a)** $a_x = -(2\pi(2.5\text{ Hz}))^2(1.1\times 10^{-2}\text{ m}) = -2.71\text{ m/s}^2$.

(b) From Eq. (14.19) the amplitude is 1.46 cm, and from Eq. (14.18) the phase angle is 0.715 rad. The angular frequency is $2\pi f = 15.7$ rad/s, so $x = (1.46\text{ cm})\cos((15.7\text{ rad/s})t + 0.715\text{ rad})$,

$v_x = (-22.9\text{ cm/s})\sin((15.7\text{ rad/s})t + 0.715\text{ rad})$ and $a_x = (-359\text{ cm/s}^2)\cos((15.7\text{ rad/s})t + 0.715\text{ rad})$.

EVALUATE: We can verify that our equations for x, v_x and a_x give the specified values at $t = 0$.

14.70 ••• **CP** A child with poor table manners is sliding his 250-g dinner plate back and forth in SHM with an amplitude of 0.100 m on a horizontal surface. At a point 0.060 m away from equilibrium, the speed of the plate is 0.400 m/s. (a) What is the period? (b) What is the displacement when the speed is 0.160 m/s? (c) In the center of the dinner plate is a 10.0-g carrot slice. If the carrot slice is just on the verge of slipping at the endpoint of the path, what is the coefficient of static friction between the carrot slice and the plate?

14.70. **(a) IDENTIFY and SET UP:** Combine Eqs. (14.12) and (14.21) to relate v_x and x to T.

EXECUTE: $T = 2\pi\sqrt{m/k}$

We are given information about v_x at a particular x. The expression relating these two quantities comes from conservation of energy: $\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$

We can solve this equation for $\sqrt{m/k}$, and then use that result to calculate T. $mv_x^2 = k(A^2 - x^2)$ gives

$$\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{\sqrt{A^2 - x^2}}{v_x} = \frac{\sqrt{(0.100\text{ m})^2 - (0.060\text{ m})^2}}{0.400\text{ m/s}} = 0.200\text{ s}.$$

Then $T = 2\pi\sqrt{m/k} = 2\pi(0.200\text{ s}) = 1.26\text{ s}$.

(b) IDENTIFY and SET UP: We are asked to relate x and v_x, so use conservation of energy equation:

$$\tfrac{1}{2}mv_x^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kA^2$$

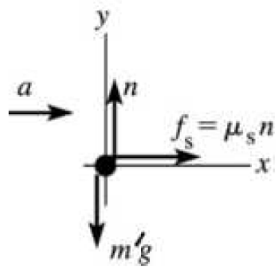
$$kx^2 = kA^2 - mv_x^2$$

$$x = \sqrt{A^2 - (m/k)v_x^2} = \sqrt{(0.100\text{ m})^2 - (0.200\text{ s})^2(0.160\text{ m/s})^2} = 0.0947\text{ m}.$$

EVALUATE: Smaller $|v_x|$ means larger x.

(c) IDENTIFY: If the slice doesn't slip, the maximum acceleration of the plate (Eq.14.4) equals the maximum acceleration of the slice, which is determined by applying Newton's second law to the slice.

SET UP: For the plate, $-kx = ma_x$ and $a_x = -(k/m)x$. The maximum $|x|$ is A, so $a_{\max} = (k/m)A$. If the carrot slice doesn't slip then the static friction force must be able to give it this much acceleration. The free-body diagram for the carrot slice (mass m') is given in Figure 14.70.



EXECUTE: $\sum F_y = ma_y$

$$n - m'g = 0$$

$$n = m'g$$

Figure 14.70

$$\sum F_x = ma_x$$

$$\mu_s n = m'a$$

$$\mu_s m'g = m'a \text{ and } a = \mu_s g$$

But we require that $a = a_{\max} = (k/m)A = \mu_s g$ and $\mu_s = \dfrac{k}{m}\dfrac{A}{g} = \left(\dfrac{1}{0.200\text{ s}}\right)^2\left(\dfrac{0.100\text{ m}}{9.80\text{ m/s}^2}\right) = 0.255.$

EVALUATE: We can write this as $\mu_s = \omega^2 A/g$. More friction is required if the frequency or the amplitude is increased.

重力下的簡諧運動

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x - g = -\omega^2 \cdot \left(x + \frac{g}{\omega^2}\right)$$

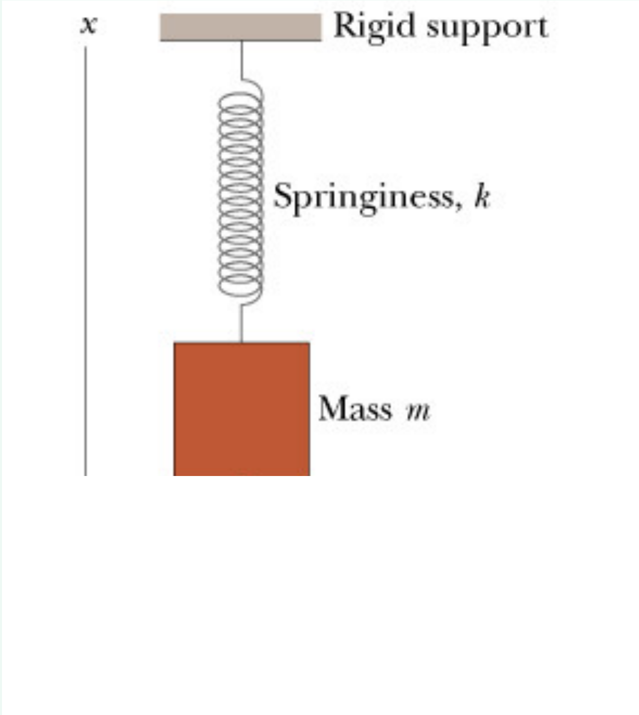
$$X \equiv x + \frac{g}{\omega^2} = x + \frac{mg}{k}$$

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -\omega^2 X$$

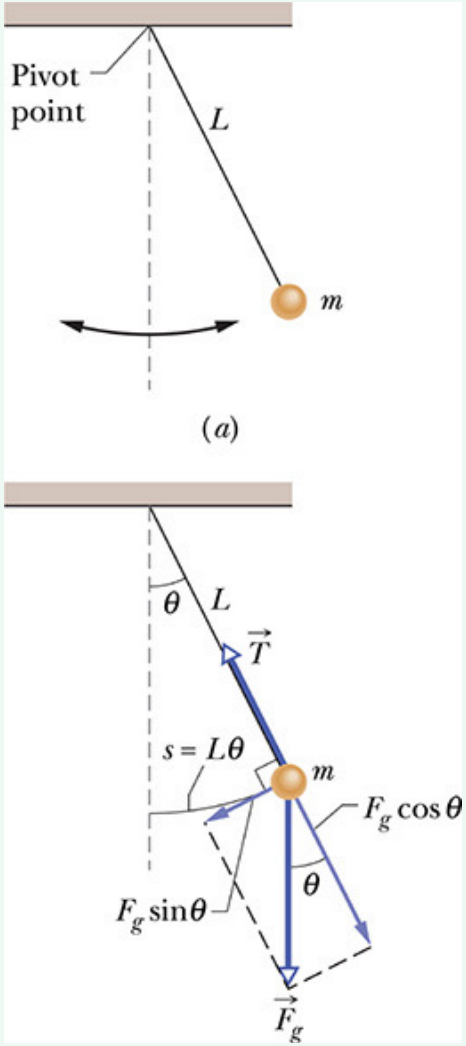
平衡點由$x = 0$下降至$x = -\frac{mg}{k}$

$$X = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$x = -\frac{mg}{k} + x_m \cos(\omega t + \phi)$$



不是只有彈簧才是簡諧運動！



$$\tau = I\alpha$$

$$mgL\sin\theta = mL^2\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

小角度近似： $\sin\theta \sim \theta$

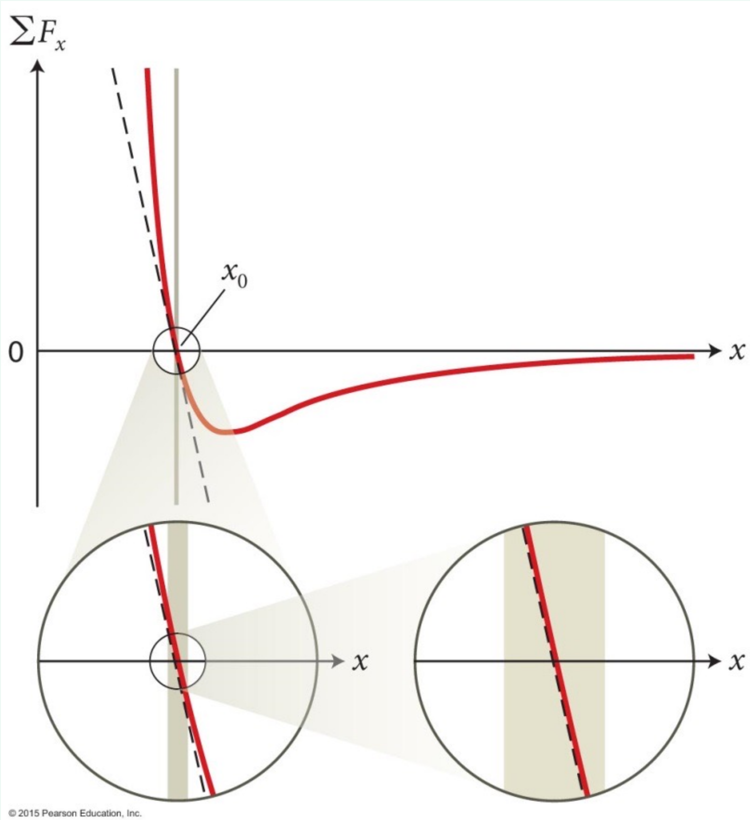
$$L^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = gL\theta$$

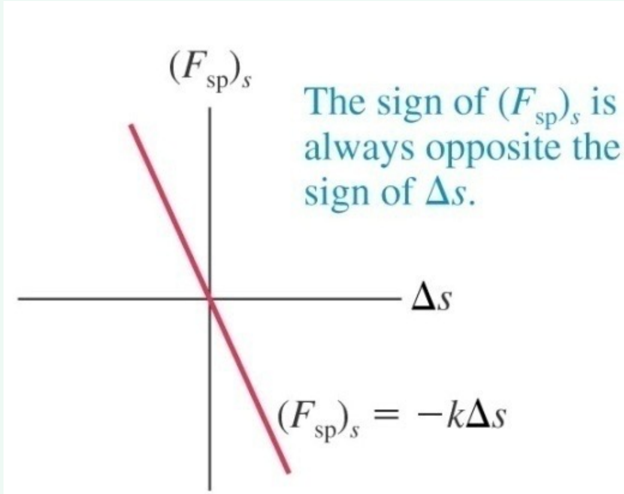
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{g}{L}\theta \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

單擺運動與簡諧運動滿足一模一樣的運動方程式·：因此，解完全相同。

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad \theta = \theta_m \cos(\omega t + \phi)$$

簡諧運動的週期 T 等於 $$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$





在力為零的平衡點附近，力的曲線大致上可以用一條直線來近似。

力與距平衡點的位移成正比，即簡諧運動！

$$F \sim F'(x_0)\cdot(x - x_0) \sim -k\Delta x$$

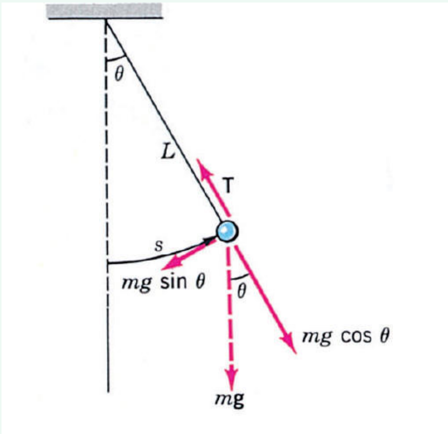
$$k = -F'(x_0) = -\left.\frac{dF}{dx}\right|_{x=x_0}$$

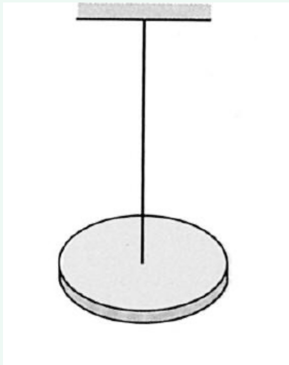
彈力常數即是通過平衡點的切線斜率乘-1：

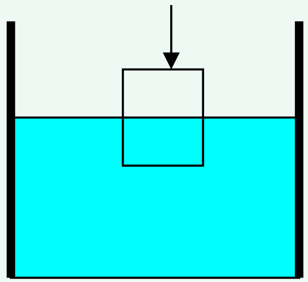
有了平衡點附近的力曲線即可得到對應的彈力常數！

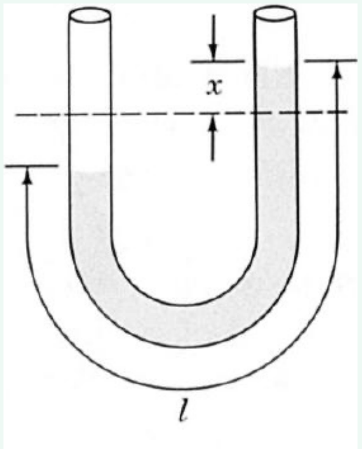
一個粒子在平衡點附近的小規模運動都是簡諧運動！

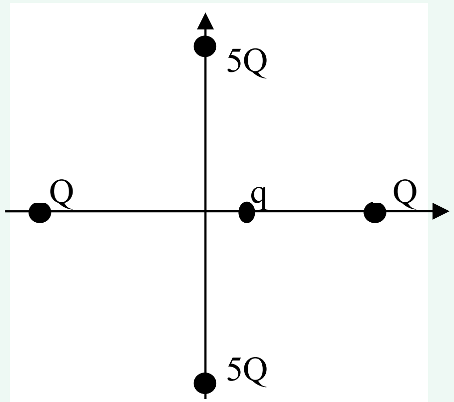
對彈簧的討論結果可以適用所有在平衡點附近的小規模運動。

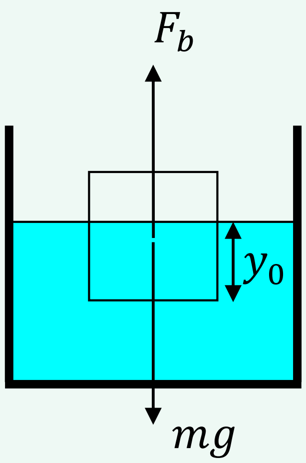


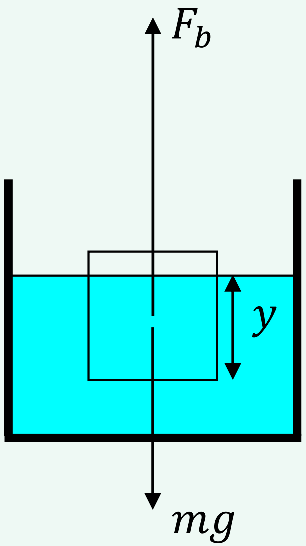












$$\rho A y_0 g = mg$$

$$F = -\rho A y g + mg = -\rho A g(y - y_0)$$

$$F = -\rho A g \cdot \Delta y = -k \cdot \Delta y$$

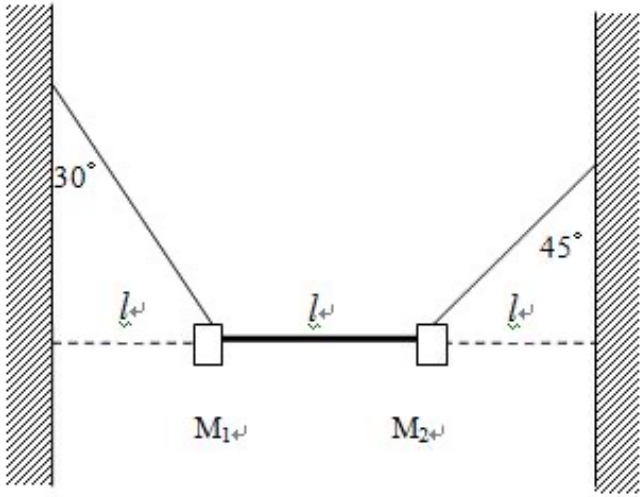
$$k = \rho A g$$

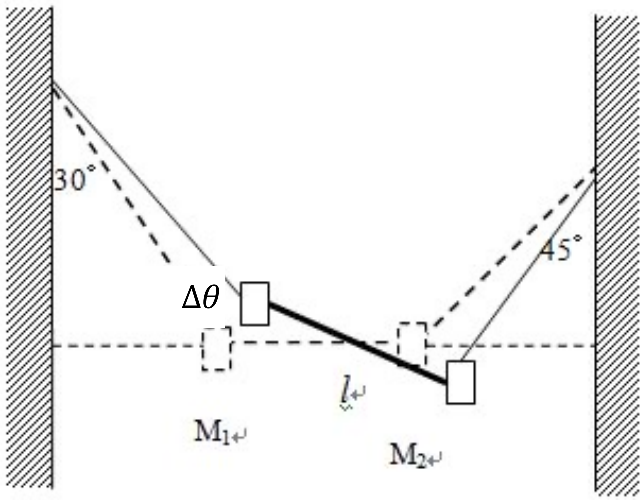
力與距平衡點的位移成正比，就是簡諧運動！

對彈簧的討論結果就可以直接適用。

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho A g}}$$

$$y = y_0 + y_m \cos\left(\sqrt{\frac{\rho A g}{m}}\, t\right)$$


30°
45°
l
l
l
M1
M2


30°
45°
Δθ
l
M1
M2

1. 考慮一半徑為R的鐵環，在地面附近，如圖垂直豎起，鐵環上串有一質量為m的珠子，可以自由無摩擦、沿著鐵環滑動。鐵環靜止時，珠子靜止於正下方。將鐵環慢慢開始繞著通過環心的垂直軸轉動，直到角速度為ω時，便保持等角速度旋轉。此時珠子已沿著環，慢慢向上滑到與垂直線夾角為45°時停止，如圖示。

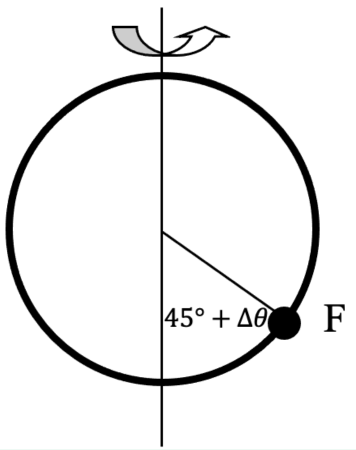
   A. 計算ω。以m, R, g表示。

   B. 用手將珠子向上輕撥，至夾角略大於45°處，然後放手。珠子會下滑，超過原來位置，再反彈回到起點，接著繼續在起點前後作簡諧運動。計算此簡諧運動的週期。

   提示：$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\Delta\theta\right)\sim\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\Delta\theta$，$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\Delta\theta\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\Delta\theta$，

Screenshot

   此式$\Delta\theta$是以徑度表示，$\Delta\theta \ll 1$，公式對正負$\Delta\theta$都對。



解答：

A. 考慮跟隨環一起運動的非慣性座標系，在此座標系，環靜止，但有一向外的離心力，大小為質量乘上向心加速度，但方向相反。當珠子運動時，還會受到柯利歐里力，但方向垂直於環面，對沿環面的運動沒有影響。當珠子在環上停止後，它沿環的方向的力，必須抵消。即重力及離心力沿環方向的分力必須抵消。

$$mg\sin\frac{\pi}{4} - mR\sin\frac{\pi}{4}\omega^2\cos\frac{\pi}{4} = 0$$

可以得到$\omega^2 = \frac{g\sqrt{2}}{R}$。

B. 珠子沿環的運動為一一維運動，當珠子至夾角$\frac{\pi}{4}+\Delta\theta$處，離開出發點弧距為$R\Delta\theta$，它的受力為重力與離心力沿環的分量：

$$F = mg\sin\left(\frac{\pi}{4}+\Delta\theta\right) - mR\sin\left(\frac{\pi}{4}+\Delta\theta\right)\omega^2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\Delta\theta\right)$$

代入$\omega^2 = \frac{g\sqrt{2}}{R}$，此力可以化簡為：

$$F = mg\left[\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\Delta\theta\right] - mR\left[\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\Delta\theta\right]\frac{g\sqrt{2}}{R}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\Delta\theta\right]$$
$$\sim\frac{mg}{\sqrt{2}}\Delta\theta - \sqrt{2}mg\Delta\theta = \frac{-mg}{\sqrt{2}}\Delta\theta = \frac{-mg}{\sqrt{2}R}R\Delta\theta$$

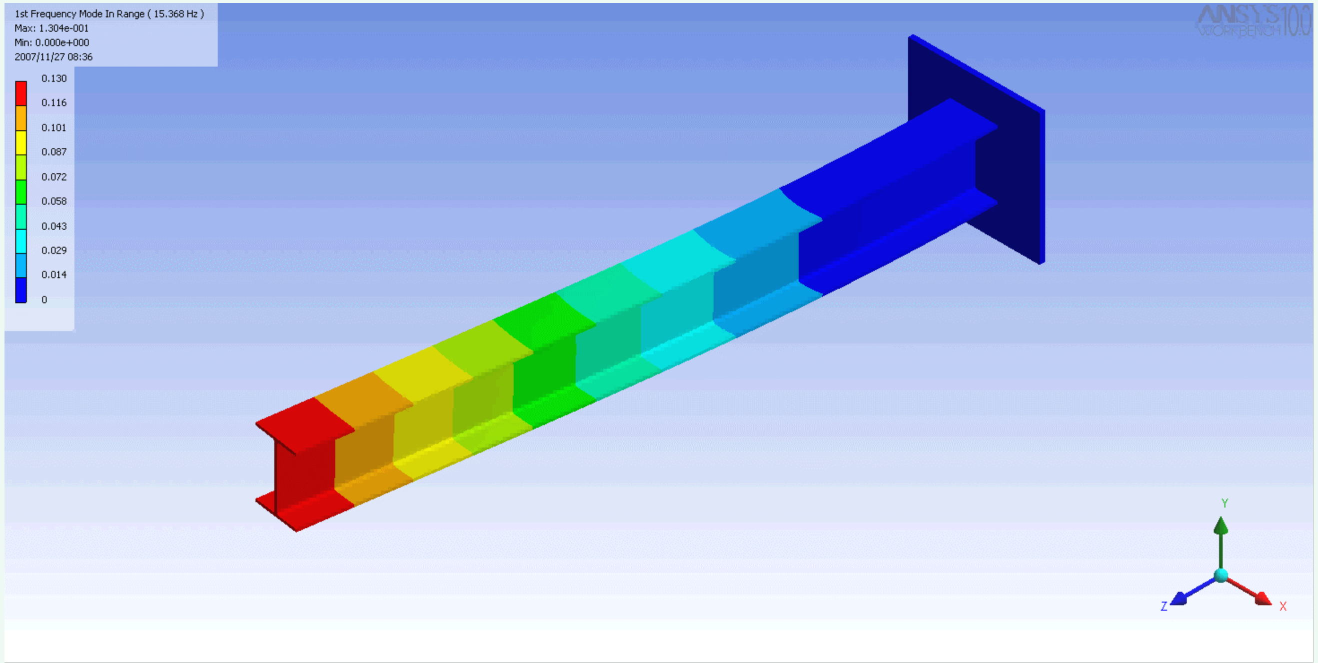
如此沿環一維運動的受力與離開出發點弧距$R\Delta\theta$成正比，如同彈簧的虎克定律，力常數為$\frac{mg}{\sqrt{2}R}$。因此此珠子做簡諧運動，週期為

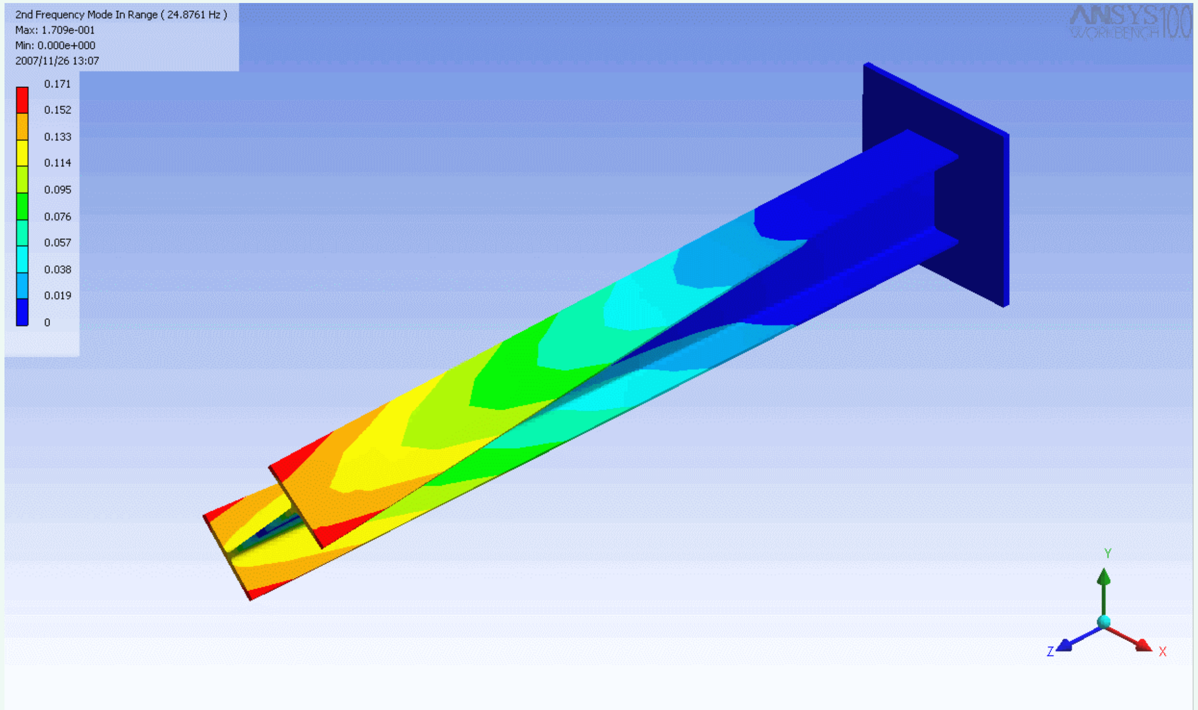
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{2}R}{g}}$$

有彈性的物體當發生變形時，有一回復力。

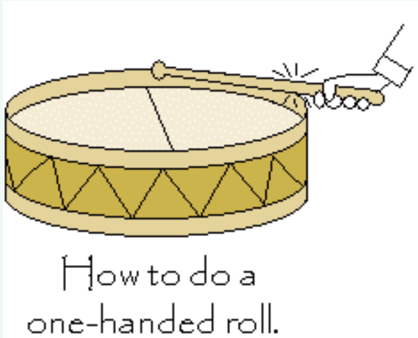
而此物體的原始形狀，就是回復力為零的平衡點，

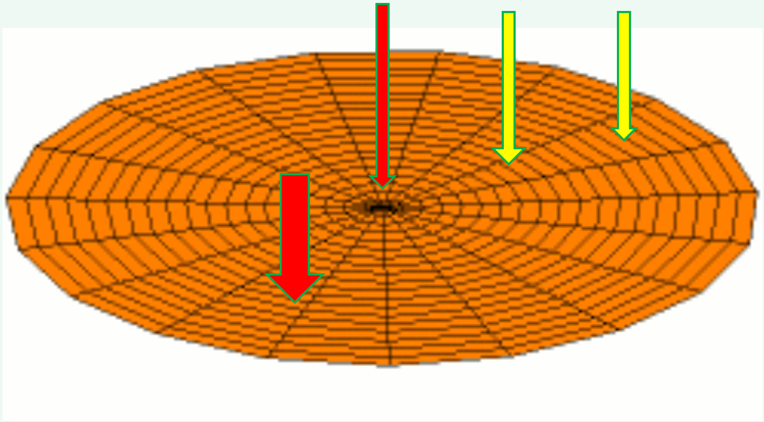
因此物體的變形也近似是一個簡諧運動。





物體的變形不只一種！並不是每一種變形都可以持續是簡諧運動。





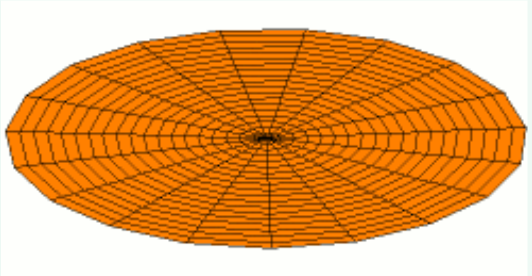
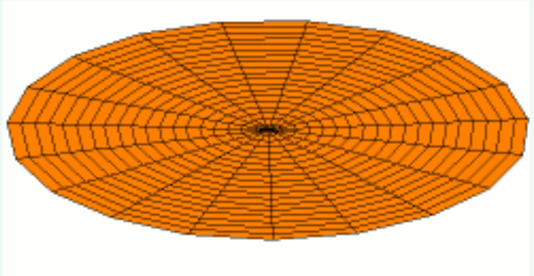
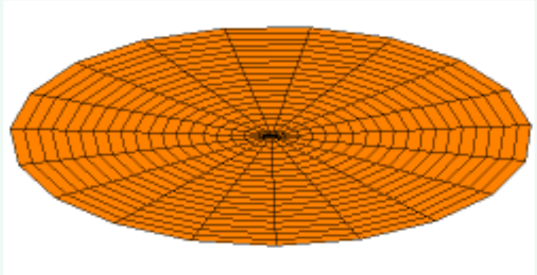
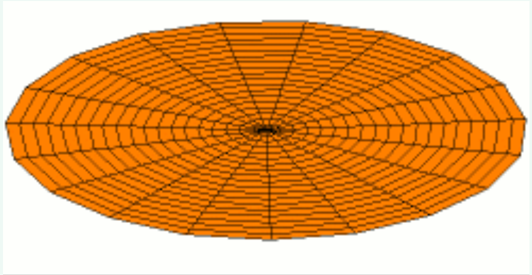
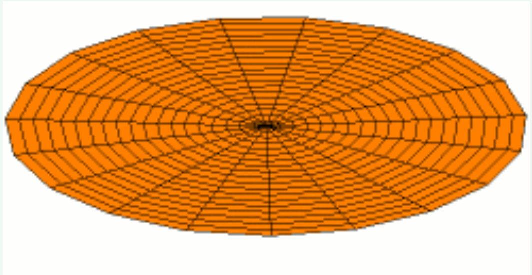
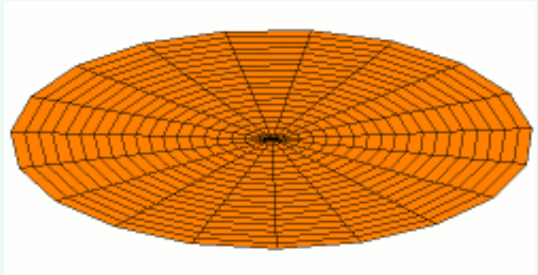
某些特定變形的模式，其隨時間的運動會如同一個彈簧，

當這些模式被單獨激發時，物體中的每一點都以簡諧運動方式運動：

$$y_i(t) = y_{mi} \cdot \cos(\omega t + \phi_i)$$

每一點y_i有一特定的振幅y_{mi}與相常數ϕ_i。

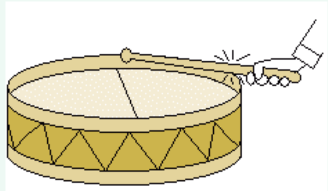
可以證明：物體的所有變形就是以這些模式，或它們的疊加來進行！

物體的變形模式有無限多個，

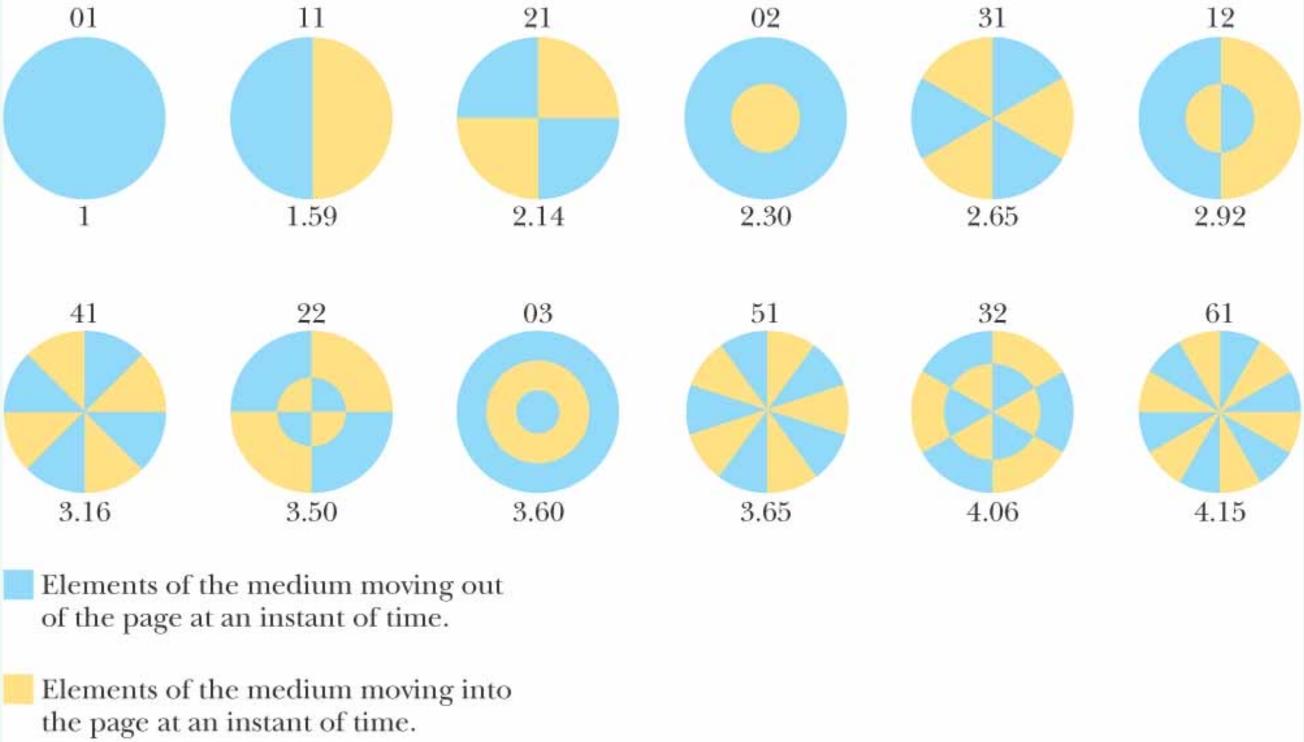
每一個模式的振動頻率不同！

一般來說，越複雜的模式，頻率越高，也越難激發。

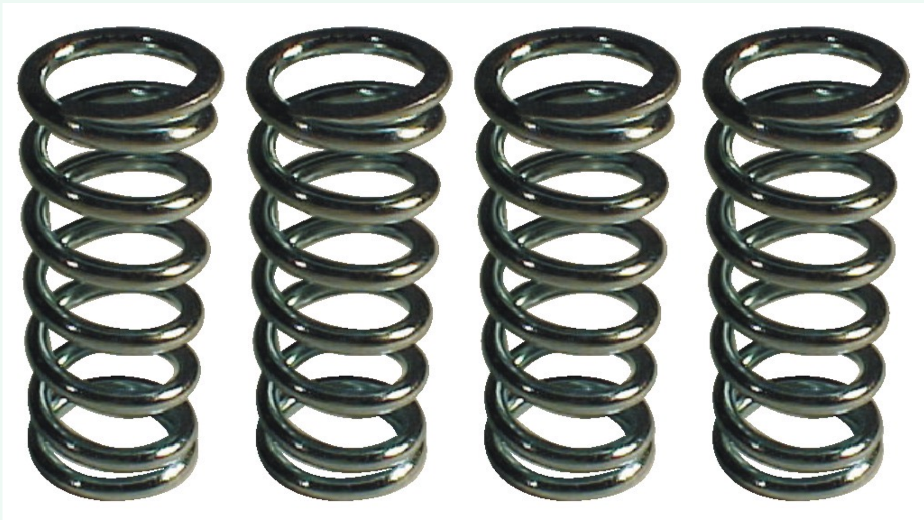


一個物體有那些振盪模式 Norm以及對應的頻率，就是該物體的一個特徵。

但模式並不是連續分布。因此可以分離地一個一個編號。

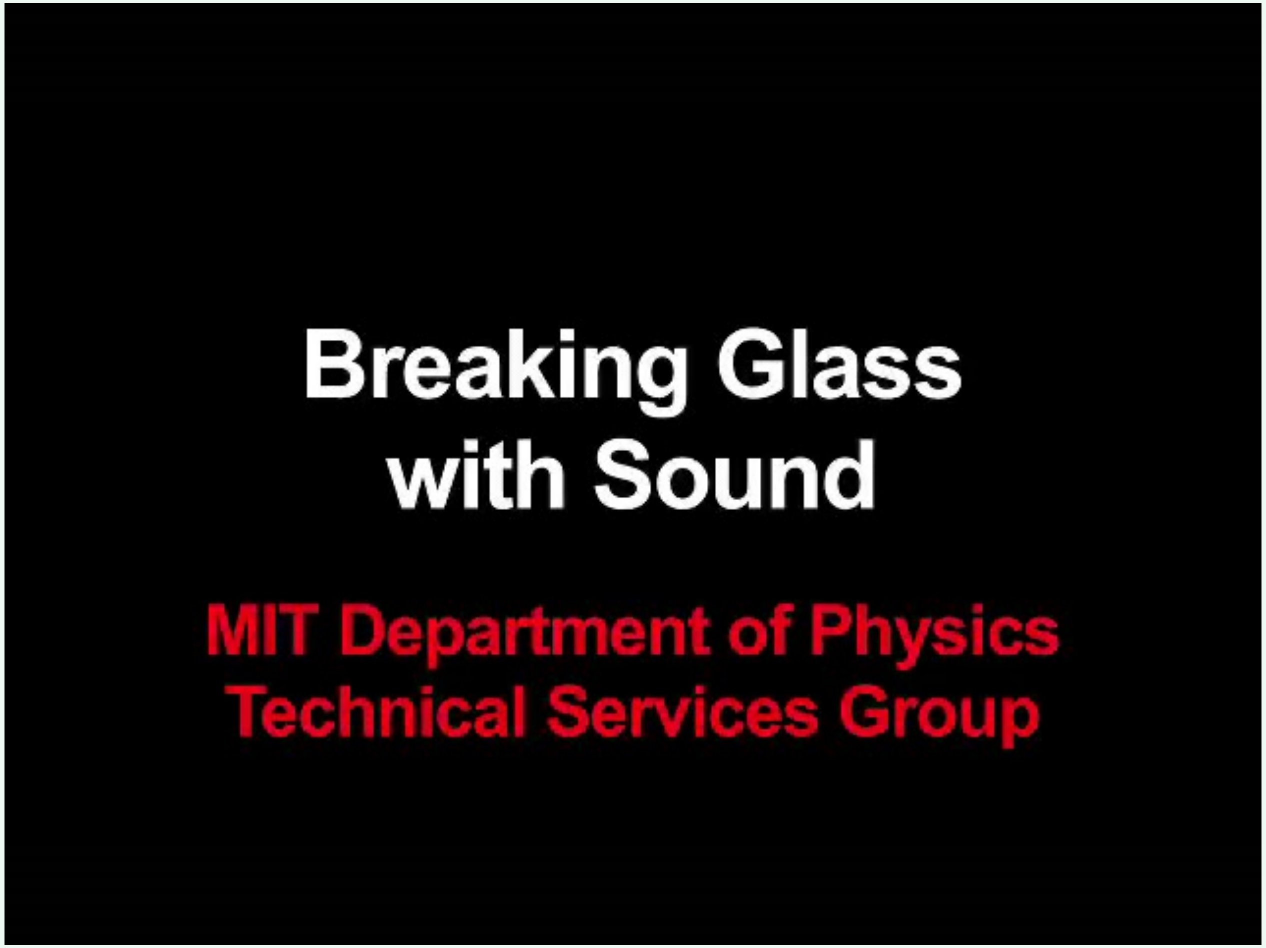


物體的變形就可以看成一系列的彈簧！



物體的振動

http://www.youtube.com/watch?v=17tqXgvCN0E&NR=1



傅立葉分析Fourier Series

任一週期為T的週期函數可以分解成一系列簡諧運動函數：$A_n \cdot \cos(\omega_n t + \phi_n)$

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cdot \cos(\omega_n t + \phi_n)]$$

A_n即是各個成分的強度

$$\omega_n = n\omega = n\omega f \qquad f_n = nf = \frac{n}{T} \qquad T_n = \frac{T}{n}$$

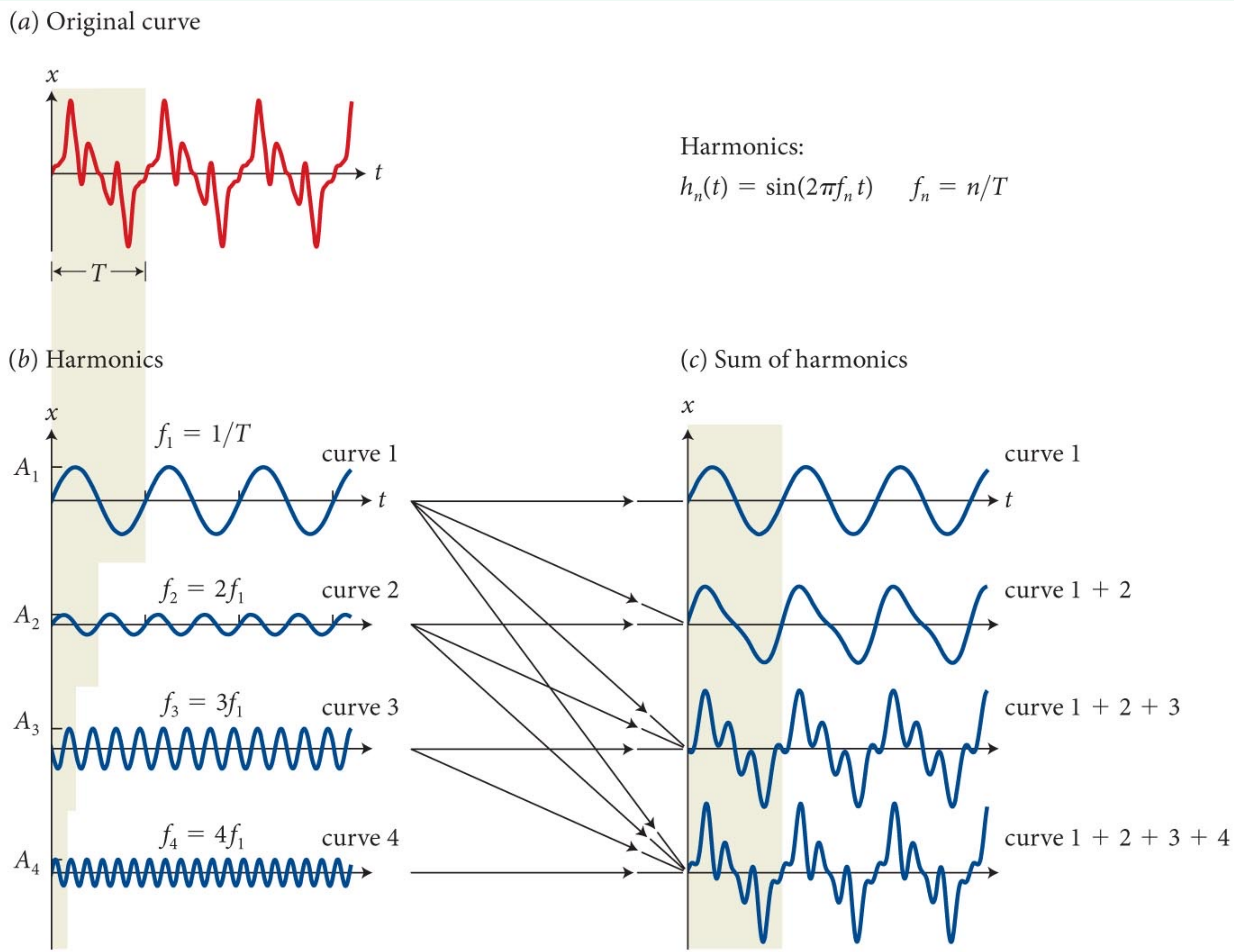
各成分的頻率f_n是函數頻率f的整數倍！

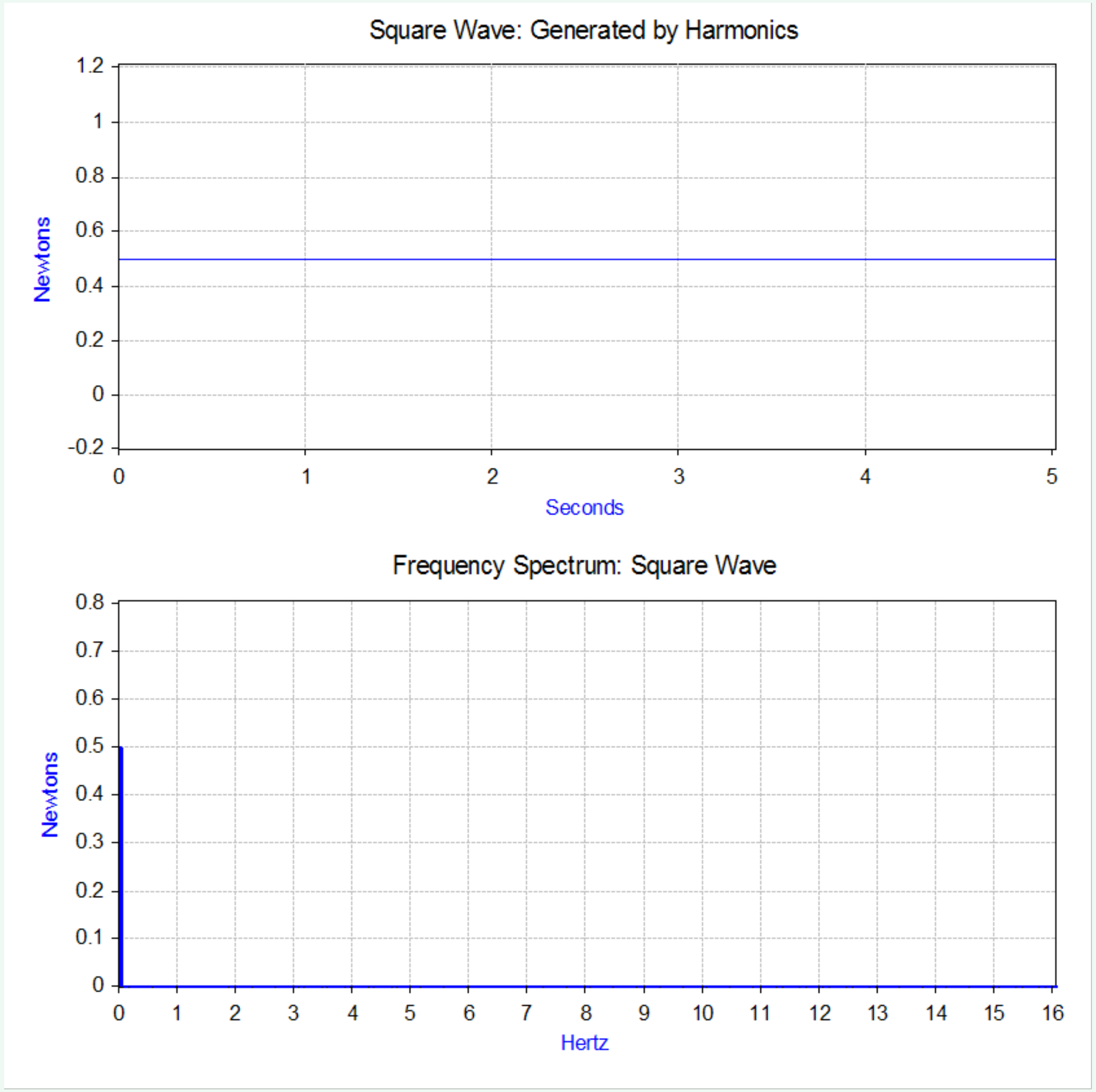
各成分的週期$T_n = \frac{T}{n}$是函數週期的整數分之一！

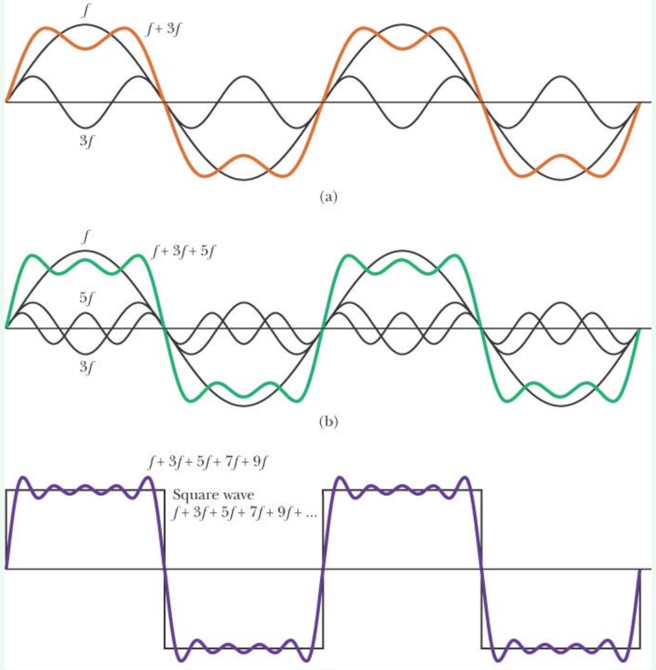
研究簡諧運動就等於研究所有週期函數。

Jean-Baptiste Joseph Fourier

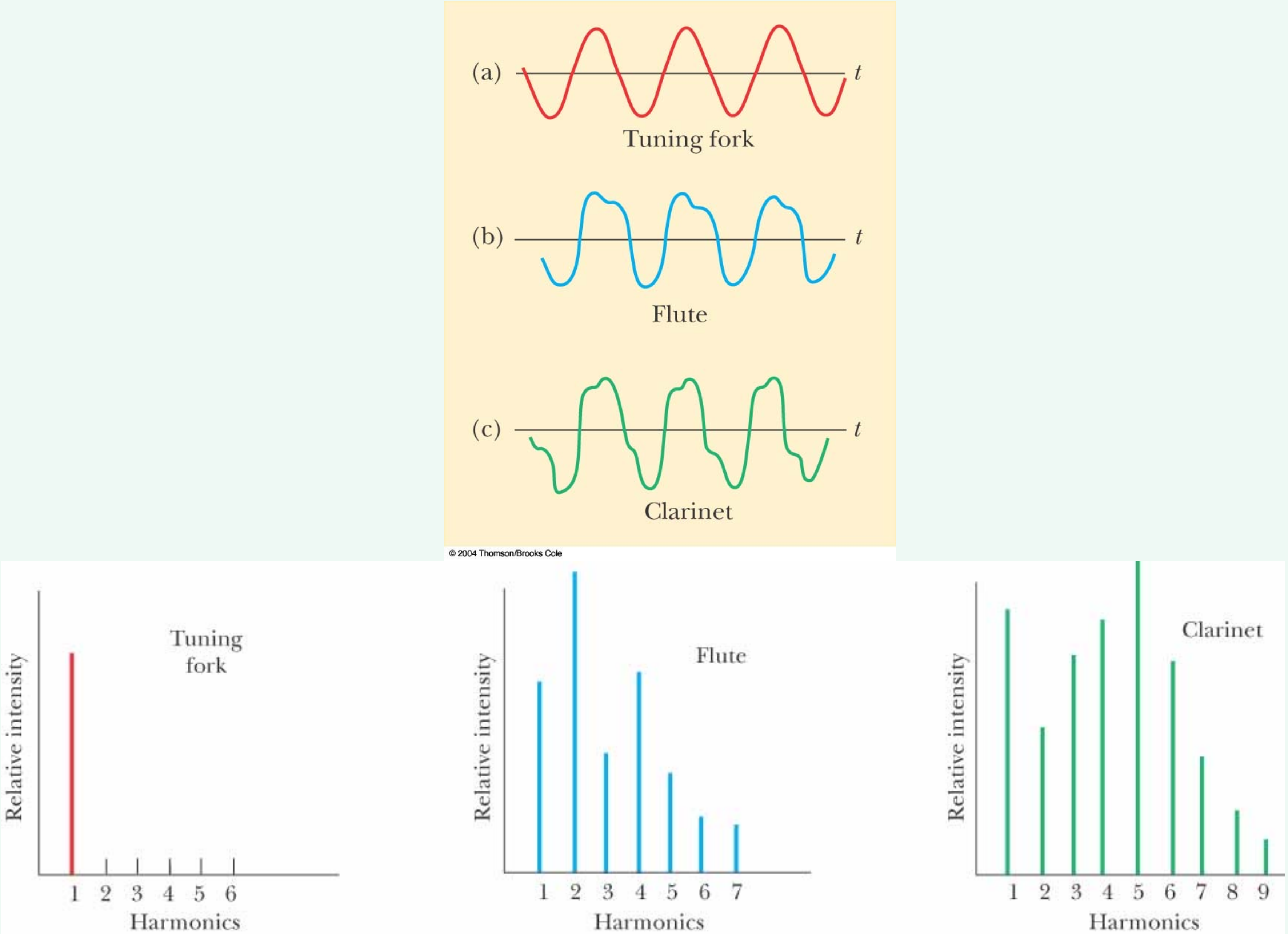
1768-1830


(a) Original curve
x
t
T
Harmonics:
$h_n(t) = \sin(2\pi f_n t) \quad f_n = n/T$
(b) Harmonics
(c) Sum of harmonics
$f_1 = 1/T$
$f_2 = 2f_1$
$f_3 = 3f_1$
$f_4 = 4f_1$
A_1
A_2
A_3
A_4
curve 1
curve 2
curve 3
curve 4
curve 1
curve 1 + 2
curve 1 + 2 + 3
curve 1 + 2 + 3 + 4

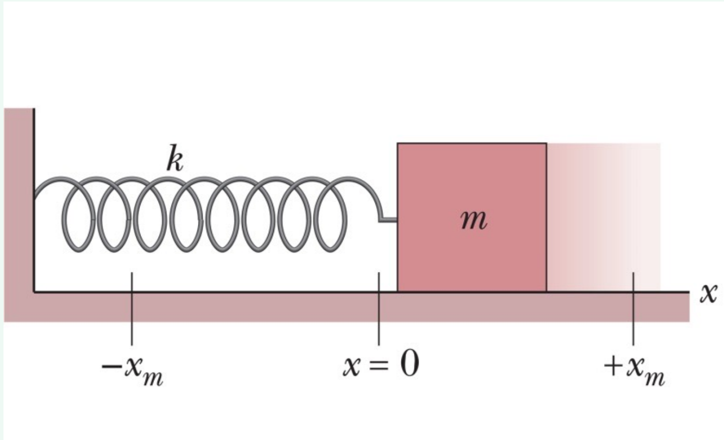




一個連續的運動被分解成一系列分離的數

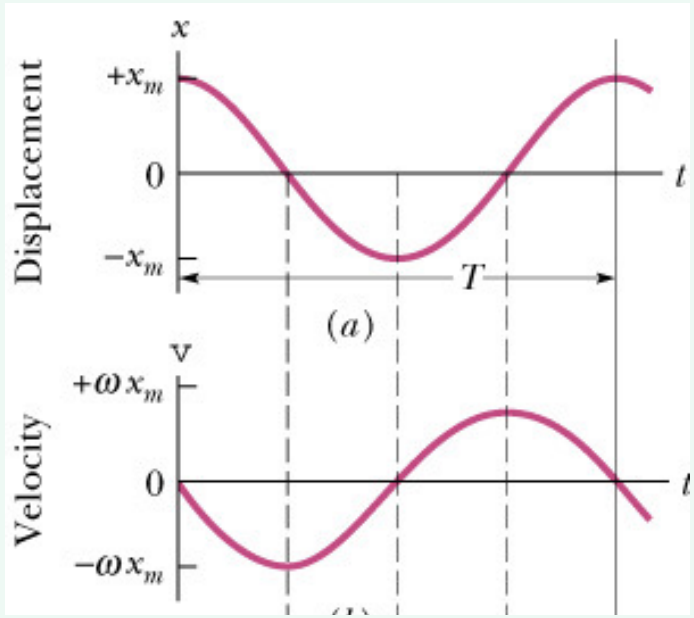


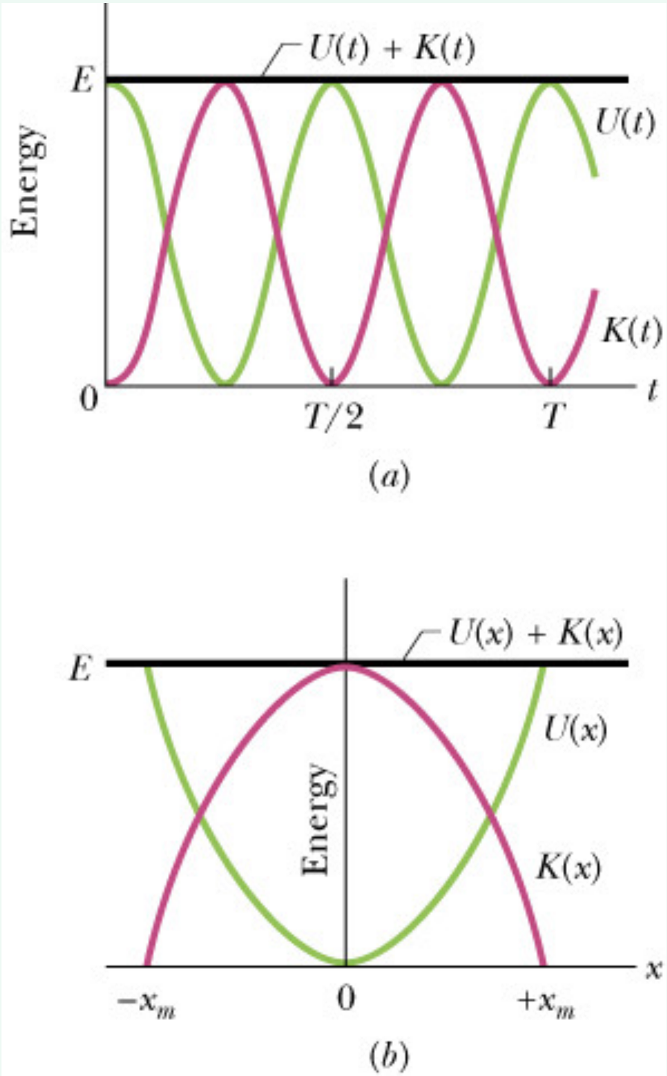
一般來說，n 越大，強度越小，所以通常只要有限個成分就能近似一個周期運動！



$$x = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi)$$





$$x = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

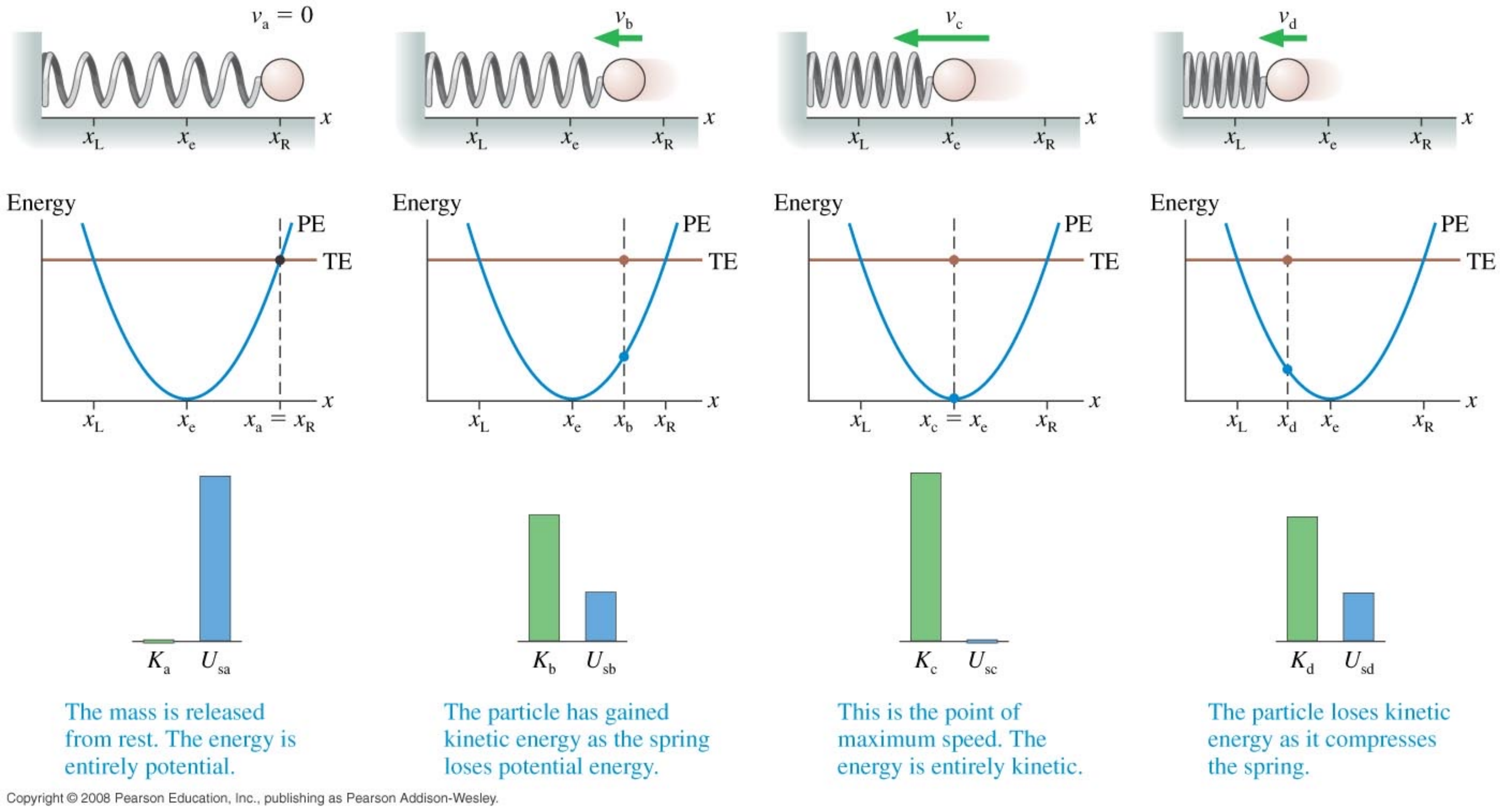
$$v = -\sqrt{\frac{k}{m}}\, x_m \sin(\omega t + \phi)$$

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx_m^2 = \text{constant}$$

守恆量

位置 U　　運動 K

守恆量是一個在運動過程中一直不變的量



能量在動能與位能之間來回交換

但總能量不變

簡諧振盪器 Simple Harmonic Oscillator 是一個能量儲存器

但自然界的振盪很少一直持續，能量總是會漸漸消耗掉。

這是來自振盪器內的阻力。

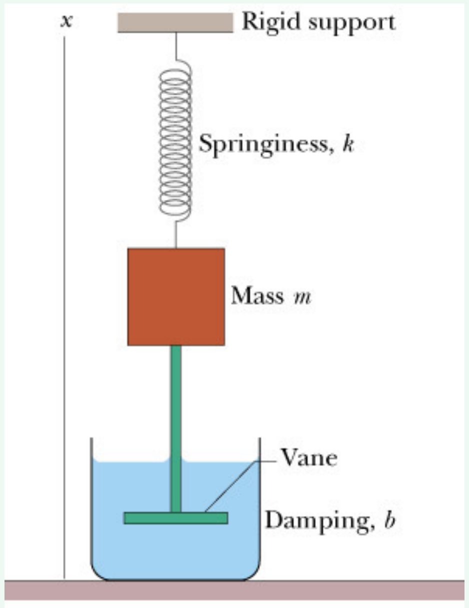
阻力通常與振動的速度成正相關。

近似引進一個與速率成正比的阻力：

$$f_d = -bv$$

運動方程式會多一個項：

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -b\frac{dx}{dt} - kx$$



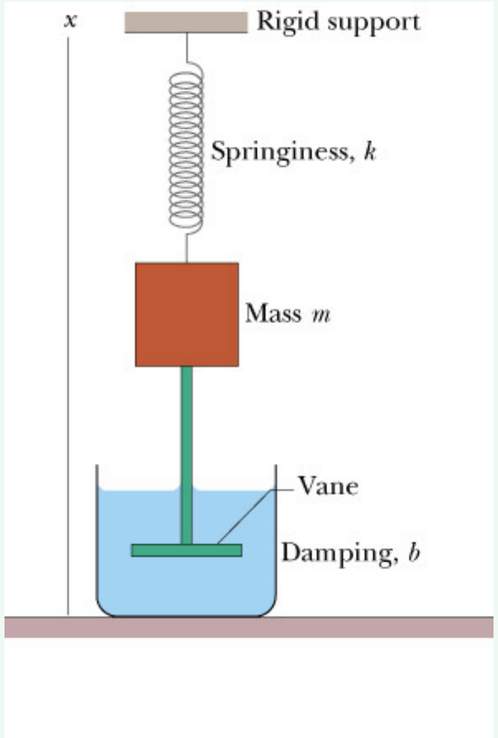
稱為Damped Oscillation 阻尼振盪。

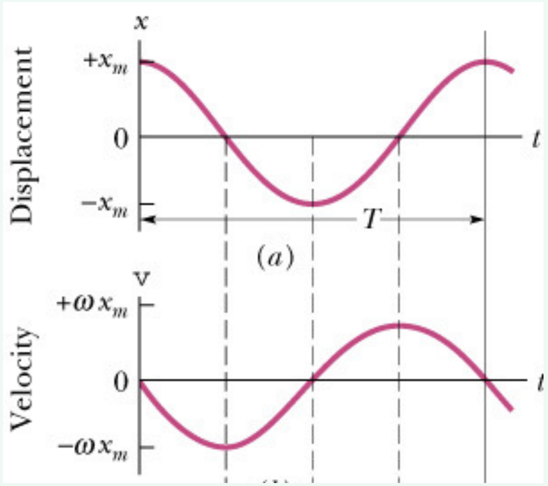
Damped Oscillation 阻尼震盪

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -b\frac{dx}{dt} - kx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{b}{m}\frac{dx}{dt} - \omega^2 x$$

阻力項大致與彈力項相差 90°相角。





單一個正弦或餘弦函數似乎不能滿足此式。

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{b}{m}\frac{dx}{dt} - \omega^2 x$$

Damped oscillation 應該還是振盪，
但振幅會隨時間變化。

大膽的猜想：

$$x(t) = f(t) \cdot \cos(\omega' t + \phi)$$

$$-\omega^2 f \cos(\omega' t + \phi)$$

$$-\frac{b}{m} \cdot (f' \cdot \cos(\omega' t + \phi) - \omega' f \sin(\omega' t + \phi))$$

$$(-f'' + \omega'^2 f) \cdot \cos(\omega' t + \phi) + 2\omega' f' \sin(\omega' t + \phi)$$

要求$\sin(\omega' t + \phi)$的係數為零：

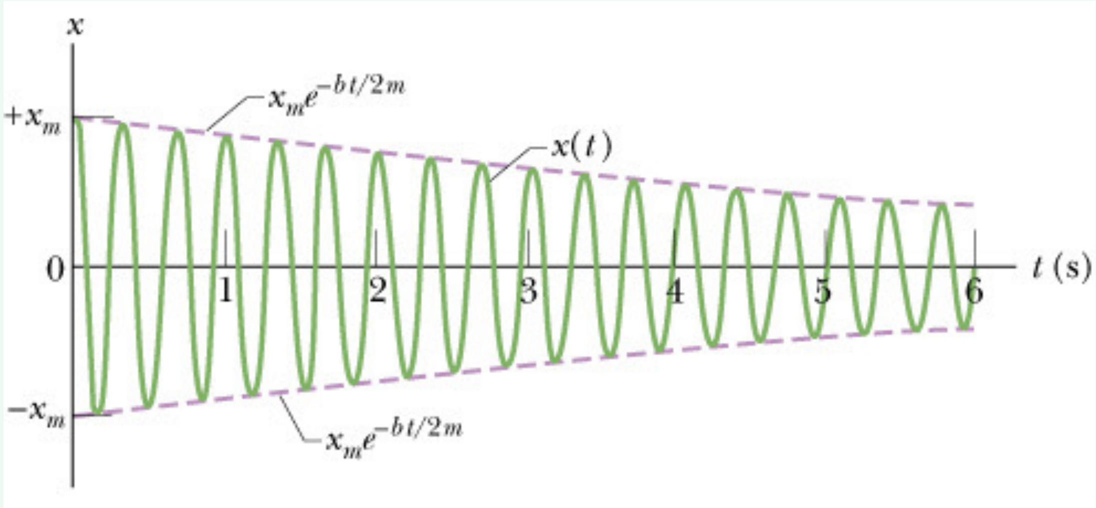
$$2f' = -\frac{b}{m} f$$

$$f = x_m \cdot e^{-\frac{b}{2m}t}$$

要求$\cos(\omega' t + \phi)$的係數為零：

$$\omega'^2 - \omega^2 + \frac{b^2}{4m^2} = 0$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$



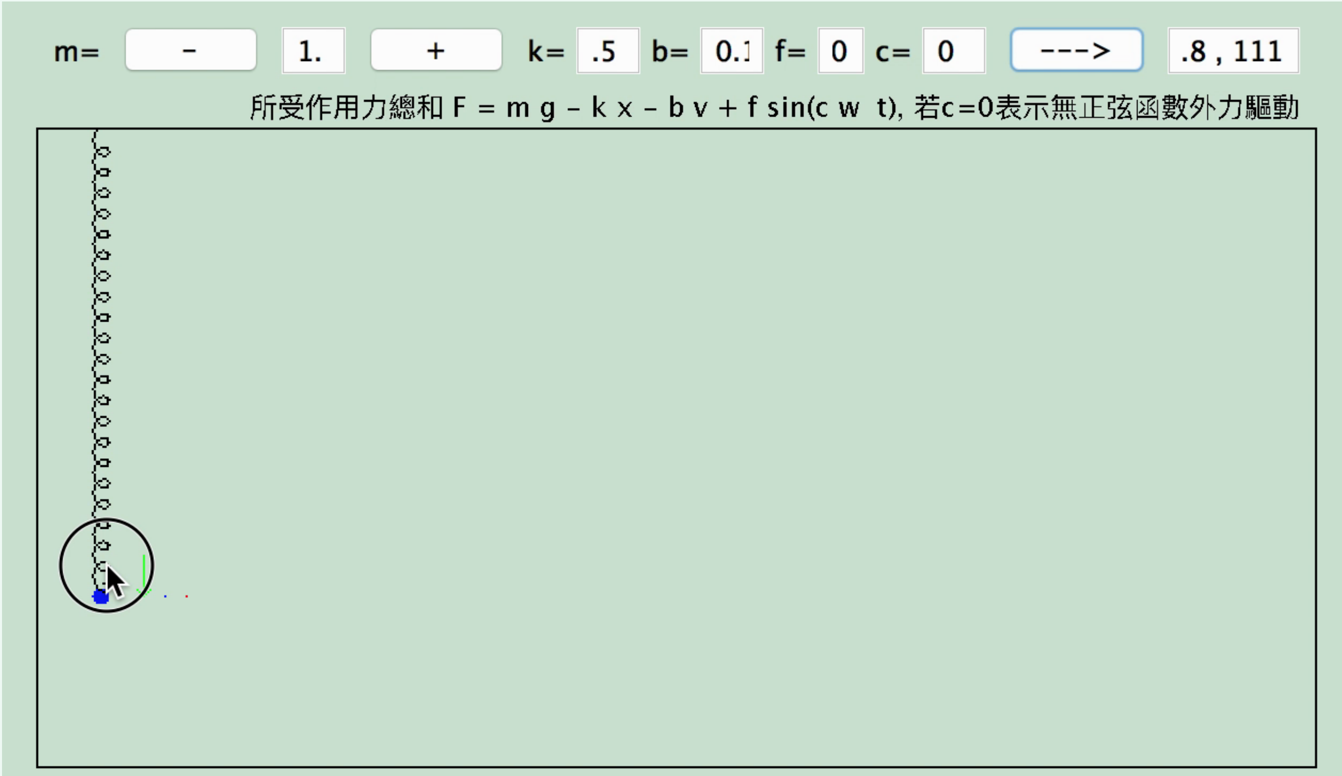
$$x(t) = x_m \cdot e^{-\frac{b}{2m}t} \cdot \cos(\omega' t + \phi)$$

振幅對時間呈現指數衰減！

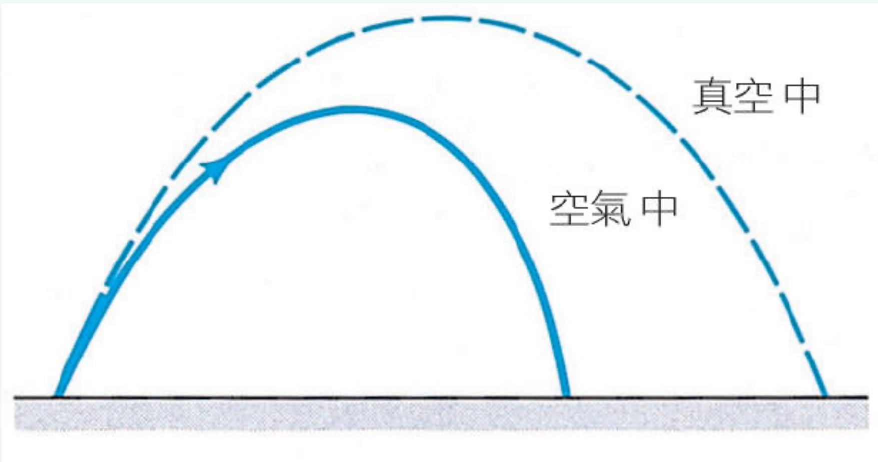
$$x_m \sim x_m e^{-\frac{b}{2m}t}$$

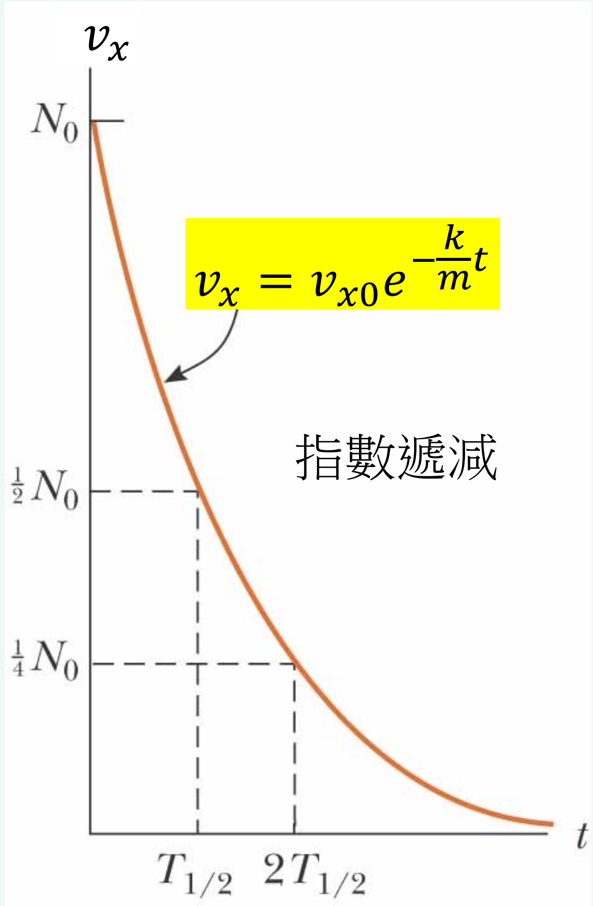
角頻率會比無阻力時稍低。

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} = \sqrt{\omega^2 - \frac{b^2}{4m^2}}$$


m=
-
1.
+
k=
.5
b=
0.1
f=
0
c=
0
--->
.8 , 111
所受作用力總和 F = m g - k x - b v + f sin(c w t), 若c=0表示無正弦函數外力驅動

$$x_m \sim x_m e^{-\frac{b}{2m}t}$$

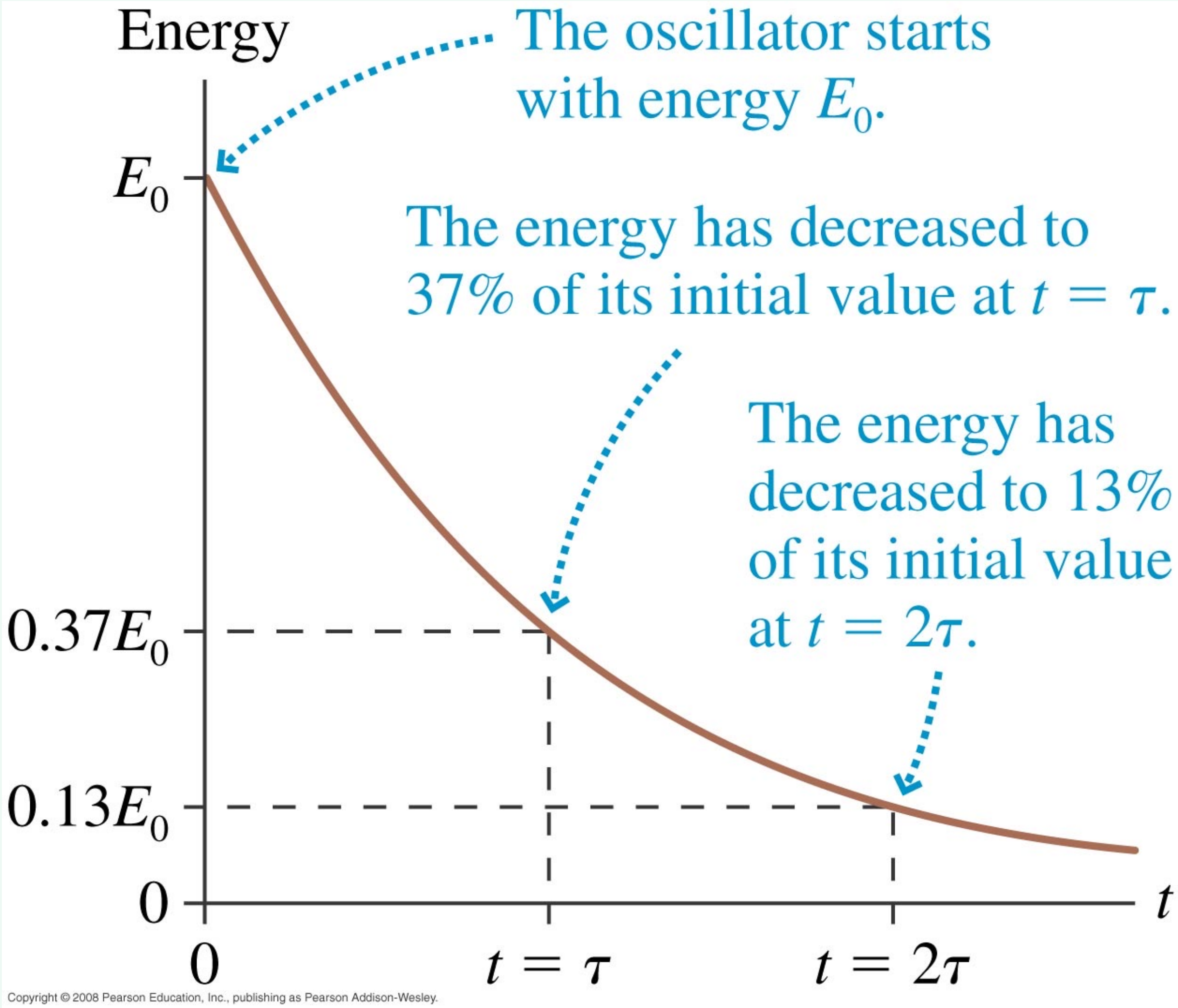


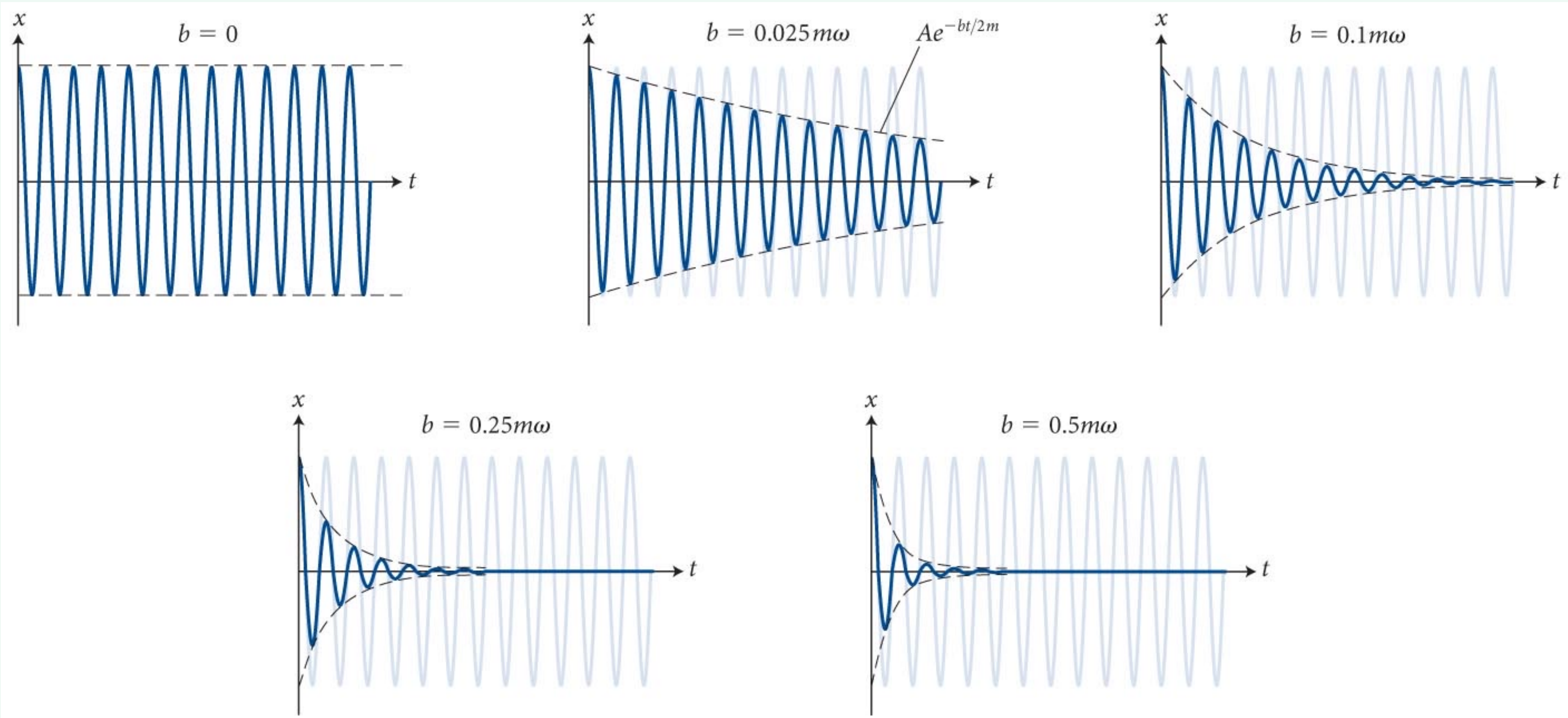


振幅的減小如同空氣阻力下的運動！

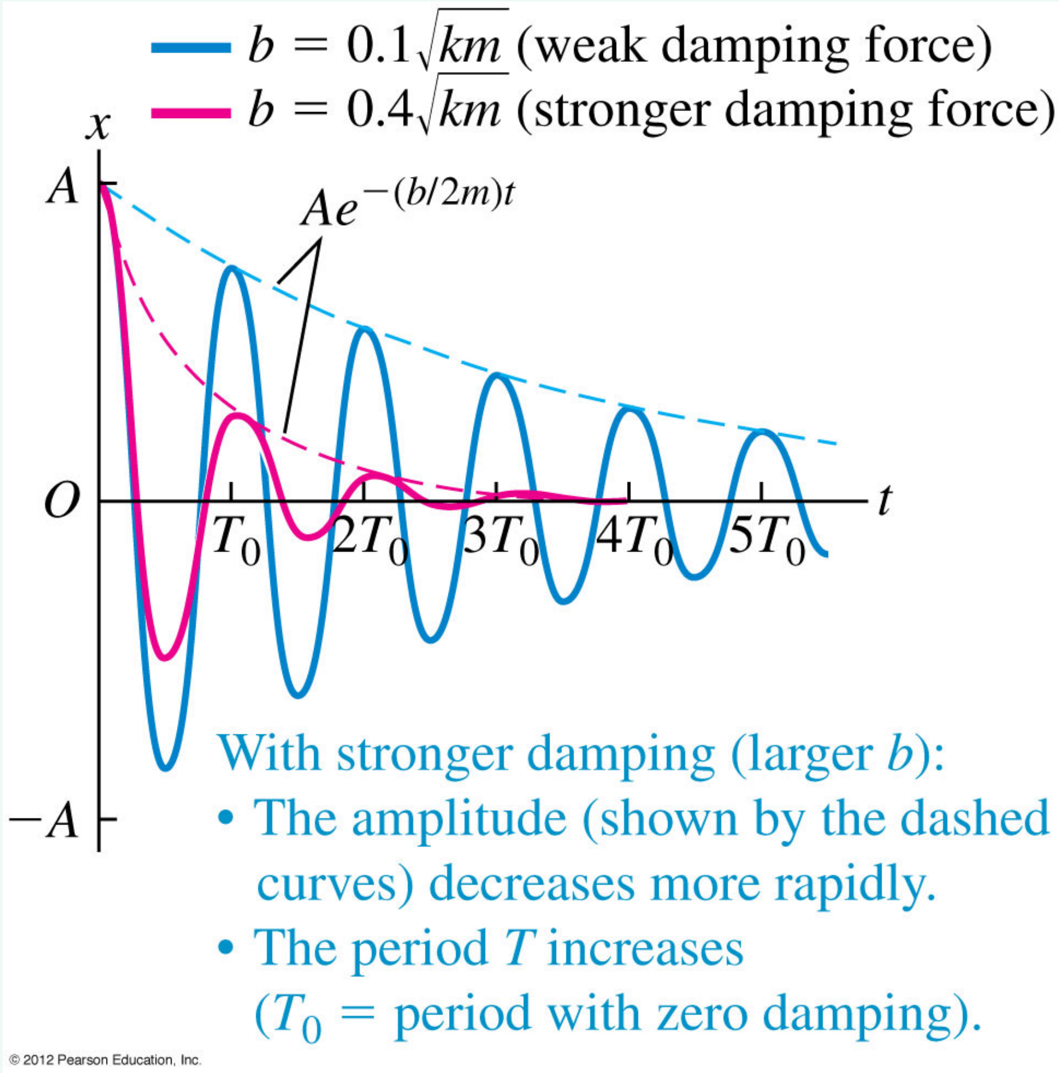
每單位時間減少的比例相同

減少固定比例的時間相同





阻力常數*b*越大，振幅的減少也越快！



振動角頻率減小！周期增加。 $$\omega' = \sqrt{\omega^2 - \frac{b^2}{4m^2}}$$

振動頻率減小！阻力越大減少越多！

$$x(t) = x_m \cdot e^{-\frac{b}{2m}t} \cdot \cos(\omega' t + \phi)$$

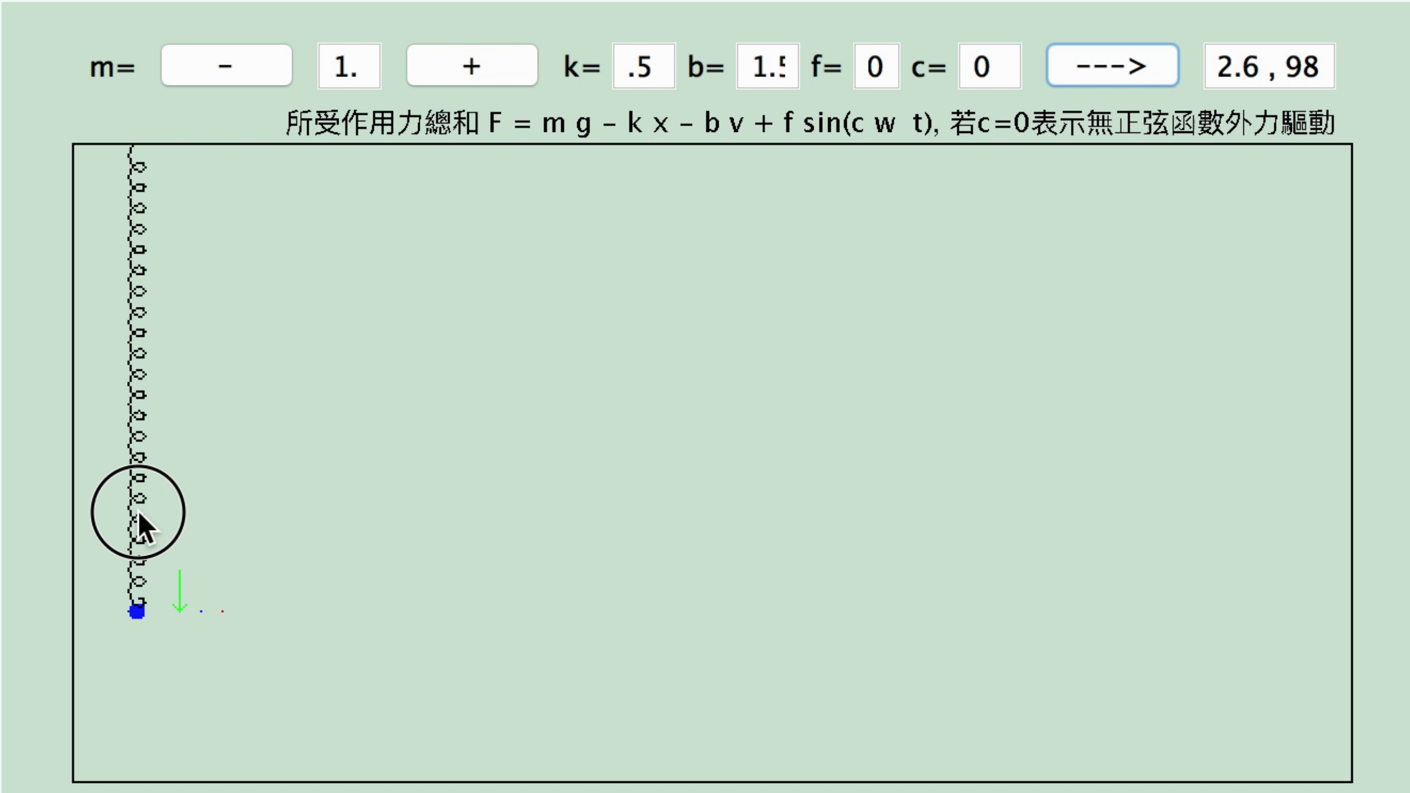
$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} = \sqrt{\omega^2 - \frac{b^2}{4m^2}}$$

若 $\frac{b^2}{4m^2} > \omega^2$

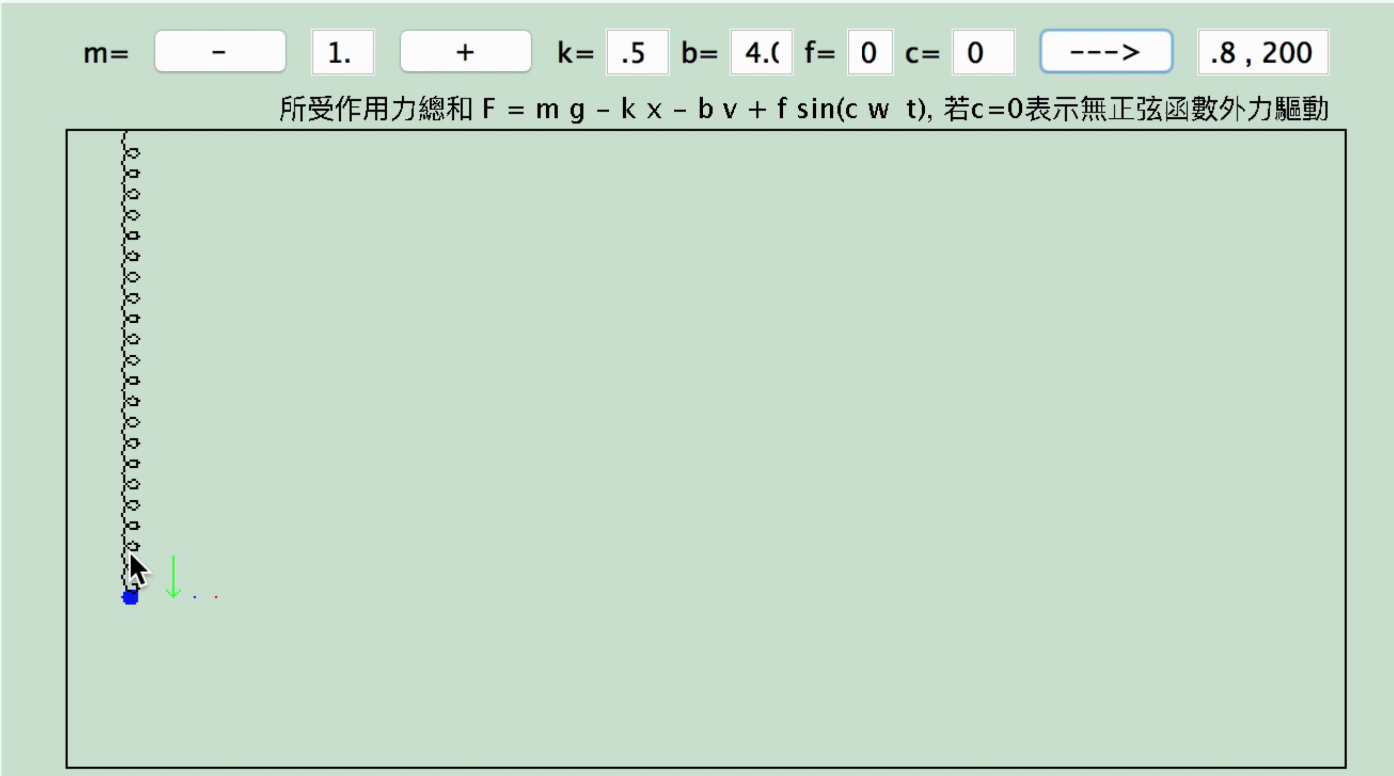
那就根本沒有振動了！以上的式子就不對了。

這時的解會是一個隨時間指數遞減的函數！

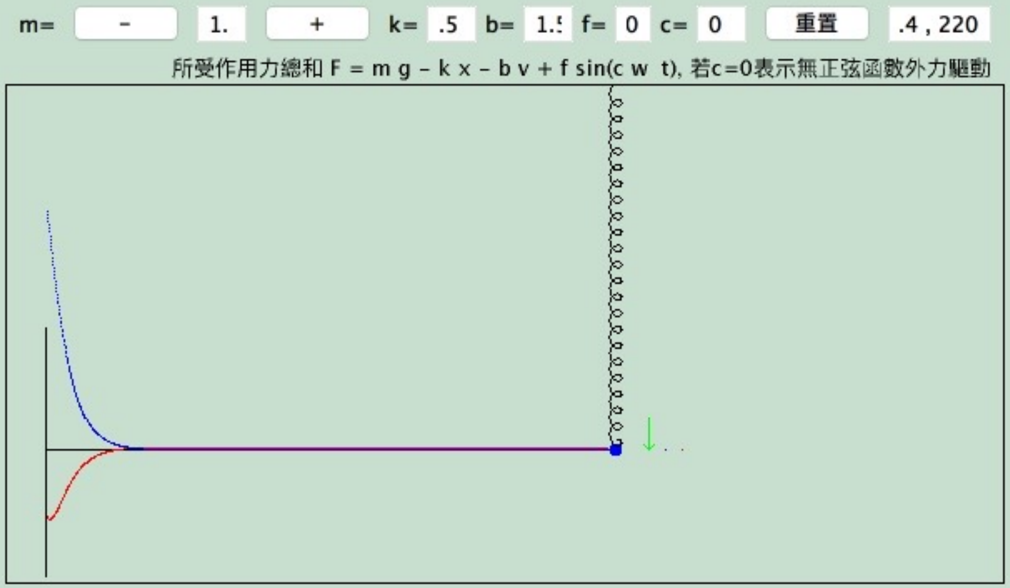
http://www.phy.ntnu.edu.tw/moodle/mod/resource/view.php?id=124

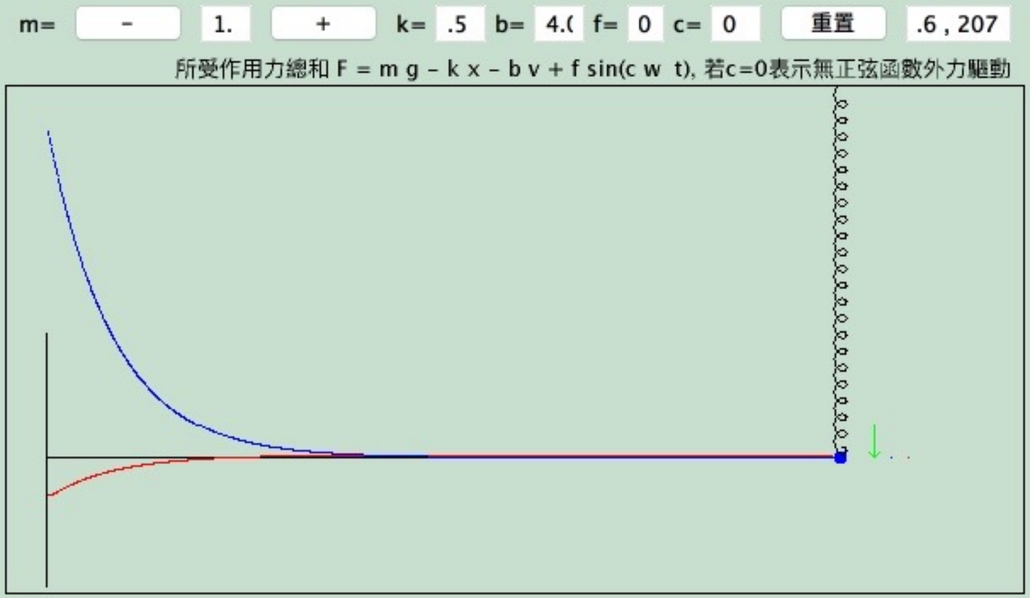

m= - 1. + k= .5 b= 1.5 f= 0 c= 0 ---> 2.6 , 98
所受作用力總和 F = m g - k x - b v + f sin(c w t), 若c=0表示無正弦函數外力驅動

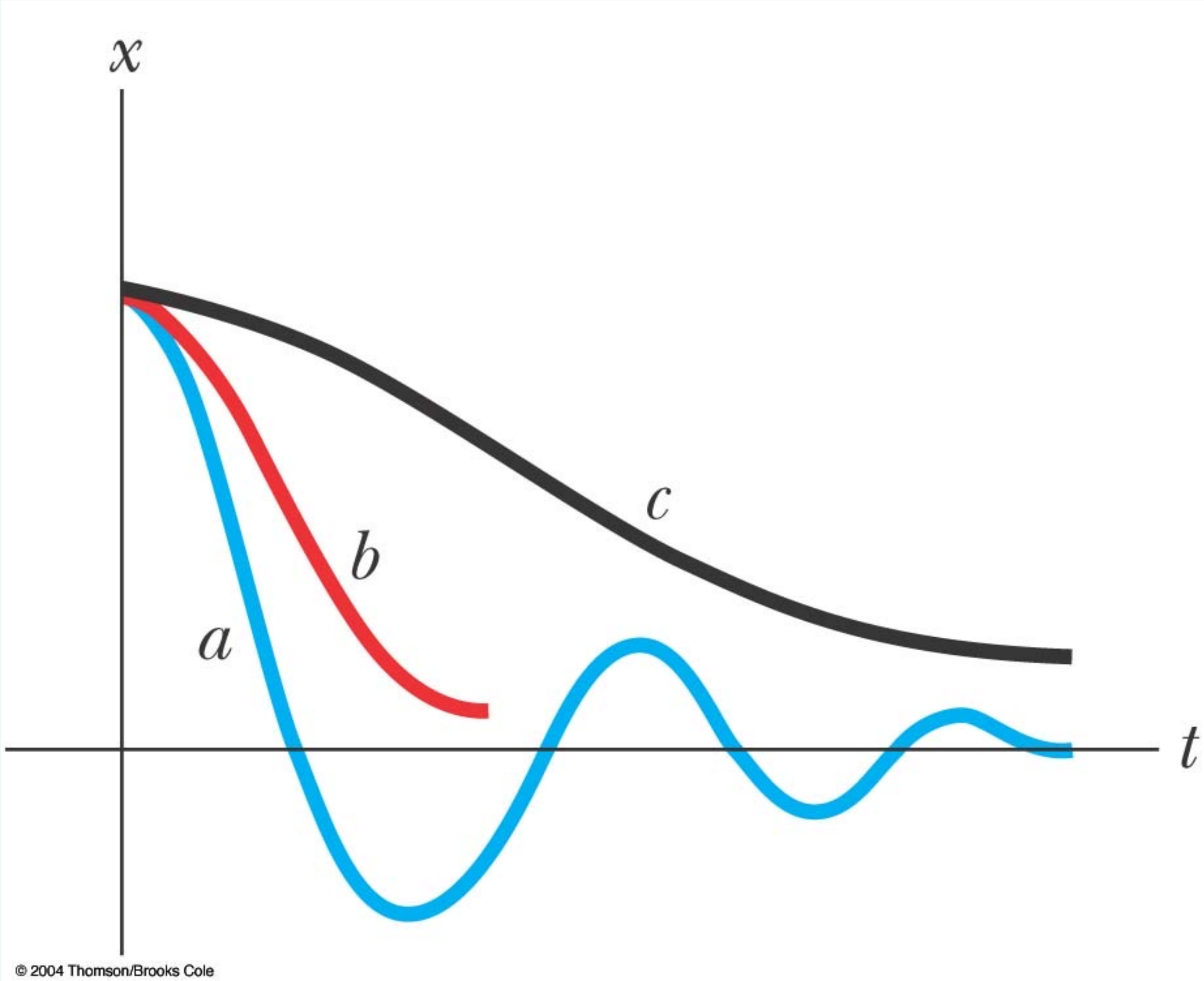
Over-damping



物體所受合力 $\mathbf{F} = m\,\mathbf{g} - k\,\mathbf{x} - b\,\mathbf{v} + \mathbf{f}_o \sin(cwt)$







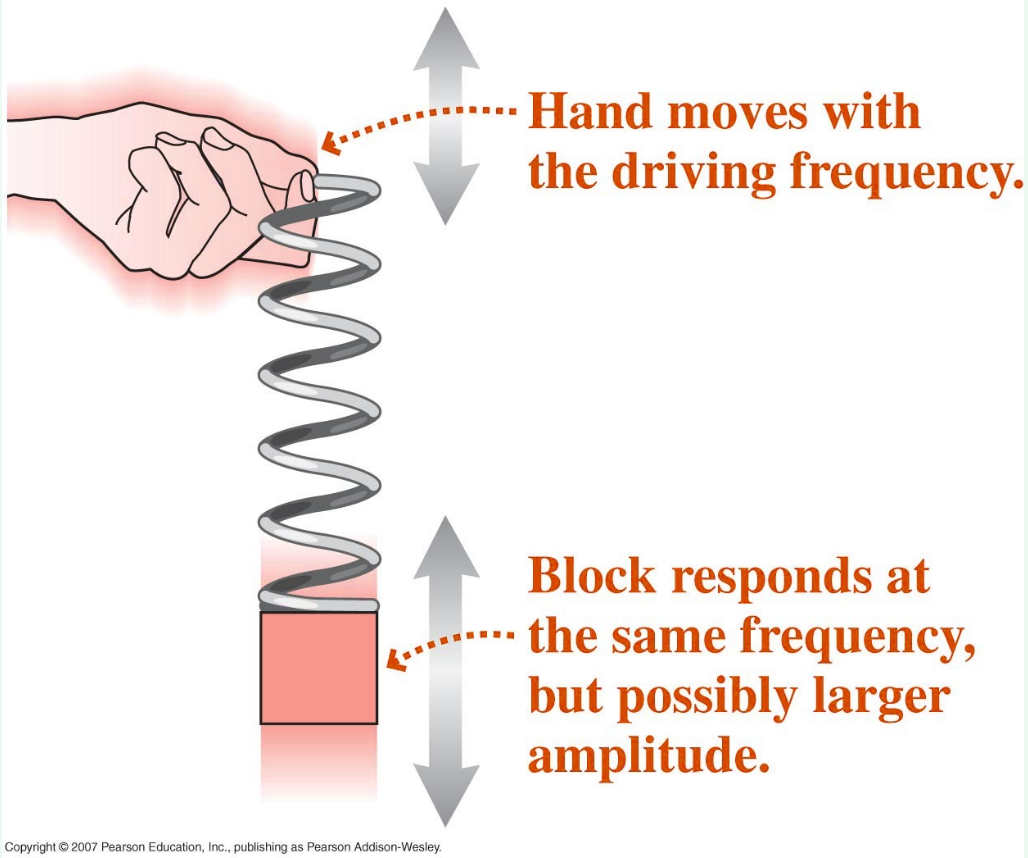
如果 $b/2m$ 大於 ω_0 (c)，那就根本沒有振動了！

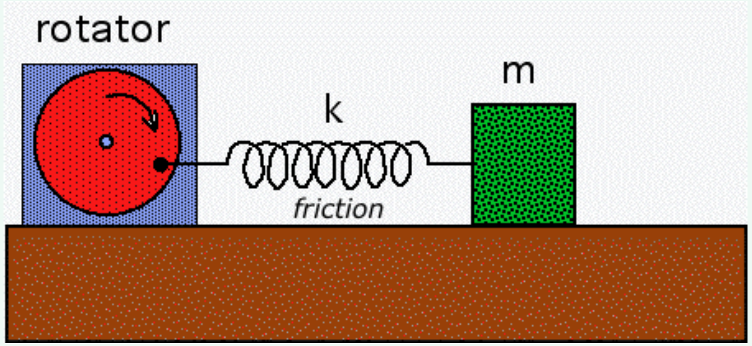
阻尼可以大到連一次震盪都未完成！

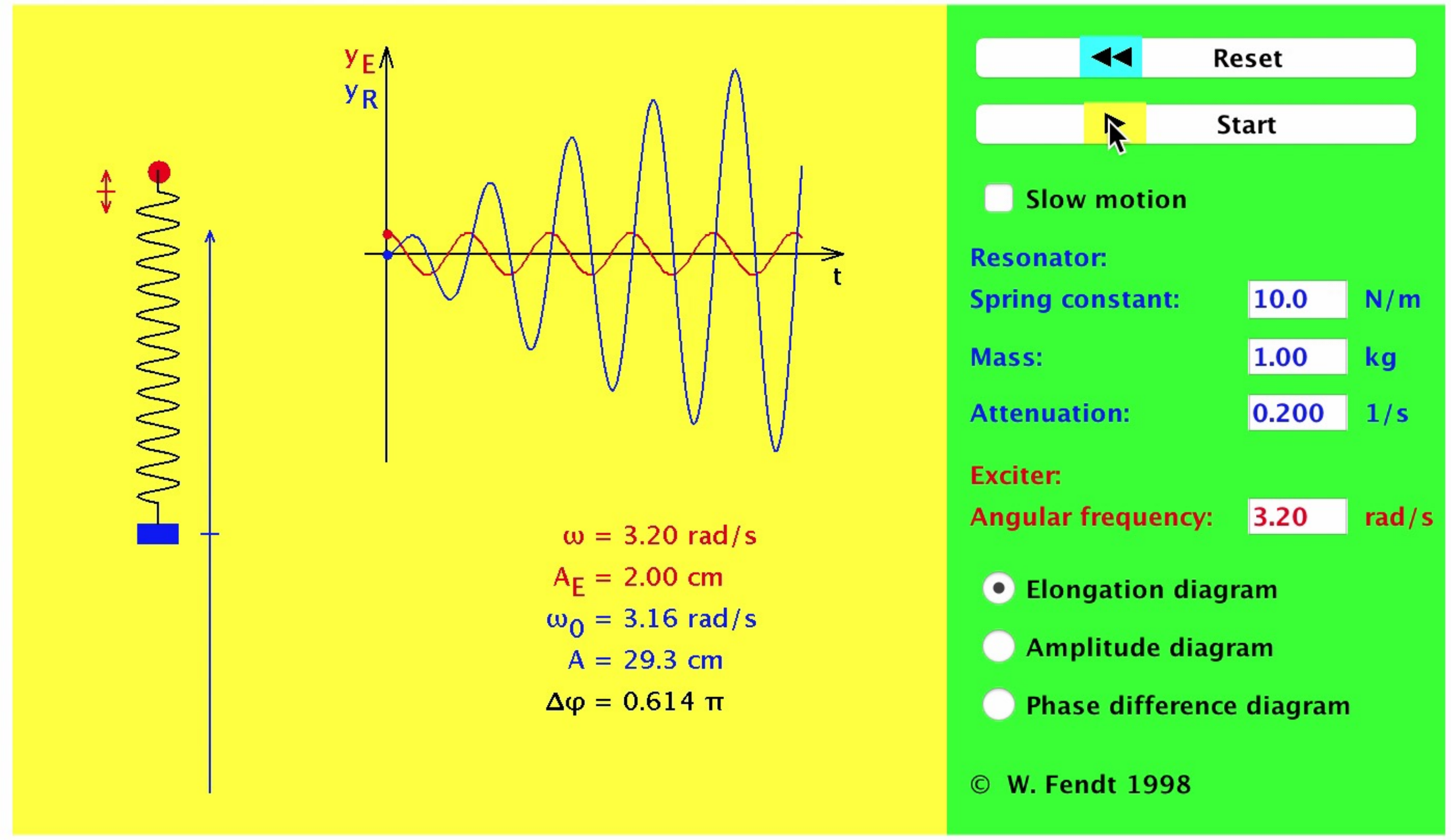
簡諧運動會因阻尼而使振幅減小，必須施力使它繼續振動

若施予一個常數力，所做的功在一個週期內會彼此抵消！

想使彈簧繼續振盪，必須施以一周期性的外力。







Reset
Start
Slow motion
Resonator:
Spring constant: 10.0 N/m
Mass: 1.00 kg
Attenuation: 0.200 1/s
Exciter:
Angular frequency: 3.20 rad/s
Elongation diagram
Amplitude diagram
Phase difference diagram
© W. Fendt 1998
y_E
y_R
t
ω = 3.20 rad/s
A_E = 2.00 cm
$ω_0$ = 3.16 rad/s
A = 29.3 cm
Δφ = 0.614 π

風吹或地震對101即是週期性的外力！

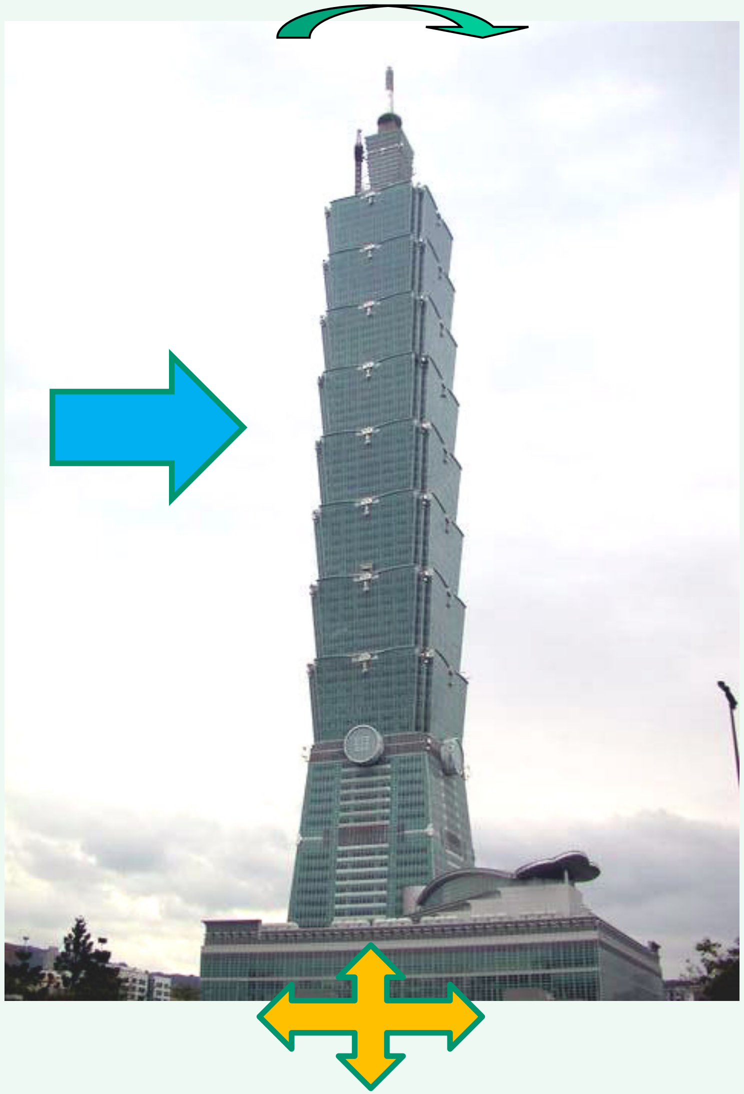
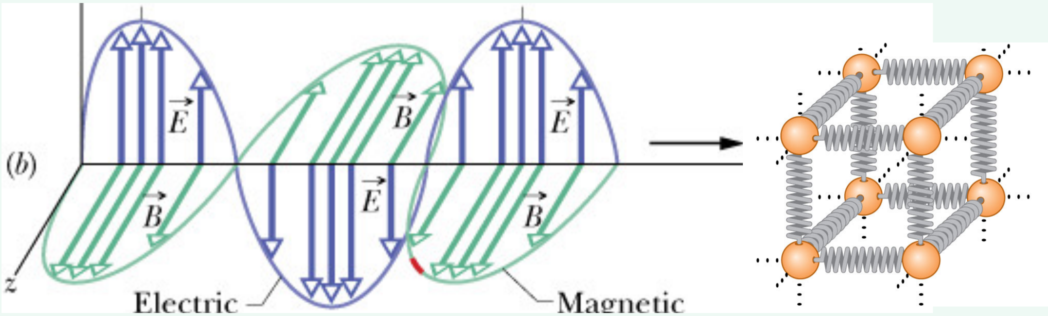
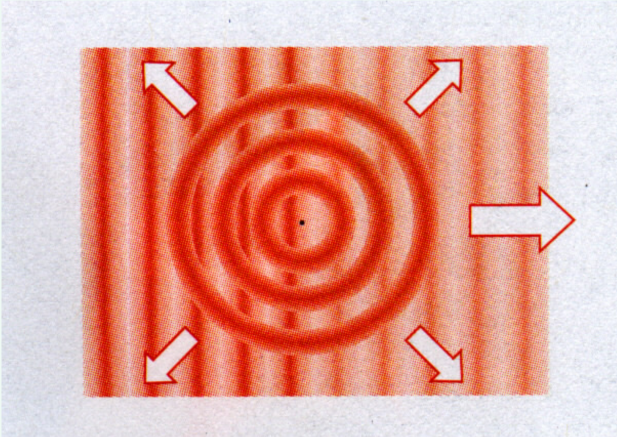


圖 15.16
只要我們在適當時機輕推鞦韆上的小孩，便能持續擺動。

電磁波打在一個晶體內的原子上的散射現象，也是如此。

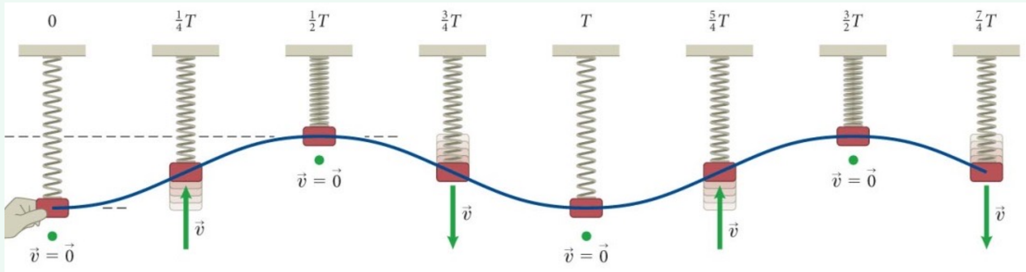




$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{qE_0}{m}\cos\omega t$$

運動方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{b}{m}\frac{dy}{dt} - \omega^2 y + \frac{F_0}{m}\cos\omega_D t$$



外力下的震盪 Forced Oscillation

假設所施的外力可以寫成：$F_0 \cos \omega_D t$。

運動方程式又多了一個項：

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -b\frac{dx}{dt} - kx + F_0 \cos \omega_D t$$

彈簧內在的角頻率

週期外力的角頻率

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{b}{m}\frac{dx}{dt} - \omega^2 x + \frac{F_0}{m}\cos \omega_D t$$

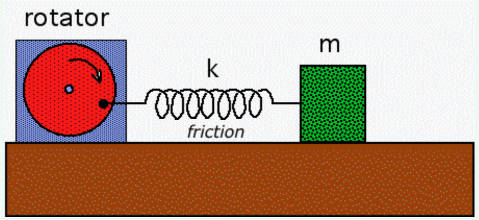
外力下的振盪由兩個頻率來決定：

為簡單起見而專注於此二頻率的影響，先忽略阻尼：

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x + \frac{F_0}{m}\cos \omega_D t$$

很容易可以猜到它的解：

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega_D t$$



不是ω！

猜測 $x = A \cdot \cos\omega_D t$ 因為它的兩次微分還是正比於同樣的正弦函數！

代入 $$-A\cdot\omega_D^2\cos\omega_D t + A\cdot\omega^2\cos\omega_D t = \frac{F_0}{m}\cos\omega_D t$$

$$A = -\frac{F_0}{m(\omega^2-\omega_D^2)}$$

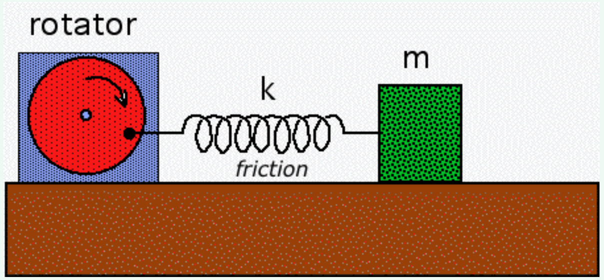
得到外力下振盪的一個解，姑稱為共振解 Resonance。

$$x_r = -\frac{F_0}{m(\omega^2-\omega_D^2)}\cos\omega_D t$$

這解並不完整（起始條件還未放入），等一下會論證：長時間後，此解最重要。

先讓我們研究一下此共振解的性質：

$$x_r = -\frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_D^2)} \cdot \cos \omega_D t$$



週期外力驅動下，彈簧的反應依然是簡諧運動，

但頻率是施力的頻率 ω_D ，而不是彈簧的自然頻率 ω ！

此簡諧運動振幅A不再是任意，大小與施力大小成正比： $A \propto F_0$ 。

振幅A的大小與施力的頻率 ω_D 密切相關： $\omega_D \to \omega$ $A \uparrow$

施力的頻率 ω_D 愈接近彈簧的自然頻率 ω，反應愈強，能量的吸收愈好。

約會物理學三大定律

如同每一個彈簧有一個自然頻率，每一個人也有自己的喜好！

$\omega_D \to \omega$時猶如兩人頻率一致，心意相投，所以稱之為共振現象。

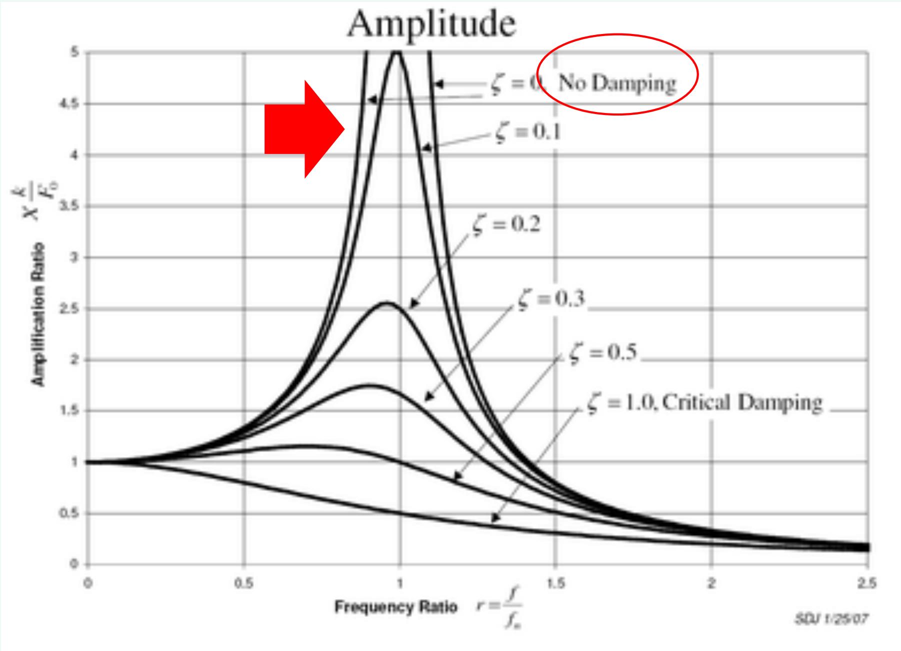
$$x_r = -\frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_D^2)} \cos \omega_D t$$

$$\omega_D \rightarrow \omega$$

$$\frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_D^2)} \uparrow$$

施力頻率ω_D越接近內在頻率ω，彈簧的反應越大！

共振 Resonance



這個共振解在 $\omega_D = \omega$ 時會趨近無限大！在自然界是不可能的。

這是因為忽略阻尼：自然界一定存在阻力！

考慮阻尼後

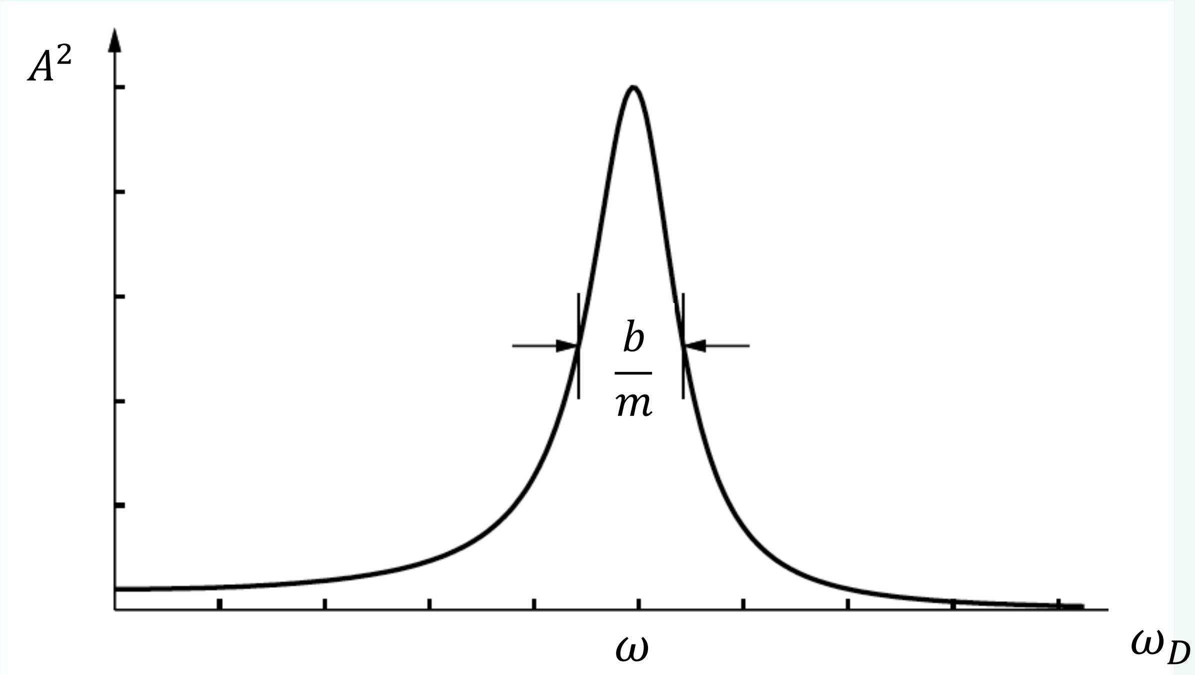
$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{b}{m}\frac{dx}{dt}+\omega^2x=\frac{F_0}{m}\cos\omega_D t$$

振幅的分母會多一個與阻力有關的項！

$$A=-\frac{F_0}{m\sqrt{(\omega^2-\omega_D^2)^2+\left(\frac{b}{m}\omega\right)^2}}$$

$$x_r=A\cos(\omega_D t+\phi)$$

振幅極大值在 $\omega_D=\omega$ 附近，但已不再是無限大！



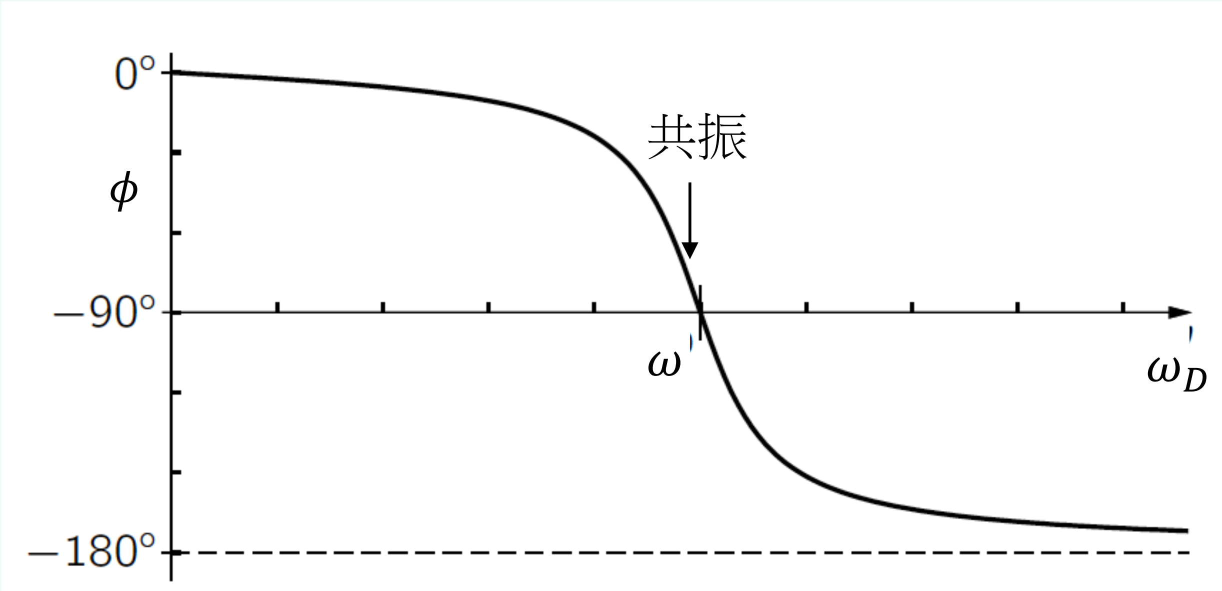
共振曲線的寬度現在與阻力大小成正比。

$$x_r = A\cos(\omega_D t + \phi)$$

所施的外力：$F_0 \cos \omega_D t$。

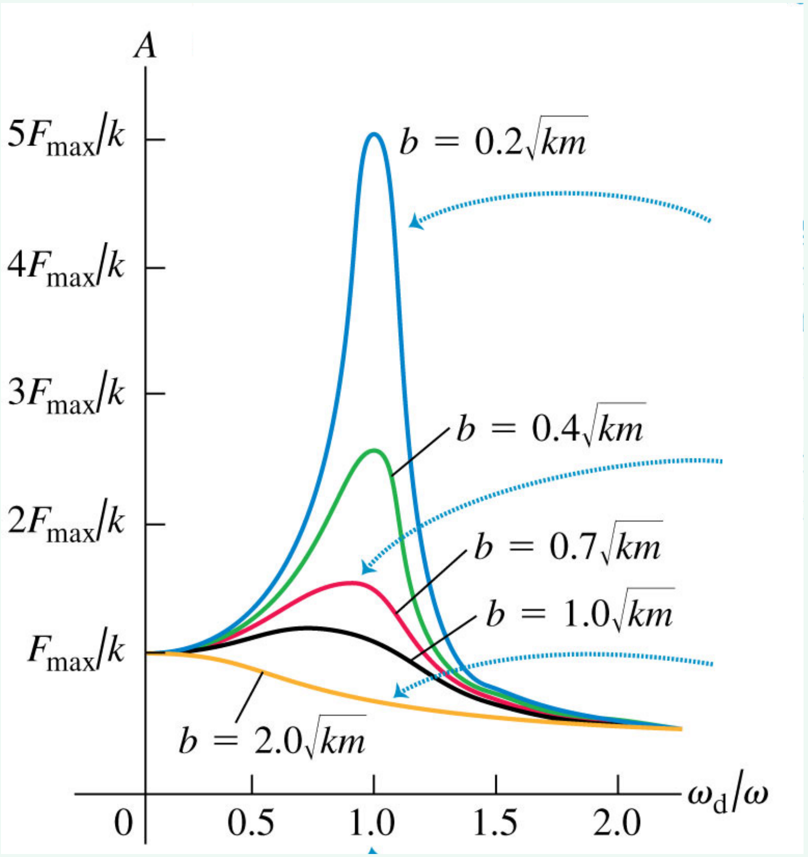
震盪多了一個相常數，反應與施力有相差、或叫時間差。

$$\tan\phi = -\frac{\frac{b}{m}\omega}{\omega^2 - \omega_D^2}$$



注意共振時$\phi = 90°$。也就是施力若是正弦，反應卻是餘弦。

在外力驅動下，簡諧振盪器的運動依舊是一個週期性振盪:



$$x_r = A\cos(\omega_D t + \phi)$$

$$A = -\frac{F_0}{m\sqrt{(\omega^2-\omega_D^2)^2+\left(\frac{b}{m}\omega\right)^2}}$$

$$\tan\phi = -\frac{\frac{b}{m}\omega}{\omega^2-\omega_D^2}$$

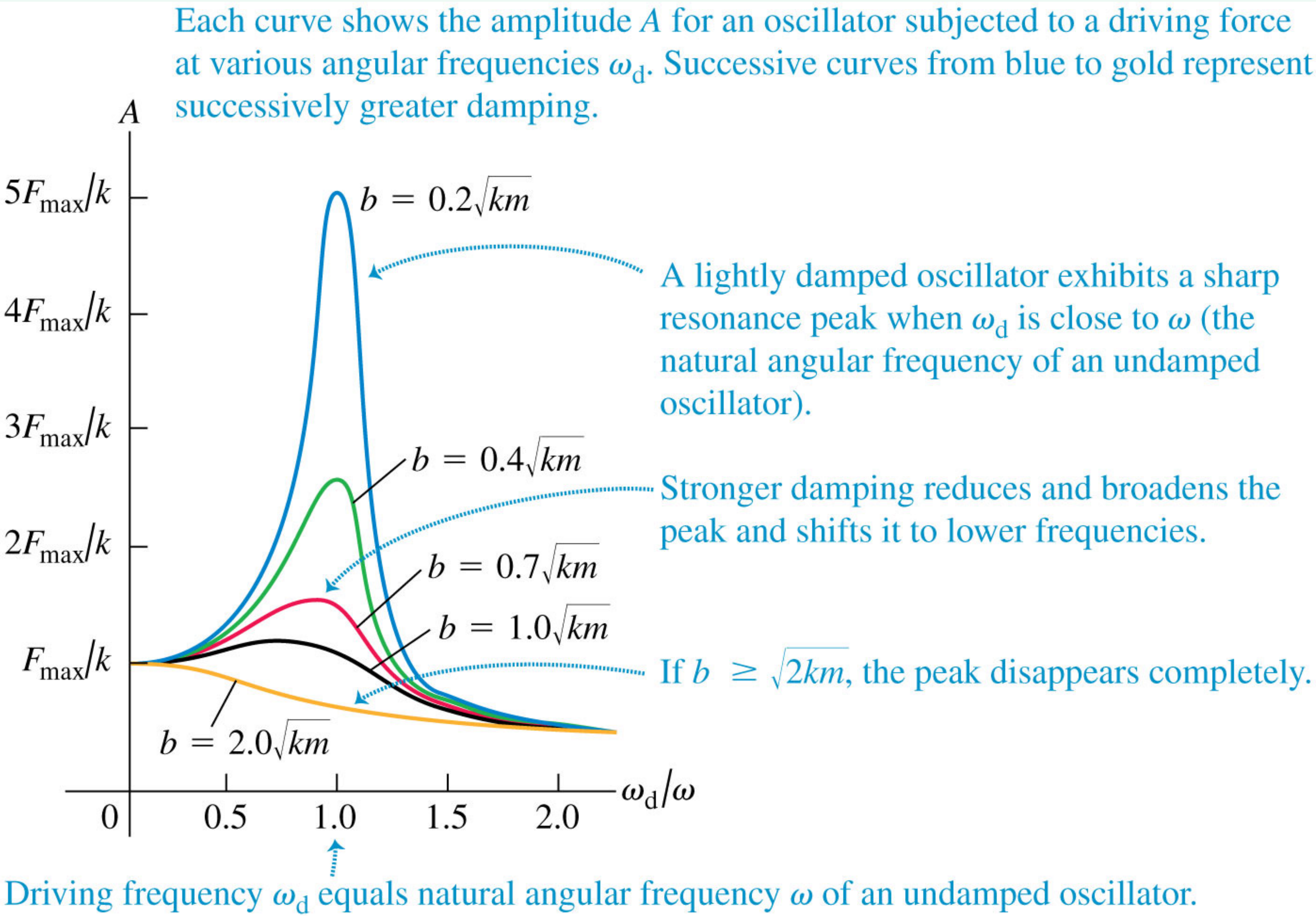
前面忽略阻尼時，得到的約會物理學三大定律還是成立。

振幅與外力的大小成正比。

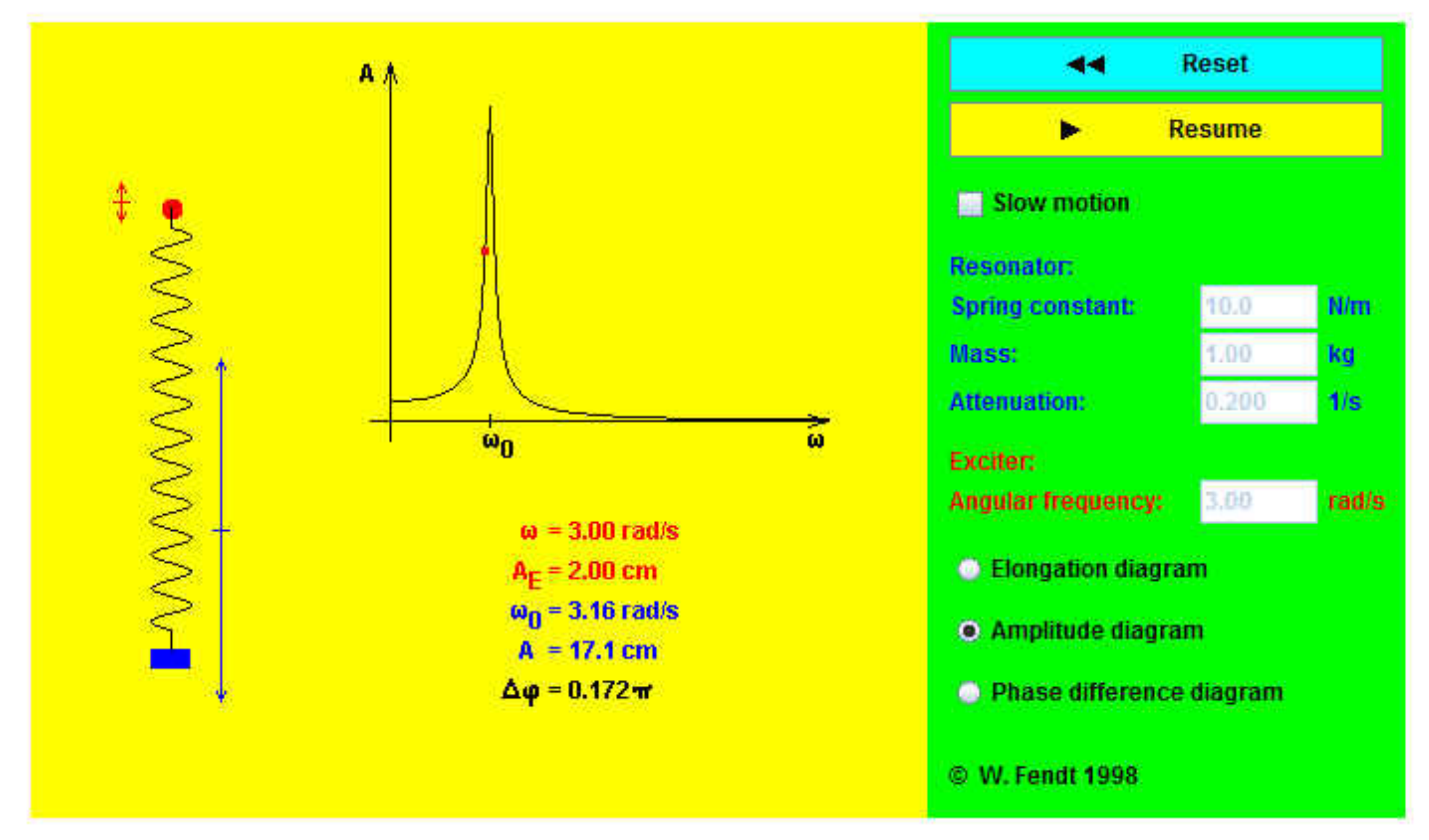
以外力的頻率ω_D來振盪，而不是彈簧的自然頻率ω！

外力頻率越接近彈簧的自然頻率，振盪振幅也就越大！ $\omega_D \to \omega$ $A \uparrow$

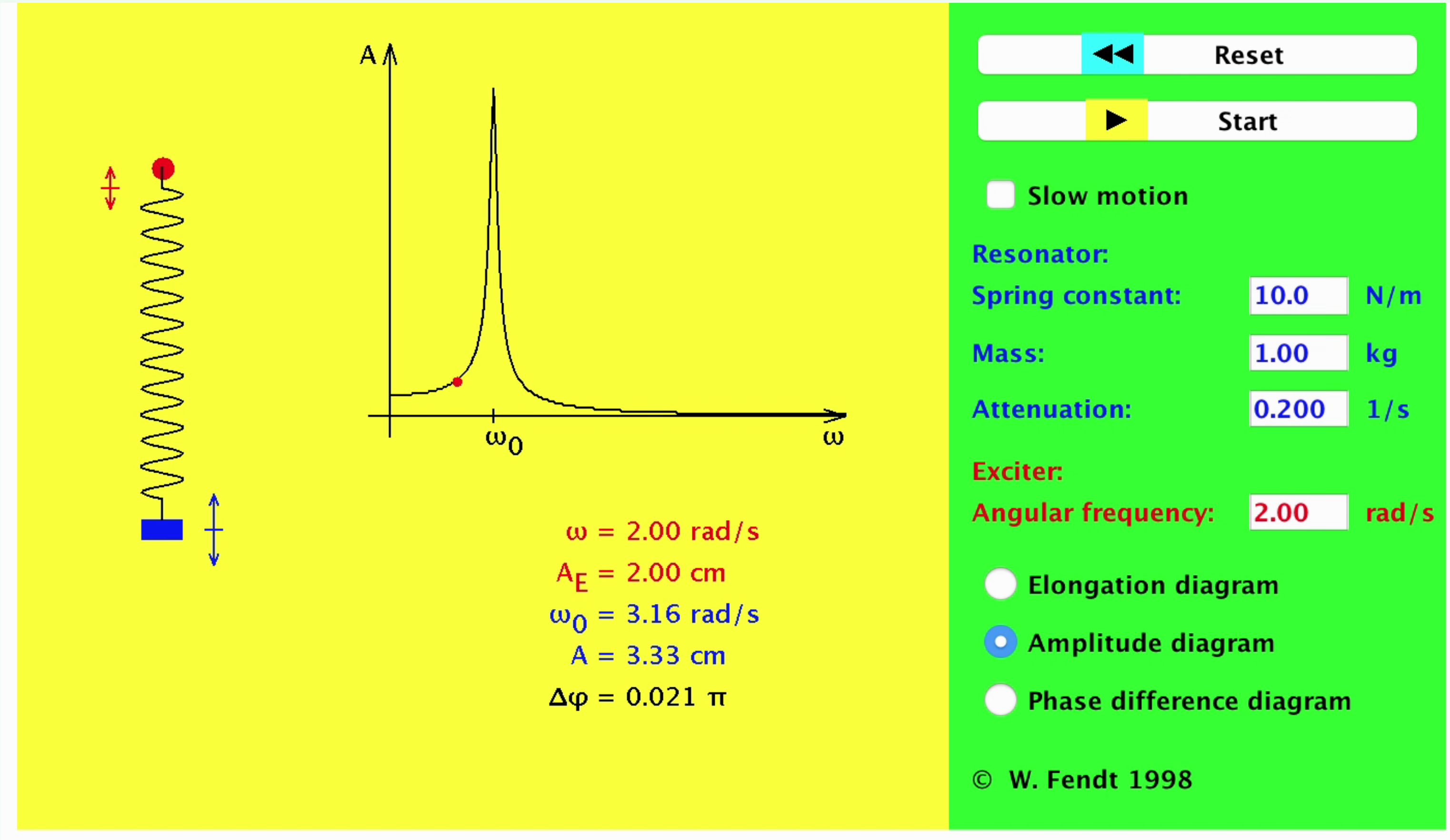
共振曲線的寬度與阻力大小成正比，阻力會削弱共振的現象！

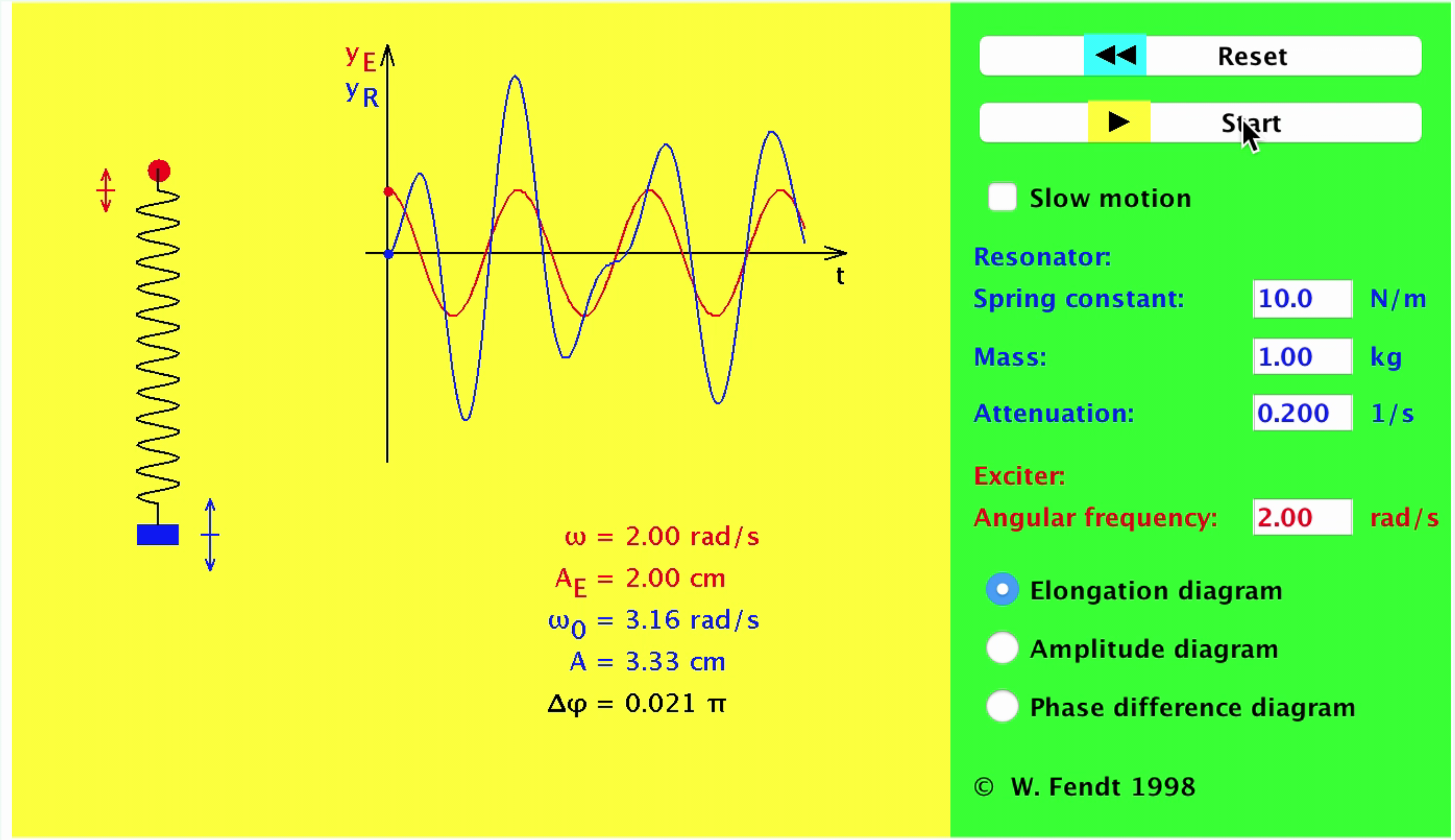

Each curve shows the amplitude A for an oscillator subjected to a driving force at various angular frequencies ω_d. Successive curves from blue to gold represent successively greater damping.
A
$5F_{max}/k$
$4F_{max}/k$
$3F_{max}/k$
$2F_{max}/k$
F_{max}/k
$b = 0.2\sqrt{km}$
$b = 0.4\sqrt{km}$
$b = 0.7\sqrt{km}$
$b = 1.0\sqrt{km}$
$b = 2.0\sqrt{km}$
A lightly damped oscillator exhibits a sharp resonance peak when ω_d is close to ω (the natural angular frequency of an undamped oscillator).
Stronger damping reduces and broadens the peak and shifts it to lower frequencies.
If $b \geq \sqrt{2km}$, the peak disappears completely.
0
0.5
1.0
1.5
2.0
ω_d/ω
Driving frequency ω_d equals natural angular frequency ω of an undamped oscillator.

http://www.walter-fendt.de/ph14e/resonance.htm



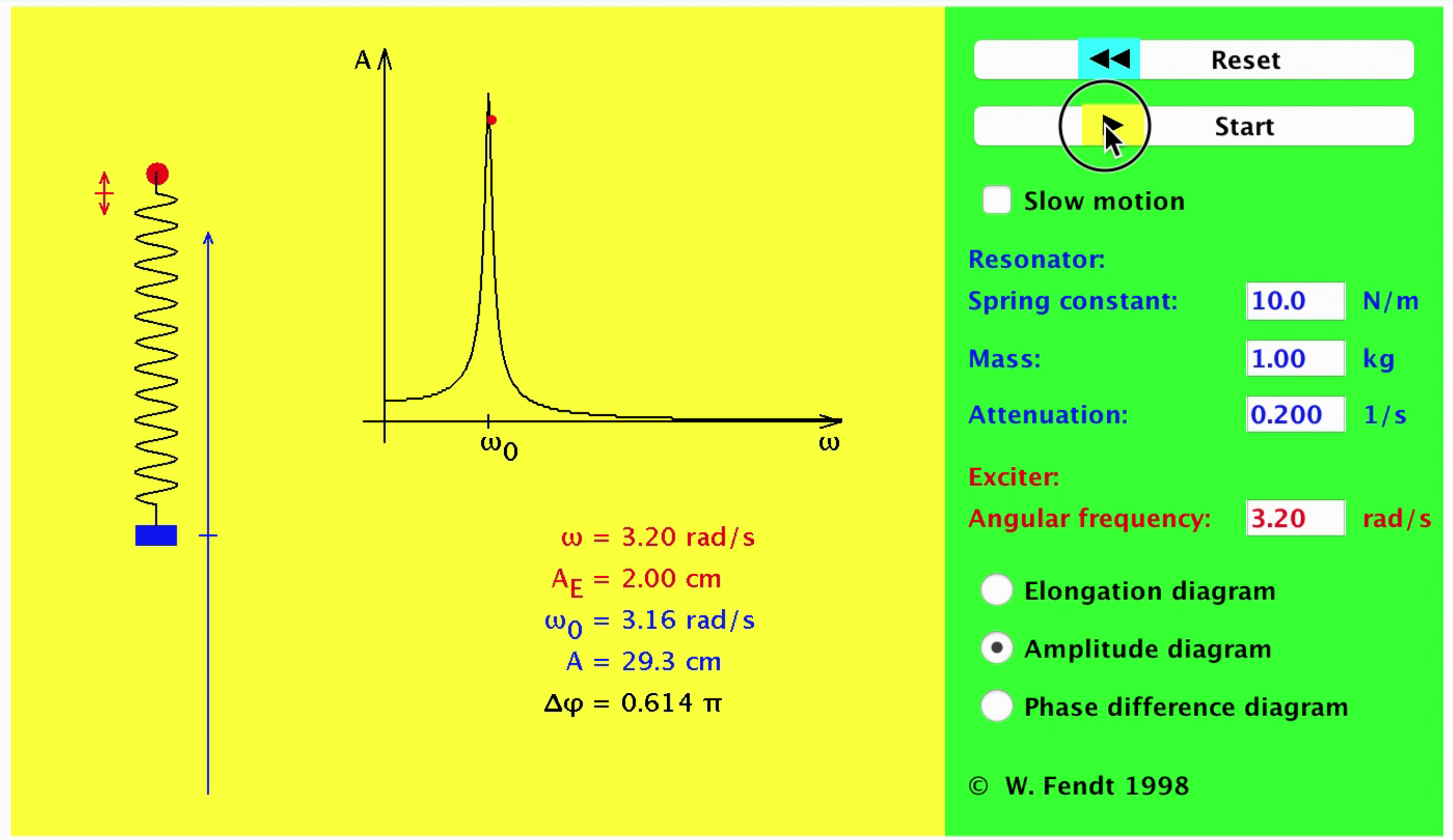
Under resonance

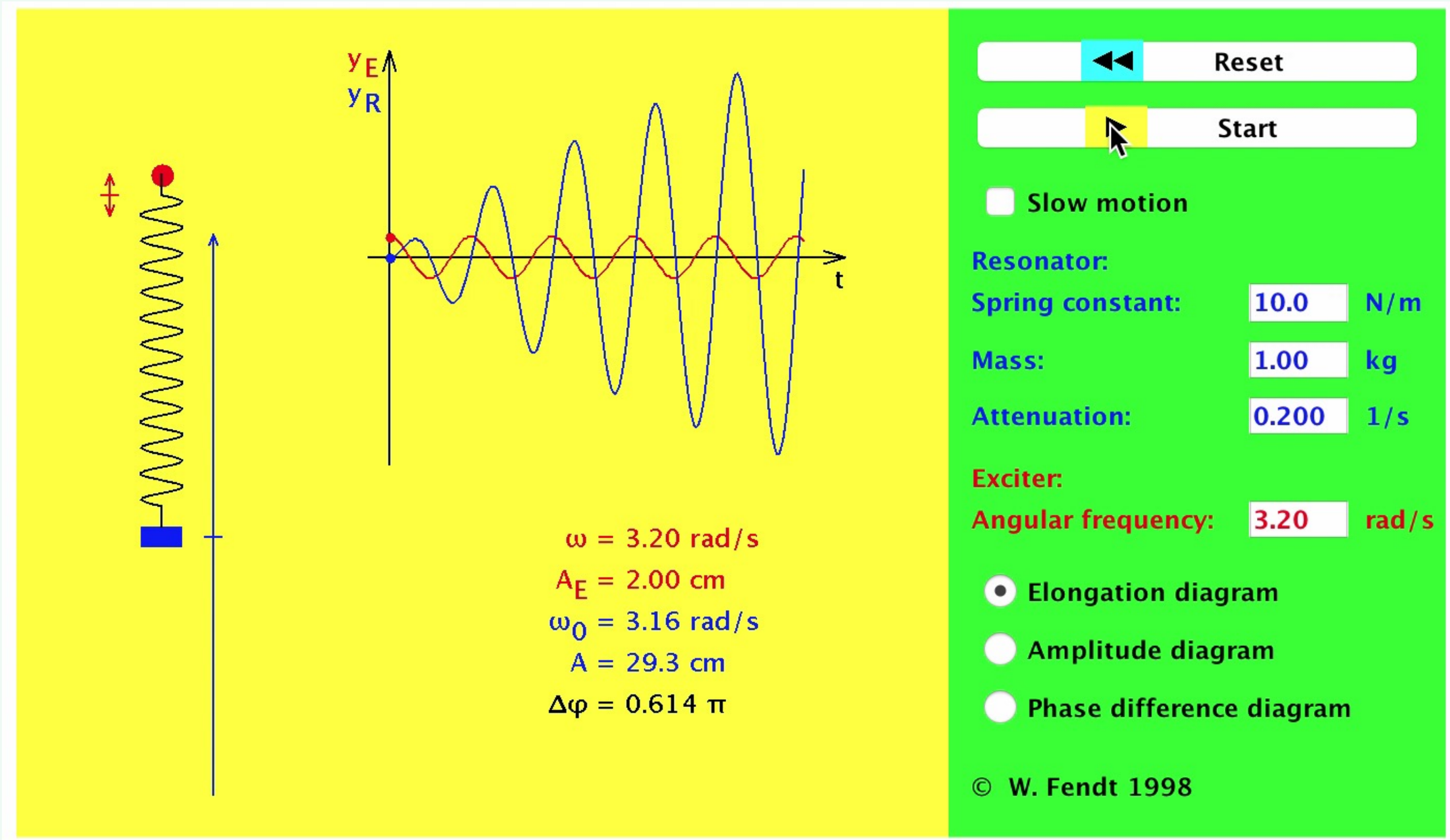




y_E
y_R
t
ω = 2.00 rad/s
A_E = 2.00 cm
ω_0 = 3.16 rad/s
A = 3.33 cm
$\Delta\varphi$ = 0.021 π
Reset
Start
Slow motion
Resonator:
Spring constant: 10.0 N/m
Mass: 1.00 kg
Attenuation: 0.200 1/s
Exciter:
Angular frequency: 2.00 rad/s
Elongation diagram
Amplitude diagram
Phase difference diagram
© W. Fendt 1998

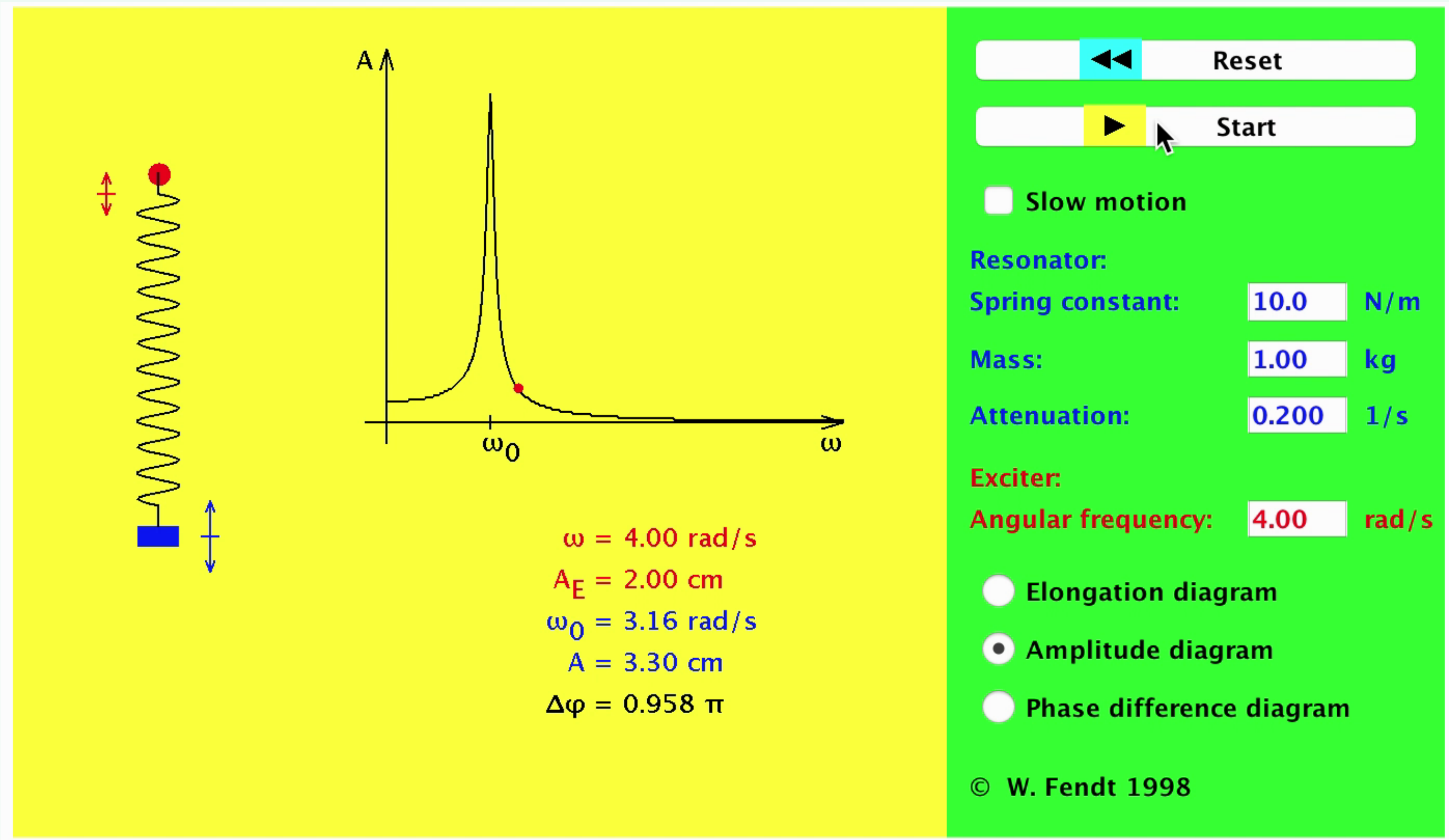
On resonance

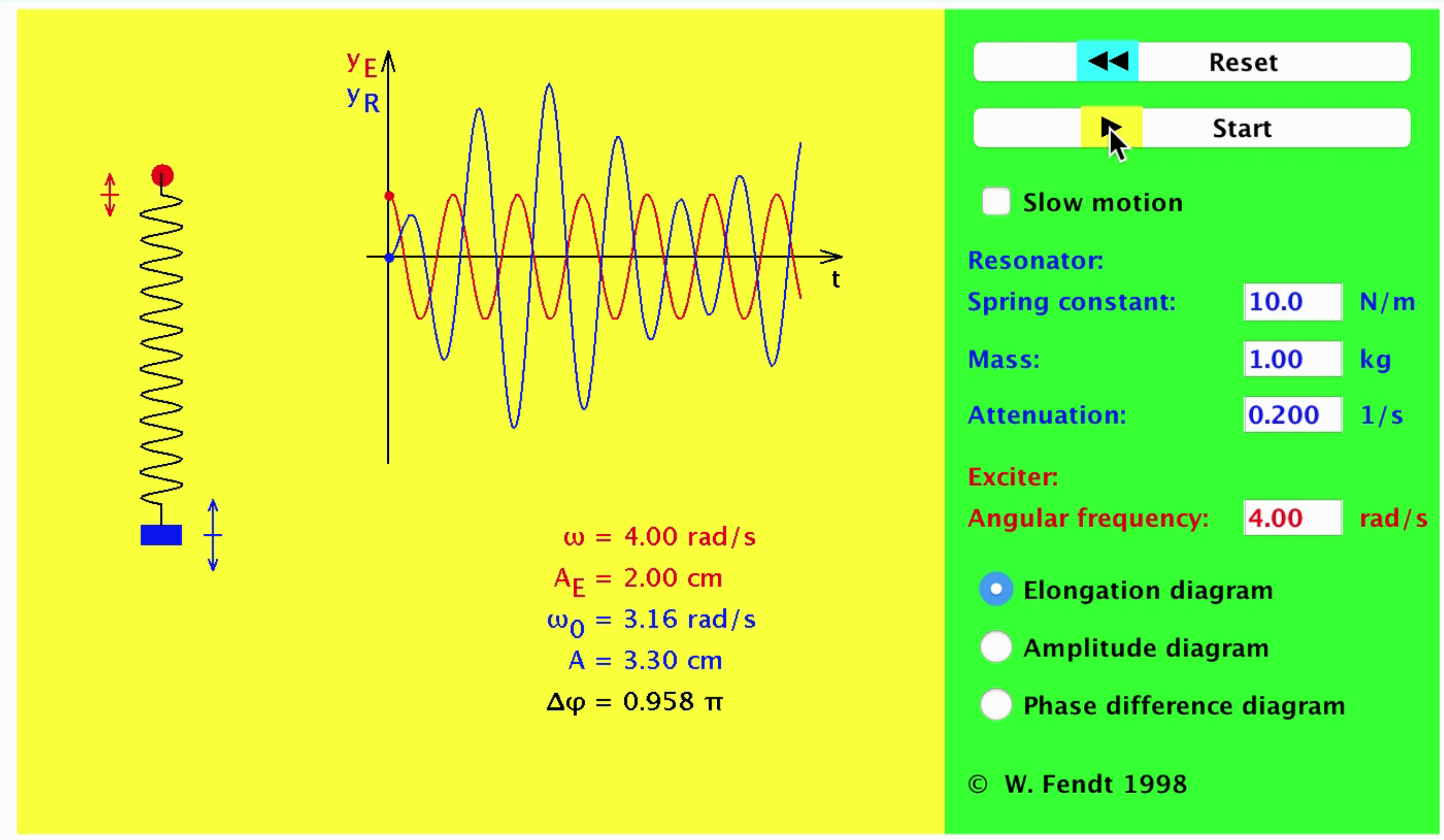




Reset
Start
Slow motion
Resonator:
Spring constant:
10.0
N/m
Mass:
1.00
kg
Attenuation:
0.200
1/s
Exciter:
Angular frequency:
3.20
rad/s
Elongation diagram
Amplitude diagram
Phase difference diagram
© W. Fendt 1998
y E
y R
t
ω = 3.20 rad/s
A E = 2.00 cm
ω 0 = 3.16 rad/s
A = 29.3 cm
Δφ = 0.614 π

Above Resonnace

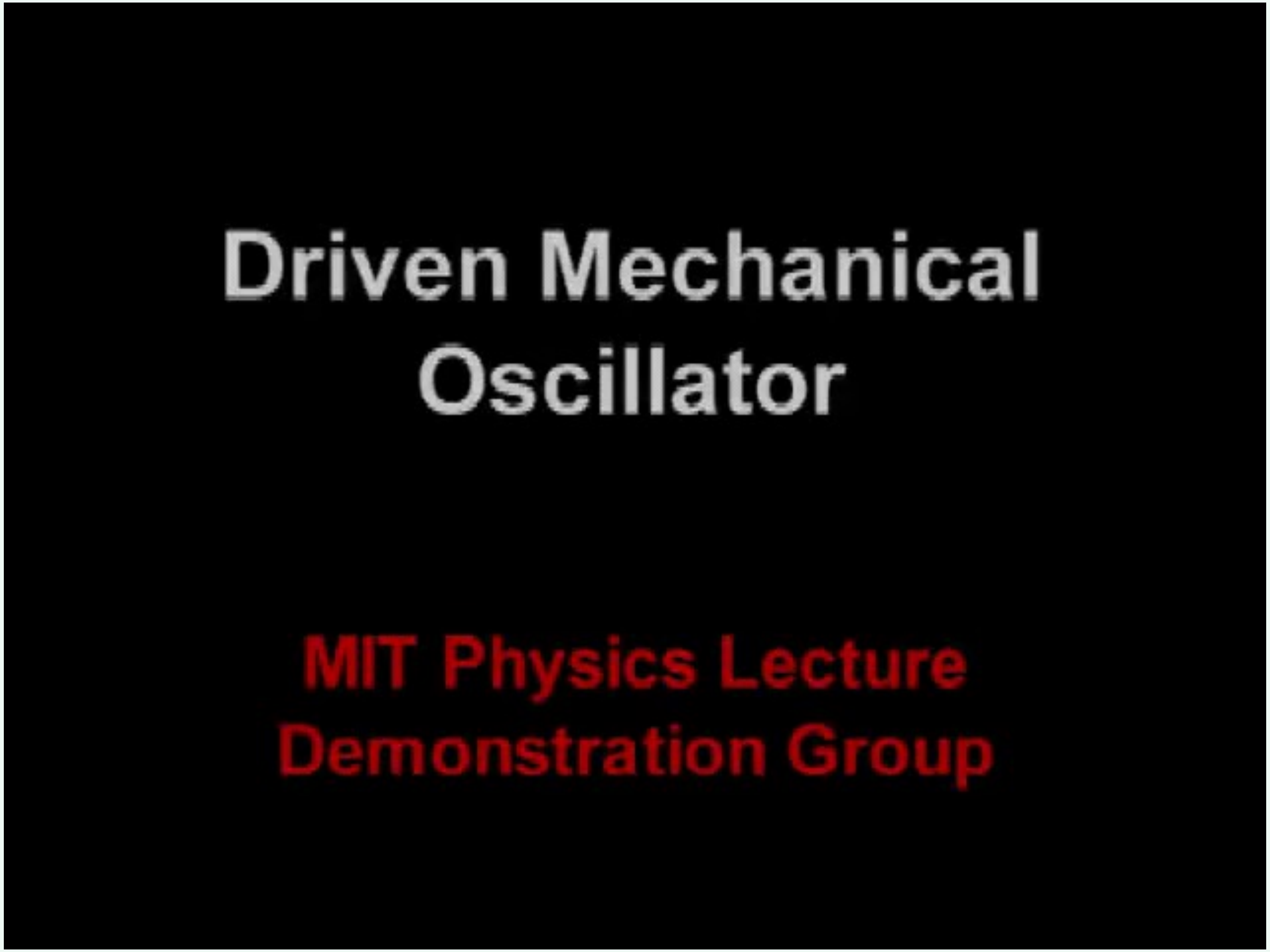




y E
y R
t
ω = 4.00 rad/s
A E = 2.00 cm
ω 0 = 3.16 rad/s
A = 3.30 cm
Δφ = 0.958 π
Reset
Start
Slow motion
Resonator:
Spring constant: 10.0 N/m
Mass: 1.00 kg
Attenuation: 0.200 1/s
Exciter:
Angular frequency: 4.00 rad/s
Elongation diagram
Amplitude diagram
Phase difference diagram
© W. Fendt 1998

https://www.youtube.com/watch?v=aZNnwQ8HJHU

http://techtv.mit.edu/collections/physicsdemos/videos/769-mit-physics-demo----driven-mechanical-oscillator



只有一個解如何滿足起始條件？

x_r共振解滿足：

$$\frac{d^2x_r}{dt^2}+\frac{b}{m}\frac{dx_r}{dt}+\omega^2x_r=\frac{F_0}{m}\cos\omega_D t$$

在共振解x_r上加一個去掉外力後的阻尼簡諧運動x_s ， x_r+x_s還是一個解：

$$\frac{d^2x_s}{dt^2}+\frac{b}{m}\frac{dx_s}{dt}+\omega^2x_s=0$$

x_s 稱為非共振解 $x_s=x_m\cdot e^{-\frac{b}{2m}t}\cdot\cos(\omega' t+\phi)$

將以上兩個微分方程式相加，可以得到：

$$\frac{d^2(x_r+x_s)}{dt^2}+\frac{b}{m}\frac{d(x_r+x_s)}{dt}+\omega^2(x_r+x_s)=\frac{F_0}{m}\cos\omega_D t$$

x_r+x_s依舊滿足原來 x_r 所滿足的微分方程式。

x_s 非共振解有兩個未定常數x_m ,ϕ，於是我又得到無限多個解。

定理：

x_r滿足非齊次微分方程式：

$$\sum_n a_n \cdot \frac{d^n x_r}{dt^n} = f(t)$$

右手邊的非齊次項是時間函數

在x_r上加一個去掉非齊次項的其次方程式的解x_s ，

$$\sum_n a_n \cdot \frac{d^n x_s}{dt^n} = 0$$

$x_r + x_s$ 還是一個非齊次方程式的解：

證明：

將以上兩個微分方程式相加，可以得到：

$$\sum_n a_n \cdot \frac{d^n (x_r + x_s)}{dt^n} = f(t)$$

$x_r + x_s$依舊滿足原來 x_r 所滿足的微分方程式。

自由落體的微分方程式就是一個非齊次方程式：

$$\frac{dv}{dt} = -g \qquad v_r = -gt$$ 是一個解。

在v_r上加一個去掉非齊次項的齊次方程式的解v_s，

$$\frac{dv_s}{dt} = 0 \qquad v_s = c_1$$

$v_r + v_s$ 還是一個非齊次方程式的解：

$$v = v_r + v_s = -gt + c_1$$

$$x_s = x_m \cdot e^{-\frac{b}{2m}t} \cdot \cos(\omega' t + \phi)$$

$$x_r = -\frac{F_0}{m\sqrt{(\omega^2 - \omega_D^2)^2 + \left(\frac{b}{m}\omega\right)^2}}\cos(\omega_D t + \phi)$$

$$x = x_r + x_s$$

滿足原來 x_r 所滿足的外力下簡諧運動的微分方程式：

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega_D t$$

調整x_s中的 x_m, ϕ 可以滿足起始條件。

$x_r + x_s$這個函數同時滿足運動方程式以及兩個起始條件，因此是唯一的解！

注意非共振解x_s是以彈簧自然頻率ω震盪，而不是ω_D。

但隨時間振幅會變小，長期來說可以忽略。

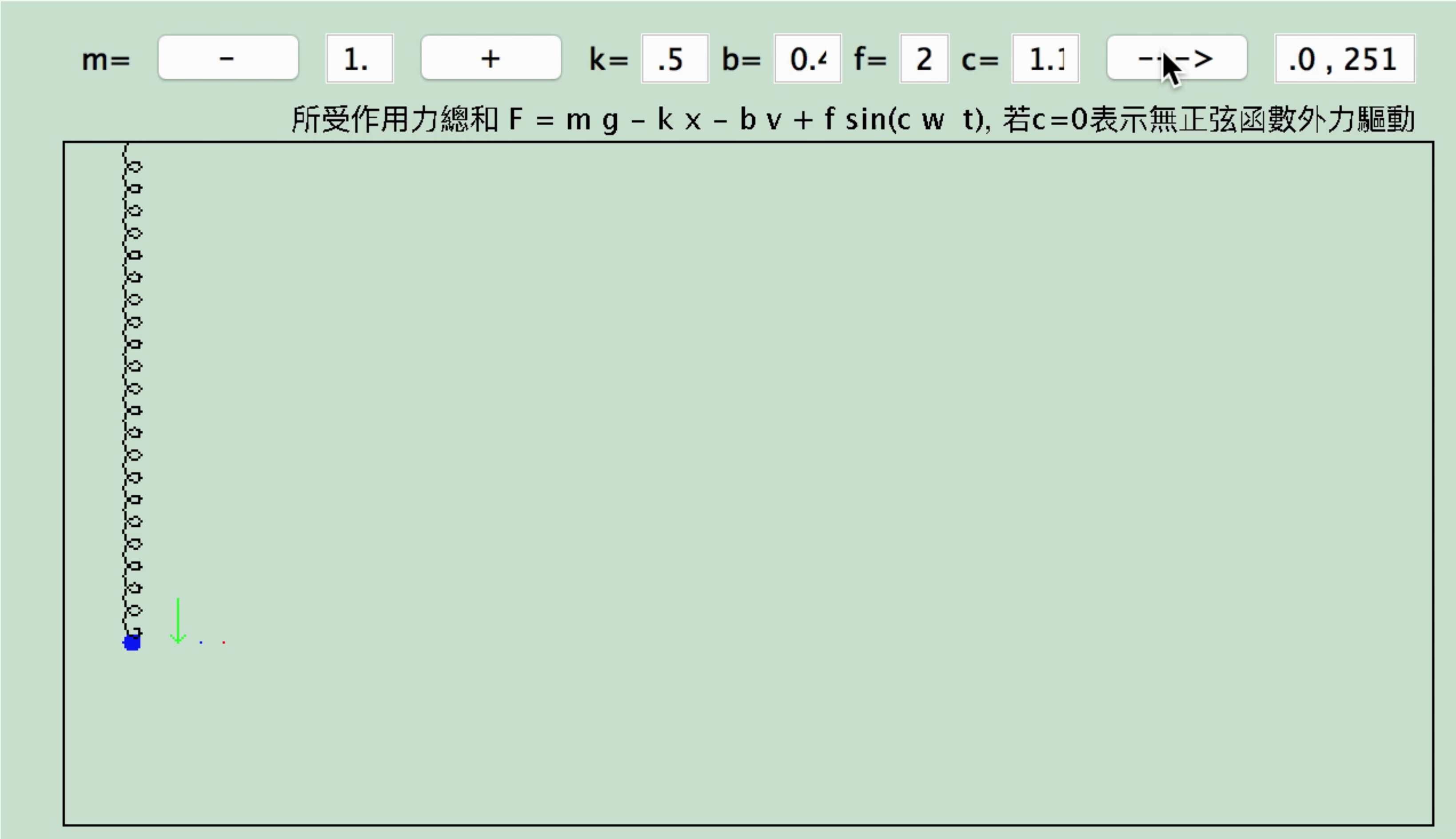
$$x = x_r + x_s \rightarrow x_r$$

長期而言，只有共振解是重要的，起始條件無關緊要

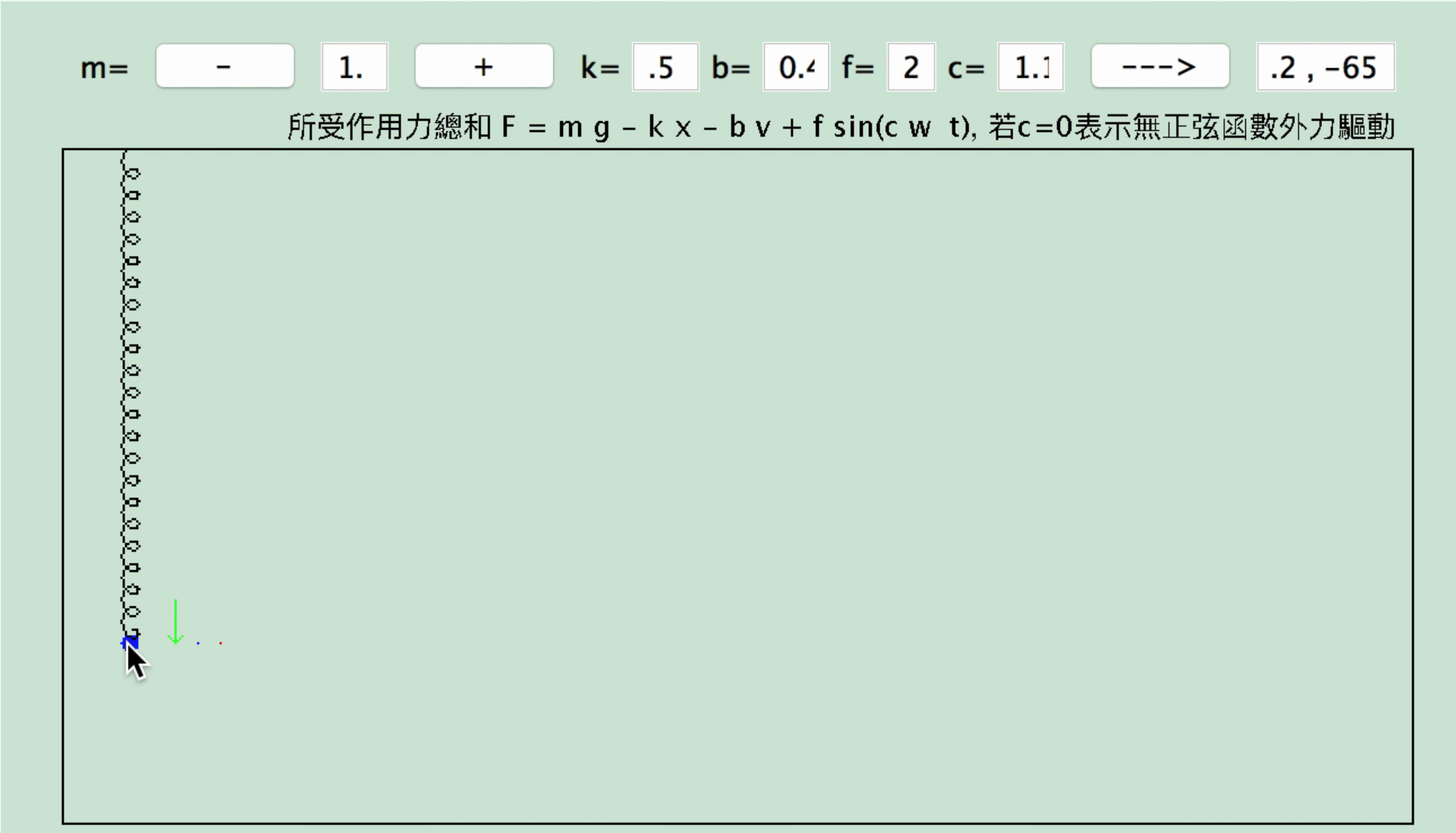
愛拼才會贏定律

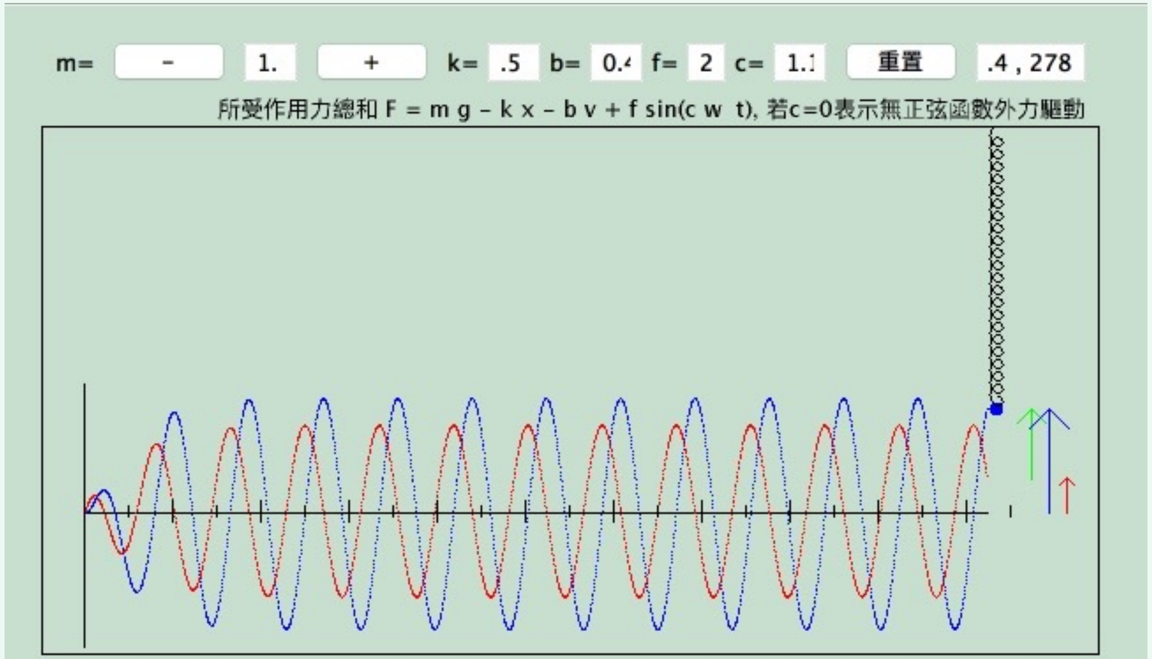
模擬

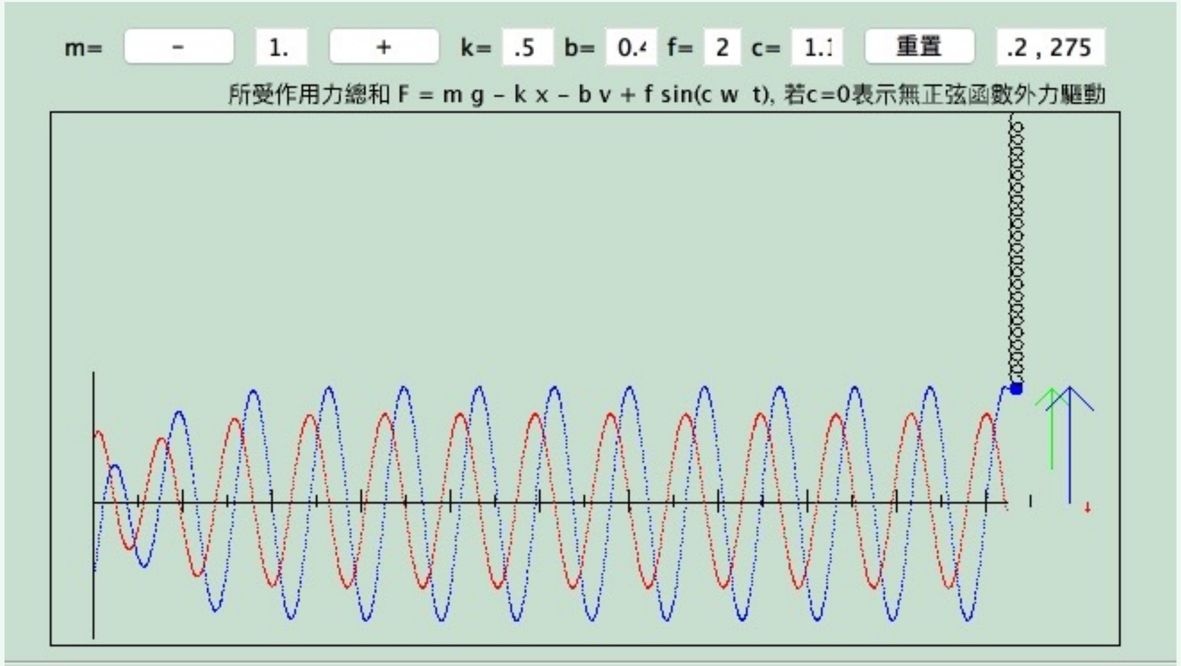
http://www.phy.ntnu.edu.tw/moodle/mod/resource/view.php?id=124

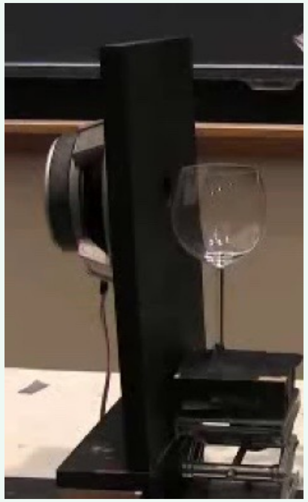


With a different initial condition:




m=
-
1.
+
k= .5
b= 0.4
f= 2
c= 1.1
重置
.4 , 278
所受作用力總和 F = m g – k x – b v + f sin(c w t), 若c=0表示無正弦函數外力驅動


m=
-
1.
+
k= .5
b= 0.4
f= 2
c= 1.1
重置
.2 , 275
所受作用力總和 F = m g – k x – b v + f sin(c w t), 若c=0表示無正弦函數外力驅動

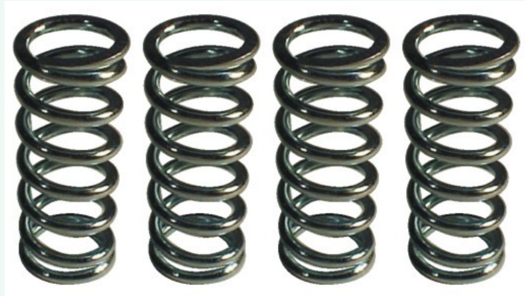


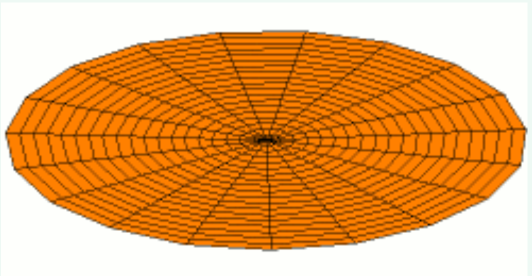
麥克風震碎玻璃杯的現象就是共振的實例。

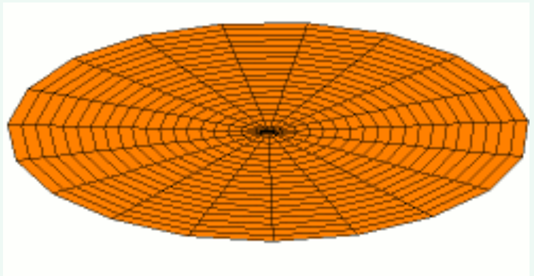
物體的變型模式有無限多個，每一個模式的振動頻率不同。

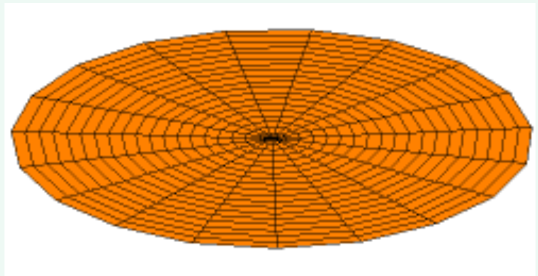
玻璃杯的變形等同於多個彈簧系統。

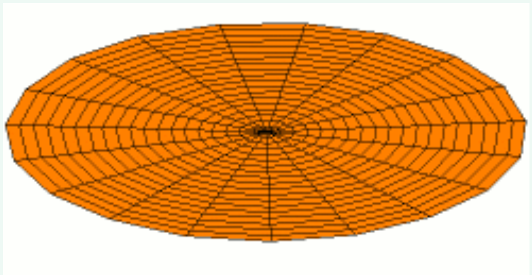
麥克風發出的聲波就是週期性外力。

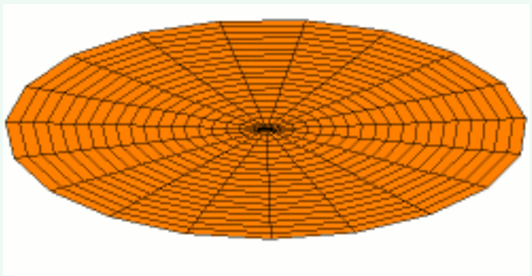


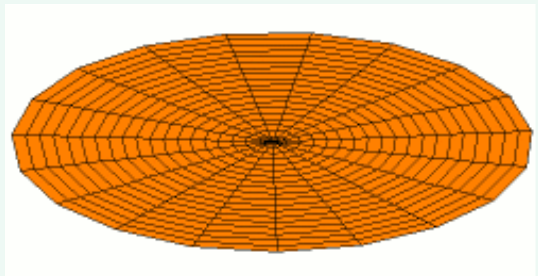






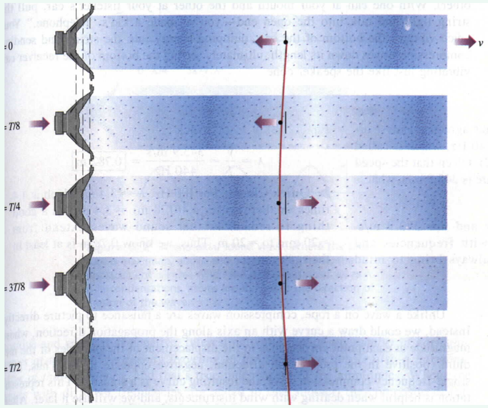


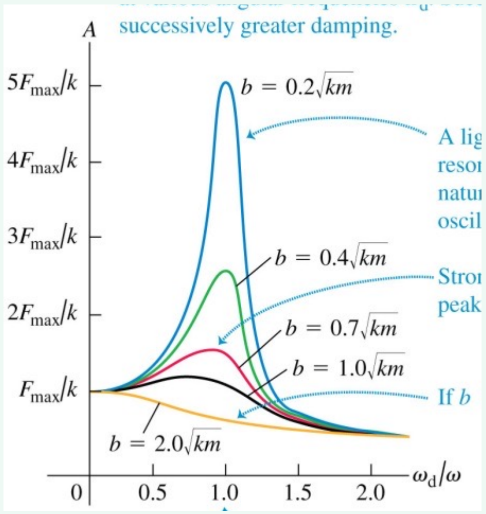




如果模式的頻率ω接近聲波頻率ω_D，週期性外力會帶動該模式開始振盪。

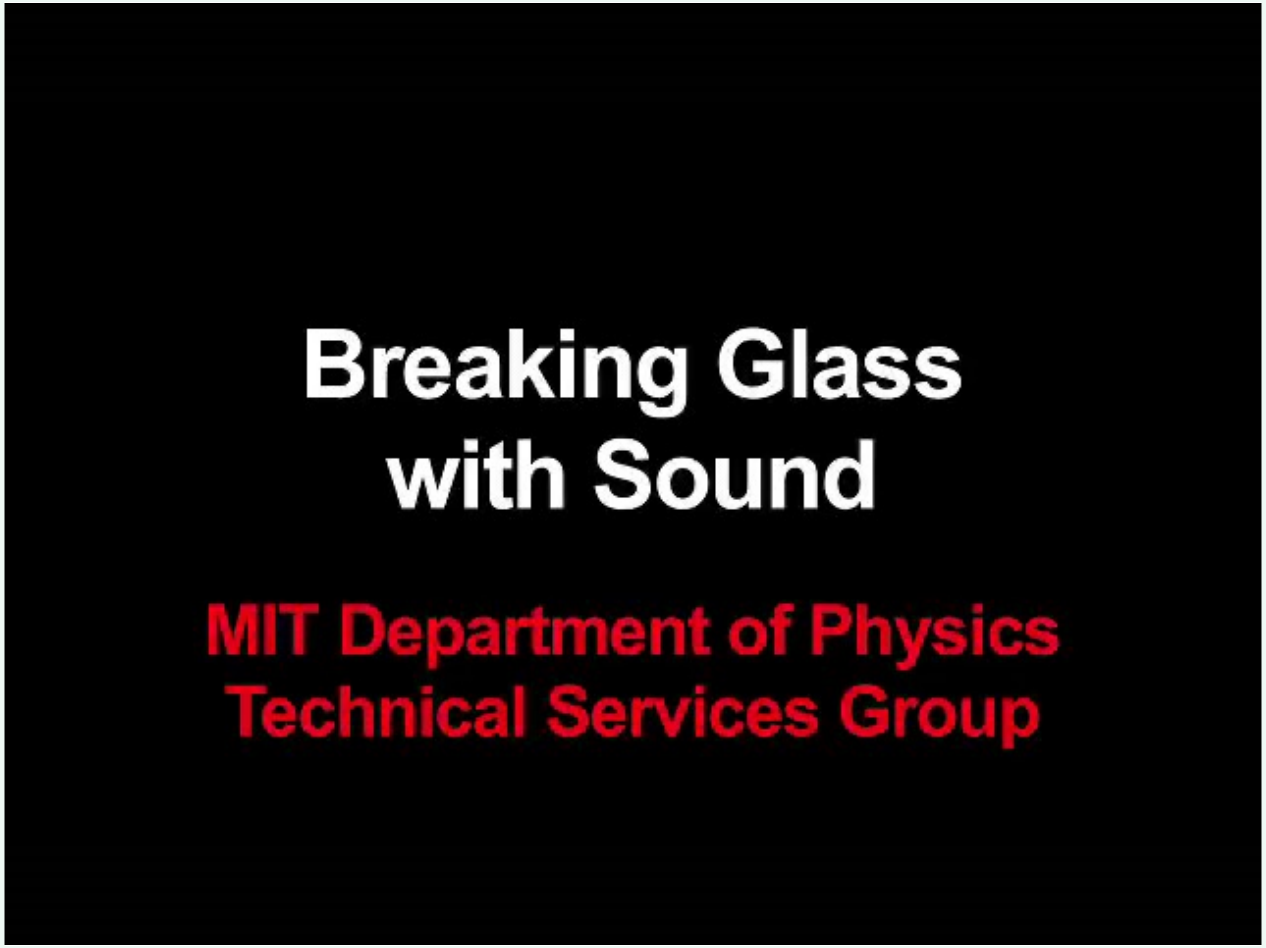
其他模式的振盪就很小。因此共振下的玻璃杯變型就如同一根彈簧！



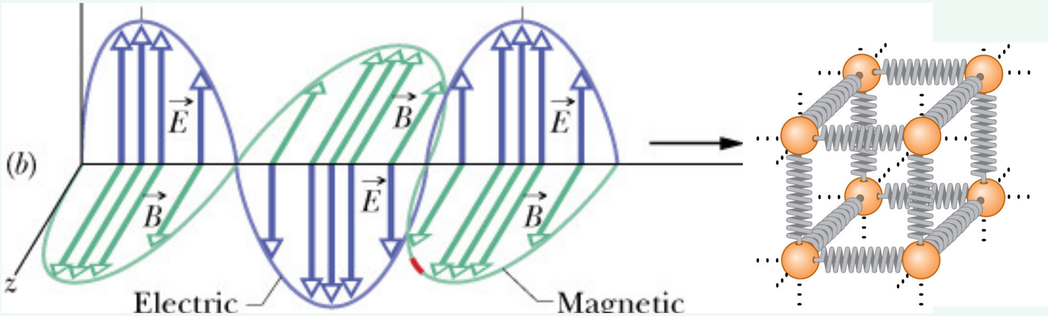


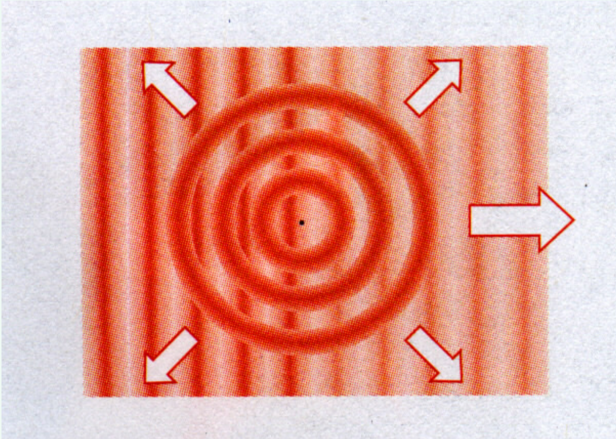
物體的振動

http://www.youtube.com/watch?v=17tqXgvCN0E&NR=1



電磁波打在一個晶體內的原子上的散射現象，也是如此。

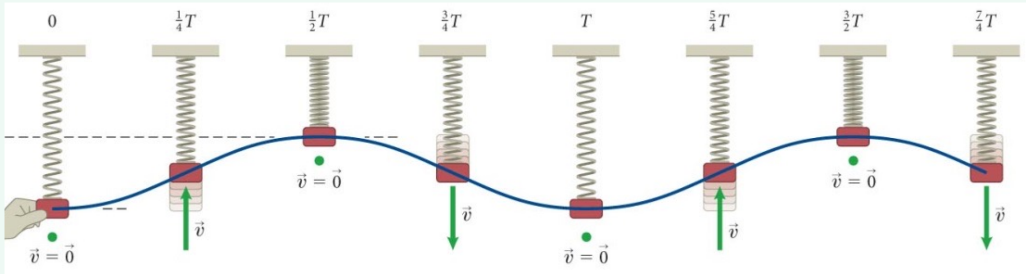




$$F = \frac{qE_0}{m}\cos\omega t$$

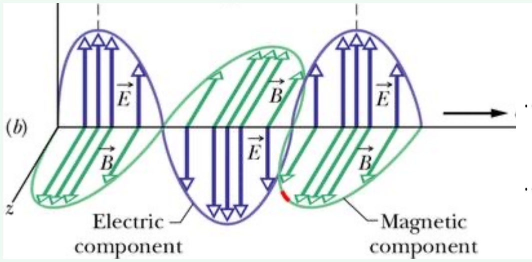
運動方程式

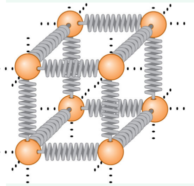
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{b}{m}\frac{dy}{dt} - \omega^2 y + \frac{F_0}{m}\cos\omega_D t$$



電磁波頻率ω_D越接近分子間彈簧的振動頻率ω，彈簧振動越大，

越多電磁波能量被晶體內原子吸收！





將電磁波的吸收率對其頻率ω_D(或波長)作圖：

吸收光譜的共振頻率即是分子彈簧的自然內在頻率ω！

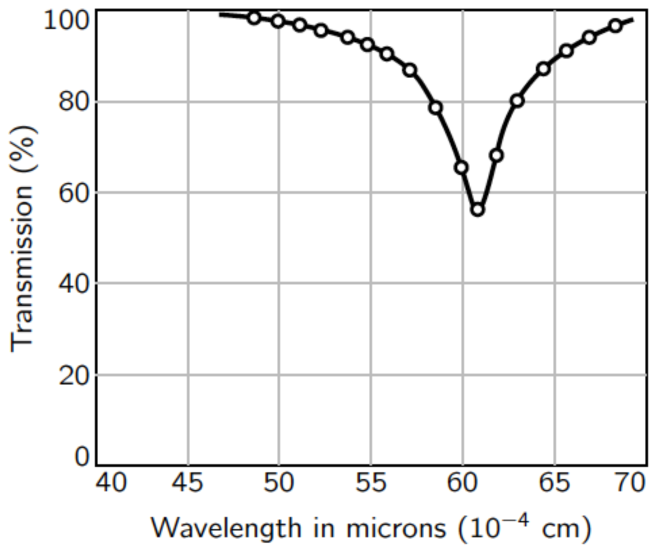


Fig. 23-7. Transmission of infrared radiation through a thin (0.17 μ) sodium chloride film. [After R. B. Barnes, *Z. Physik* **75**, 723 (1932). Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, Wiley, 1956.]

建築必須避免其自然頻率ω，與環境外力頻率ω_D接近的狀況。

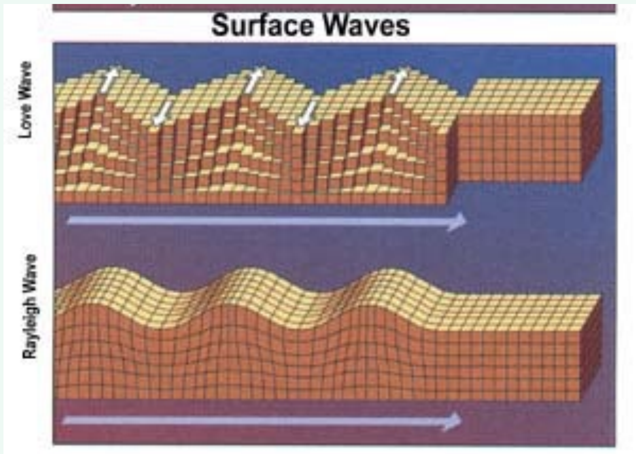
1985墨西哥市七級地震：

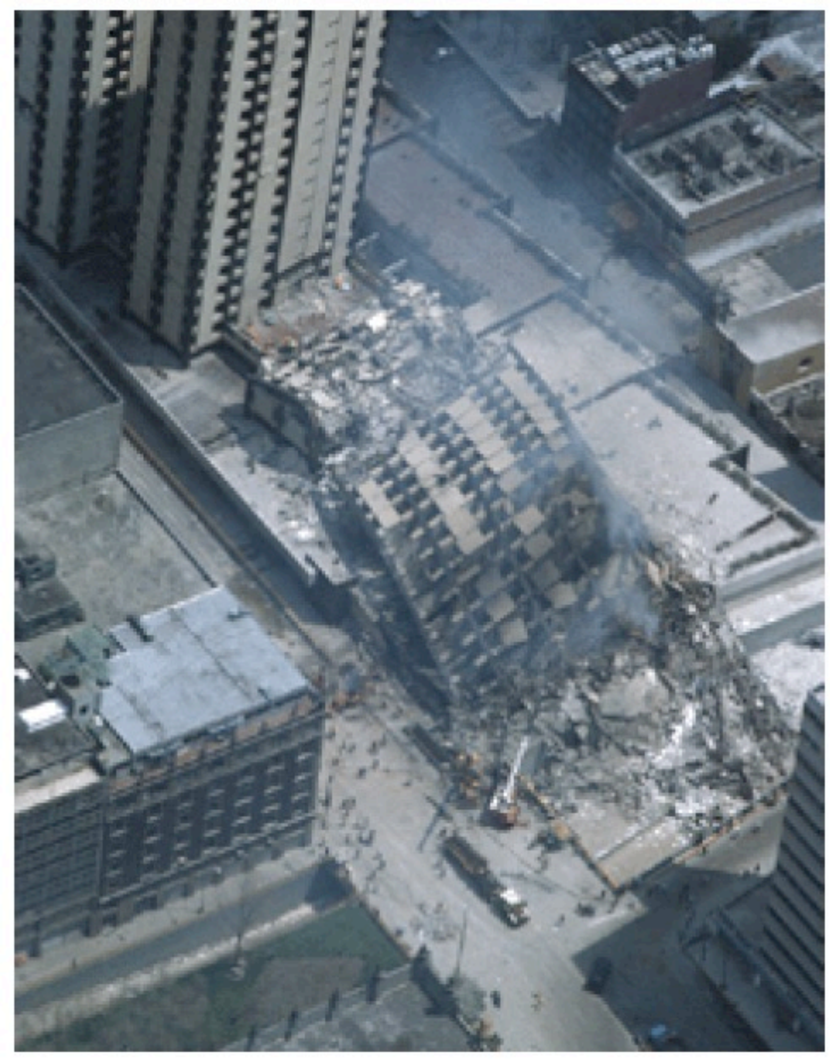
鬆軟土地面有一個自然的振盪頻率：

$f \sim 0.5$ Hz

這個頻率與淺層地震波正好接近。

共振現象使得墨西哥市地面振盪振幅大。





而建築物也有自己的自然頻率。

六至十樓中等高度建築正好有同樣自然頻率：

$f_{\text{中樓層}} \sim 0.5\ \text{Hz}$

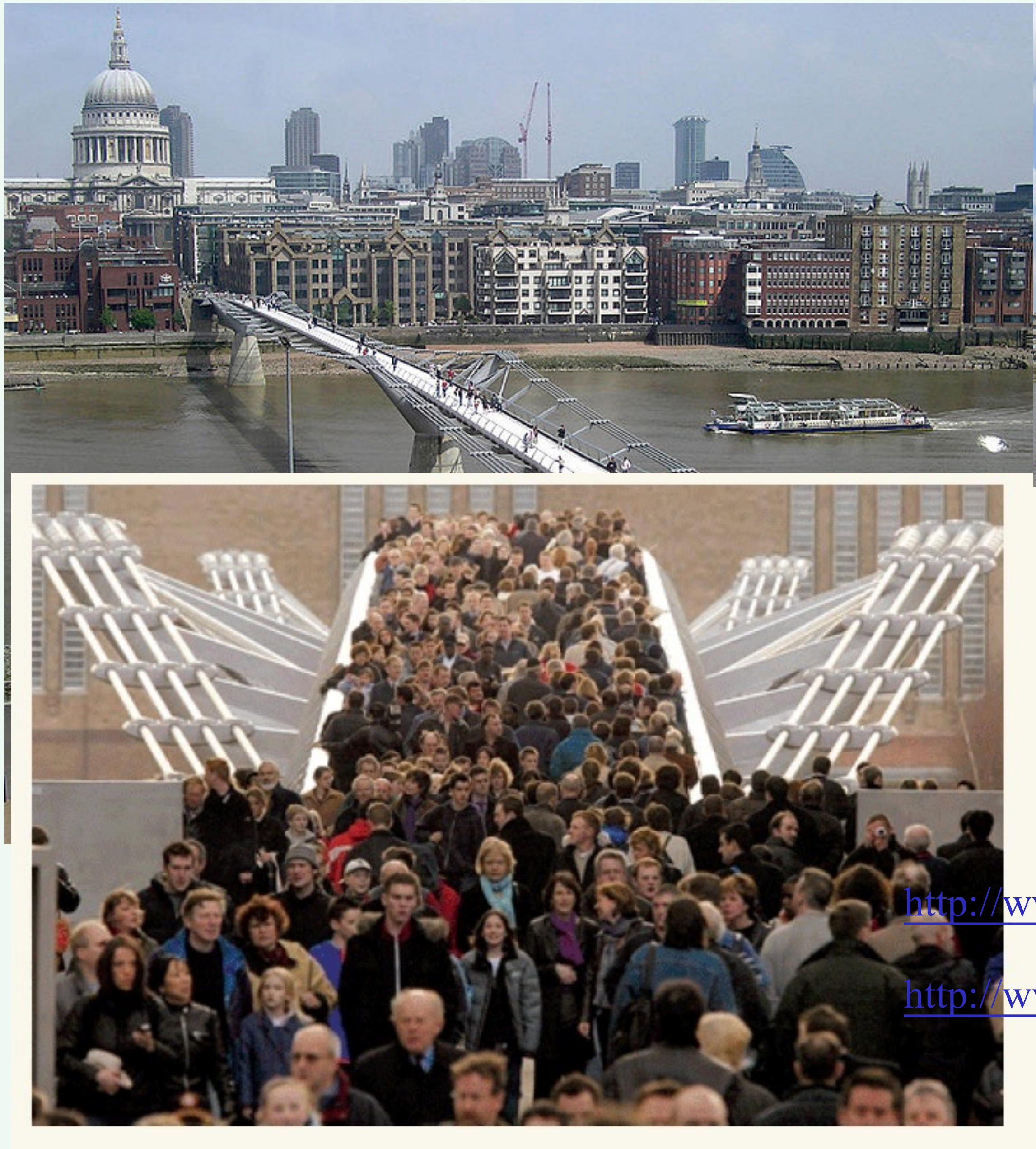
$$f \approx \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$h\downarrow, k\uparrow, f\uparrow$

低樓層的老建築自然頻率較高。

在軟土地面上反而沒有共振。

但很多情況下，外力施力週期會自動調整為彈簧的自然周期。



http://www.youtube.com/watch?v=gQK21572oSU

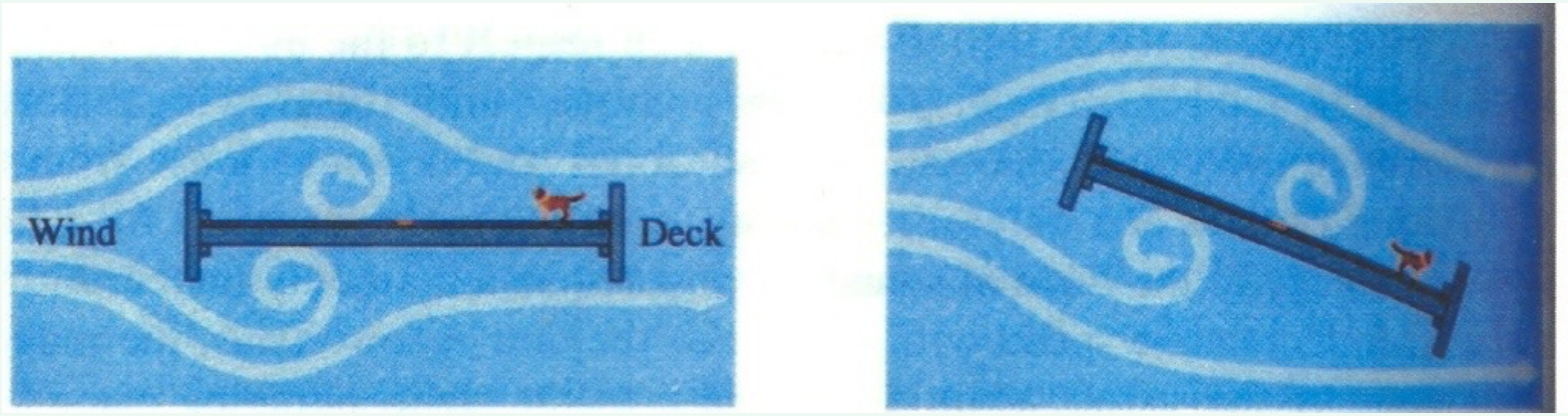
http://www.youtube.com/watch?v=eAXVa XWZ8


No entry
Deep water


TCR 00:10:32:18
0:00 / 1:01

Tacoma Narrows Bridge





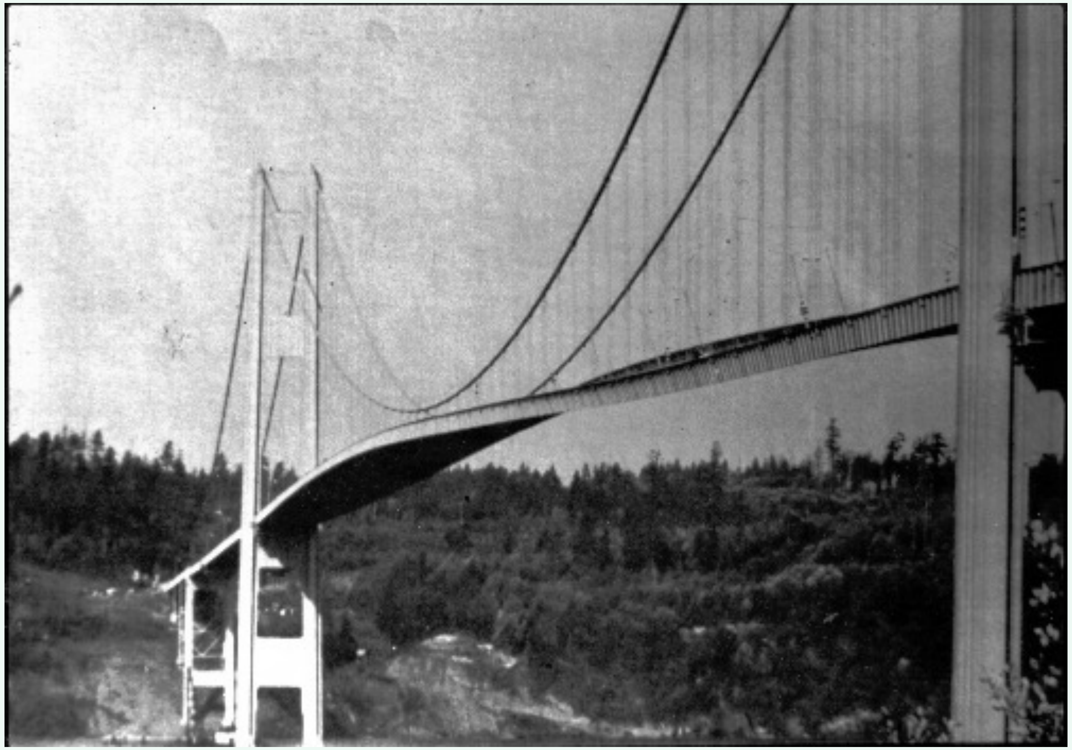
當橋未扭曲振動時，風力的力矩是平衡的，

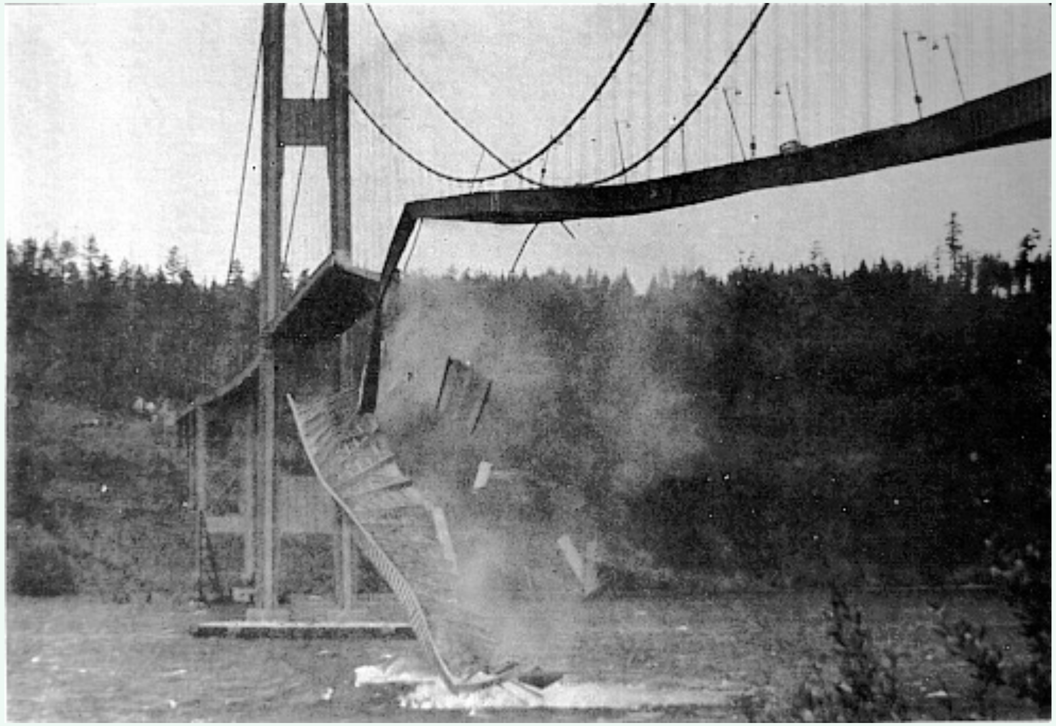
當橋開始些許某一模式的扭曲振動後，橋面傾斜，風力對橋面施予一淨力矩，

關鍵是：風力造成的力矩的頻率，自然與該扭曲振盪模式的頻率相等！

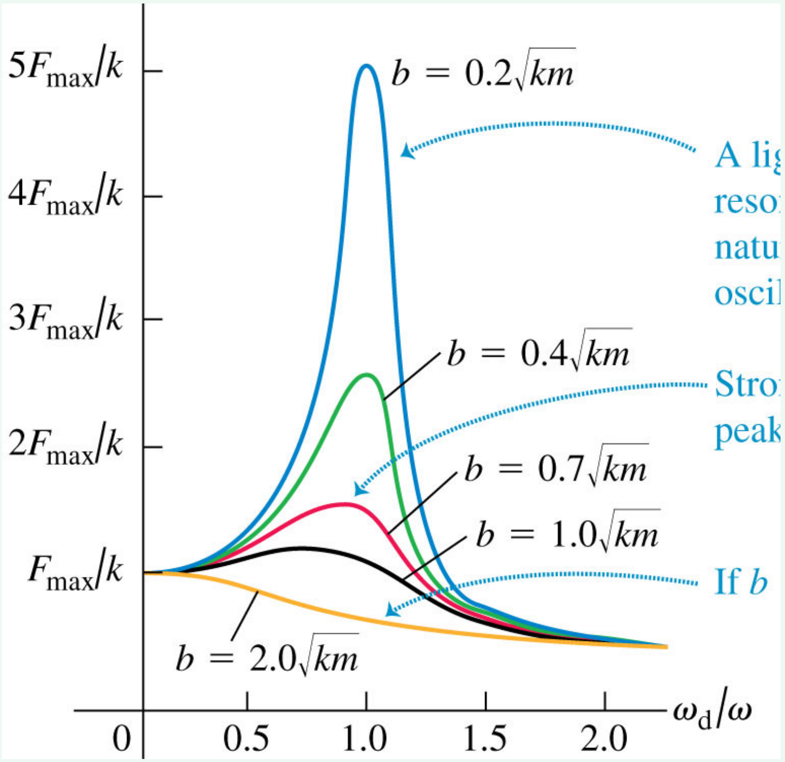
https://www.youtube.com/watch?v=lXyG68_caV4

http://www.youtube.com/watch?v=3mclp9QmCGs





要降低共振的大小，可以增加 阻尼damping b。



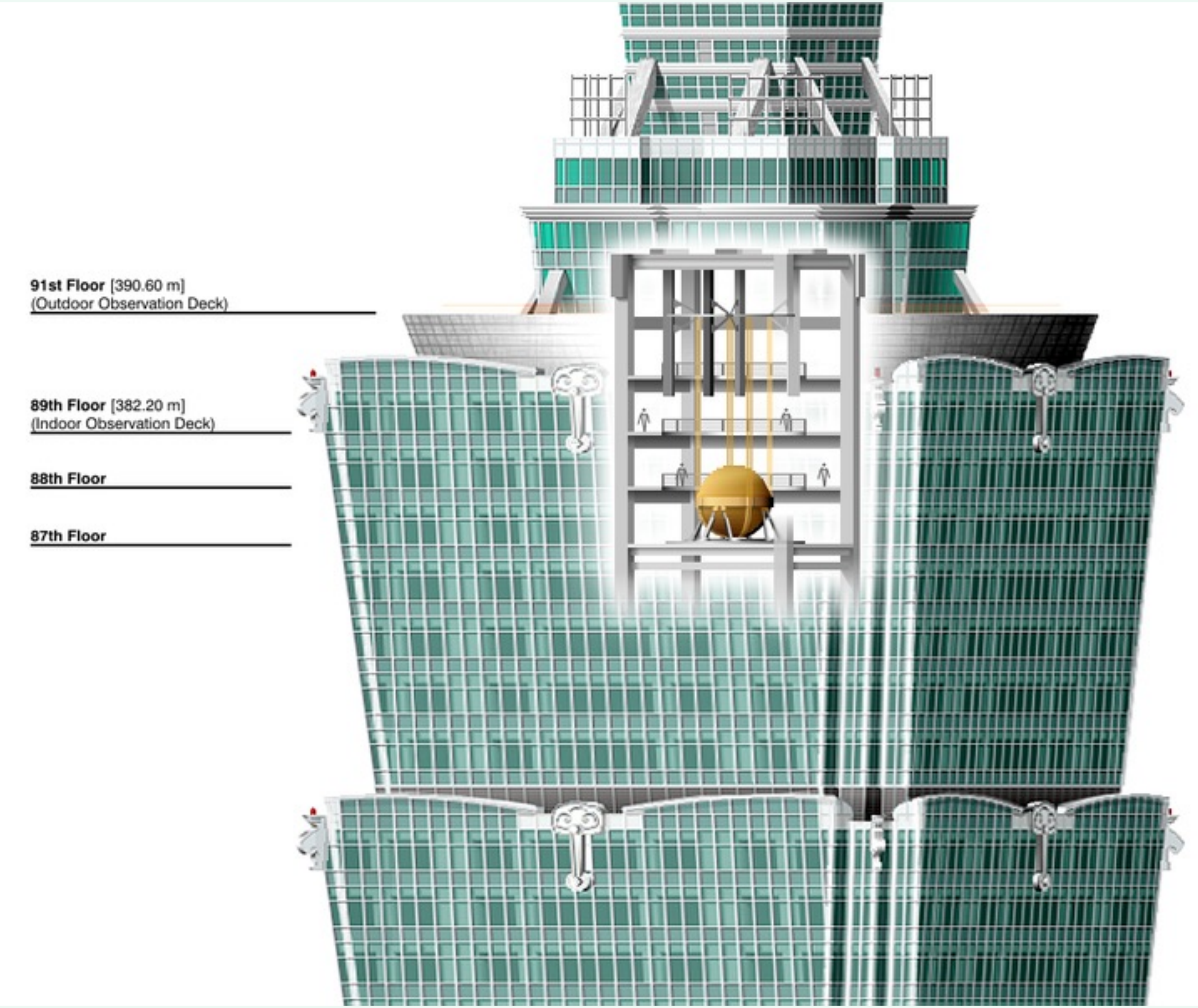
Fluid Damper

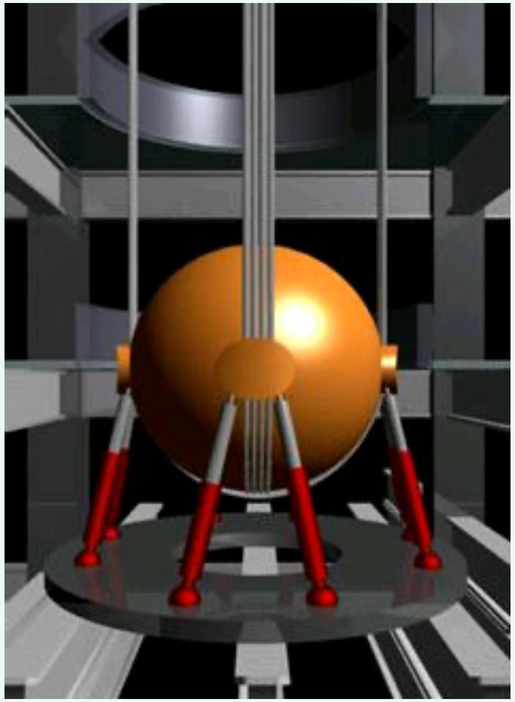
Tune Mass Damper

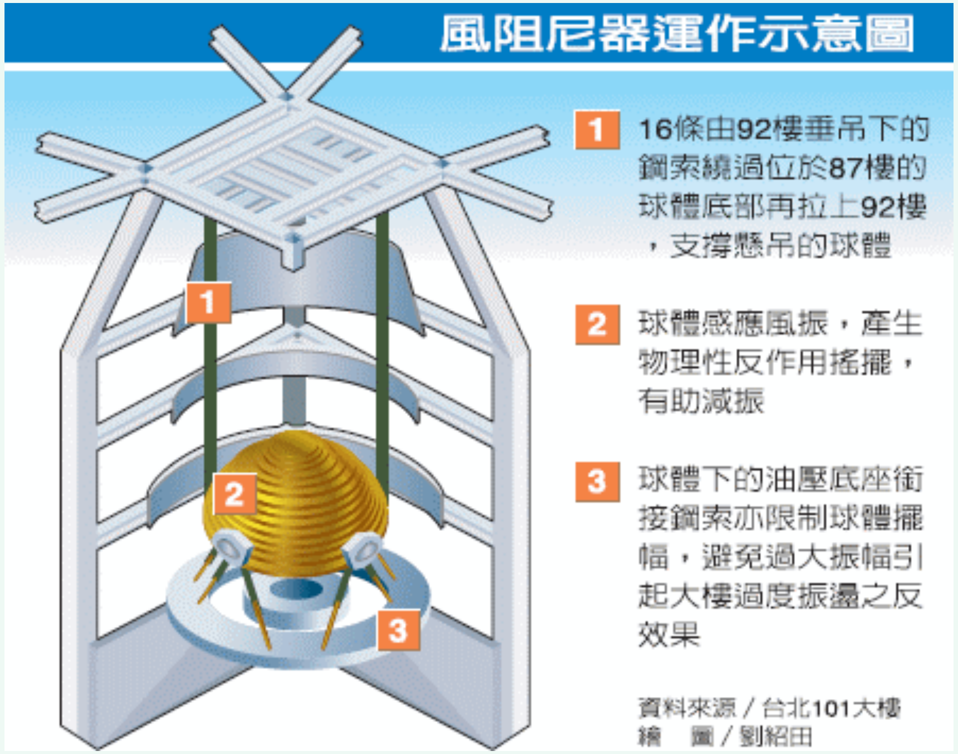
101五十噸的阻尼球

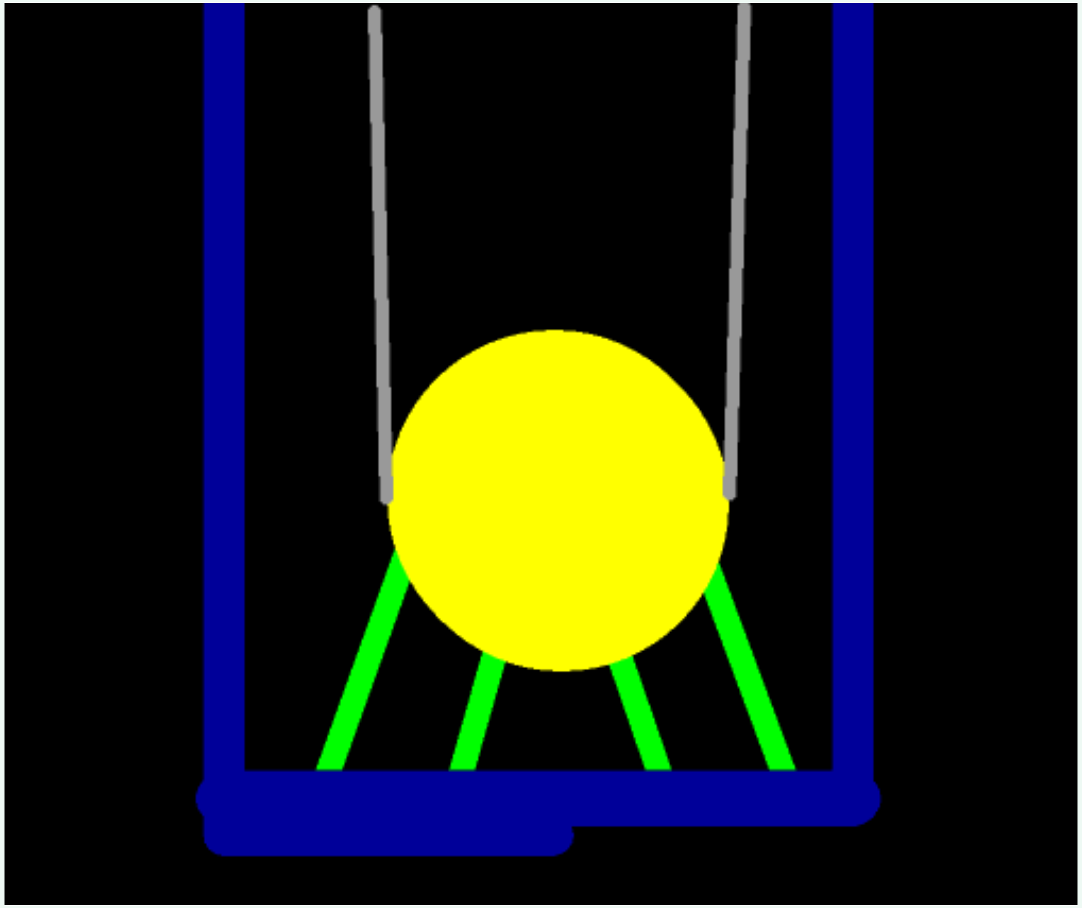
15 Oscillations

If a tall building sways slowly in a wind, the occupants may not even notice the motion, but if the swaying repeats more than 10 times per second, it becomes annoying and may even cause motion sickness. One reason is that when a person is standing, the head tends to sway even more than the feet, setting off motion sensors in the balancing region of the inner ear. Various mechanisms are employed to decrease a building's sway. For example, the large ball (5.4×10^5 kg) seen in this photograph hangs on the 92nd floor of one of the world's tallest buildings.


91st Floor [390.60 m]
(Outdoor Observation Deck)
89th Floor [382.20 m]
(Indoor Observation Deck)
88th Floor
87th Floor




風阻尼器運作示意圖
1
16條由92樓垂吊下的鋼索繞過位於87樓的球體底部再拉上92樓，支撐懸吊的球體
2
球體感應風振，產生物理性反作用搖擺，有助減振
3
球體下的油壓底座銜接鋼索亦限制球體擺幅，避免過大振幅引起大樓過度振盪之反效果
資料來源／台北101大樓
繪　圖／劉紹田



以複數解簡諧運動的運動方程式

齊次微分方程式，原子核衰變、簡諧運動與阻尼振盪都是特例！

$$\sum_n a_n \cdot \frac{d^n x}{dt^n} = 0$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

這個方程式的解不會是多項式，因為微分會降一個冪次。

指數函數的所有微分都與自己成正比，但比例常數是恆正的。

三角函數的偶次微分與自己成正比，且比例常數為負。

而阻尼振盪的解是三角函數與指數函數的乘積。

有可能將三角函數與指數函數統合在一起嗎？

指數函數與三角函數有許多類似之處：

$$\frac{de^{b\theta}}{d\theta} = be^{b\theta}$$

$$\frac{d^2e^{b\theta}}{d\theta^2} = b^2e^{b\theta}$$

$$\frac{d(\sin\theta)}{d\theta} = \cos\theta$$

$$\frac{d^2\sin\theta}{d\theta^2} = \frac{d(\cos\theta)}{d\theta} = -\sin\theta$$

如果只看二次微分，大膽假設： $b^2 = -1, b = \sqrt{-1} = i$

指數函數與正弦函數似乎可以被統合成一種函數。

$$\sin\theta \sim e^{i\theta}$$

但此虛數的指數函數的定義，對一次微分不成立： $\sin\theta$的微分不是$\sin\theta$。

而且：

$$\frac{de^{i\theta}}{d\theta} = ie^{i\theta}$$

因此$e^{i\theta}$必須是複數，有實數部及虛數部！

$e^{i\theta}$ 的一次微分是自己乘上 i ，也就是將實數部及虛數部互換

三角函數的一次微分將 cos 與 sin 互換

$$\frac{d(\cos\theta)}{dt} = -\sin\theta$$

$$\frac{d(\sin\theta)}{d\theta} = \cos\theta$$

何不就假設 $e^{i\theta}$ 的實數部與虛數部分別是正弦與餘弦？

$$e^{i\theta} \equiv \cos\theta + i\sin\theta$$

Euler's Formula　　虛數的指數函數

Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

$$\frac{d}{d\theta}e^{i\theta} = -\sin\theta + i\cos\theta = ie^{i\theta}$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2}e^{i\theta} = -\cos\theta - i\sin\theta = -e^{i\theta} = i^2e^{i\theta}$$

正好是我們期待指數函數必須滿足的微分關係。

$$\frac{d^n}{dx^n}e^{i\alpha x} = (i\alpha)^n \cdot e^{i\alpha x}$$

$$e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = (\cos\alpha + i\sin\alpha) \cdot (\cos\beta + i\sin\beta) =$$

$$(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) =$$

$$\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) = e^{i(\alpha+\beta)}$$

正好是我們期待指數函數必須滿足的乘積關係。

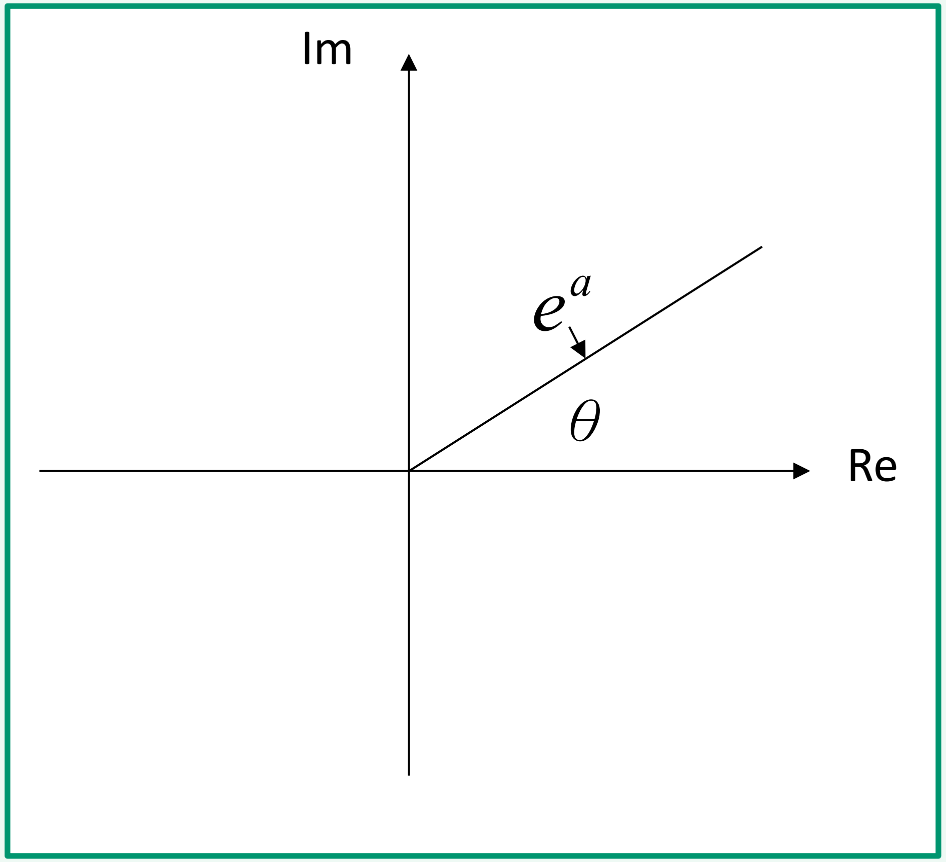
此定義滿足指數函數所有重要性質！

我們可以更進一步定義複數$\alpha = a + i\theta$的指數函數：

$$e^{\alpha} = e^{a+i\theta} = e^{a}e^{i\theta} = e^{a}(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

在複數平面上表示，a 決定絕對值，θ 決定幅角



$$\left|e^{i\theta}\right| = 1$$

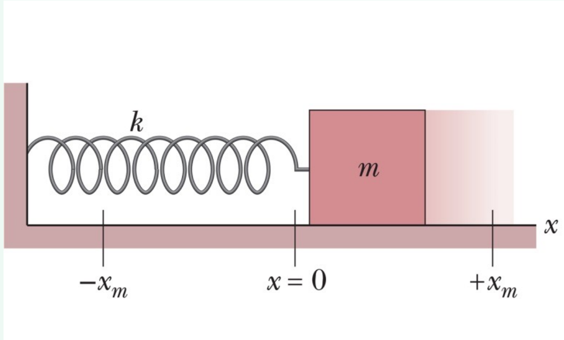
$$\left|e^{a+i\theta}\right| = e^{a}$$

$$|mn| = |m| \cdot |n|$$

$$\frac{d^n}{dx^n}e^{\alpha x} = (\alpha)^n \cdot e^{\alpha x}$$

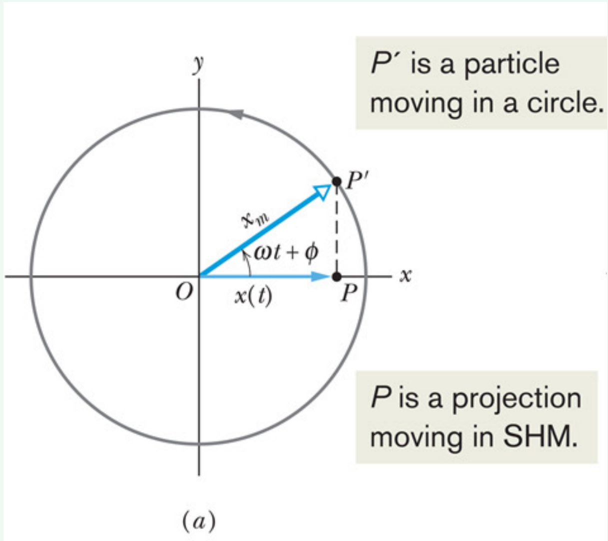
所以，複數的指數函數，所有的微分都與自己成正比！

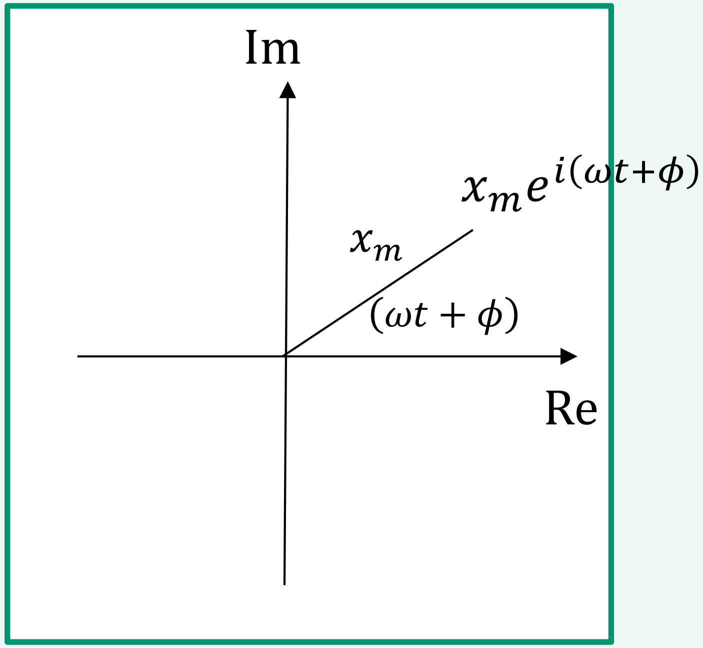
$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ 如此，三角函數可以寫成虛數指數函數的實數部。



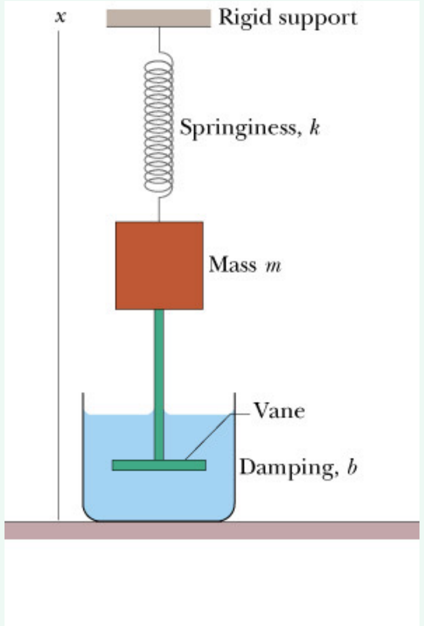
$x_m\cos(\omega t + \phi) = \mathrm{Re}\left[x_m e^{i(\omega t+\phi)}\right]$

如此簡諧運動，就是虛數指數函數的實數部！





假想圓就是$x_m e^{i(\omega t+\phi)}$在其複數平面上的表現！

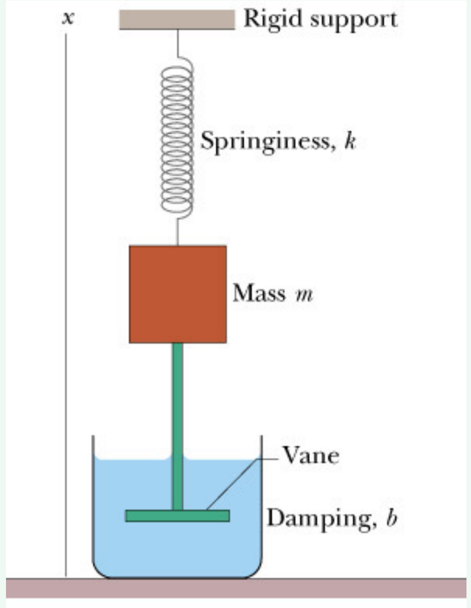


阻尼簡諧運動，也是複數指數函數的實數部！

$$x_m \cdot e^{-\frac{b}{2m}t} \cdot \cos(\omega' t + \phi) = x_m e^{-\frac{b}{2m}t} \cdot \mathrm{Re}\left[e^{i(\omega' t+\phi)}\right] = \mathrm{Re}\left[x_m e^{-\frac{b}{2m}t+i(\omega t+\phi)}\right]$$

是不是所有線性微分方程式的解都是指數函數？

有阻力的簡諧振盪器，以複數方法求解：



$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

首先將這個式子裡的 x 推廣為一個複數 z。

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dz}{dt} + \omega^2 z = 0$$

注意複數 z 包含實數部Re z與虛數部Im z。

$$\frac{d^2(\mathrm{Re}\,z + i\mathrm{Im}\ \mathrm{z})}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{d(\mathrm{Re}\,z + i\mathrm{Im}\ \mathrm{z})}{dt} + \omega^2(\mathrm{Re}\,z + i\mathrm{Im}\ \mathrm{z}) = 0 + i0$$

那麼 z 的實數部與虛數部都同時滿足原來x滿足的方程式！

因此如果能解出複數 z，再取其實數部，即可得到原方程式的實數解 x。

$$\frac{d^2(\mathrm{Re}\,z)}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{d(\mathrm{Re}\,z)}{dt} + \omega^2(\mathrm{Re}\,z) = 0$$

看起來似乎比較複雜的複數微分方程，原來反而比較容易解！

複數指數函數所有的微分都正比於此指數函數。

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dz}{dt} + \omega^2 z = 0$$

$$z = z_0 e^{\alpha t}$$

$$\frac{d^n}{dt^n} z = \alpha^n z$$

如果z是一個複數指數函數，上式所有項都正比於z。

我們可以大膽地猜，其解正比於一個複數指數函數：

$$\alpha^2 z + \frac{b}{m}\alpha z + \omega^2 z = 0$$

$$\alpha^2 + \frac{b}{m}\alpha + \omega^2 = 0$$

原來的微分方程式現在一項對一項地轉化為代數方程式。

對時間的微分對應α 的冪次。

α 即可被解出：

$$\alpha_\pm = -\frac{b}{2m} \pm i\sqrt{\omega^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

若阻力不大 $\omega > \dfrac{b}{2m}$ 我們得到兩個複數解 $\omega' \equiv \sqrt{\omega^2 - \dfrac{b^2}{4m^2}}$

$$z_{\pm} \equiv e^{\alpha_{\pm} t} = e^{-\frac{b}{2m}t} \cdot e^{\pm i\omega' t} = e^{-\frac{b}{2m}t} \cdot [\cos\omega' t \pm i \sin\omega' t]$$

因為微分方程式是齊次，我們可以將這兩個複數解各乘上

一個複數常數再相加（線性組合），所得到的依舊會是一個解：

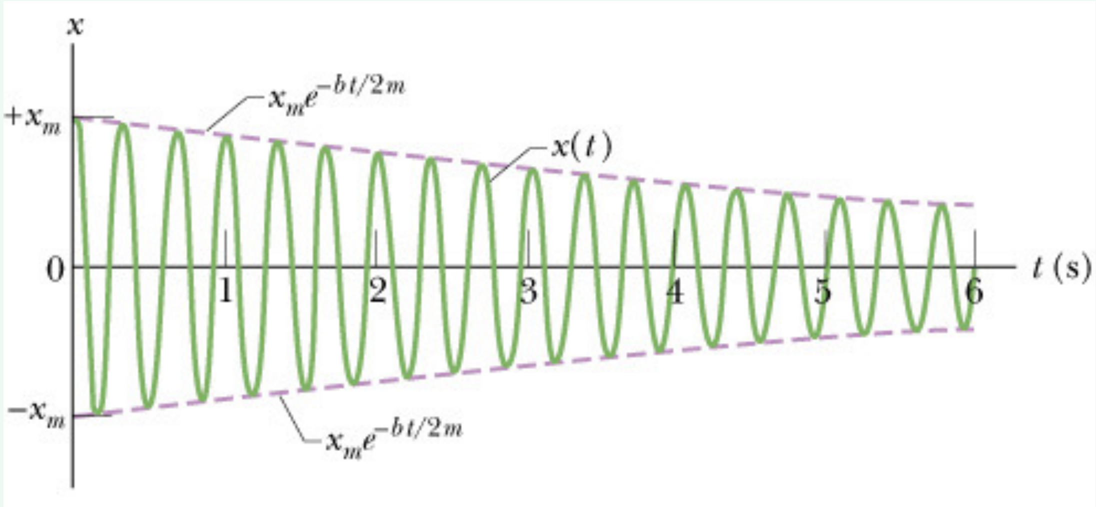
$$z = c_+ z_+ + c_- z_-$$
$$= c_+ e^{-\frac{b}{2m}t} \cdot [\cos\omega' t + i \sin\omega' t] + c_- e^{-\frac{b}{2m}t} \cdot [\cos\omega' t - i \sin\omega' t]$$

實數部就是我們原來尋找的實數解

$$x = \mathrm{Re}\, z = \mathrm{Re}\,(c_+ z_+ + c_- z_-)$$
$$= (\mathrm{Re}\, c_+ + \mathrm{Re}\, c_-) \cdot e^{-\frac{b}{2m}t} [\cos\omega' t] + (-\mathrm{Im}\, c_+ + \mathrm{Im}\, c_-) \cdot e^{-\frac{b}{2m}t} [\sin\omega' t]$$
$$= e^{-\frac{b}{2m}t} \cdot (a \cos\omega' t + b \sin\omega' t) = x_m \cdot e^{-\frac{b}{2m}t} [\cos(\omega' t + \phi)]$$

$$x = x_m \cdot e^{-\frac{b}{2m}t}\,[\cos(\omega' t + \phi)]$$

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - \frac{b^2}{4m^2}}$$



振幅呈現指數衰減！

振動頻率減小！

若阻力很大 $\omega < \dfrac{b}{2m}$ α得到兩個小於零的實數解

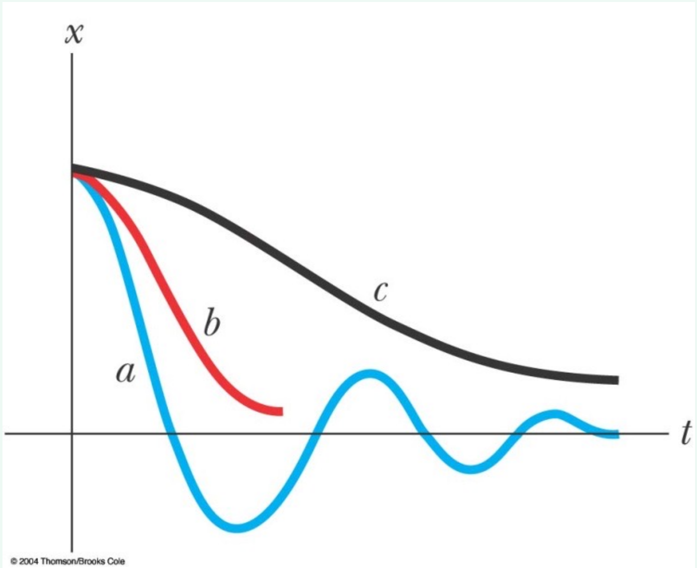
$$\alpha_\pm = -\frac{b}{2m} \pm i\sqrt{\omega^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \Rightarrow \alpha_\pm = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \omega^2}$$

兩個解都是隨時間指數遞減，而沒有震盪！

$$z_\pm \equiv e^{\alpha_\pm t} = e^{-\left[\frac{b}{2m} \mp \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \omega^2}\right]t}$$

恆正

解都是指數遞減函數！



如果 $\dfrac{b}{2m}$大於ω，那就根本沒有振動了！

阻尼可以大到連一次震盪都未完成！

以上的解法很容易地就可以推廣到任意的齊次微分方程式

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \cdot \frac{d^n x}{dt^n} = 0$$

先推廣為複數

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \cdot \frac{d^n z}{dt^n} = 0$$

猜解並代入

$$z = z_0 e^{\alpha t}$$

將微分方程式轉化為代數方程式

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \cdot \alpha^n z = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{N} a_n \cdot \alpha^n = 0$$

代數方程式中的未知數α有n個解

$$z = c_1 e^{\alpha_1 t} + c_2 e^{\alpha_2 t} + \cdots c_N e^{\alpha_N t}$$

最後取實數部即可得實數解 $x = \mathrm{Re}\, z$

有N個解就有N個未知數，因此就需要N個起始條件，

一般就是起始值及起始N次以下微分。

周期外力下，有阻力的簡諧振盪器，以複數方法求解。

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{b}{m}\frac{dx}{dt}+\omega^2x=\frac{F_0}{m}\cos\omega_D t$$

非齊次微分方程式

將它先推廣為複數的微分方程式，注意右手邊的技巧：

$$\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{b}{m}\frac{dz}{dt}+\omega^2z=\frac{F_0}{m}e^{i\omega_D t}$$

$$e^{i\omega_D t}=\cos\omega_D t+i\sin\omega_D t$$

取此複數的微分方程式的實數部，果然Re(z)滿足原來的方程式：

$$\frac{d^2\mathrm{Re}(z)}{dt^2}+\frac{b}{m}\frac{d\mathrm{Re}(z)}{dt}+\omega^2\mathrm{Re}(z)=\frac{F_0}{m}\mathrm{Re}\left(e^{i\omega_D t}\right)=\frac{F_0}{m}\cos\omega_D t$$

$$x=\mathrm{Re}(z)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{b}{m}\frac{dz}{dt}+\omega^2 z=\frac{F_0}{m}e^{i\omega_D t}$$

我們可以依舊猜解為 $z=z_0e^{\alpha t}$ 代入上式

$$\left(\alpha^2+\frac{b}{m}\alpha+\omega^2\right)z_0e^{\alpha t}=\frac{F_0}{m}e^{i\omega_D t}$$

未知數α只有一種可能 $\alpha=i\omega_D$ 此解與外力以同樣頻率震盪！

z_0也只有一種可能 $$\left(-\omega_D^2+\frac{ib}{m}\omega_D+\omega^2\right)z_0e^{-i\omega_D t}=\frac{F_0}{m}e^{-i\omega_D t}$$

$$z_0=\frac{F_0}{m}\frac{1}{\left(\omega^2-\omega_D^2+\frac{ib}{m}\omega_D\right)}$$

以絕對值及幅角表示z_0最為方便:

$$z_0 = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\left(\omega^2 - \omega_D^2 + \frac{ib}{m}\omega_D\right)} \equiv Ae^{i\phi}$$

$$A = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_D^2)^2 + \left(\frac{b\omega_D}{m}\right)^2}}$$

$$\tan\phi = -\frac{\frac{b\omega_D}{m}}{(\omega^2 - \omega_D^2)}$$

$$z = z_0 e^{-i\omega_D t} = Ae^{-i(\omega_D t + \phi)}$$

其實數部即原方程式實數解

$$\mathrm{Re}\, z = \mathrm{Re}\, Ae^{-i(\omega_D t + \phi)} = A\cos(\omega_D t + \phi) \equiv x_r$$

這個就稱為共振解，並沒有任何自由度可以附合起始條件。

對於非齊次方程式，當我們猜到一個解之後，可以在其上加上對應的齊次方程式的解，而仍然滿足一樣的非齊次方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega_D t \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

$$x_s = x_m \cdot e^{-\frac{b}{2m}t}\,[\cos(\omega' t + \phi)]$$

$$x = x_r + x_s$$

$$x_r = A\cos(\omega_D t + \phi)$$

$$x_s = x_m \cdot e^{-\frac{b}{2m}t}\,[\cos(\omega' t + \phi)]$$

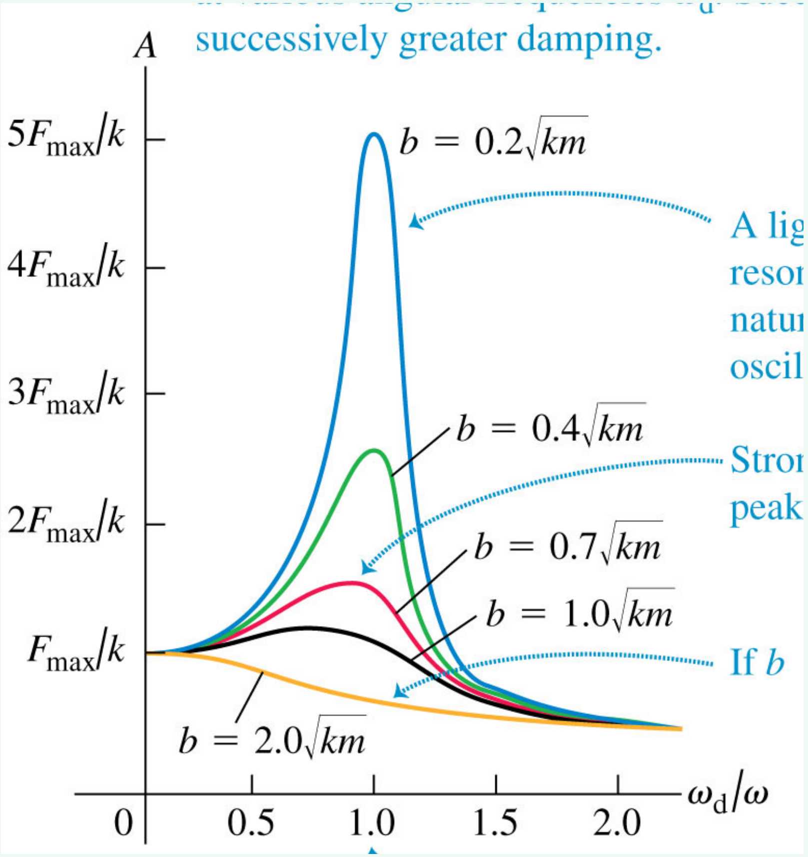
有兩個未知常數可以附合起始條件

這個解滿足微分方程式，而且可以滿足起始條件，
根據微分方程式基本定理，它必然是唯一的解。

非共振解會逐漸減小，而共振解則不會，因此過了一段時間，非共振解即可忽略，起始條件的影響會消失，只有共振解的效應必須考慮。

$$x = x_r + x_s \rightarrow x_r$$

$$x \rightarrow A\cos(\omega_D t + \phi)$$



$$x_r = A\cos(\omega_D t + \phi)$$

$$A = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_D^2)^2 + \left(\frac{b\omega_D}{m}\right)^2}}$$

震盪的振幅與外力的振幅成正比

以外力的頻率來震盪，而不是彈簧的自然頻率！

外力頻率越接近彈簧的自然頻率，振動也就越大！ $\omega_D \to \omega$ $A \uparrow$

共振曲線的寬度與阻力大小成正比

費曼演講集 V1 Chapter 21,22,23

14.9 •• An object is undergoing SHM with period 0.900 s and amplitude 0.320 m. At $t = 0$ the object is at $x = 0.320$ m and is instantaneously at rest. Calculate the time it takes the object to go (a) from $x = 0.320$ m to $x = 0.160$ m and (b) from $x = 0.160$ m to $x = 0$.

14.9. **IDENTIFY:** For SHM the motion is sinusoidal.

SET UP: $x(t) = A\cos(\omega t)$.

EXECUTE: $x(t) = A\cos(\omega t)$, where $A = 0.320$ m and $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{0.900\text{ s}} = 6.981$ rad/s.

(a) $x = 0.320$ m at $t_1 = 0$. Let t_2 be the instant when $x = 0.160$ m. Then we have

$0.160\text{ m} = (0.320\text{ m})\cos(\omega t_2)$. $\cos(\omega t_2) = 0.500$. $\omega t_2 = 1.047$ rad. $t_2 = \dfrac{1.047\text{ rad}}{6.981\text{ rad/s}} = 0.150$ s. It takes $t_2 - t_1 = 0.150$ s.

(b) Let t_3 be when $x = 0$. Then we have $\cos(\omega t_3) = 0$ and $\omega t_3 = 1.571$ rad. $t_3 = \dfrac{1.571\text{ rad}}{6.981\text{ rad/s}} = 0.225$ s. It takes $t_3 - t_2 = 0.225\text{ s} - 0.150\text{ s} = 0.0750$ s.

EVALUATE: Note that it takes twice as long to go from $x = 0.320$ m to $x = 0.160$ m than to go from $x = 0.160$ m to $x = 0$, even though the two distances are the same, because the speeds are different over the two distances.

14.66 ••• An object is undergoing SHM with period 0.300 s and amplitude 6.00 cm. At $t = 0$ the object is instantaneously at rest at $x = 6.00$ cm. Calculate the time it takes the object to go from $x = 6.00$ cm to $x = -1.50$ cm.

14.66. **IDENTIFY:** Apply $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$

SET UP: $x = A$ at $t = 0$, so $\phi = 0$. $A = 6.00$ cm. $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{0.300\text{ s}} = 20.9\text{ rad/s}$, so

$x(t) = (6.00\text{ cm})\cos)([20.9\text{ rad/s}]t)$.

EXECUTE: $t = 0$ at $x = 6.00$ cm. $x = -1.50$ cm when $-1.50\text{ cm} = (6.00\text{ cm})\cos((20.9\text{ rad/s})t)$.

$t = \left(\dfrac{1}{20.9\text{ rad/s}}\right)\arccos\left(\dfrac{1.50\text{ cm}}{6.00\text{ cm}}\right) = 0.0872$ s. It takes 0.0872 s.

EVALUATE: It takes $t = T/4 = 0.075$ s to go from $x = 6.00$ cm to $x = 0$ and 0.150 s to go from $x = +6.00$ cm to $x = -6.00$ cm. Our result is between these values, as it should be.

14.19 • A 1.50-kg mass on a spring has displacement as a function of time given by the equation

$$x(t) = (7.40\text{ cm})\cos[(4.16\text{ s}^{-1})t - 2.42]$$

Find (a) the time for one complete vibration; (b) the force constant of the spring; (c) the maximum speed of the mass; (d) the maximum force on the mass; (e) the position, speed, and acceleration of the mass at $t = 1.00$ s; (f) the force on the mass at that time.

14.19. **IDENTIFY:** Compare the specific $x(t)$ given in the problem to the general form of Eq. (14.13).

SET UP: $A = 7.40$ cm, $\omega = 4.16$ rad/s, and $\phi = -2.42$ rad.

EXECUTE: **(a)** $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{4.16\text{ rad/s}} = 1.51\text{ s}.$

(b) $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ so $k = m\omega^2 = (1.50\text{ kg})(4.16\text{ rad/s})^2 = 26.0\text{ N/m}$

(c) $v_{max} = \omega A = (4.16\text{ rad/s})(7.40\text{ cm}) = 30.8\text{ cm/s}$

(d) $F_x = -kx$ so $F_{max} = kA = (26.0\text{ N/m})(0.0740\text{ m}) = 1.92\text{ N}.$

(e) $x(t)$ evaluated at $t = 1.00$ s gives $x = -0.0125$ m. $v_x = -\omega A\sin(\omega t + \phi) = 30.4\text{ cm/s}.$

$a_x = -kx/m = -\omega^2 x = +0.216\text{ m/s}^2.$

(f) $F_x = -kx = -(26.0\text{ N/m})(-0.0125\text{ m}) = +0.325\text{ N}$

EVALUATE: The maximum speed occurs when $x = 0$ and the maximum force is when $x = \pm A$.

【Exercise 15-4】

(I) The displacement of a block attached to a spring is given by $x = 0.2\sin(12t + 0.2)m$. Find : (a) the acceleration when $x = 0.08m$; (b) the Erliest time (>0) at which $x = +0.1m$ with $v < 0$.

<解>：(a) $a = -\omega x = -11.5m/s^2$

(b) $\sin(12t + 0.2) = 0.5$

$$12t + 0.2 = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

$\because$ $v < 0$ $\cos(12t + 0.2) < 0$

$\therefore$ $\frac{\pi}{6}$不符

$$\therefore 12t + 0.2 = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow t = 0.201s$$

E7. (a) $x = A\sin(10t + \varphi)$, $v = 10A\cos(10t + \varphi)$: $a = 0.206$ m.

$(1 + \varphi)$ is in the 4th quadrant : $(1 + \varphi) = -1.33$,

So $\varphi = -2.33$ rad

(b) $x = 0.206 \sin(10t - 2.33)$m

(c) $(10t + \varphi)$ is in the 2nd quadrant : $\sin(10t + \varphi) = 0.971$,

$(10t - 2.33) = 1.81$ so $t = 0.414$ s.

P4. $\omega^2 = k/(M + m)$. From $\sum F_x$ and $\sum F_y$ find $a = \mu g$ for m.

$a_{max} = \omega^2 A = \mu g$, thus $\mu = 0.136$