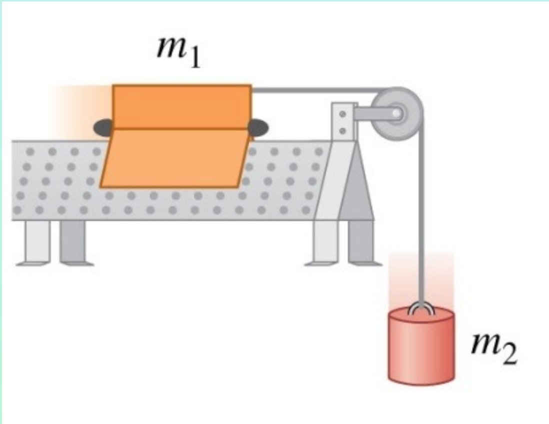
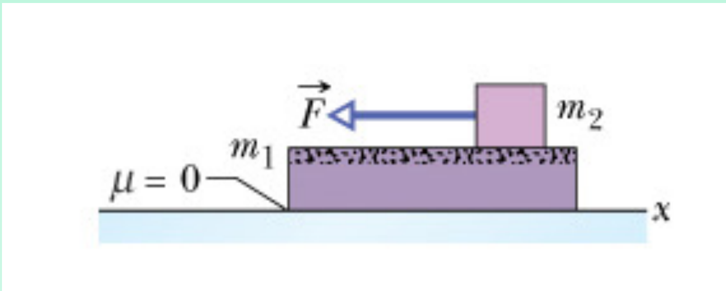
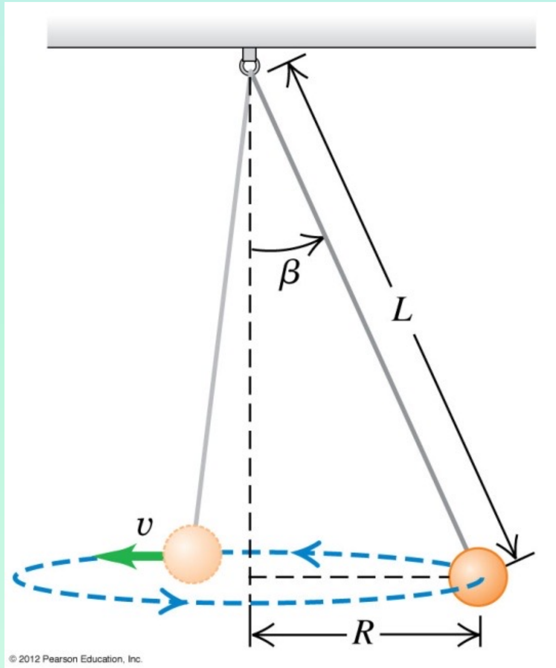
前面對牛頓力學的討論大部分都是常數力造成的等加速度運動



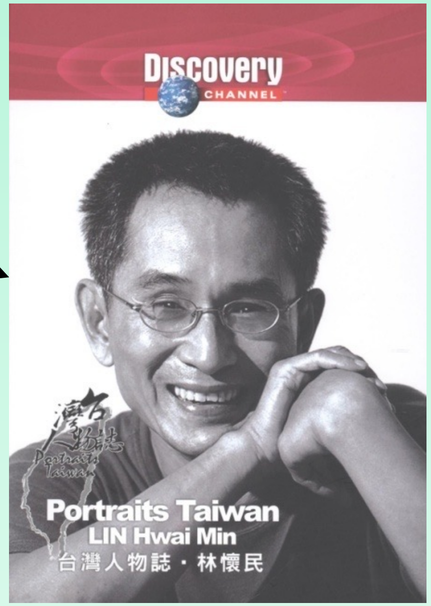




但牛頓力學最有用的是…………

運動方程式


cnsphoto


Discovery
CHANNEL
Portraits Taiwan
LIN Hwai Min
台灣人物誌・林懷民

如果我們知道力與位置等物理量的關係：$\vec{F}(\vec{r},\vec{v},\cdots)$

例如萬有引力：$\vec{F}=-G\dfrac{mM}{r^2}\hat{r}$

將力的公式代入牛頓定律$\vec{F}=m\vec{a}$，就得到位置$\vec{r}$必須滿足的方程式：

$$\vec{F}\left(\vec{r},\frac{d\vec{r}}{dt},\cdots\right)=m\vec{a}=m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Equation of Motion 運動方程式

運動方程式是一個微分方程式，若能求解，就可預測物體運動的位置。

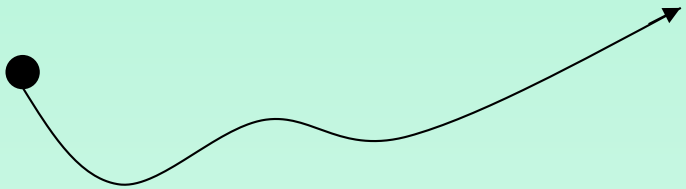
牛頓定律能預測物體的整個運動軌跡。

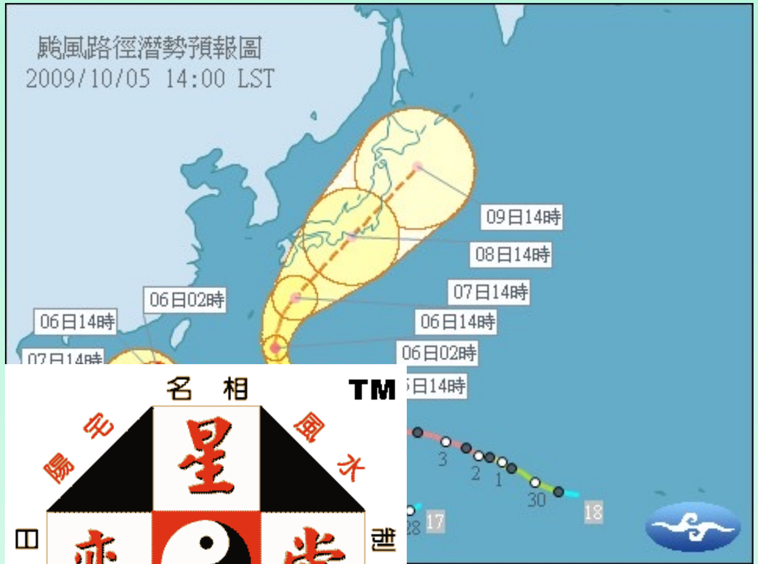
牛頓定律加上對力的描述，給定運動方程式Equation of Motion，

此系統未來任一時間的位置$\vec{r}(t)$，必須滿足這個方程式！

$$\vec{F}\left(\vec{r},\frac{d\vec{r}}{dt},\cdots\right)=m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

運動方程式Equation of Motion使我們可以預測$\vec{r}(t)$，也就是此系統未來狀態！



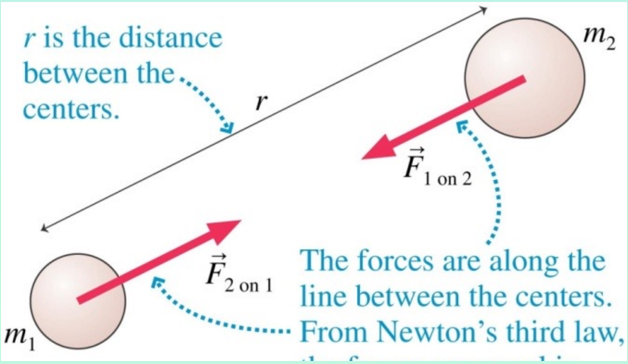


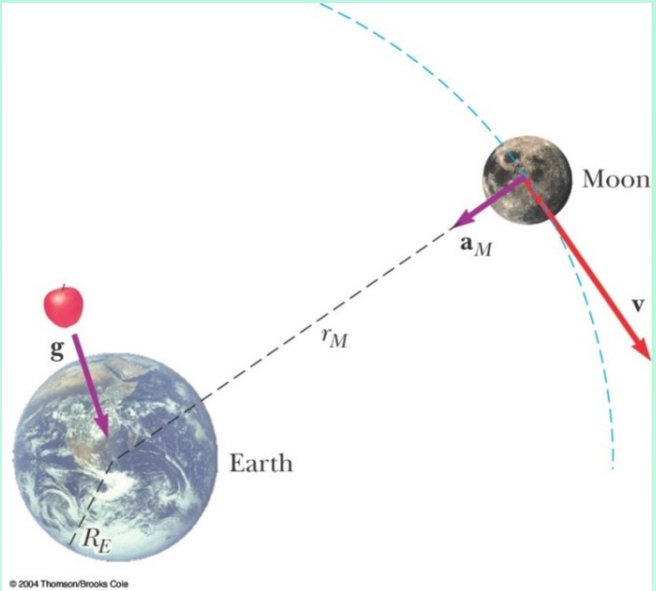
這是力學最重要的原則！

算命的第一步是找到力與位置等物理量之間的關係：$\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, \cdots)$

牛頓提供了力的描述的第一個例子：萬有引力。$\vec{F} = -G\dfrac{mM}{r^2}\hat{r}$

這是由許多的觀察，讓牛頓歸納（拼湊、猜測）出萬有引力的描述。





由加速度的方向可以推論出萬有引力是由受力者指向施力者的中心。

物體下落運動以同樣的加速度進行

a 與質量無關 $F = ma$

所以地球對地表物體的萬有引力與該物體的質量成正比！

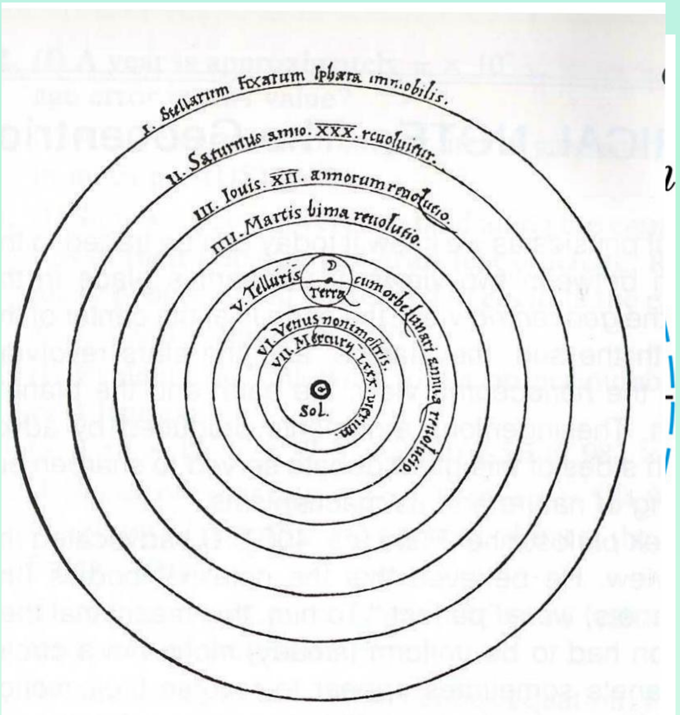
$F \propto mM$

引力與距離的關係如何？

我們必須對不同位置的引力作測量！

行星繞太陽也是由於太陽對行星的萬有引力：

九大行星系統等於對萬有引力在九個不同距離做了九次觀察與測量。



在九個不同位置，圓周軌道滿足：

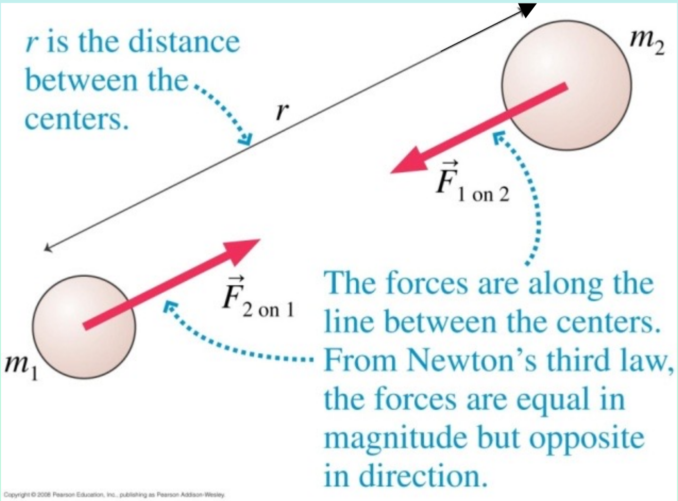
Kepler's Third Law $T^2 \propto r^3$

萬有引力提供了圓周運動的向心力。

$$F \propto \frac{v^2}{r} \propto \frac{r}{T^2} \propto \frac{1}{r^2}$$

引力必須與距離平方成反比，才能解釋數據。

萬有引力



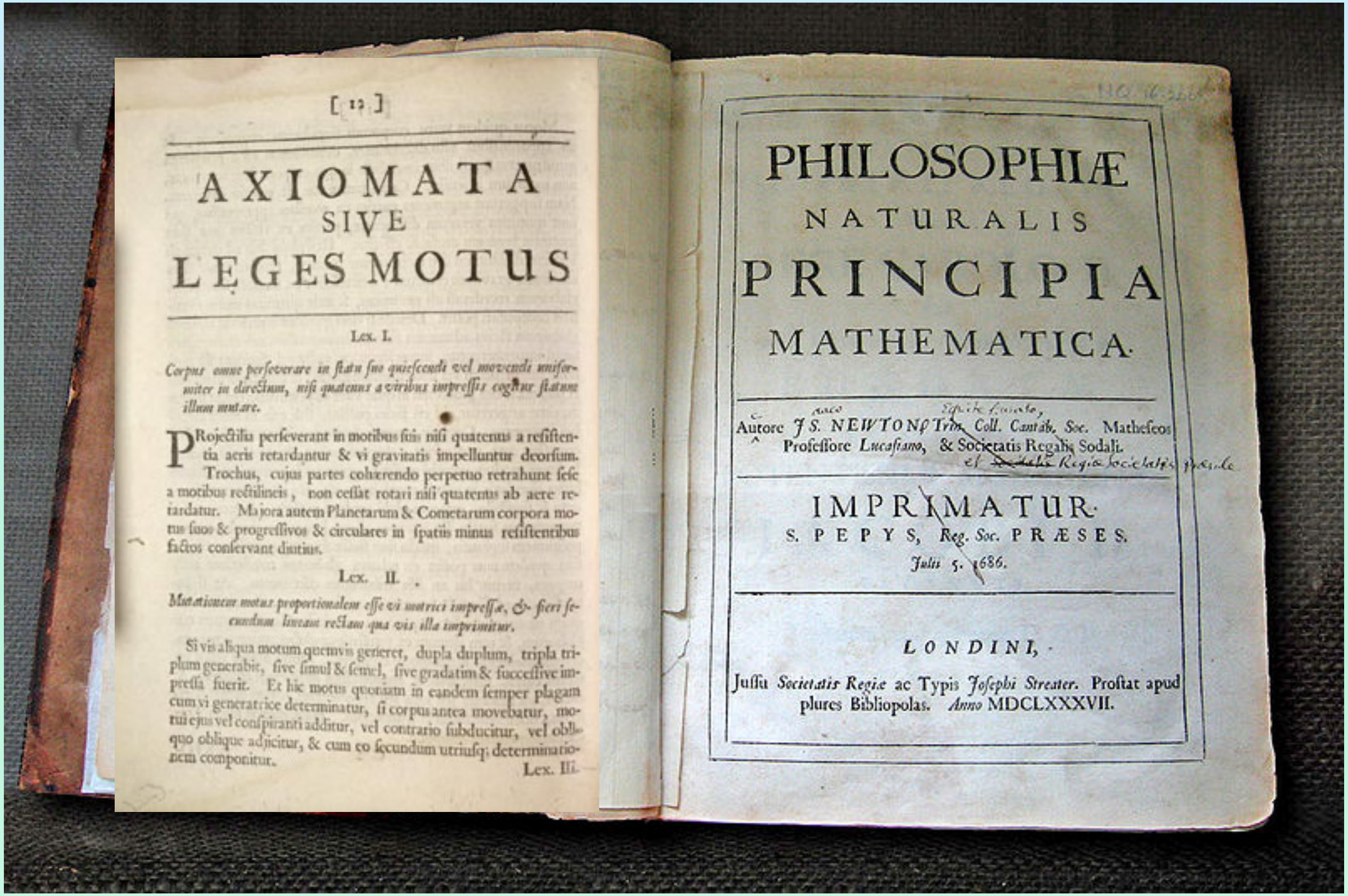
$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\hat{r}$$

代入運動定律

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

運動方程式

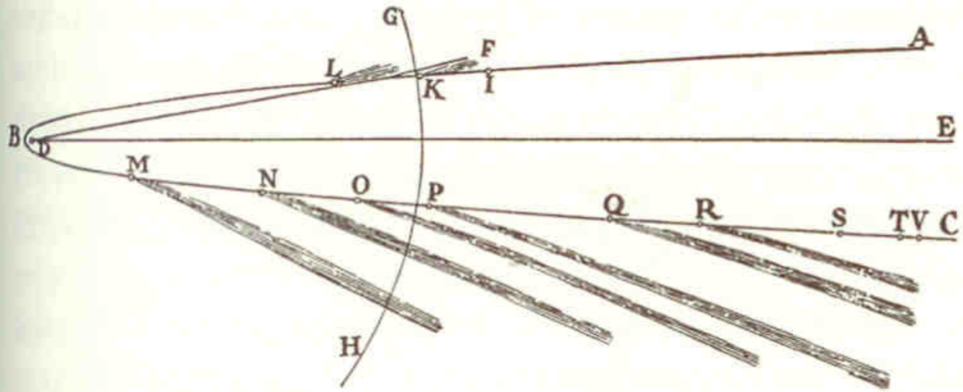
牛頓將此猜想運用於月球軌道的計算！



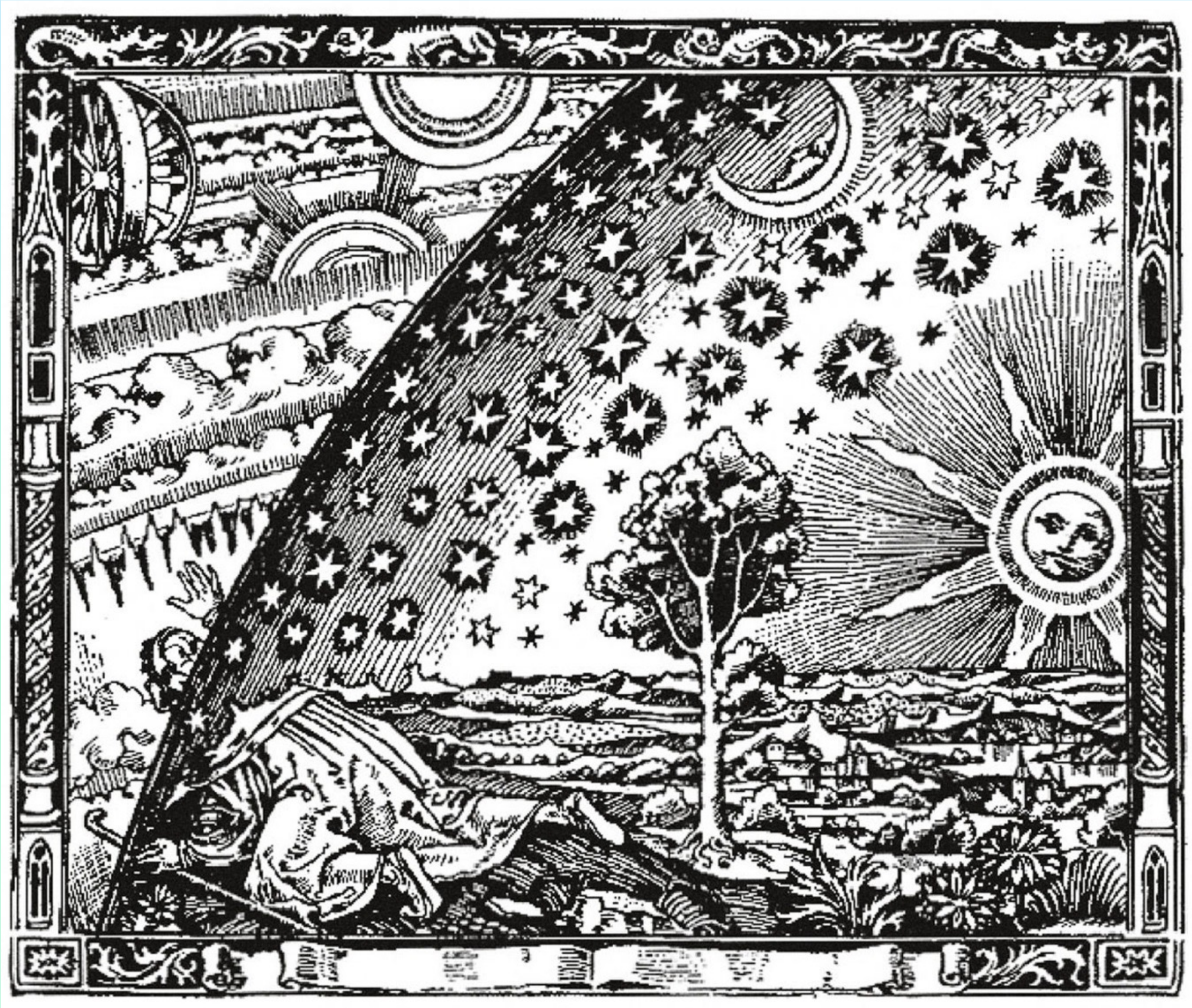
Newton's own copy of his *Principia*, with hand-written corrections

" a Mathematical demonstration of Copernican hypothesis"

Makes out all the phenomena of the celestial motions by the only supposition of a gravitation towards he center of sun, decreasing as the squares of the distances.



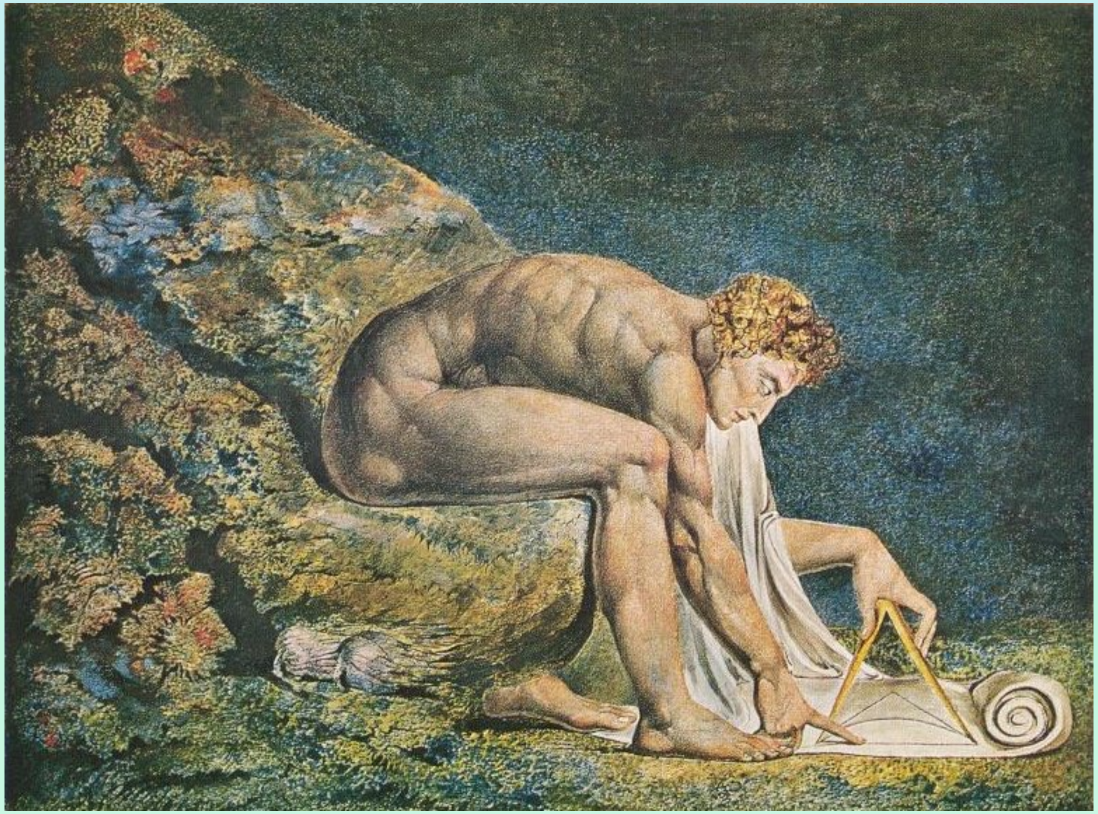
The comet of 1680—"as observed by Flamsteed" and "corrected by Dr. Halley." Newton also collated sightings by Ponthio in Rome, Gallet in Avignon, Ango at La Fleche, "a young man" at Cambridge, and Mr. Arthur Storer near Hunting Creek, in Maryland, in the confines of Virginia. "Thinking it would not be improper, I have given . . . a true representation of the orbit which this comet described, and of the tail which it emitted in several places." He concludes that the tails of comets always rise away from the sun and "must be derived from some reflecting matter"—smoke, or vapor.



人類探頭進入自然現象的內在，了解帶動自然運轉背後零件與規則！

Engraving around 1530 (from Hemleben: "Galilei")

牛頓成為人類對自然的控制能力的象徵！



Newton, by William Blake; here, Newton is depicted critically as a "divine geometer”

物體運動軌跡由運動方程式及起始條件完全決定，如同機械一般。

整個宇宙就是一個巨大的機器，根據一個巨大的運動方程式運轉

力學　　　Mechanics　　　機械學

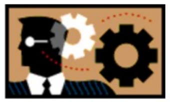
We may regard the present state of the universe as the effect of its past and the cause of its future. An intellect which at a certain moment would know all forces that set nature in motion, and all positions of all items of which nature is composed, if this intellect were also vast enough to submit these data to analysis, it would embrace in a single formula the movements of the greatest bodies of the universe and those of the tiniest atom; for such an intellect nothing would be uncertain and the future just like the past would be present before its eyes.

—Pierre Simon Laplace,

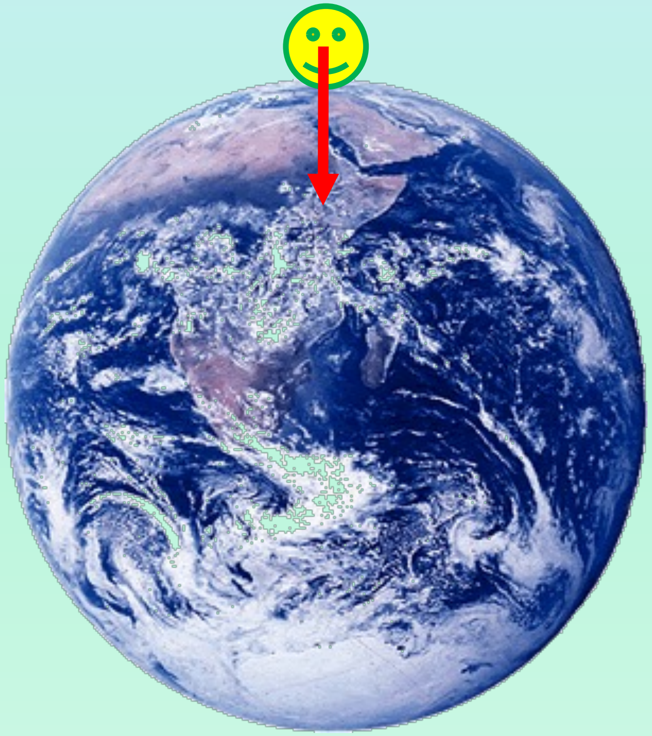
A Philosophical Essay on Probabilities

Pierre-Simon Laplace (1749–1827)

DETERMINISM VS. FREE WILL



An ancient philosophical conundrum



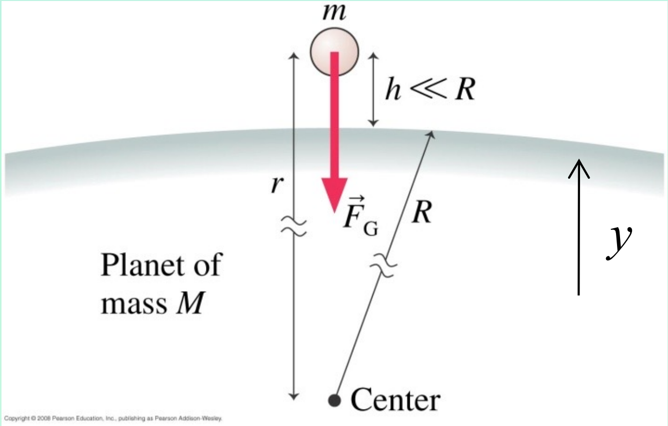
地表附近的運動：

地球對地表上物體的萬有引力，與地心距離平方成反比。

物體高度遠小於地球半徑，與地心距離是一個常數。

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{R^2}\hat{r} = -mg\hat{j}$$

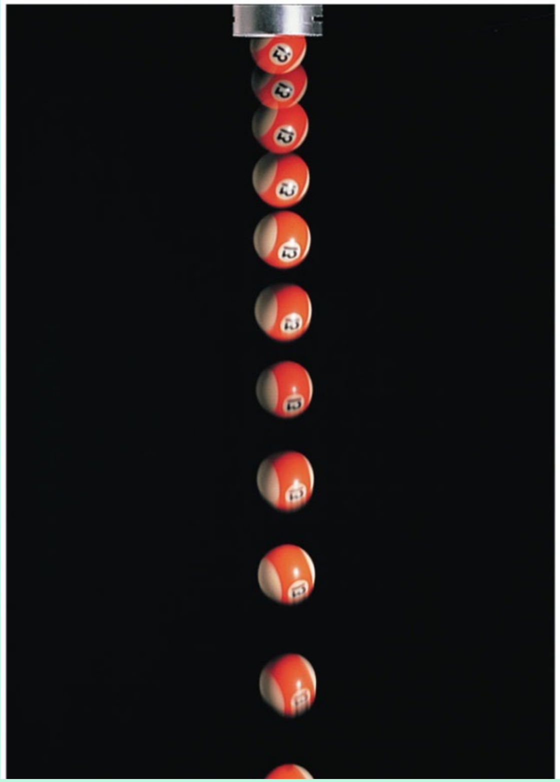
選向上方向為y方向。

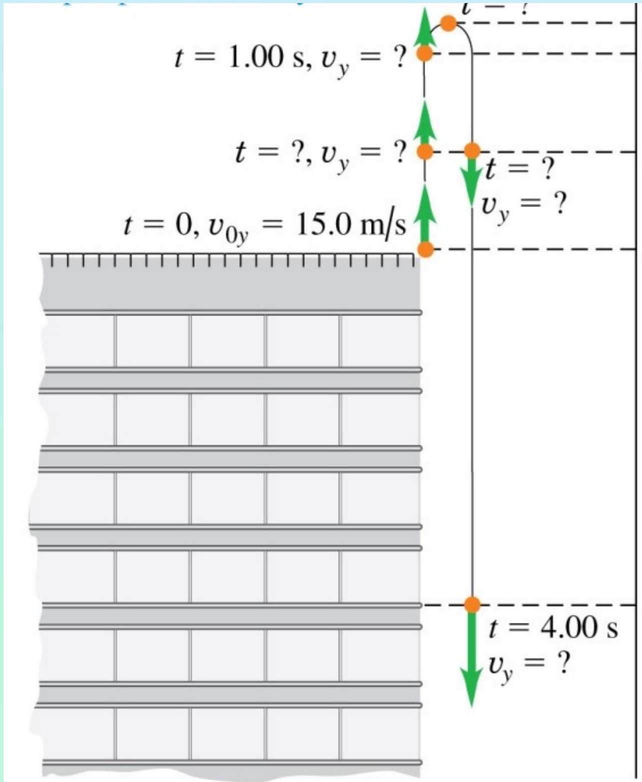


地表上重力大致上與位置無關。

地表附近，物體的加速度是一個常數。

地表附近的自由落體或拋體





$$\vec{F} = -mg\hat{j}$$

$$m\vec{a} = -mg\hat{j}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

地表附近自由落體的運動方程式！這是微分方程式！

解微分方程式

$$v = \int_{t_0}^{t} dt'(-g) = -gt + gt_0 = -gt + c_1$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

$$\frac{dy}{dt} = v$$

引入速度，使微分少一次。

$$\frac{dv}{dt} = -g$$

速度的微分是一個多項式，
因此速度也是一個多項式！

多項式的微分冪次會降一次，
因此速度是時間的線性函數。

$$v = -gt + c_1$$

這裡有一個常數，如果沒有這個常數，
起始速度只能為零。

$$\frac{dy}{dt} = -gt + c_1$$

位置的微分是一個多項式，
因此位置也是一個多項式！

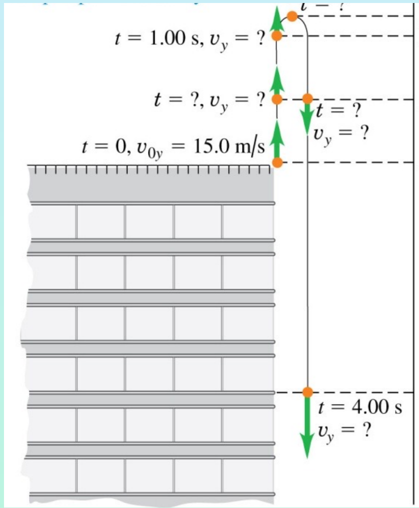
多項式的微分冪次會降一次，
因此位置是時間的二次函數。

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1t + c_0$$

如果沒有這個常數，
起始位置只能為零。

這裡有兩個未知的常數，顯示單靠微分方程式無法決定唯一解！

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1 t + c_0 \qquad v = -gt + c_1$$



微分方程式無法決定唯一解

但我們還未輸入起始的位置與速度，稱為起始條件！

$$y(0) = y_0 \qquad v(0) = v_0$$

無疑地，起始條件會影響運動的軌跡！

解的表示式中的兩個未定常數c_0, c_1，正好由兩個起始條件來決定：

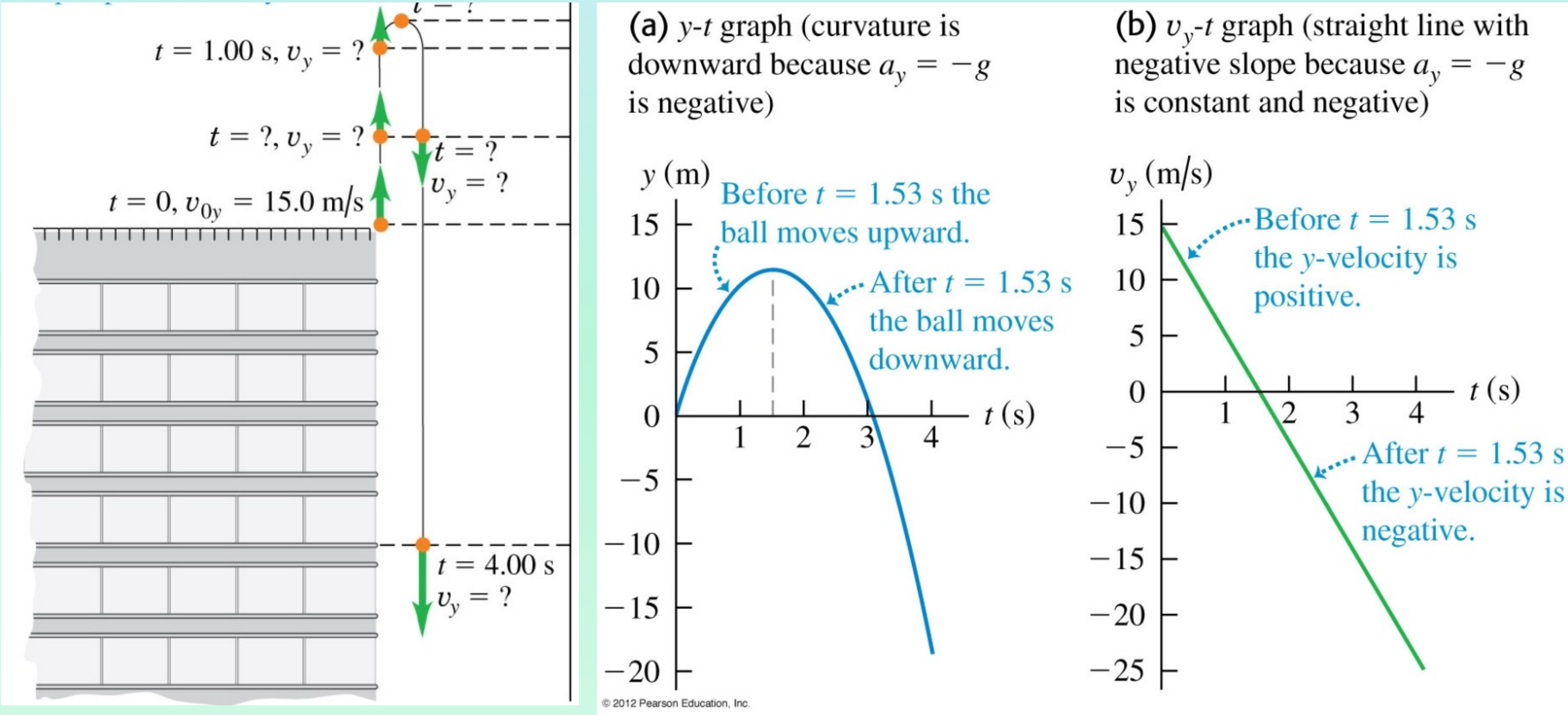
$$y(0) = c_0 = y_0 \qquad v(0) = c_1 = v_0$$

運動方程式加上兩個起始條件就決定唯一的一個解！

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0$$

要求出物體運動路徑，必須加上初位置初速度兩個起始條件

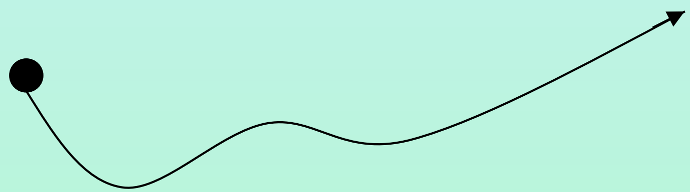
垂直拋體



$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0$$

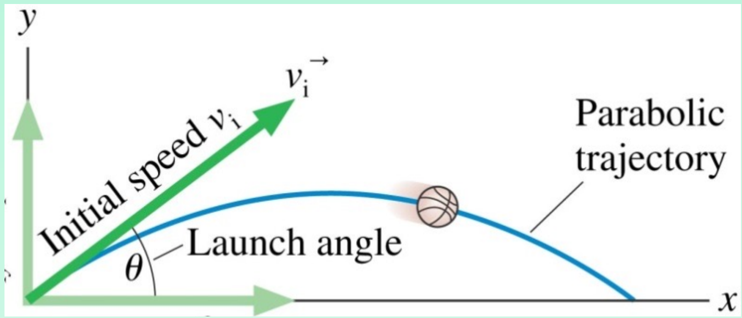
牛頓定律加上力的描述給定運動方程式，再加上起使條件(起始位置與速度），便能決定此系統未來任一時間的狀態！

$$\vec{F} = m\vec{a}$$



起始條件 $\vec{r}(0), \vec{v}(0)$

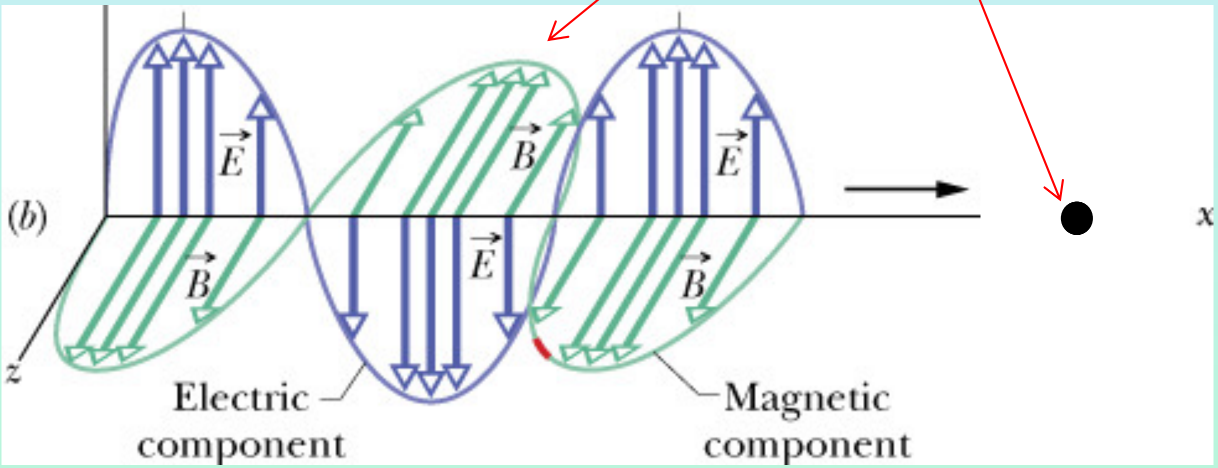
$\vec{r}(t)$ 函數可唯一解出

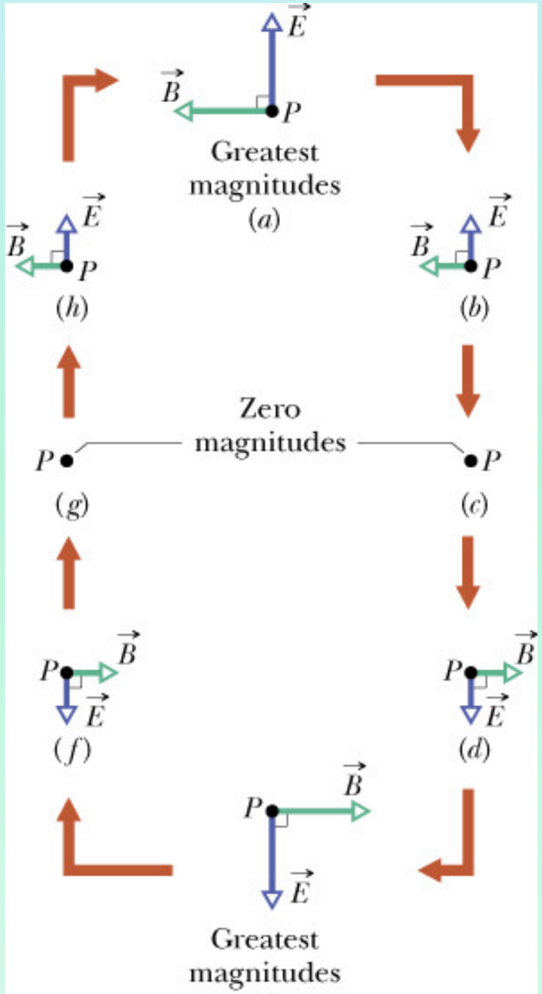


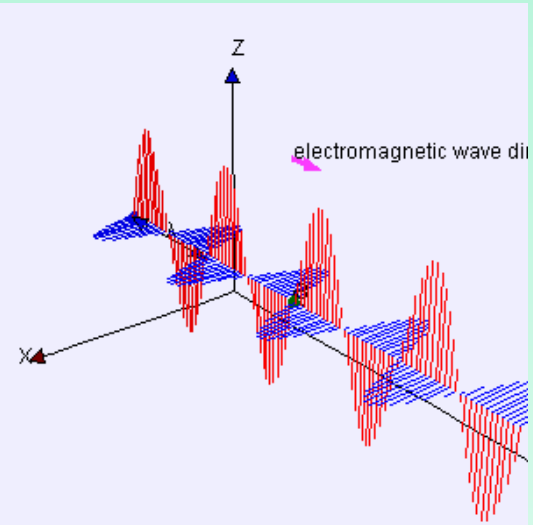
電磁波對帶電雜質粒子的作用：

電磁波打在一個點電荷上

點電荷處的電磁場





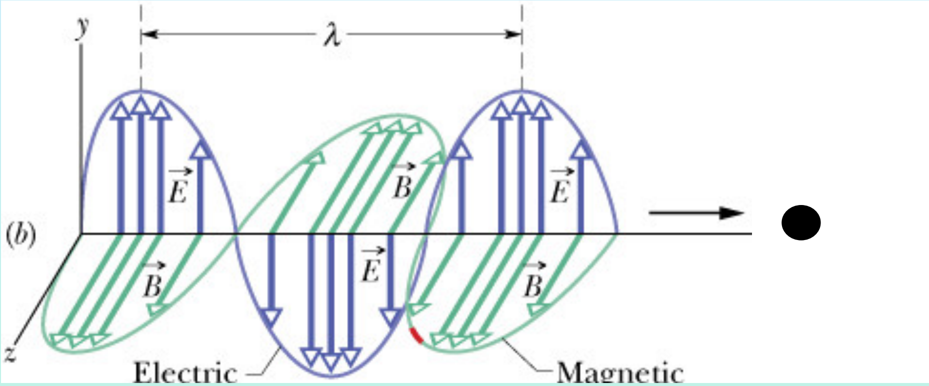


點電荷處的電場

$$E(t) = E_0 \cos \omega t$$

點電荷受的電力

$$F(t) = qE_0 \cos \omega t$$



$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{qE_0}{m}\cos\omega t$$

運動方程式

速度的微分是一個三角函數，位置的微分是一個三角函數，
因此速度也是一個三角函數！因此位置也是一個三角函數！

$$\frac{dv}{dt} = \frac{qE_0}{m}\cos\omega t$$

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{qE_0}{m\omega}\sin\omega t + c_1$$

$$\frac{d(\sin\omega t)}{dt} = \omega\cos\omega t$$

$$\frac{d(\cos\omega t)}{dt} = -\omega\sin\omega t$$

$$v = \frac{qE_0}{m\omega}\sin\omega t + c_1$$

$$y = -\frac{qE_0}{m\omega^2}\cos\omega t + c_1 t + c_0$$

c_0, c_1正好由起始位置及起始速度決定。

$$y = -\frac{qE_0}{m\omega^2}\cos\omega t + v_0 t + \frac{qE_0}{m\omega^2} + y_0$$

設初速及初位置為零：

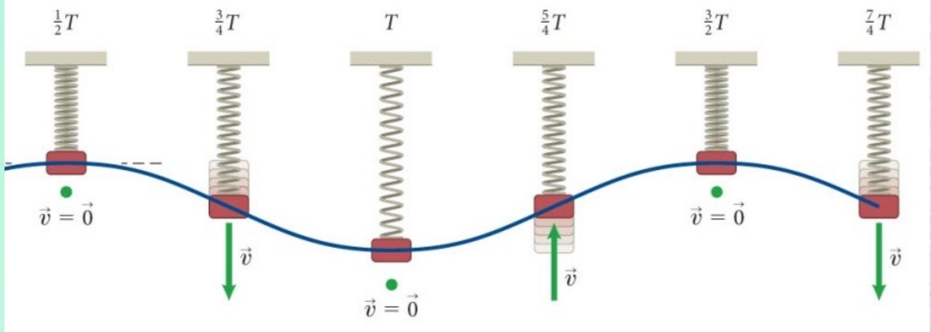
$$y = -\frac{qE_0}{m\omega^2}\cos\omega t + v_0 t + \frac{qE_0}{m\omega^2} + y_0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{qE_0}{m\omega^2}(1-\cos\omega t)$$

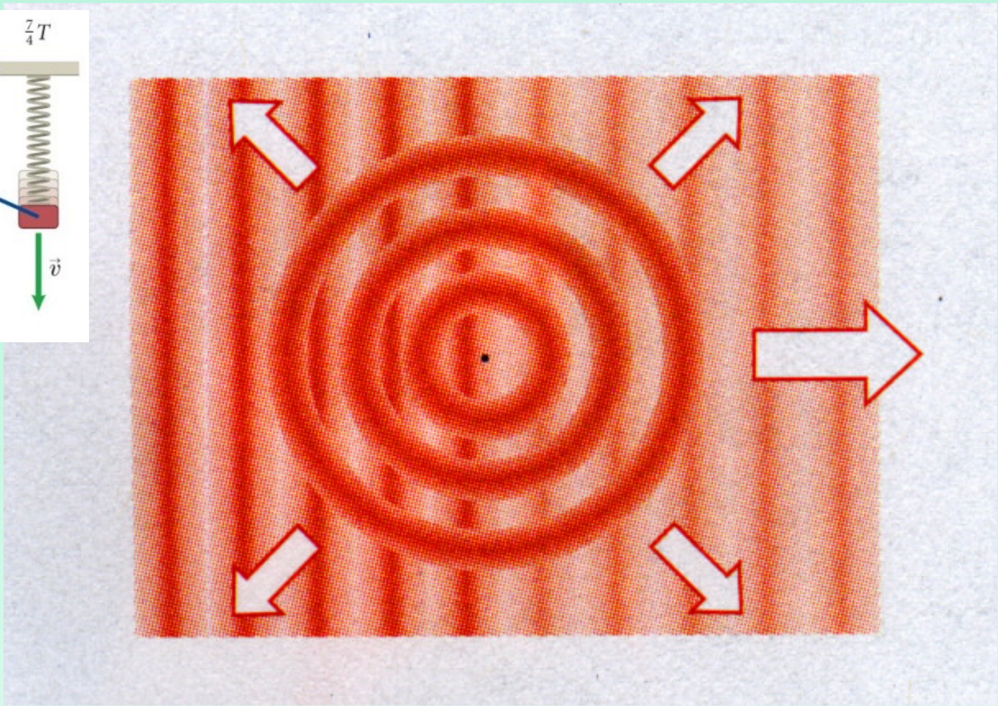
電磁波打在一個點電荷上，此點電荷會以電磁波的頻率ω為頻率，進行振盪運動。

此震盪的點電荷因加速度又會放出電磁波，稱為散射波。

此散射電磁波的頻率即為ω，與原來入射電磁波相同。

它是點狀波源，產生的散射波會向四面傳播。注意入射波是朝單一方向傳播。

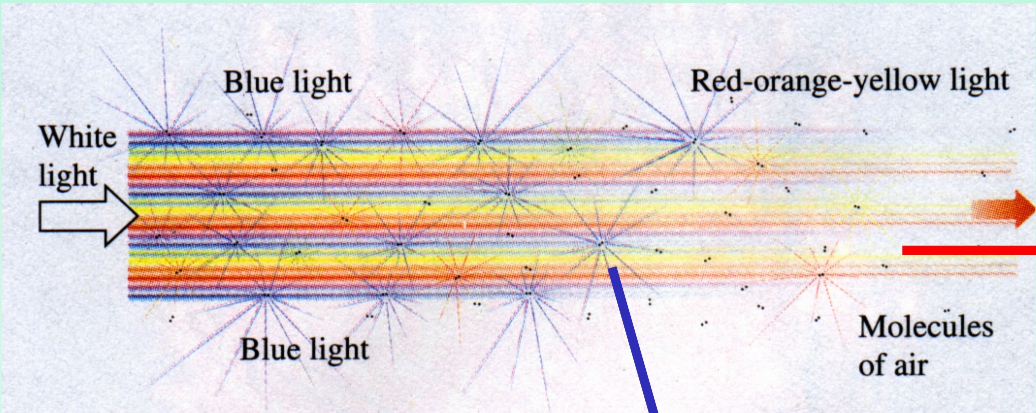




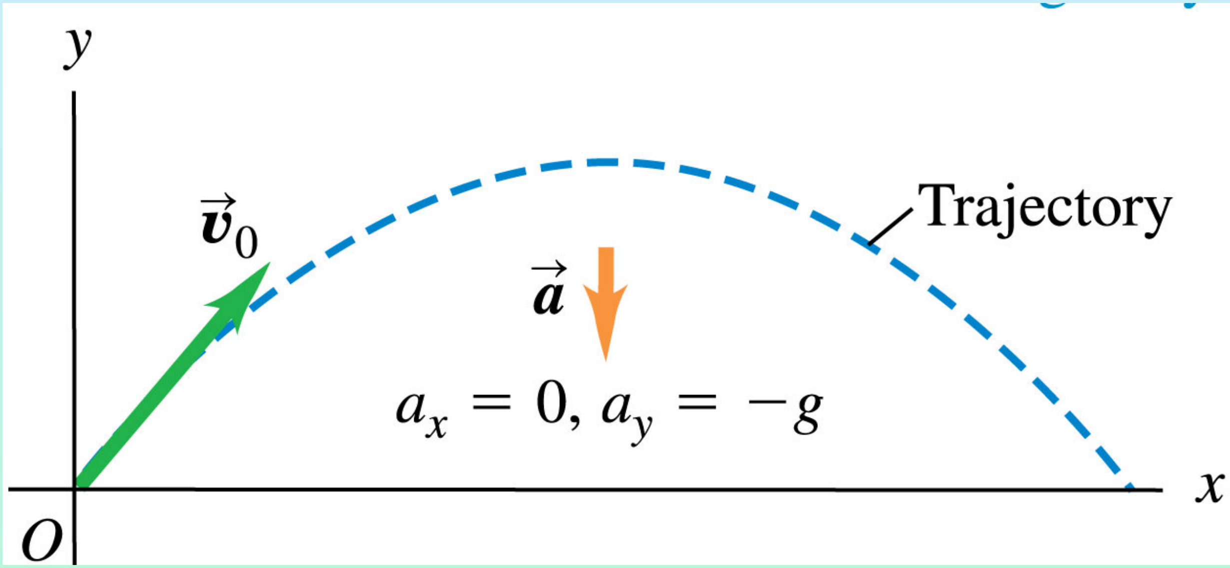
天空的顏色就是來自太陽光被大氣層分子散射的結果

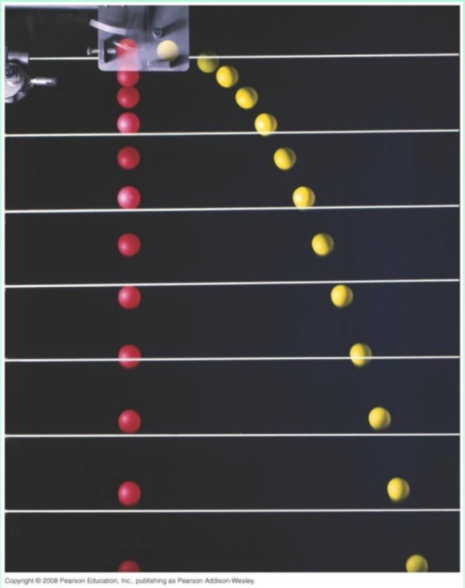
因此不是正對太陽也有陽光散射進入觀察者的眼睛。

$I \propto f^4$ Rayleigh Scattering 藍光頻率高，散射較多。



二維拋體運動





以分量來討論非常方便：

$$\vec{F} = m\vec{a} = -mg\hat{j}$$

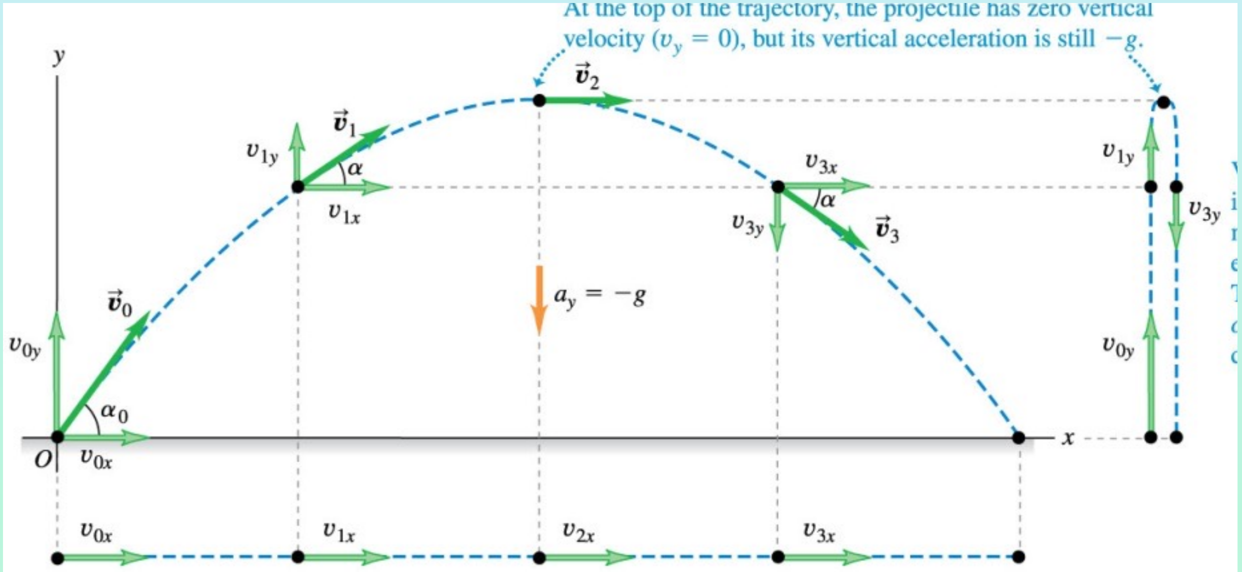
$$m\vec{a} = -mg\hat{j}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

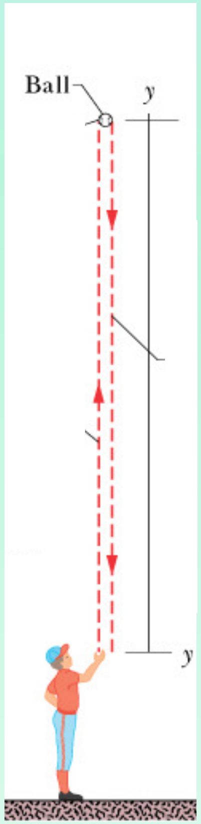
垂直與水平方向彼此獨立。因此可以分開求解！

水平方向是等速運動： $\dfrac{d^2x}{dt^2}=0$ $\quad v_x=v_{x0}$ $\quad x(t)=v_{x0}t+x_0$



兩者疊加得到拋體運動軌跡：

垂直方向為有初速的自由落體：



$$v_y=-gt+v_{y0}$$

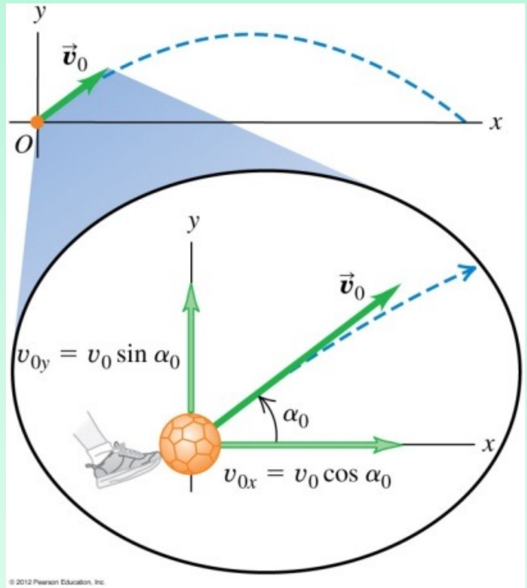
$$\frac{d^2y}{dt^2}=-g \qquad y(t)=-\frac{1}{2}gt^2+v_{y0}t+y_0$$

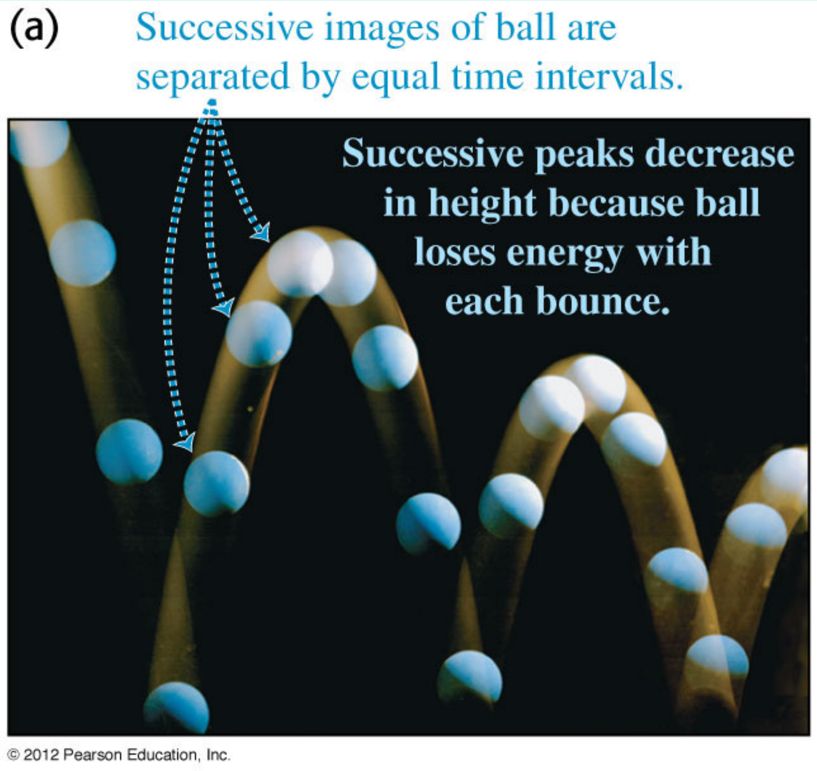
垂直運動即一自由落體，水平運動即一等速運動。

起始條件：x_0, y_0

$$v_{x0}=v_0\cos\alpha_0$$

$$v_{y0}=v_0\sin\alpha_0$$



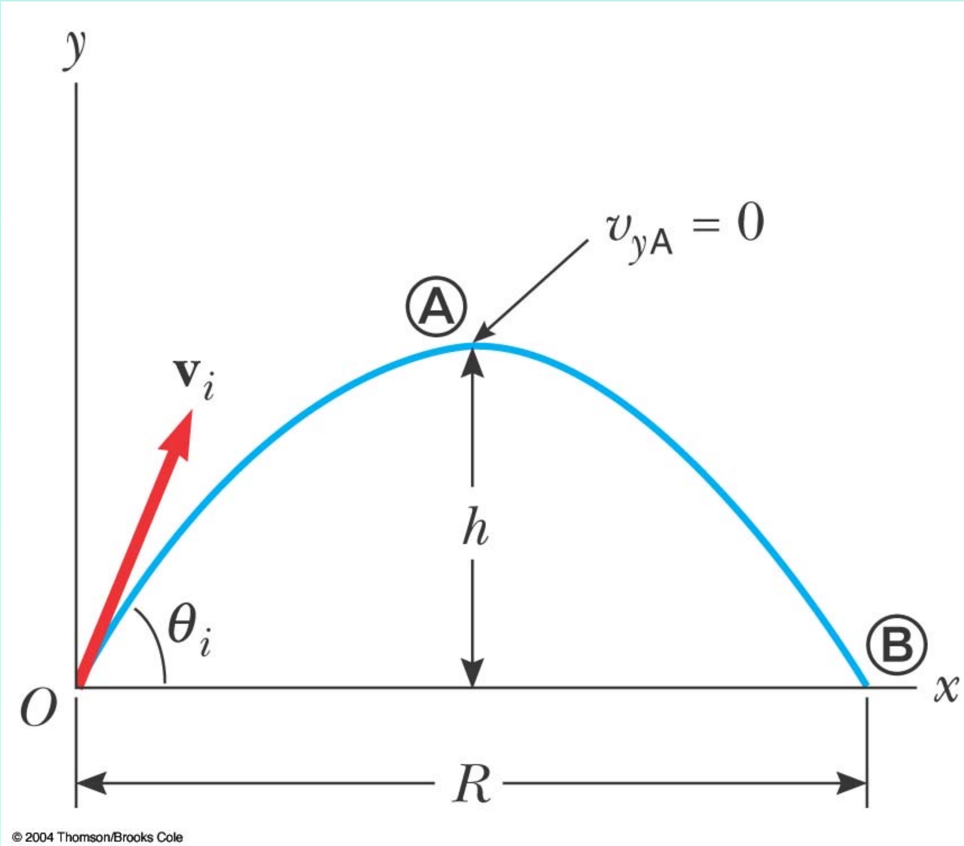


垂直位置為水平位置的二次函數。

拋體運動的軌跡是拋物線！

有了位置函數，所有問題都可以解答：

最高高度與射程 Height and Range



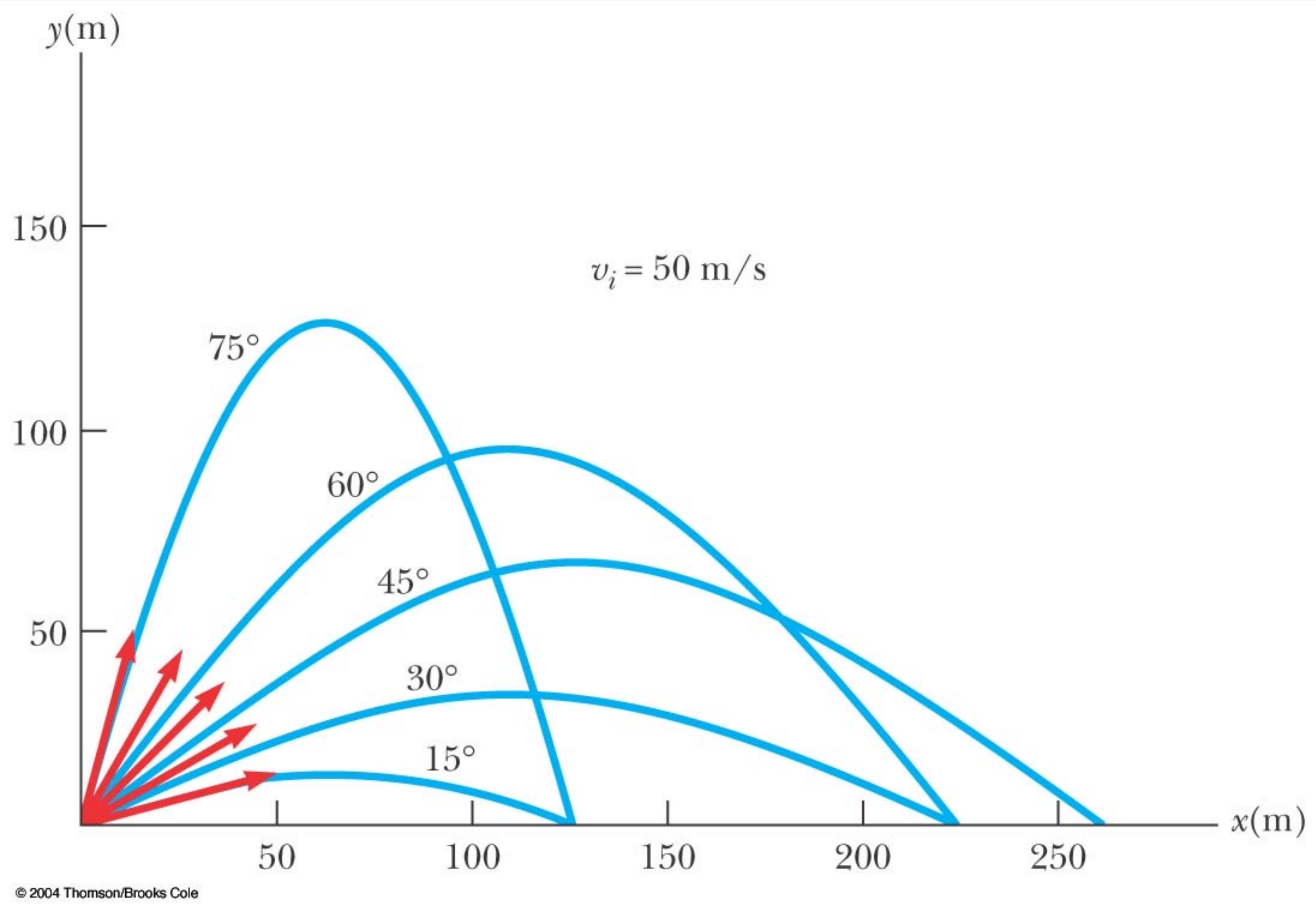
$$x(t) = v_{x0}t + x_0$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{y0}t + y_0$$

最遠射程發生在 $y = 0$。

最高點發生在 $v_y = 0$。

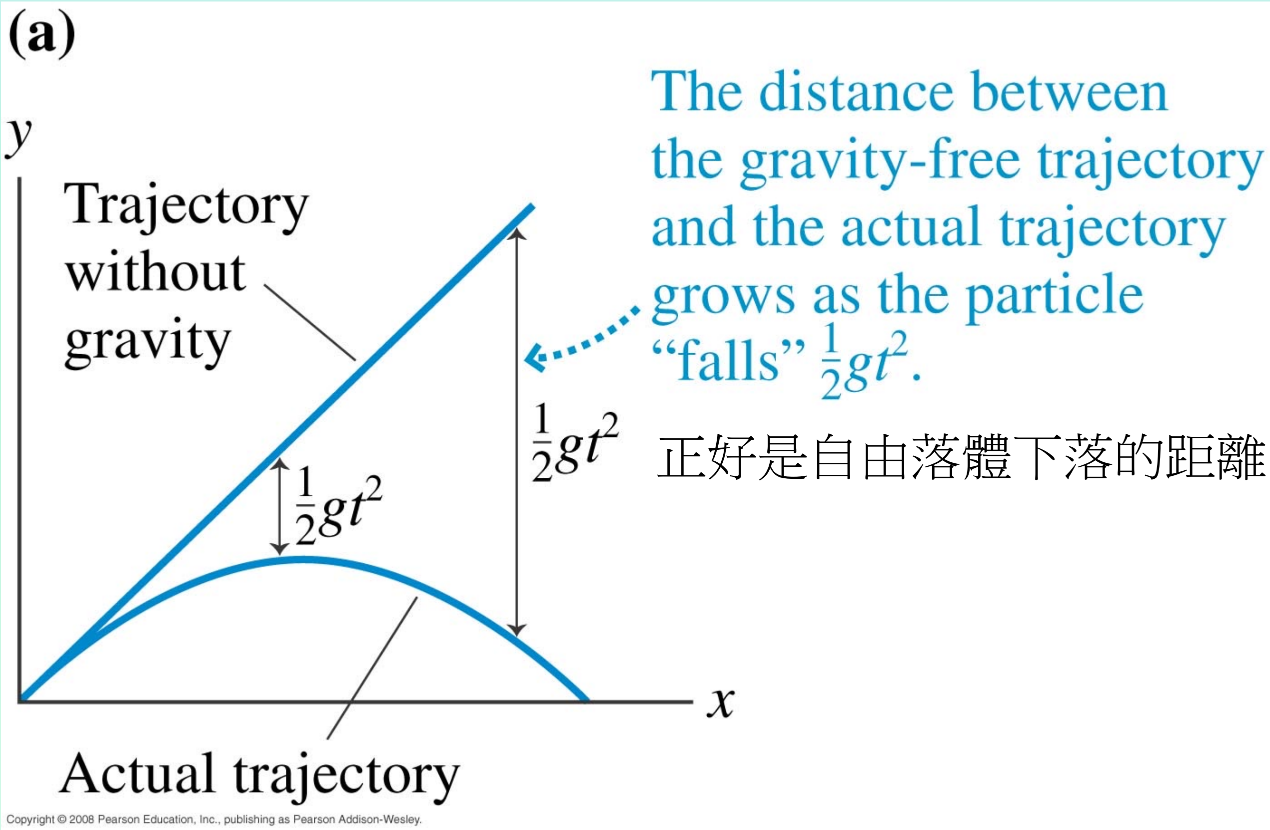
求出對應時間再代回位置函數。

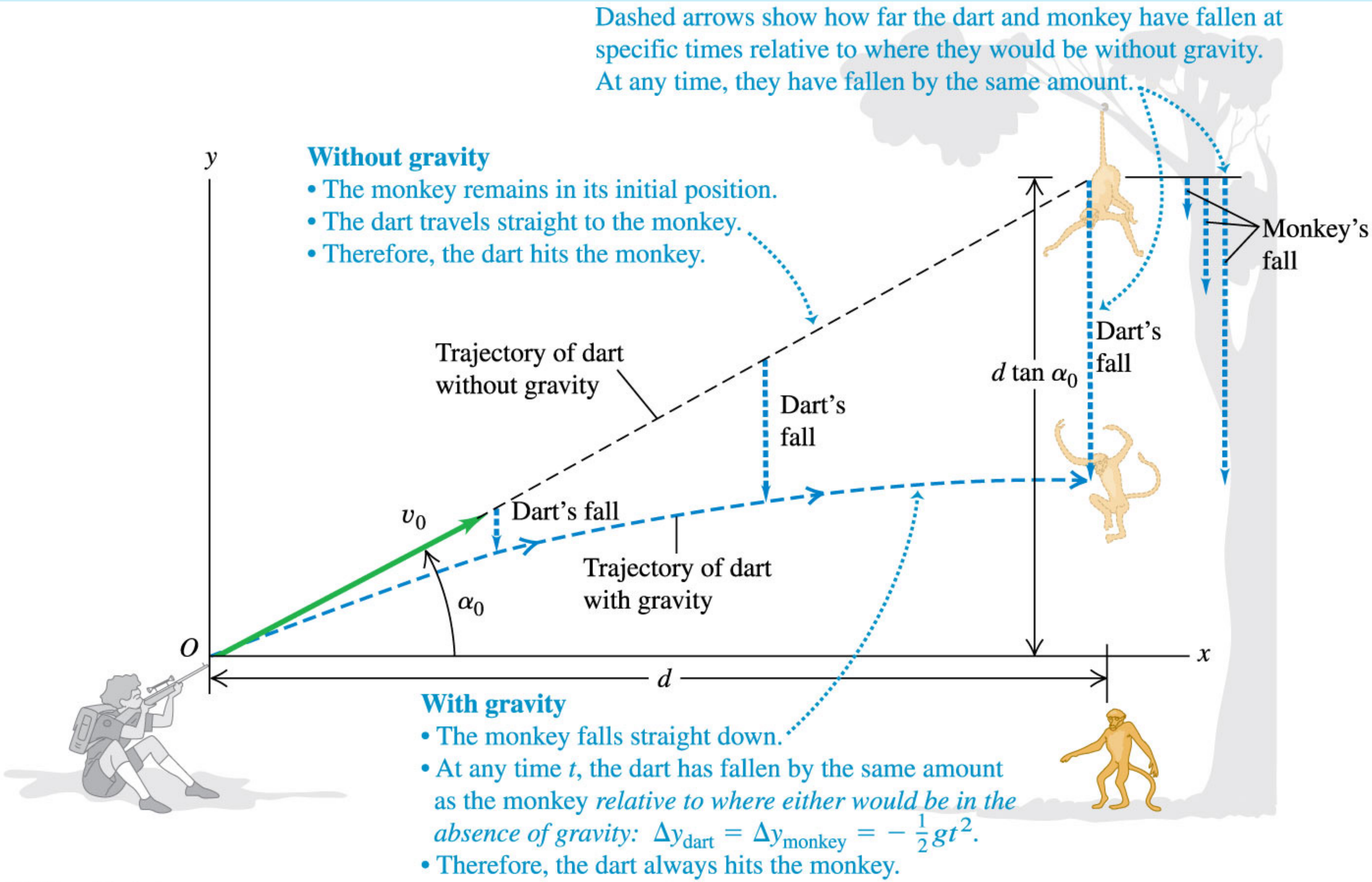


同樣的初速，在45°角時，射程最遠

$x(t) = v_{x0}t + x_0$

$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{y0}t + y_0$



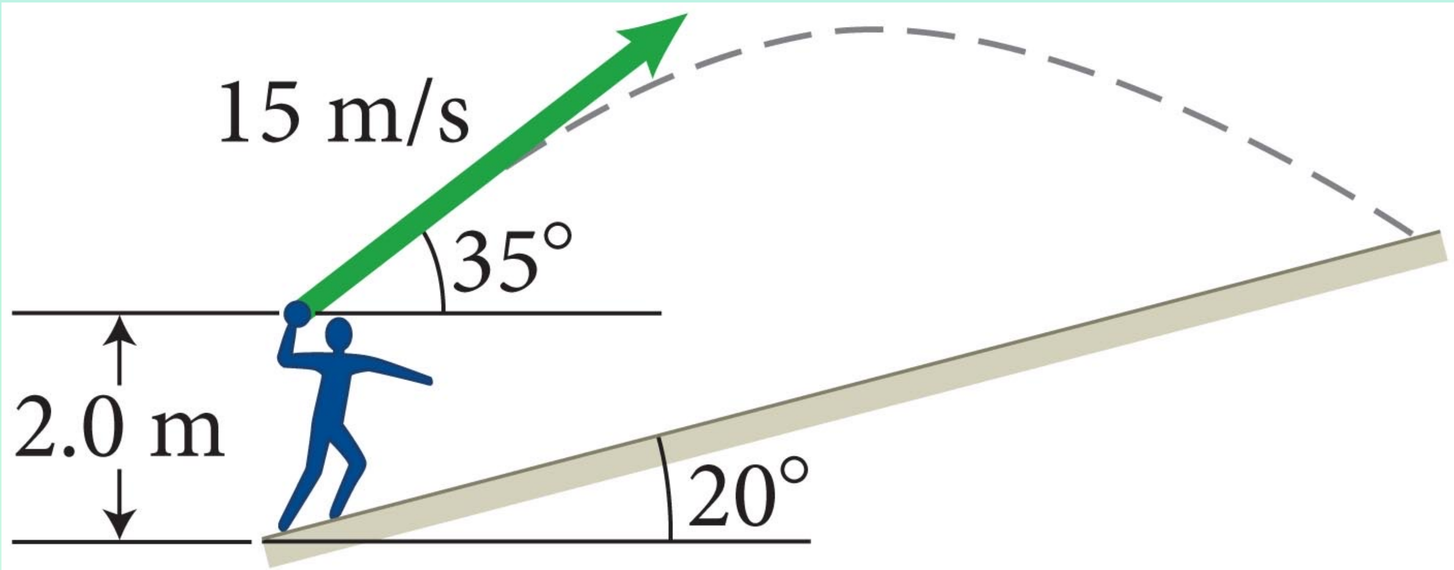

Dashed arrows show how far the dart and monkey have fallen at specific times relative to where they would be without gravity. At any time, they have fallen by the same amount.
Without gravity
• The monkey remains in its initial position.
• The dart travels straight to the monkey.
• Therefore, the dart hits the monkey.
y
Monkey's fall
Dart's fall
Trajectory of dart without gravity
Dart's fall
$d \tan \alpha_0$
v_0
Dart's fall
Trajectory of dart with gravity
α_0
O
x
d
With gravity
• The monkey falls straight down.
• At any time t, the dart has fallen by the same amount as the monkey *relative to where either would be in the absence of gravity:* $\Delta y_{\text{dart}} = \Delta y_{\text{monkey}} = -\frac{1}{2}gt^2$.
• Therefore, the dart always hits the monkey.

https://www.youtube.com/watch?v=cxvsHNRXLjw

http://techtv.mit.edu/collections/physicsdemos/videos/735-monkey-and-a-gun

$$x(t) = v_{x0}t + x_0$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{y0}t + y_0$$



問落地距離。

10.56. The vertical height of the ground rises as the horizontal position moves to the right, according to

$$y_{\text{slope}}(x) = x\tan(\theta_{\text{slope}}) \tag{1}$$

The vertical position of the ball is given by $y(t) = y_{\text{i}} + v_{y,\text{i}}\Delta t + \frac{1}{2}a_y\Delta t^2 = y_{\text{i}} + v_{\text{i}}\sin(\theta)\Delta t - \frac{1}{2}g\Delta t^2$. We wish to relate this to the x direction. Ignoring air resistance the x component of the velocity is constant, so

$$\Delta t = \frac{x}{v_{x,\text{i}}} = \frac{x}{v_{\text{i}}\cos(\theta)}.$$

Inserting this into the equation we obtained from the y direction, we have

$$y(x) = y_{\text{i}} + v_{\text{i}}\sin(\theta)\left(\frac{x}{v_{\text{i}}\cos(\theta)}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_{\text{i}}\cos(\theta)}\right)^2$$

or

$$y(x) = y_{\text{i}} + x\tan(\theta) - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_{\text{i}}\cos(\theta)}\right)^2 \tag{2}$$

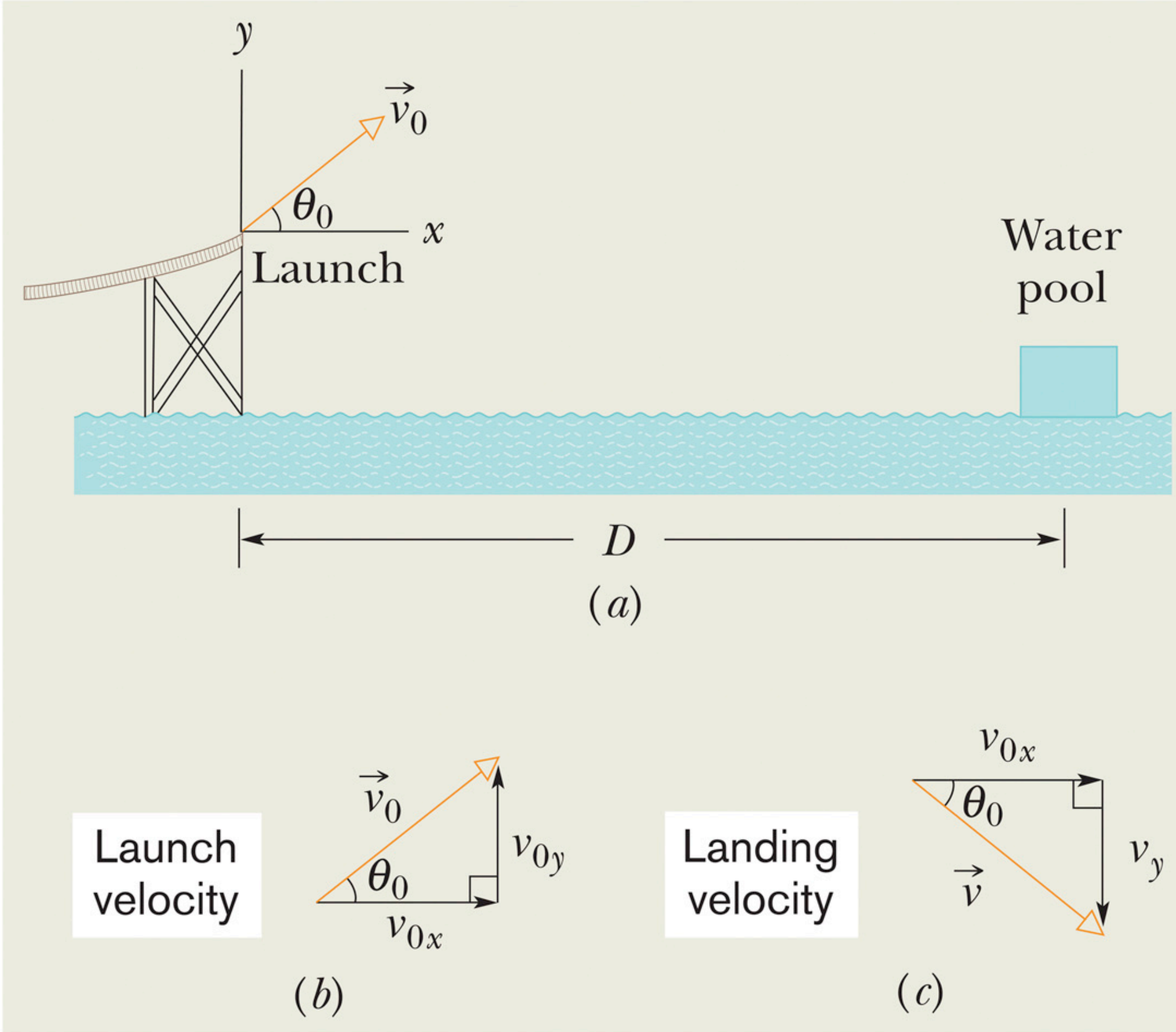
The ball will strike the ground when $y(x) = y_{\text{slope}}(x)$. Setting the expressions in equations (1) and (2) equal to each other yields

$$\frac{g}{2v_{\text{i}}^2\cos^2(\theta)}x^2 - x(\tan(\theta) - \tan(\theta_{\text{slope}})) - y_{\text{i}} = 0$$

Which can be solved for x using the quadratic formula, to obtain

$$x = -\frac{\cos^2(\theta)}{2g}\left[2v_{\text{i}}^2(\tan(\theta_{\text{slope}}) - \tan(\theta)) - \sqrt{\frac{8gv_{\text{i}}^2}{\cos^2(\theta)} + \left[2v_{\text{i}}^2(\tan(\theta_{\text{slope}}) - \tan(\theta))\right]^2}\right] = 14.6\text{ m}.$$

This is the horizontal distance that the ball travels, but we are asked for the distance d along the incline: $d = \frac{x}{\cos(\theta_{\text{slope}})} = \frac{(14.6\text{ m})}{\cos(20°)} = 16\text{ m}.$



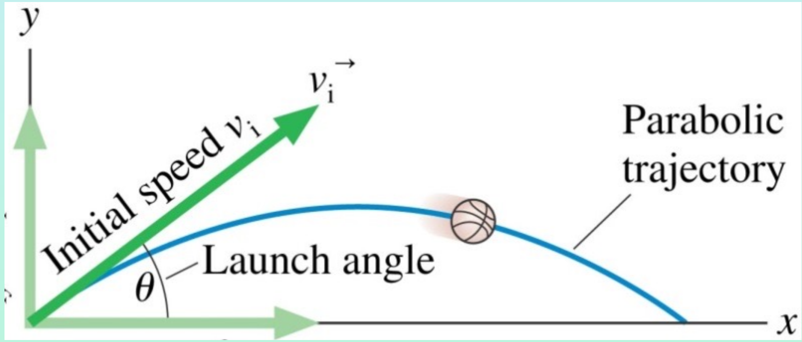
 halliday_10e_fig_04_15

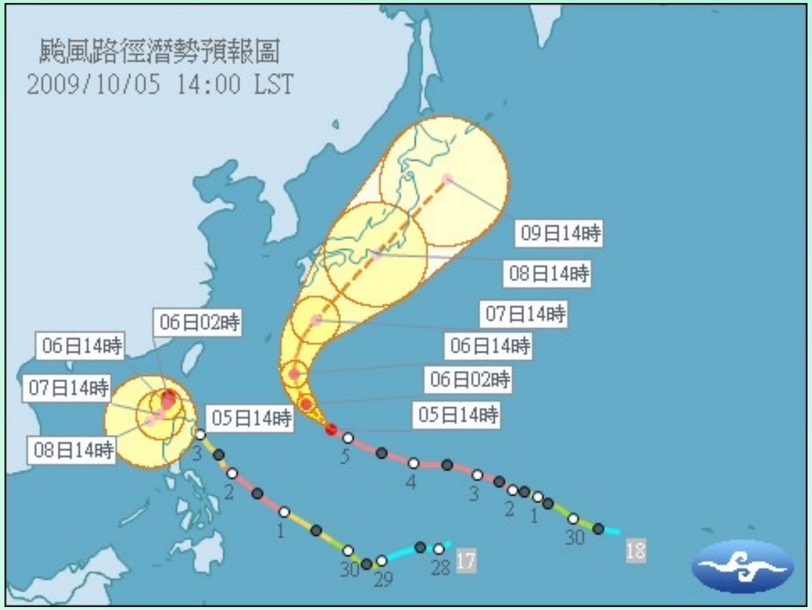
牛頓定律加上力的描述給定運動方程式Equation of Motion，再加上起使條件（起始位置與速度），便能決定此系統未來任一時間的狀態！

$$F_x(x,y,z,\cdots) = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$F_y(x,y,z,\cdots) = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$F_z(x,y,z,\cdots) = m\frac{d^2z}{dt^2}$$



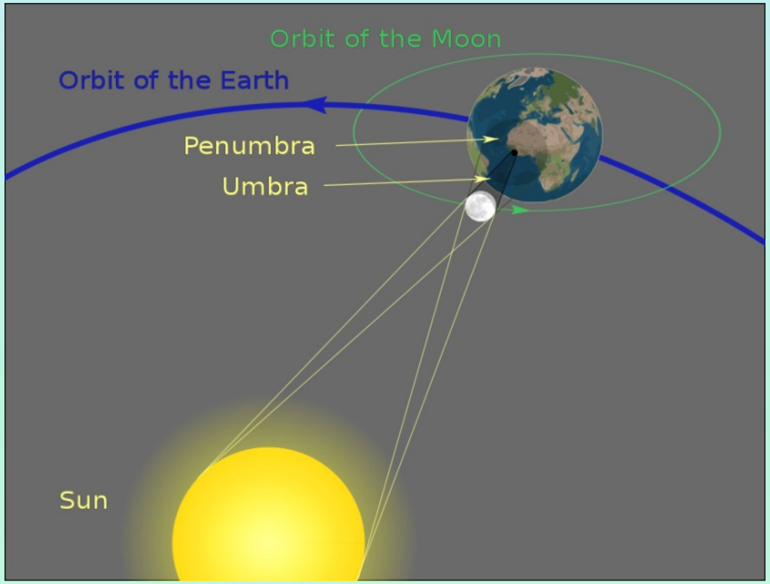


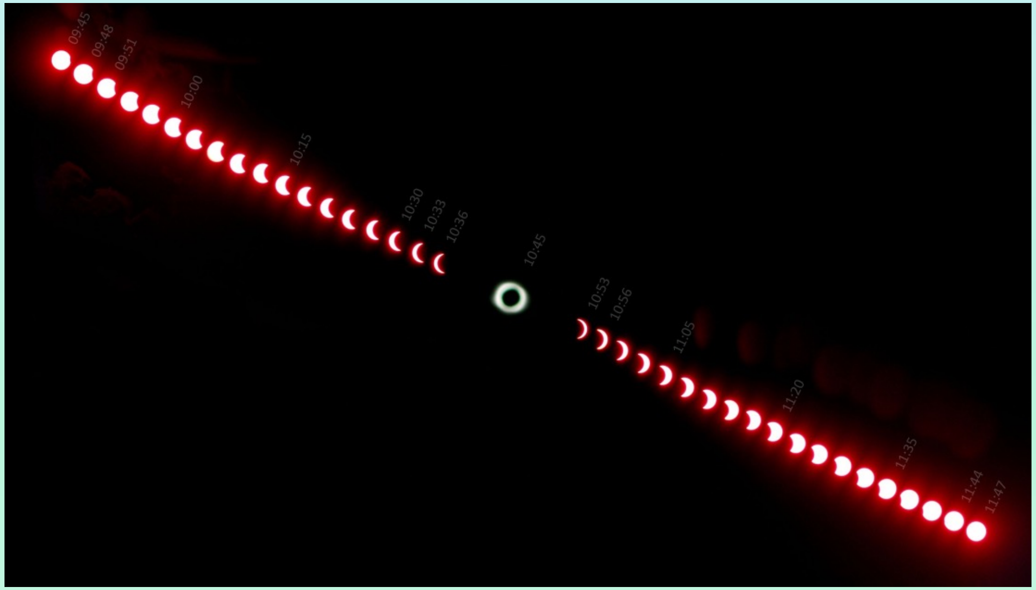
$x(t), y(t), z(t)$

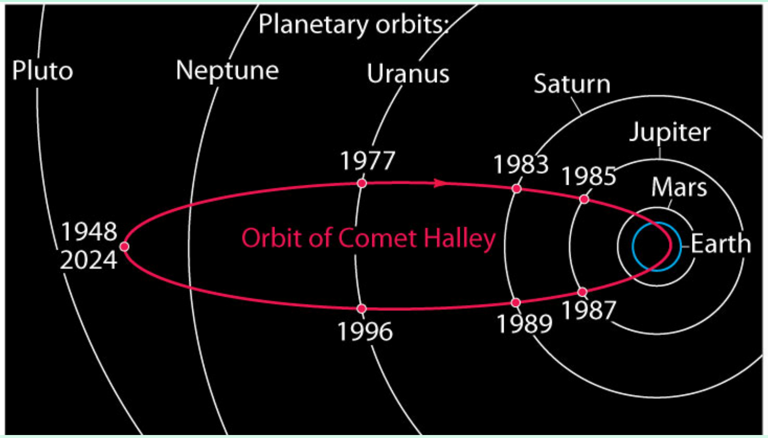
三個函數都可解出

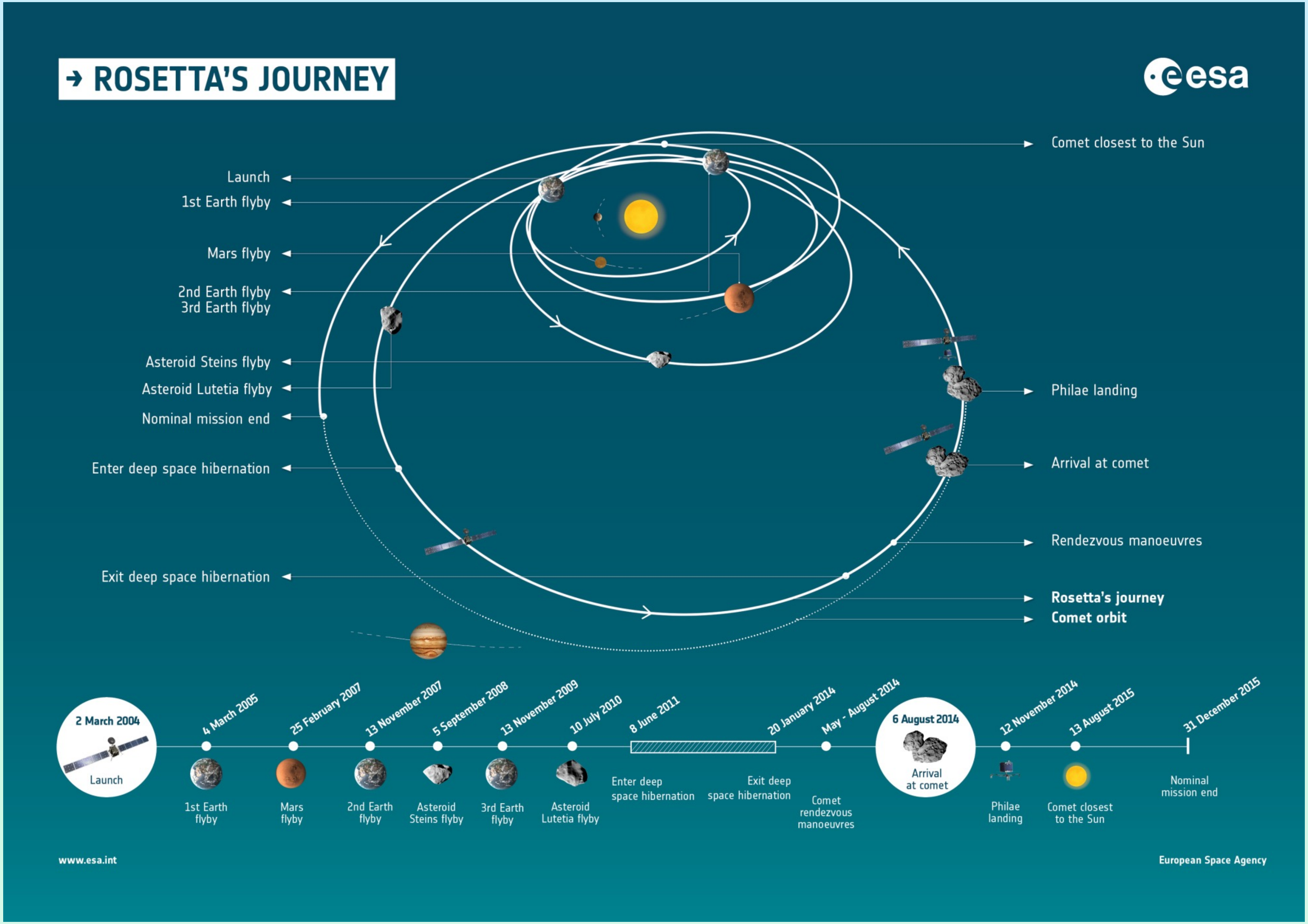
萬有引力定律決定了星體之間的力， $\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\hat{r}$

運動方程式便決定了星體的軌道。





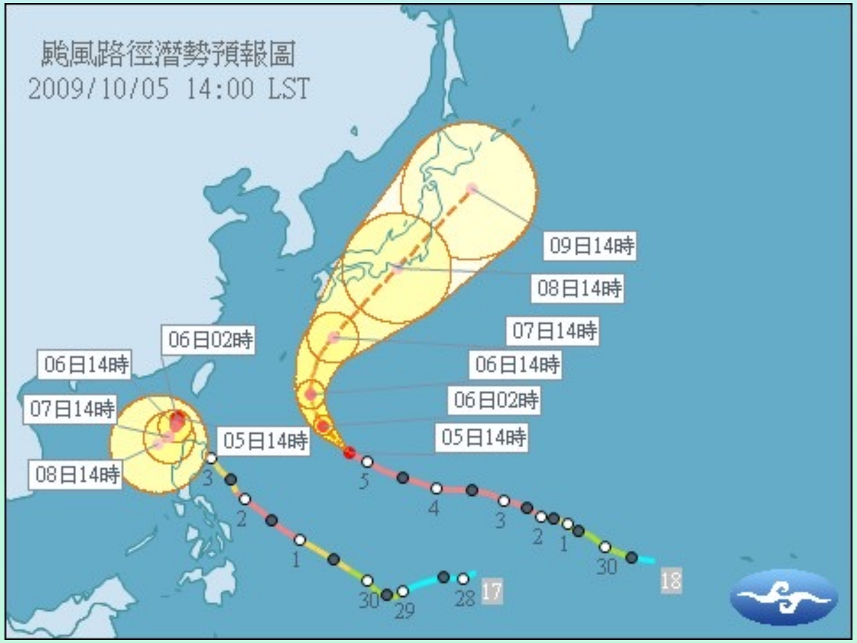




ROSETTA'S JOURNEY
esa
Comet closest to the Sun
Launch
1st Earth flyby
Mars flyby
2nd Earth flyby
3rd Earth flyby
Asteroid Steins flyby
Asteroid Lutetia flyby
Nominal mission end
Enter deep space hibernation
Exit deep space hibernation
Philae landing
Arrival at comet
Rendezvous manoeuvres
Rosetta's journey
Comet orbit
2 March 2004
Launch
4 March 2005
1st Earth flyby
25 February 2007
Mars flyby
13 November 2007
2nd Earth flyby
5 September 2008
Asteroid Steins flyby
13 November 2009
3rd Earth flyby
10 July 2010
Asteroid Lutetia flyby
8 June 2011
Enter deep space hibernation
20 January 2014
Exit deep space hibernation
May - August 2014
Comet rendezvous manoeuvres
6 August 2014
Arrival at comet
12 November 2014
Philae landing
13 August 2015
Comet closest to the Sun
31 December 2015
Nominal mission end
www.esa.int
European Space Agency

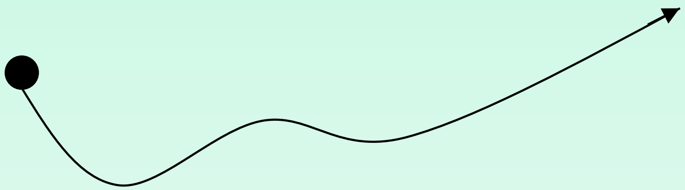
運動方程式 Equation of Motion，並不能決定唯一一個解。

必須加上起使條件（起始位置與速度），才能決定此系統未來任一時間的狀態！



只有唯一的一個解，滿足運動方程式，及起始條件！　　微分方程式基本定理

只要你找到一個，無論用甚麼手段，就是它了！



習題四

1. 有一個粒子，其質量 mass 為 m。假設此粒子只能在 x 軸上運動，位置以 $x(t)$ 表示。在時間 $t=0$ 時，其位置 $x(0)=0$，速度亦為零 $v(0)=0$。該粒子受一沿正 x 方向的外力，此力為一時間的函數(function of time)：
$F(t)=at,\ \text{as}\ 0<t<T,\quad F(t)=0,\ \text{as}\ t>T$。$a$ 是已知常數。
   a. 寫下該粒子的速度所滿足的運動方程式(Equation of Motion)。解出 $0<t<T$ 及 $t>T$ 時該粒子的速度。
   b. 計算該粒子在 $t=\frac{T}{2}$ 及 $t=\frac{3T}{2}$ 時的位置。

解答四

$F(t)=at,\ \text{as}\ 0<t<T,\quad F(t)=0,\ \text{as}\ t>T$，因此運動方程式可以寫成：

$$\frac{d^2x}{dt^2}=at,\ \text{as}\ 0<t<T,\quad \frac{d^2x}{dt^2}=0,\ \text{as}\ t>T\text{。}$$

As $0<t<T$，$\frac{dv}{dt}=at$，$v=\frac{1}{2}at^2+c_1$，$x=\frac{1}{6}at^3+c_1t+c_0$，帶入起始條件: $x(0)=0, v(0)=0$，可得 $c_0=c_1=0$，因此 $v=\frac{1}{2}at^2$，$x=\frac{1}{6}at^3$ as $0<t<T$。

As $t>T, \frac{d^2x}{dt^2}=0$，為等速運動，$x=d_1t+d_0$，代入起始條件：

$x(T)=\frac{1}{6}aT^3, v(T)=\frac{1}{2}aT^2$，可以得：$x=\frac{1}{2}aT^2\cdot t-\frac{1}{3}aT^3$。

在 $t=\frac{T}{2}$，$x=\frac{1}{48}aT^3$。在 $t=\frac{3T}{2}$，$x=\frac{3}{4}aT^3-\frac{1}{3}aT^3=\frac{5}{12}aT^3$。

1. 有一個粒子，其質量(mass)為 m。假設此粒子只能在 x 軸(axis)上運動，位置(position)以 $x(t)$ 表示，在時間 $t=0$ 時，其位置 $x(0)=0$，速度(velocity)亦為零 $v(0)=0$。該粒子受一沿 x 方向的外力，此力為一時間函數(function of time)：

$$F(t)=m\cdot\left(at-bt^2\right),\ \text{as}\ \ 0<t<\frac{2a}{b},\quad F(t)=0,\ \text{as}\ t>\frac{2a}{b}$$

。沿 x 方向力為正，沿 -x 方向力為負。a,b 是已知正值常數(Positive Constants)。

a. 寫下該粒子的速度，在 $0<t<\frac{2a}{b}$ 及 $t>\frac{2a}{b}$ 所分別滿足的運動方程式(Equation of Motion)。由此方程式解出在 $t=\frac{a}{2b}$ 及 $t=\frac{4a}{b}$ 時該粒子的速度。(10)

b. 當該粒子的位置 x 座標(x coordinate)達到最大值(Maximum)（即是粒子由靜止出發向右運動後迴轉，到達 x 軸上最右方的點）時，時間是多少？

解答：$\frac{dv}{dt}=at-bt^2,\ \text{as}\ \ 0<t<\frac{2a}{b},\quad \frac{dv}{dt}=0,\ \text{as}\ t>\frac{2a}{b}$。

As $0<t<\frac{2a}{b}$，$v=\frac{1}{2}at^2-\frac{1}{3}bt^3+c_1$，起始條件 $v(0)=0$，故 $c_1=0$。

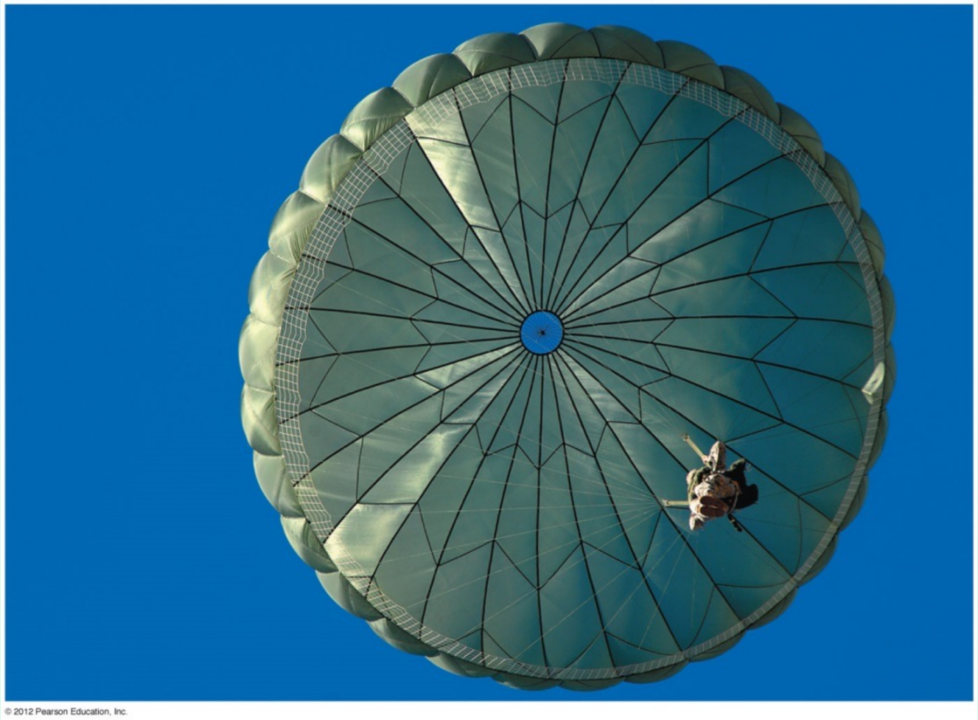
$v=\frac{1}{2}at^2-\frac{1}{3}bt^3$。在 $t=\frac{a}{2b}$ 時：$v\left(\frac{1a}{2b}\right)=\frac{1}{8}\frac{a^3}{b^2}-\frac{1}{24}\frac{a^3}{b^2}=\frac{1}{12}\frac{a^3}{b^2}$。

As $t>\frac{2a}{b}$，施力為零，故為等速：$v(t)=v\left(\frac{2a}{b}\right)=\frac{2a^3}{b^2}-\frac{8}{3}\frac{a^3}{b^2}=-\frac{2}{3}\frac{a^3}{b^2}$。所以

在 $t=\frac{4a}{b}$ 時，$v=-\frac{2}{3}\frac{a^3}{b^2}$。

速度由正轉負，因此在中途有一時間速度為零，此時粒子由向左移動變為向右移動，此時 x 座標最大，即是 $v(t_0)=\frac{1}{2}at_0^2-\frac{1}{3}bt_0^3=0$，$t_0=\frac{3a}{2b}$。

阻力 Fluid Resistance Force

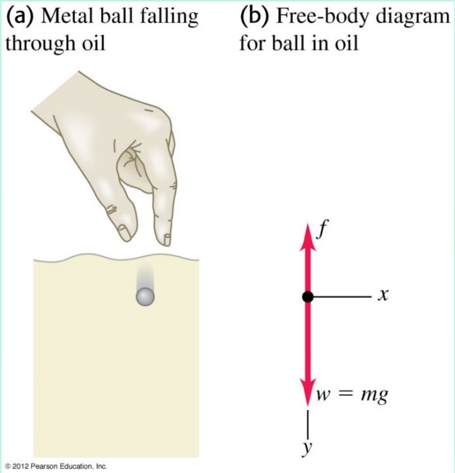


阻力 Fluid Resistance Force

阻力的方向與速度相反！

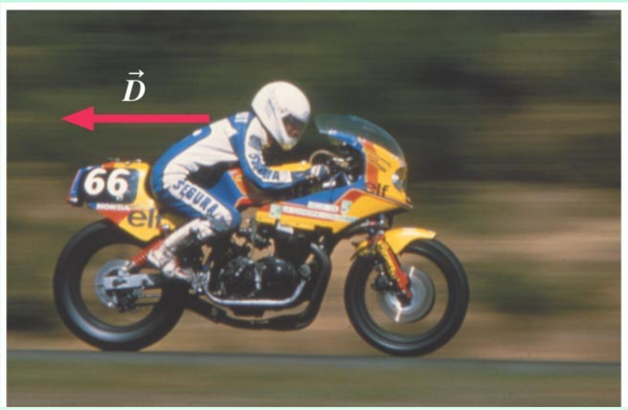
速率愈大，阻力愈大，大小可以近似： $F_d \sim kv + Dv^2$

物體運動慢時(如在液體中)，第一項較重要，阻力大小與速率成正比：

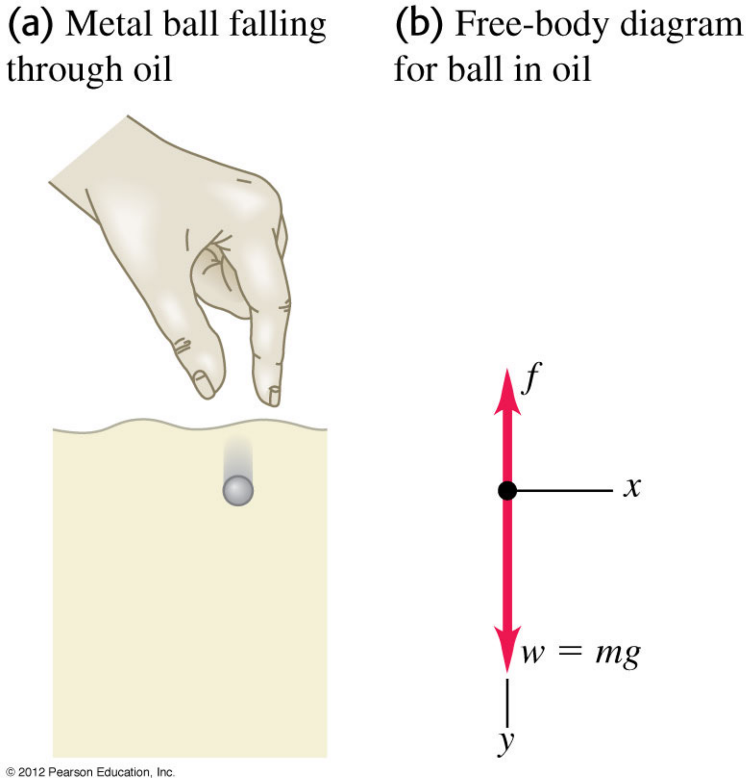


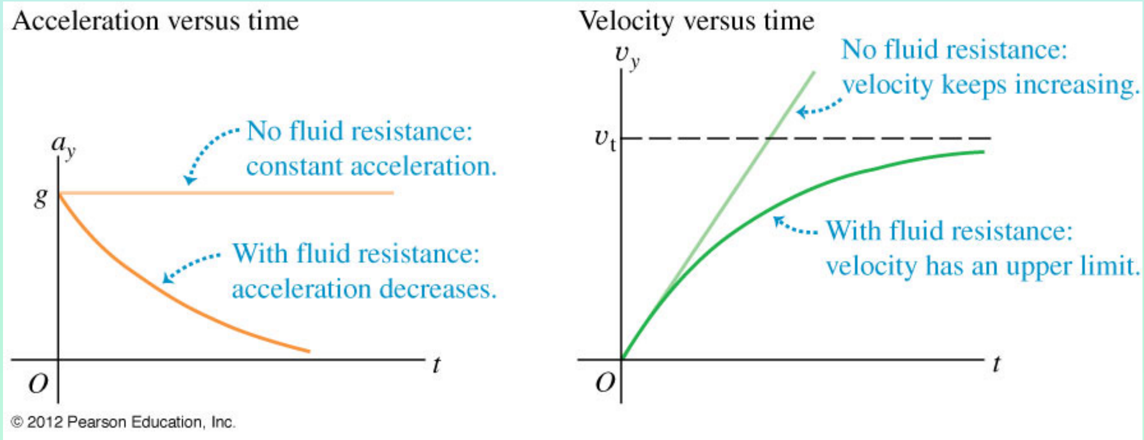
$F_d \sim kv$ k是一個常數。

在氣體中物體運動較快時，第二項較重要，阻力大小與速率平方成正比：



$F_d \sim Dv^2$ D是一個常數。



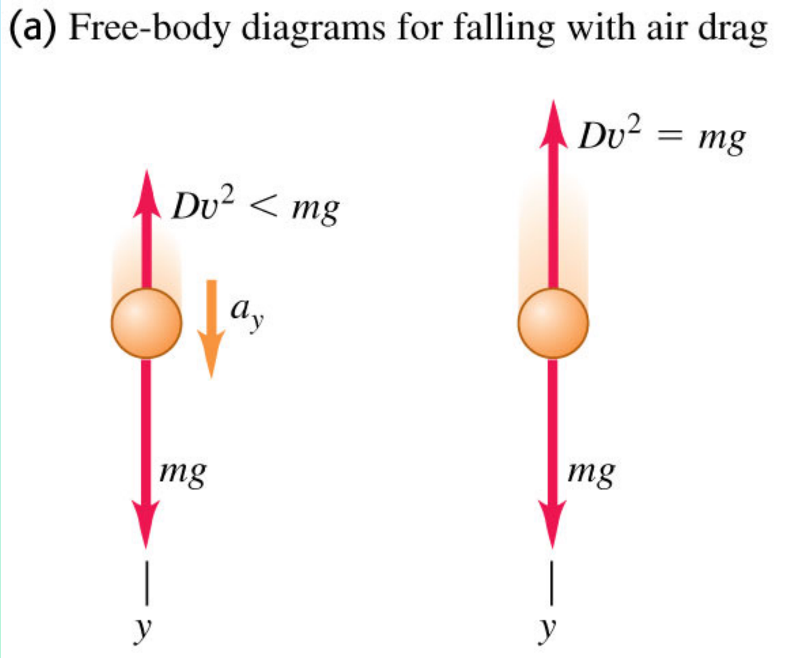


當物體在液體中自由下落時，速度增加，阻力變大，加速度變小。

直到阻力與重力抵銷時，受力為零，就不再增加，而維持等速。

$F_d = kv_t = mg$ 當阻力大小與速率成正比

終端速度 Terminal speed v_t。



當阻力大小與速率平方成正比時，終端速度v_t為：

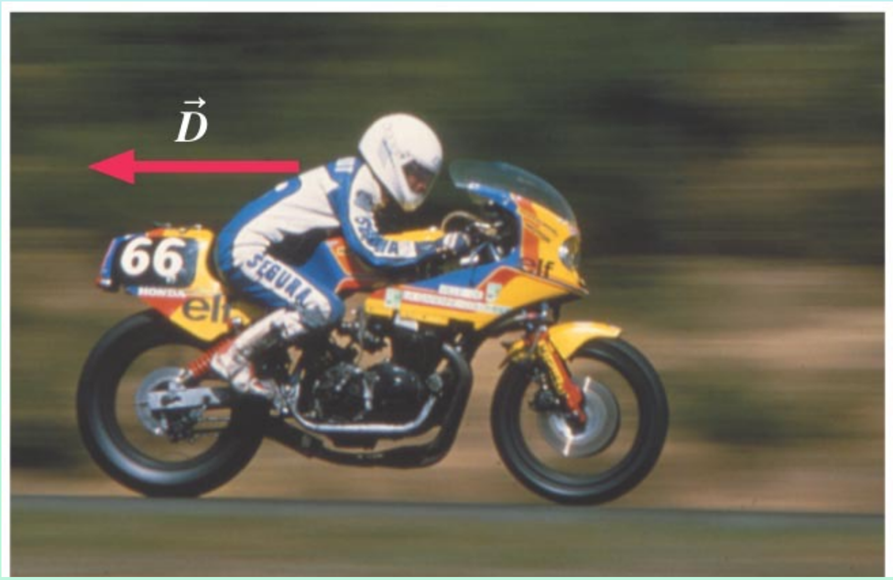
$$Dv_t^2 = mg \qquad v_t = \sqrt{\frac{mg}{D}}$$

質量越大的物體，終端速度越大！

亞里斯多德說重物掉得快，其實是與日常觀察符合的。

我們能不能預測到達終端速度前的過程？以二維拋體運動為例。

拋體運動是二維運動，物理量必須以向量表示：



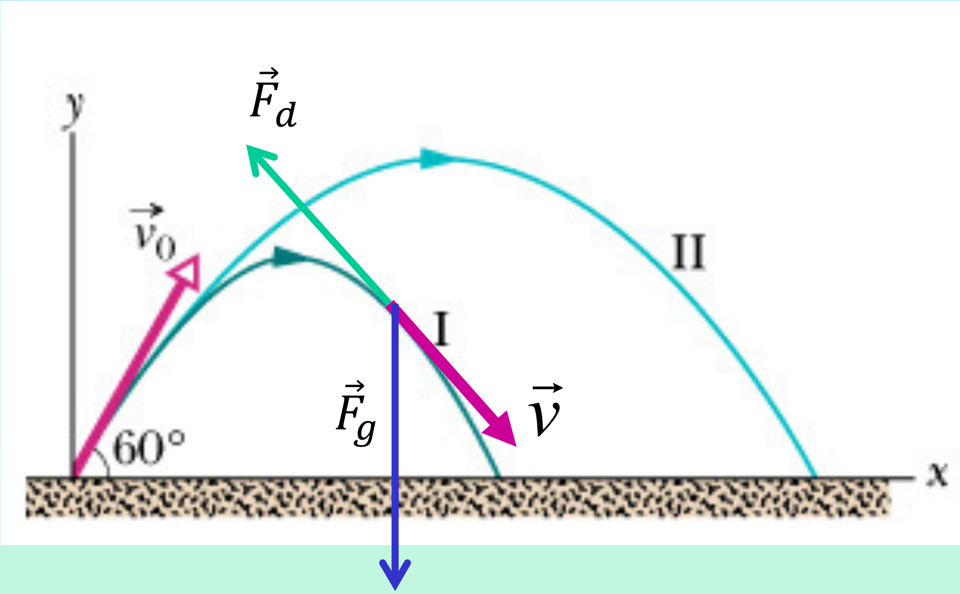
當阻力大小與速率成正比 $F_d = -kv$

力的向量表示式： $\vec{F}_d = -kv\hat{v} = -k\vec{v}$

阻力向量與速度向量成正比！

空氣阻力大小與速度成正比時的拋體運動

$\vec{F}_d = -k\vec{v}$ $\vec{F}_g = -mg\hat{j}$ 運動方程式 $m\vec{a} = \vec{F}_g + \vec{F}_d$



$$\vec{a} = -g\hat{j} - \frac{k}{m}\vec{v} \quad k\vec{v}$$

寫成分量！

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}v_x$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g - \frac{k}{m}v_y$$

用速度表示！

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{k}{m}v_x$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -g - \frac{k}{m}v_y$$

垂直方向的運動方程式與水平分量無關。

小阻力下的拋體，垂直與水平依舊彼此獨立。

先看 x 軸分量

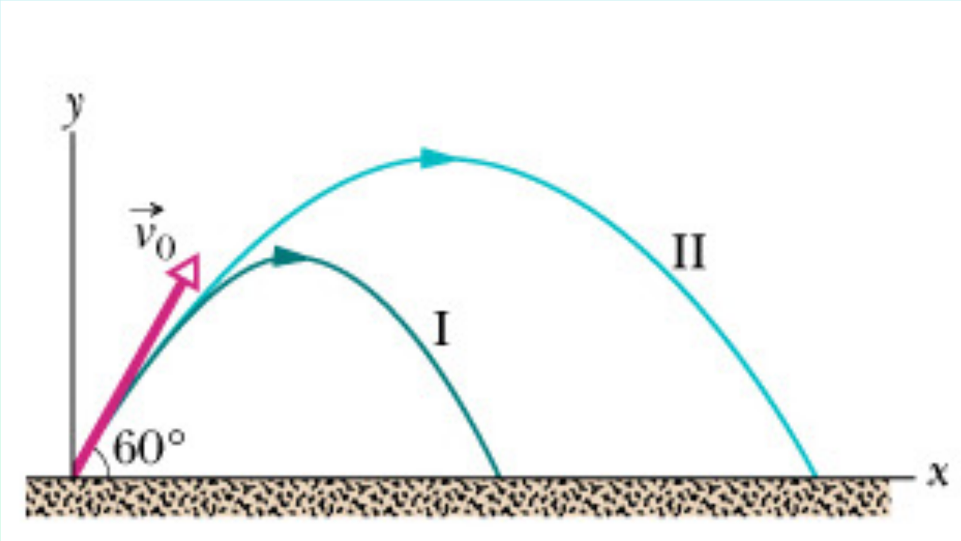
$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{k}{m} v_x$$

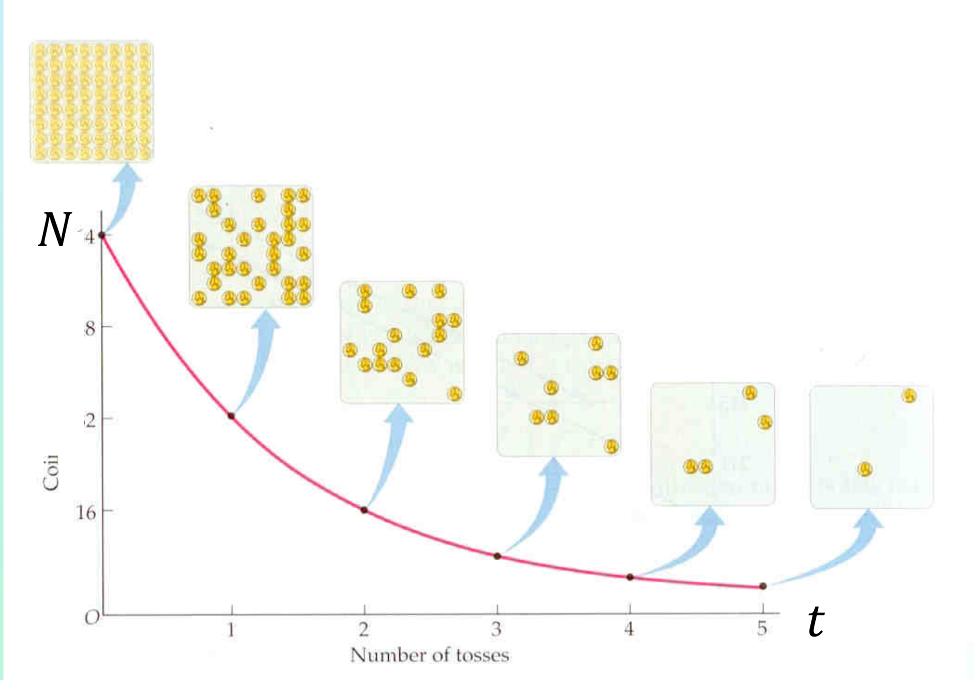
速度函數的微分與自己成正比！

有沒有這樣的函數？不可能是多項式。

$$\frac{de^{-x}}{dx} = e^{-x}$$

指數函數的微分依舊是指數函數。





$$\frac{dv_x}{dt}(t) = -\frac{k}{m}v_x(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{dN}{dt}(t) = -\Gamma N(t)$$

速度函數的微分與自己成正比！ N的一次微分，與N成正比。

這個速度的微分方程式，與放射性原子核數目的衰變方程式完全一樣！

兩者的物理完全無關，但數學方程式完全相同，解就完全一樣！

如果 $\dfrac{d}{dx}e^{x} = e^{x}$

那麼 $\dfrac{d}{dx}e^{bx} = be^{bx}$

$$\frac{d}{dx}e^{bx} = \frac{d}{d(bx)}e^{bx} \cdot \frac{d(bx)}{dx} = be^{bx}$$

於是我就找到一個函數的微分與自己成正比！

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{k}{m} v_x$$

$$\frac{de^{bx}}{dx} = be^{bx}$$

速度函數的微分與自己成正比！

指數函數可以滿足這個性質。

因此速度為指數函數!

選擇係數 b 為正比的比例常數$-k/m$，就可以得到一個解 ： $v_x = e^{-\frac{k}{m}t}$

但我還可以在這個解的前面乘上任一個常數C，解仍成立： $v_x = Ce^{-\frac{k}{m}t}$

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{dCe^{-\frac{k}{m}t}}{dt} = C\frac{de^{-\frac{k}{m}t}}{dt} = -C\frac{k}{m}e^{-\frac{k}{m}t} = -\frac{k}{m}v_x$$

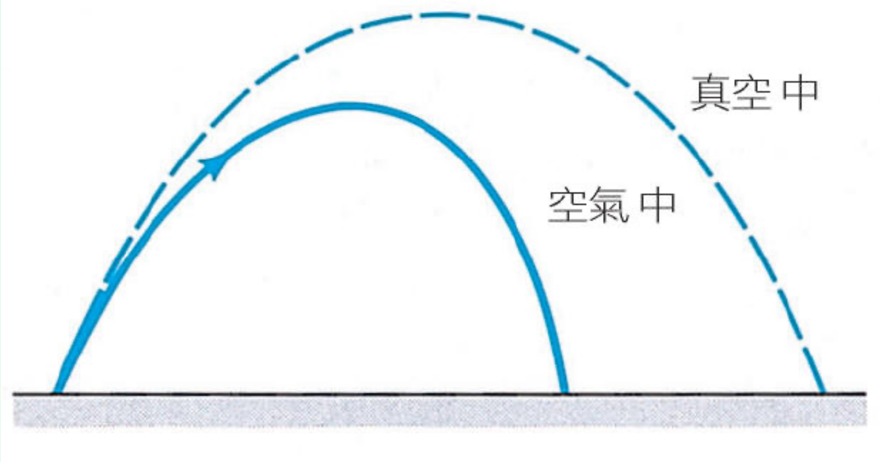
$v_x = Ce^{-\frac{k}{m}t}$ 常數 C 是任意數，我們似乎得到無限多組解。

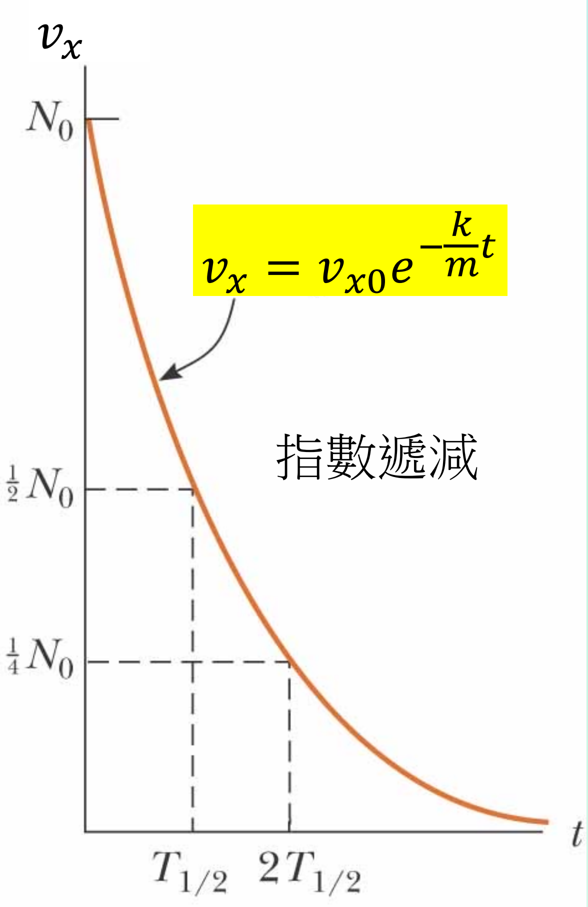
但如同自由落體， C 可以由起始速度決定：

$v_x(0) = C = v_{x0}$

$v_x = v_{x0}e^{-\frac{k}{m}t}$

阻力作用下的物體，速度呈指數遞減。





減少一定倍數的時間相同。

指數遞減函數，比所有多項式遞減都快：

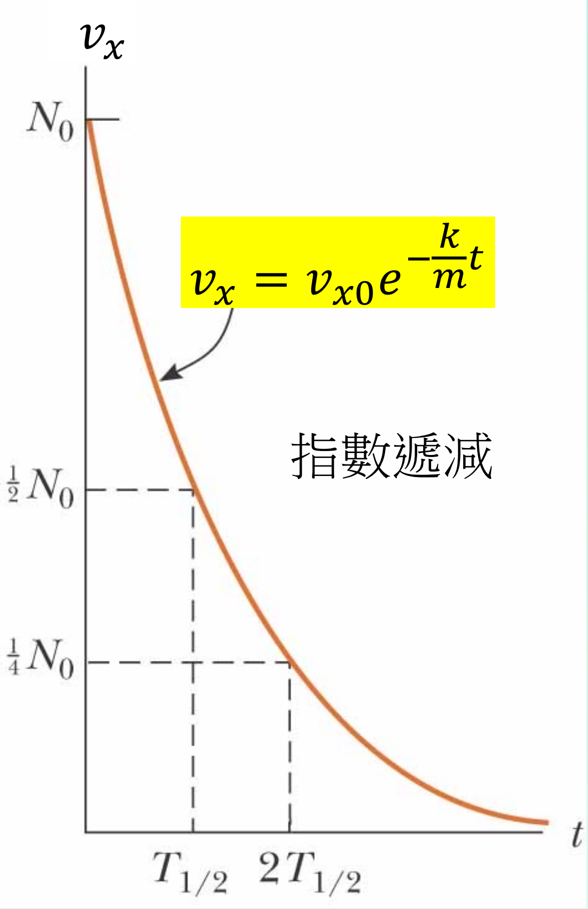
$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}}{x^{-n}}=\frac{x^n}{e^x}\to 0$$

指數遞減函數，減少一定倍數的時間永遠相同。

$$\frac{v_x(t_2)}{v_x(t_1)}=\frac{c\cdot e^{-bt_2}}{c\cdot e^{-bt_1}}=e^{-b(t_2-t_1)}=\frac{1}{2}$$

$$(t_2-t_1)=\frac{1}{b}\ln 2\equiv T_{\frac{1}{2}}$$

半衰期



指數函數是一個無窮級數：

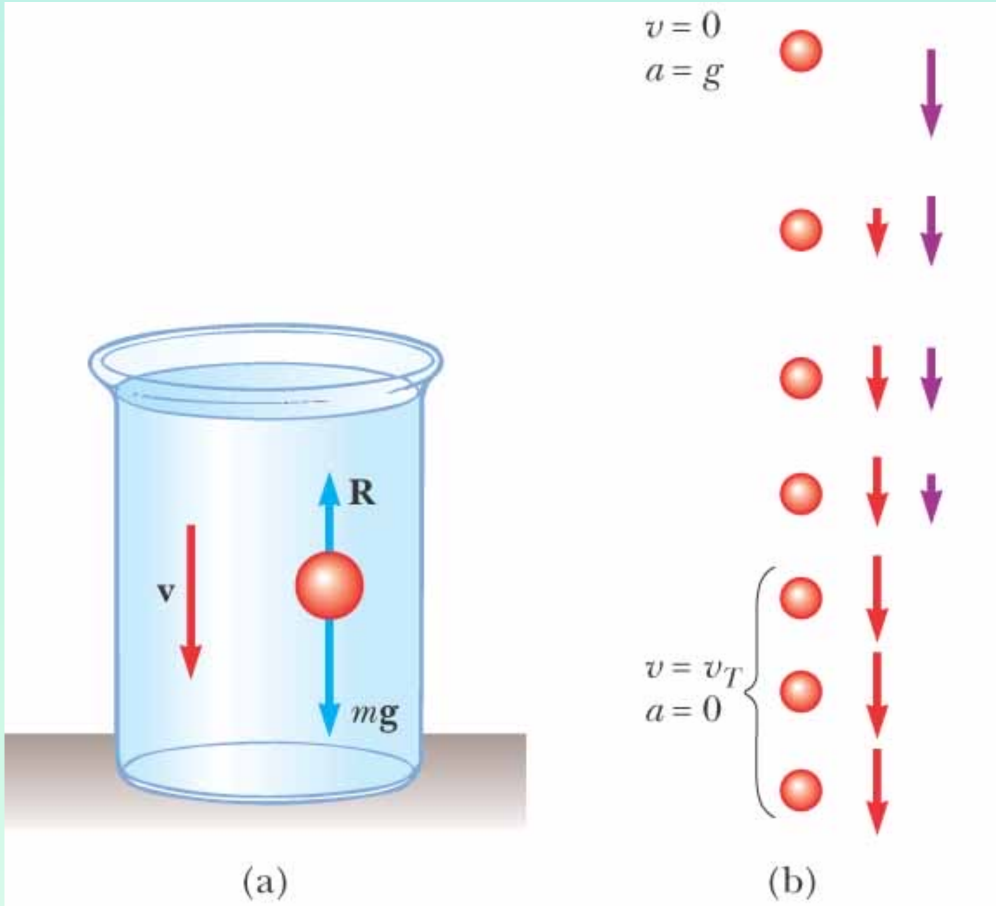
$$e^x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}\cdots$$

垂直方向的速度v_y

因垂直與水平的獨立性，因此等同於阻力下的自由落體。

$$\frac{dv_y}{dt} = -g - \underline{\frac{k}{m} v_y}$$

阻力



y方向的速度

阻力下的落體

$$\frac{dv_y}{dt} = -g - \frac{k}{m} v_y = -\frac{k}{m}\left(v_y + \frac{mg}{k}\right)$$

將右方的兩項合在一起，定義一個新的函數$V(t)$：

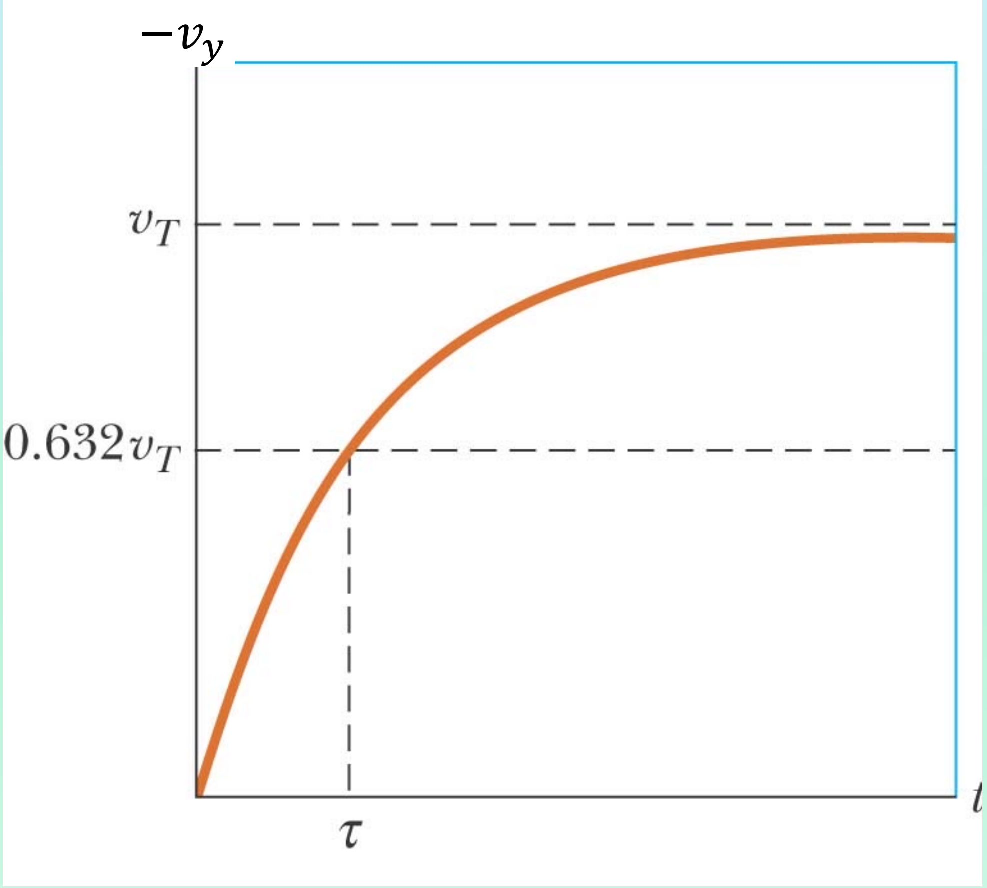
$$V(t) \equiv v_y(t) + \frac{mg}{k} \qquad \frac{dV}{dt} = \frac{dv_y}{dt}$$

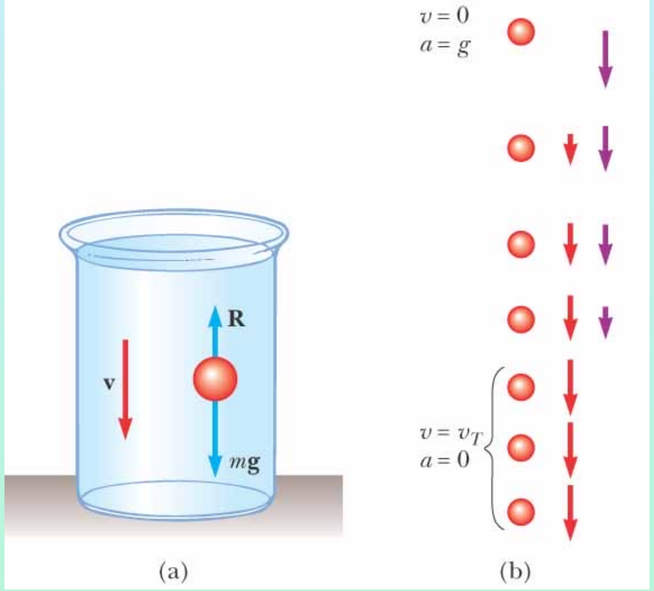
$$\frac{dV}{dt} = -\frac{k}{m} V$$

V的方程是與之前的水平速度v_x完全一樣。

$$V(t) = V_0 e^{-\frac{k}{m}t} = \left(v_{y0} + \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$v_y(t) = \left(v_{y0} + \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}$$

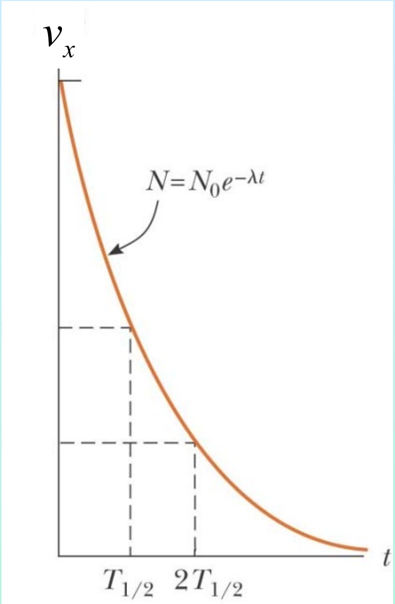




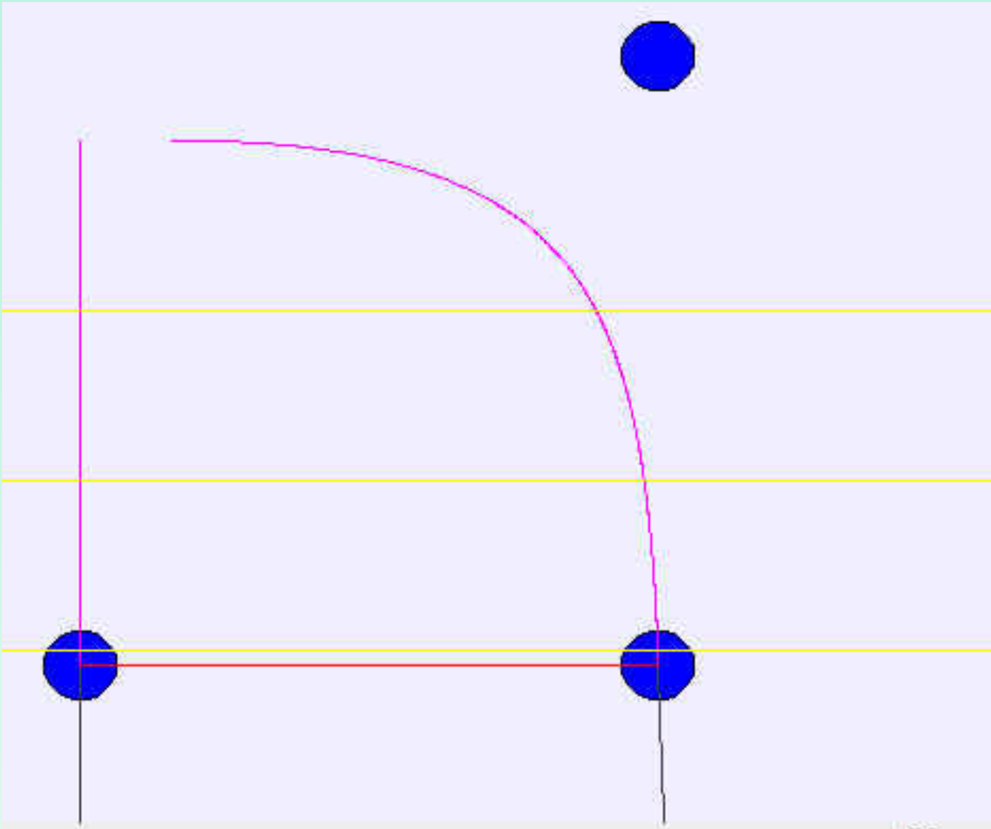
初速為零，在液體內下落的物體：

$$v_y = \left(v_{y0} + \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}$$

$t \to \infty$ $\quad v_y \to -\dfrac{mg}{k} \equiv v_{yT}$ 終端速率

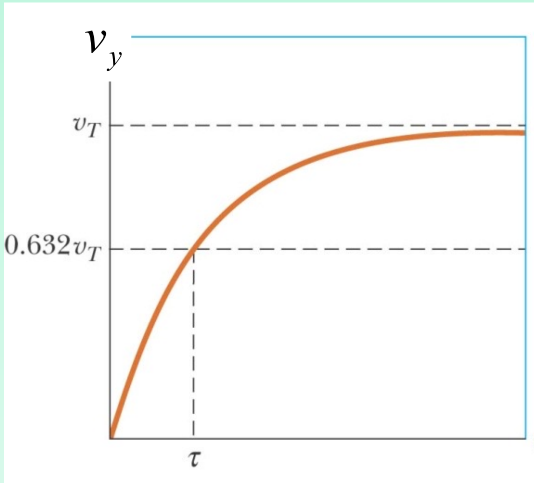


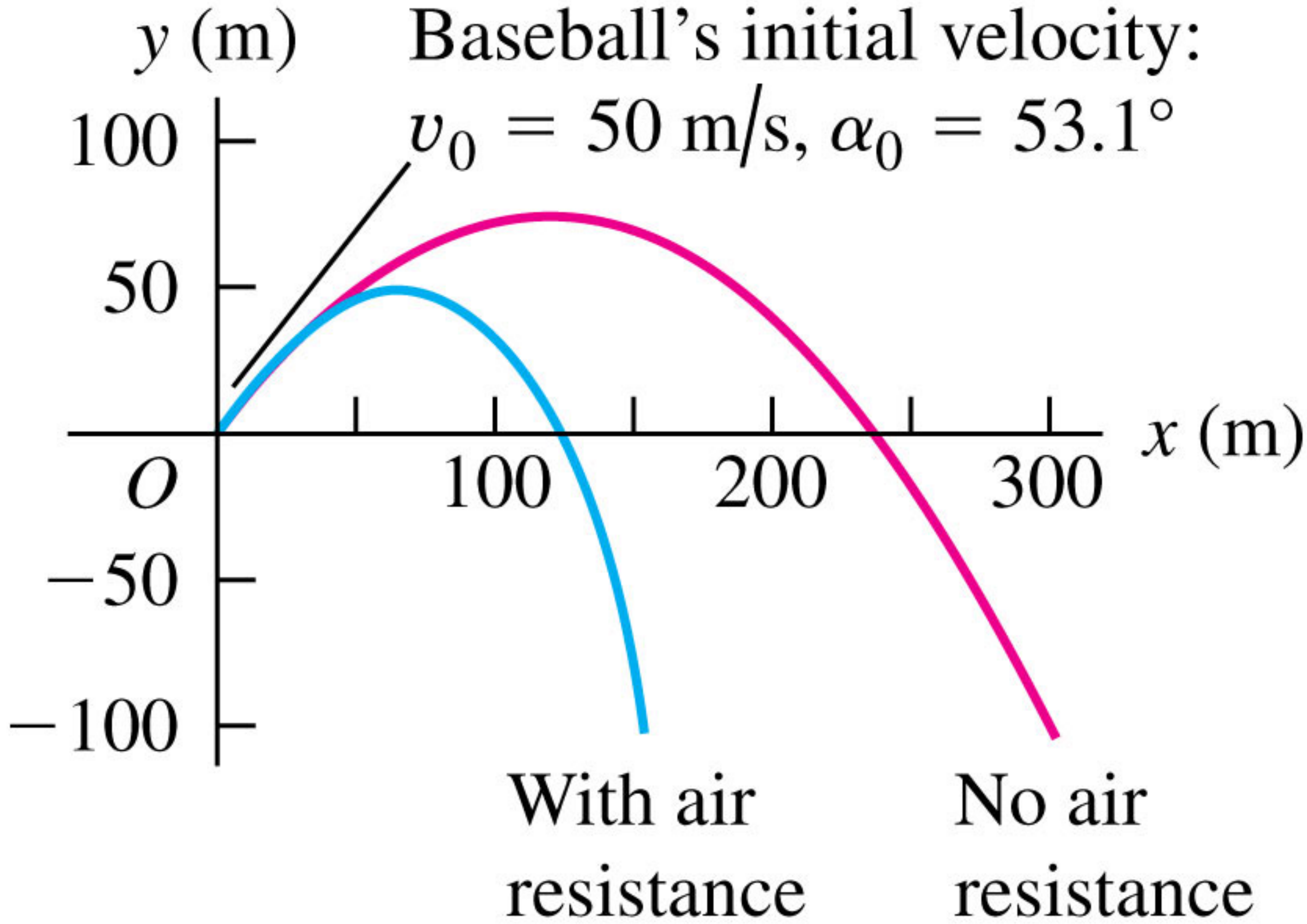
水平速度 $v_x = v_{x0}e^{-\frac{k}{m}t}$



$$v_y = \left(v_{y0} + \frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}$$

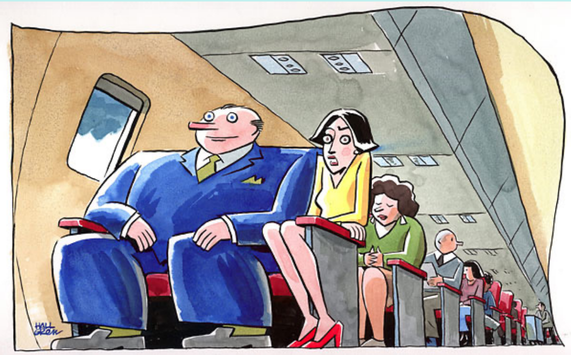
垂直速度




y (m)
Baseball's initial velocity:
$v_0 = 50$ m/s, $\alpha_0 = 53.1°$
100
50
O
−50
−100
100
200
300
x (m)
With air resistance
No air resistance

一般代數方程式的解通常是 No wiggle room

$$2x+1=2$$



微分方程式的解需要刻意讓自己挪出足夠的空間與自由度，才能滿足起始條件。

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-g$$

乘一常數

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{k}{m} v_x \longrightarrow v_x = e^{-\frac{k}{m}t} \longrightarrow v_x = Ce^{-\frac{k}{m}t}$$

齊次微分方程

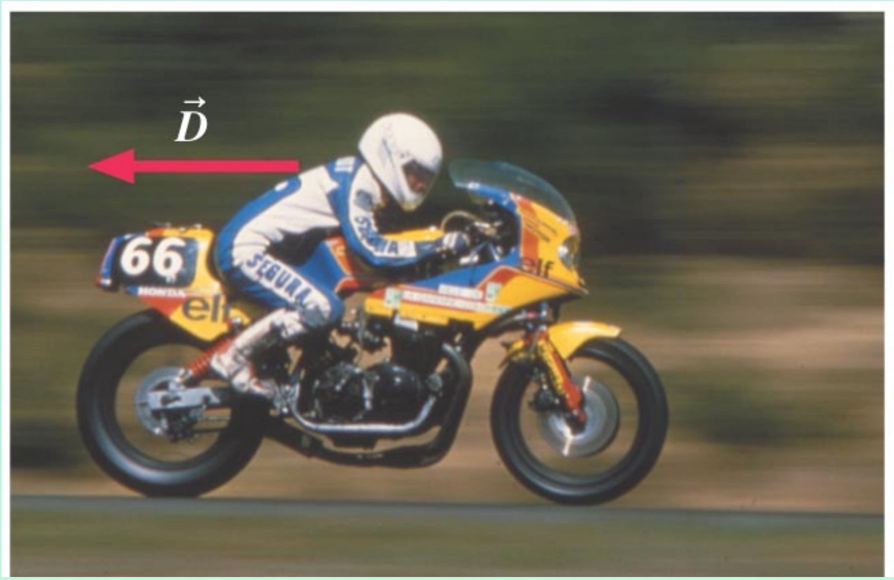
加一常數

$$\frac{dv}{dt} = -g \longrightarrow v = -gt \longrightarrow v = -gt + c_1$$

非齊次微分方程

微分方程式的解總是會有足夠空間來容納起始條件

物體速度稍快時，阻力與速度平方成正比



$$F_d = -D \cdot v^2$$

向量表示式：$\vec{F}_d = -D \cdot v^2 \hat{v} = -Dv \cdot \vec{v}$

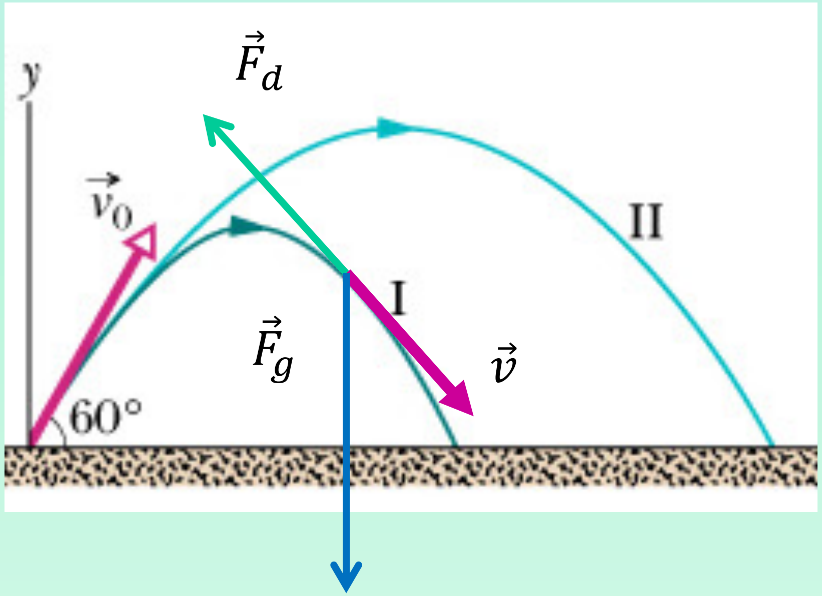
阻力向量現在就不與速度向量成正比！

空氣阻力大小與速度平方成正比時的拋體運動

$$\vec{F}_d = -Dv \cdot \vec{v}$$

$$m\vec{a} = \vec{F}_g + \vec{F}_d = -mg\hat{\jmath} - Dv \cdot \vec{v}$$

$$\vec{a} = -g\hat{\jmath} - \frac{D}{m} v \cdot \vec{v}$$ 運動方程式



$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{D}{m} v_x v$$ 寫成速度分量

$$\frac{dv_y}{dt} = -g - \frac{D}{m} v_y v$$

代入速度大小$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{D}{m} v_x \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -g - \frac{D}{m} v_y \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

這個方程式只能用數值方法來解。

垂直方向的運動方程式與水平分量有關。

垂直與水平不再彼此獨立。

數值方法 Numerical solution

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{m} f(x, v) \qquad \frac{dx}{dt} = v$$

微分是無法用電腦算的

$$\frac{df}{dx}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

但微分在取極限前只是一個減與除的運算。

數值方法

不要讓 Δt 趨近於零，只是讓它很小！

想像時間是如下棋一樣是不連續的。

當然，所得的解只是一個近似。

$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$v \sim \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$\Delta x \sim v \cdot \Delta t$$

$\boxed{t = 0}$

若時間不連續，速度即平均速度，平均速度就決定位移！

你下一步走多遠？

下一步走多遠由起始速度決定！

起始位置x_0

起始速度v_0

$x_0 \longleftarrow \Delta x \longrightarrow x_1$

$$\Delta x = v_0 \cdot \Delta t$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{m} f(x, v)$$

$t_1 = 0 + \Delta t$

要決定v_1需要速度的變化。

速度的變化率就是加速度，由力可以算出。

力則由當時已知的位置與速度算出！

$\Delta x = v_0 \cdot \Delta t$

$x_0 \longleftarrow \Delta x \longrightarrow x_1$

$v_0 \longrightarrow \qquad v_1 \overset{?}{\longrightarrow}$

要決定下一步需要$t_1 = \Delta t$時的速度v_1。

下一步呢？

$$\Delta v = v_1 - v_0 = a(t_0)\Delta t = \frac{f(x_0, v_0)}{m} \Delta t$$

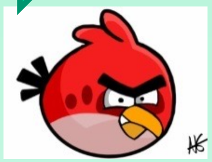
v_1可以由起始位置及起始速度得到！

總結：由 t_0 的位置與速度可以得到 t_1 的位置與速度。

同樣的方法可以讓我們由 t_1 的位置與速度得到 t_2 的位置與速度

$\boxed{t_2 = 2\Delta t}$

$\Delta x = v_1 \cdot \Delta t$



Δx

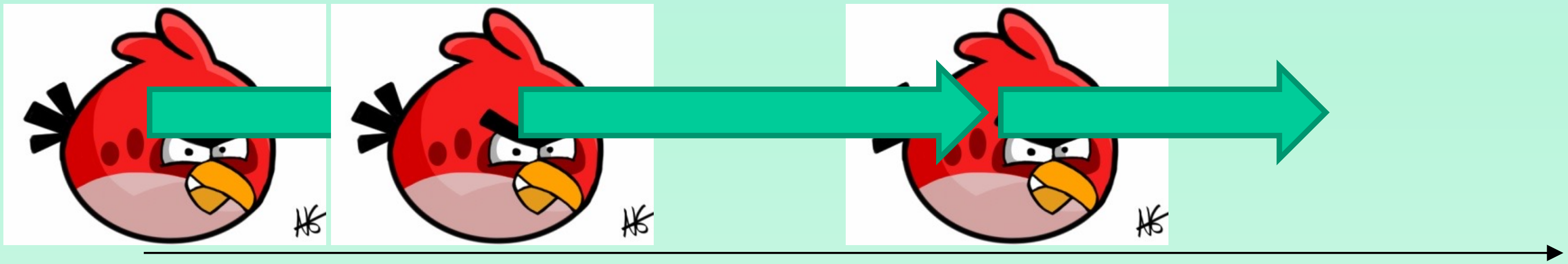
x_0 x_1 x_2

起使速度 v_0 v_1 v_2

$$\Delta v = v_2 - v_1 = a(t_1)\Delta t = \frac{f(x_1, v_1)}{m}\Delta t$$

於是我們得到 t_2 的位置與速度

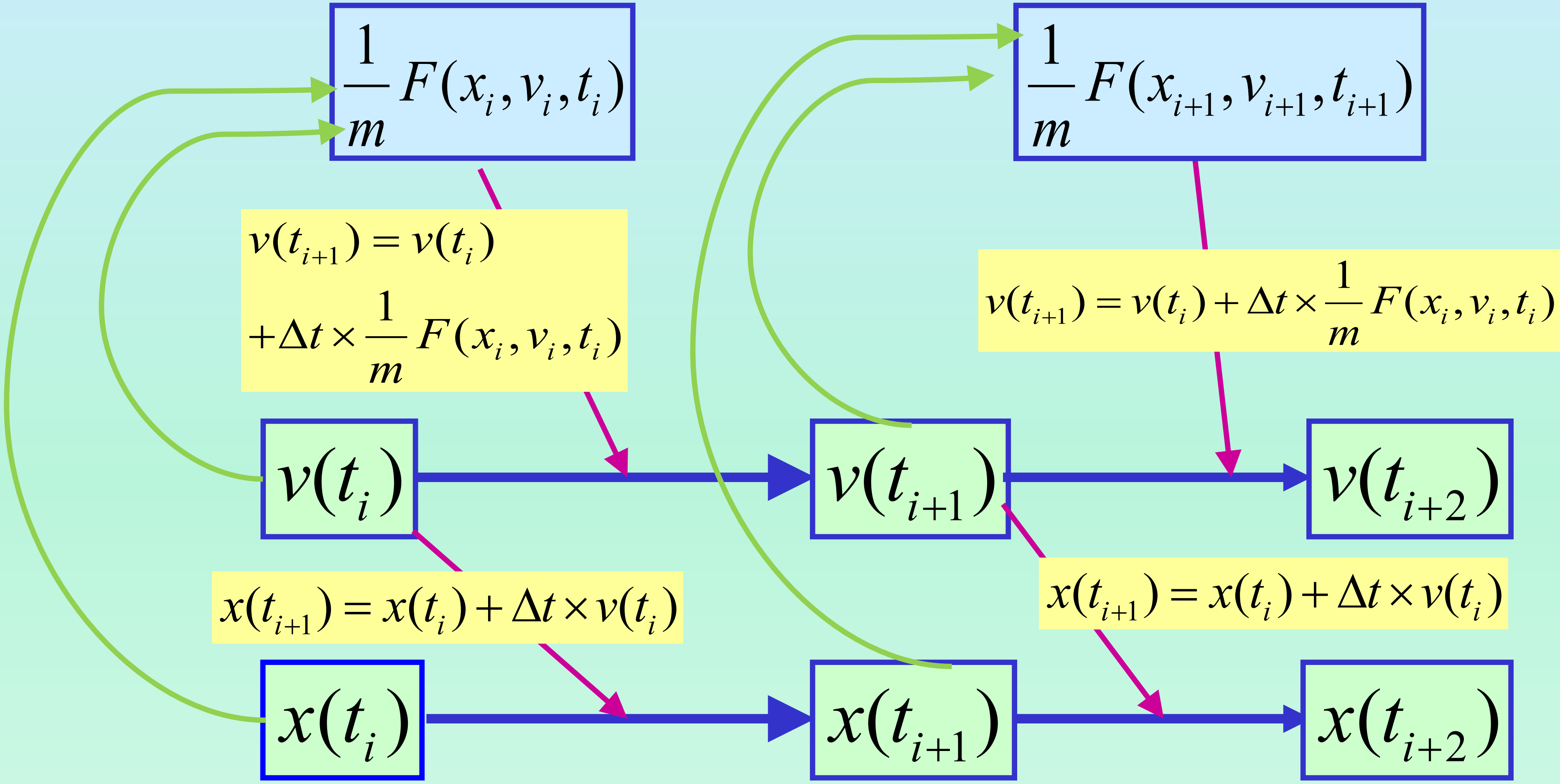
有了起始條件，以及運動方程式，我們可以以加減乘除運算，
一步一步計算出系統未來的狀態！



x_0 x_1 x_2 x_3

起使速度 v_0 v_1 v_2 v_3

起始位置 x_0



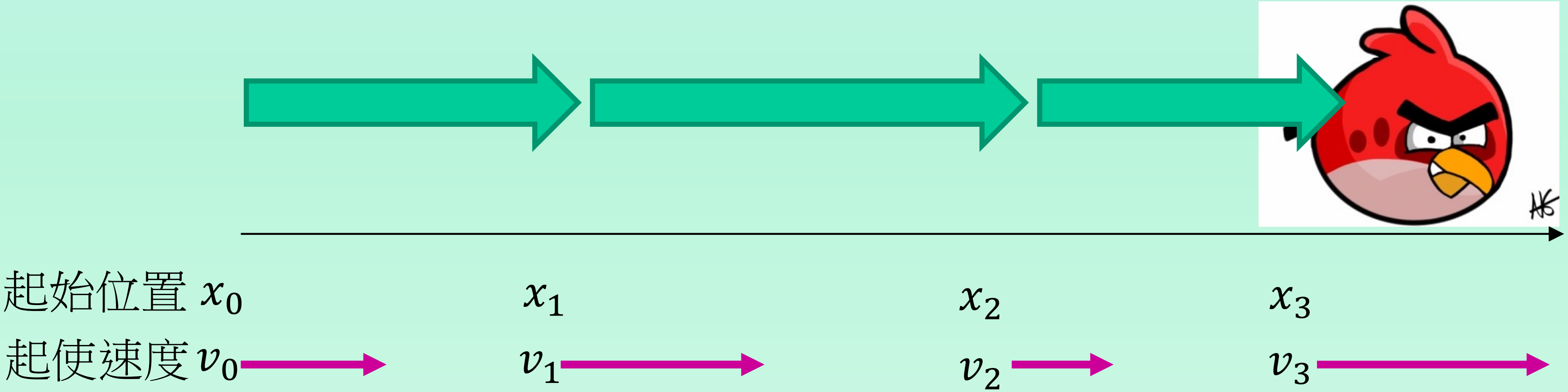
流程圖看起來複雜，卻只是算術而且一直重複

不連續時間下，我們得到唯一一個解

將時間由不連續趨近連續$\Delta t \rightarrow 0$，原則上就可以得到真正的解！

運動方程式加上兩個起始條件就決定唯一的一個解！

微分方程式基本定理原則上就是這樣證明的！



不連續時間Δt下得到的解，就是真實解的一個近似！

這個近似可以系統性地進行改善！

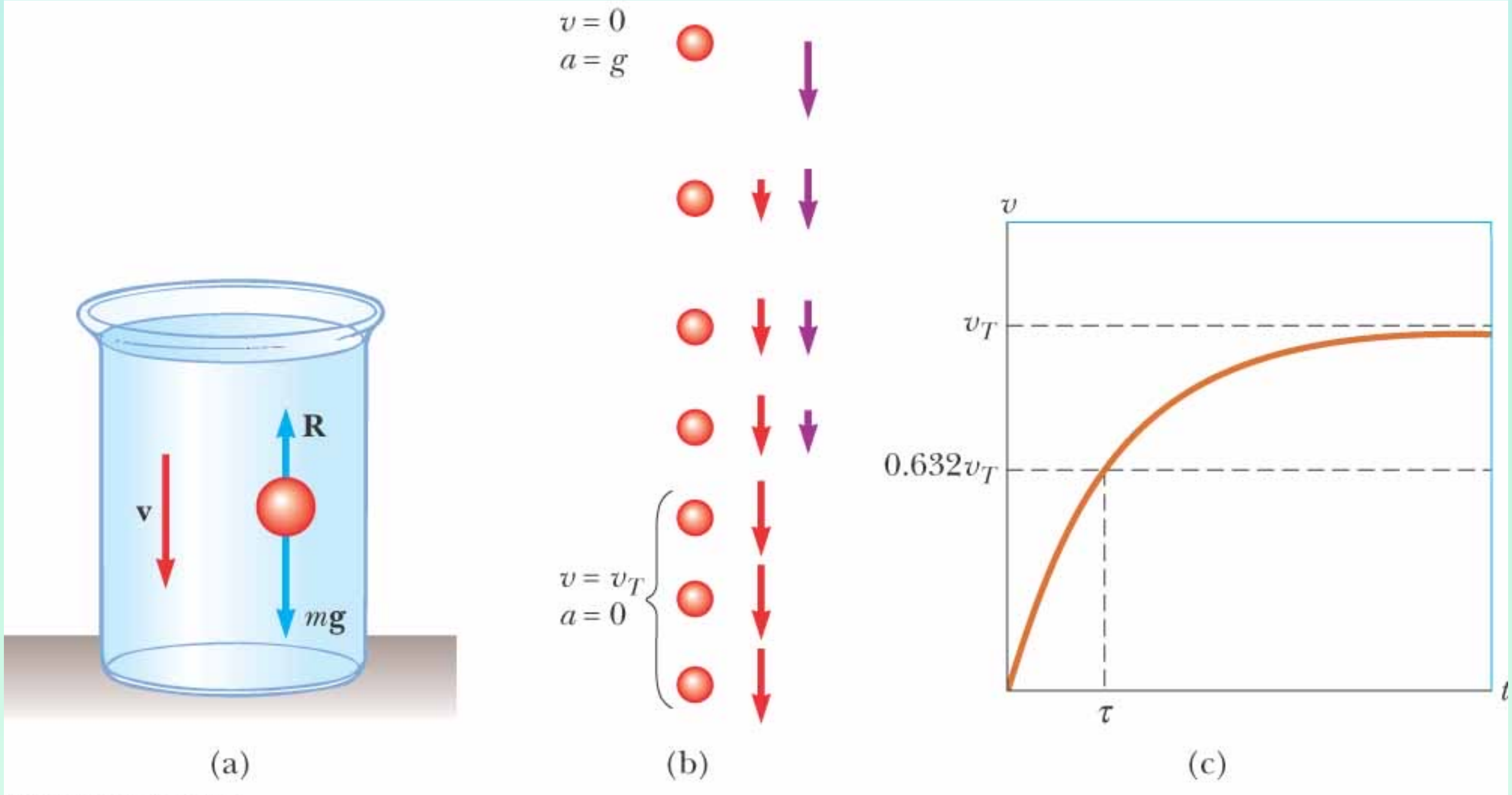
所以數值方法求解，就是一個列表！

The Euler Method for Solving Dynamics Problems

Step	Time	Position	Velocity	Acceleration
0	t_0	x_0	v_0	$a_0 = F(x_0, v_0, t_0)/m$
1	$t_1 = t_0 + \Delta t$	$x_1 = x_0 + v_0 \Delta t$	$v_1 = v_0 + a_0 \Delta t$	$a_1 = F(x_1, v_1, t_1)/m$
2	$t_2 = t_1 + \Delta t$	$x_2 = x_1 + v_1 \Delta t$	$v_2 = v_1 + a_1 \Delta t$	$a_2 = F(x_2, v_2, t_2)/m$
3	$t_3 = t_2 + \Delta t$	$x_3 = x_2 + v_2 \Delta t$	$v_3 = v_2 + a_2 \Delta t$	$a_3 = F(x_3, v_3, t_3)/m$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	t_n	x_n	v_n	a_n

阻力下的落體

$$\frac{dv_y}{dt} = -g - \frac{k}{m} v_y$$



$\Delta t = 10^{-4}\,\mathrm{s}$

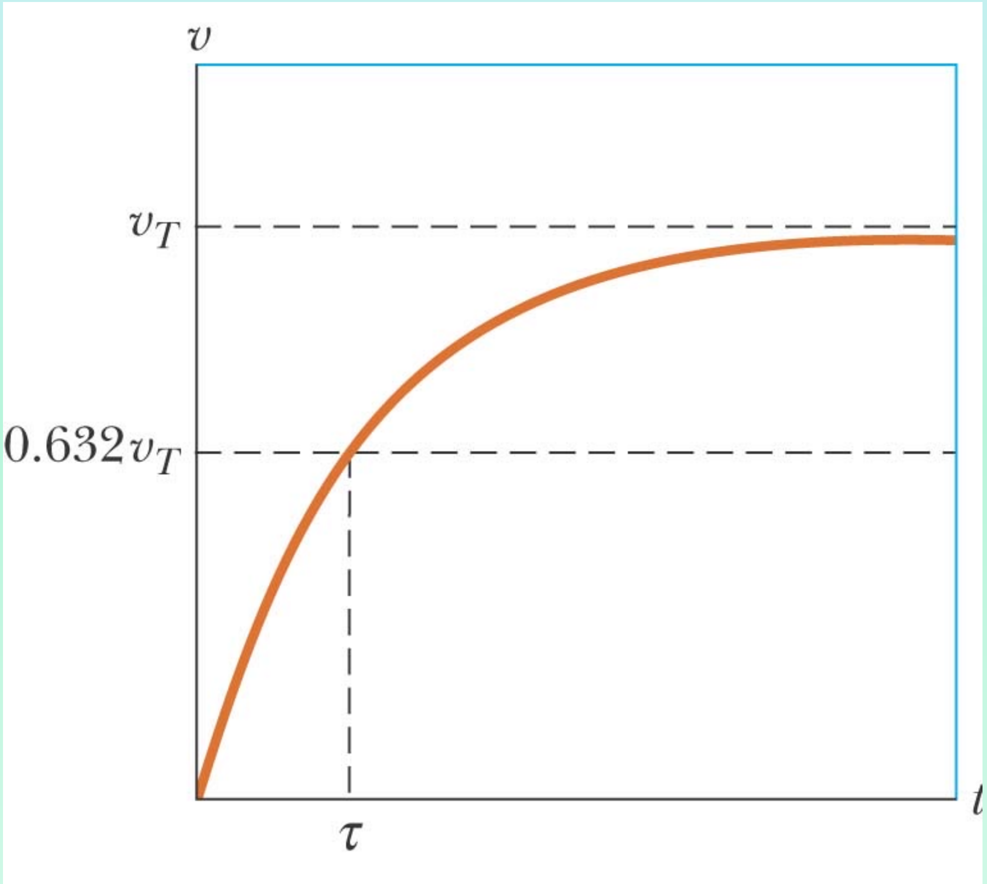
$x(t_{i+1}) = x(t_i) + 10^{-4} \times v(t_i)$ $\quad$ $v(t_{i+1}) = v(t_i) - 10^{-4} \times \boxed{(980 - 196 \times v(t_i))}$

The Sphere Begins to Fall in Oil

Step	Time (ms)	Position (cm)	Velocity (cm/s)	Acceleration (cm/s^2)
0	0.0	0.0000	0.0	−980.0
1	0.1	0.0000	−0.10	−960.8
2	0.2	0.0000	−0.19	−942.0
3	0.3	0.0000	−0.29	−923.5
4	0.4	−0.0001	−0.38	−905.4
5	0.5	−0.0001	−0.47	−887.7
6	0.6	−0.0001	−0.56	−870.3
7	0.7	−0.0002	−0.65	−853.2
8	0.8	−0.0003	−0.73	−836.5
9	0.9	−0.0003	−0.82	−820.1
10	1.0	−0.0004	−0.90	−804.0

The Sphere Reaches 0.900 v_T

Step	Time (ms)	Position (cm)	Velocity (cm/s)	Acceleration (cm/s^2)
110	11.0	−0.0324	−4.43	−111.1
111	11.1	−0.0328	−4.44	−108.9
112	11.2	−0.0333	−4.46	−106.8
113	11.3	−0.0337	−4.47	−104.7
114	11.4	−0.0342	−4.48	−102.6
115	11.5	−0.0346	−4.49	−100.6
116	11.6	−0.0351	−4.50	−98.6
117	11.7	−0.0355	−4.51	−96.7
118	11.8	−0.0360	−4.52	−94.8
119	11.9	−0.0364	−4.53	−92.9
120	12.0	−0.0369	−4.54	−91.1



$$-g + v_{yT} = 0$$

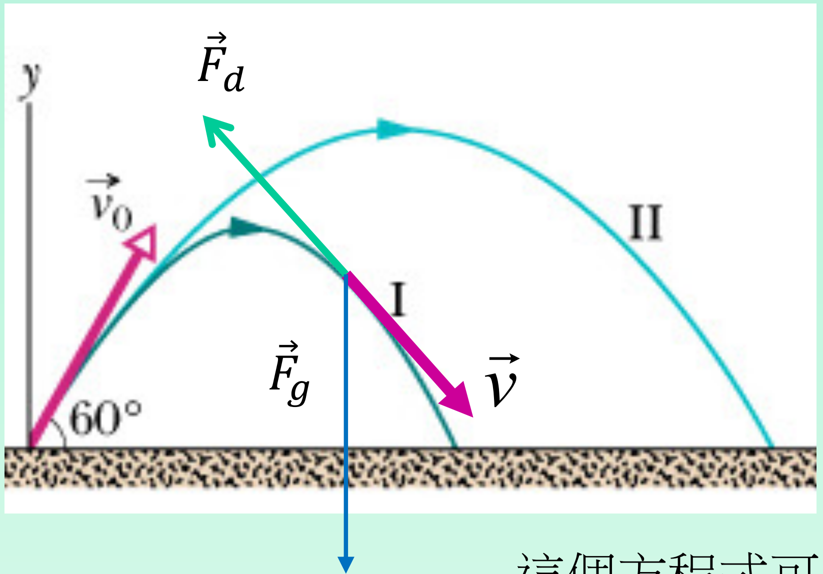
$$v_y = \left(v_{y0} + \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}$$

空氣阻力大小與速度平方成正比時的拋體運動

運動方程式：

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{D}{m} v_x \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

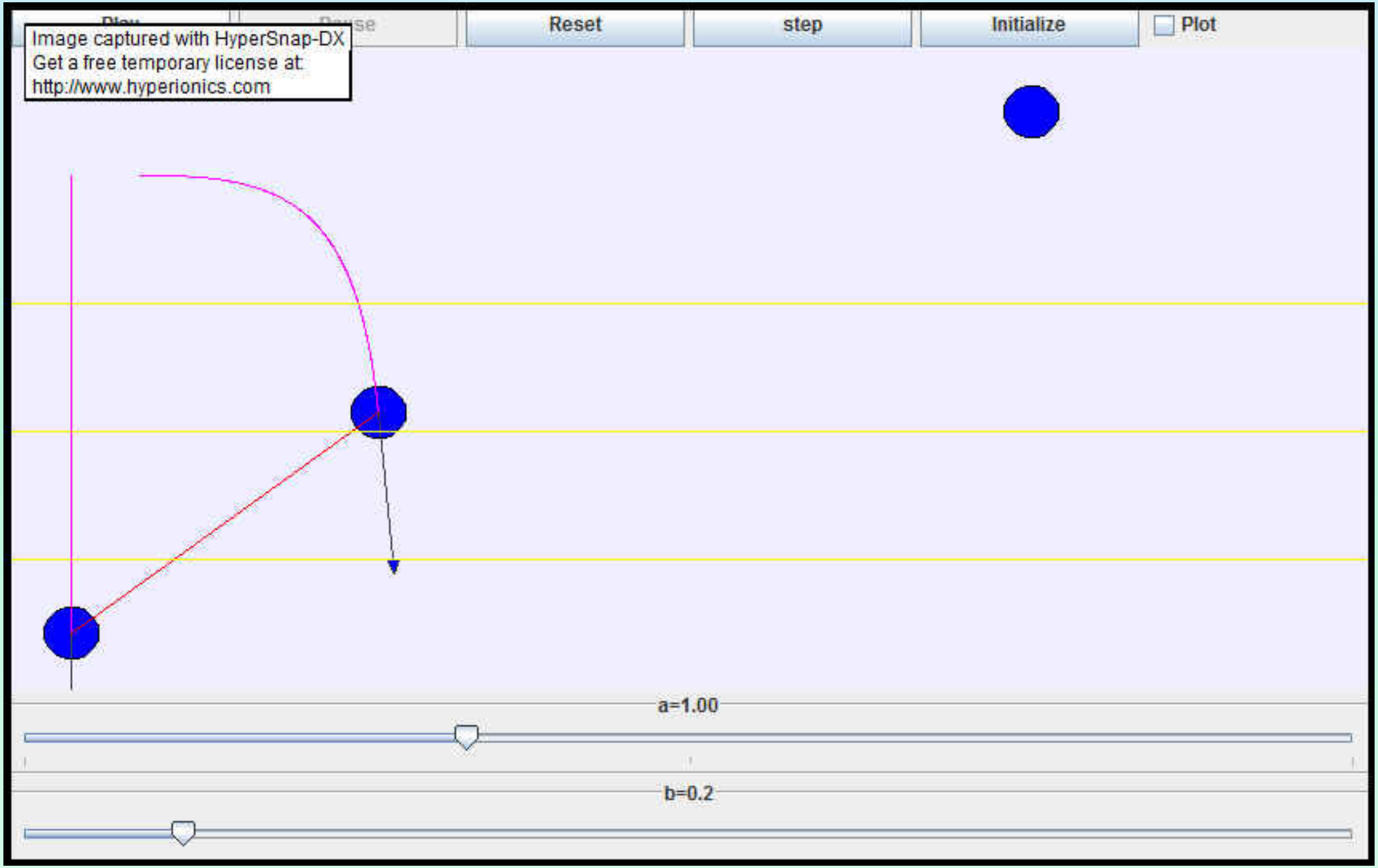
$$\frac{dv_y}{dt} = -g - \frac{D}{m} v_y \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$



這個方程式非常複雜。

但對電腦來說，也就是加減乘除而已！

這個方程式可以用數值方法來解：


Reset
step
Initialize
Plot
Image captured with HyperSnap-DX
Get a free temporary license at:
http://www.hyperionics.com
a=1.00
b=0.2

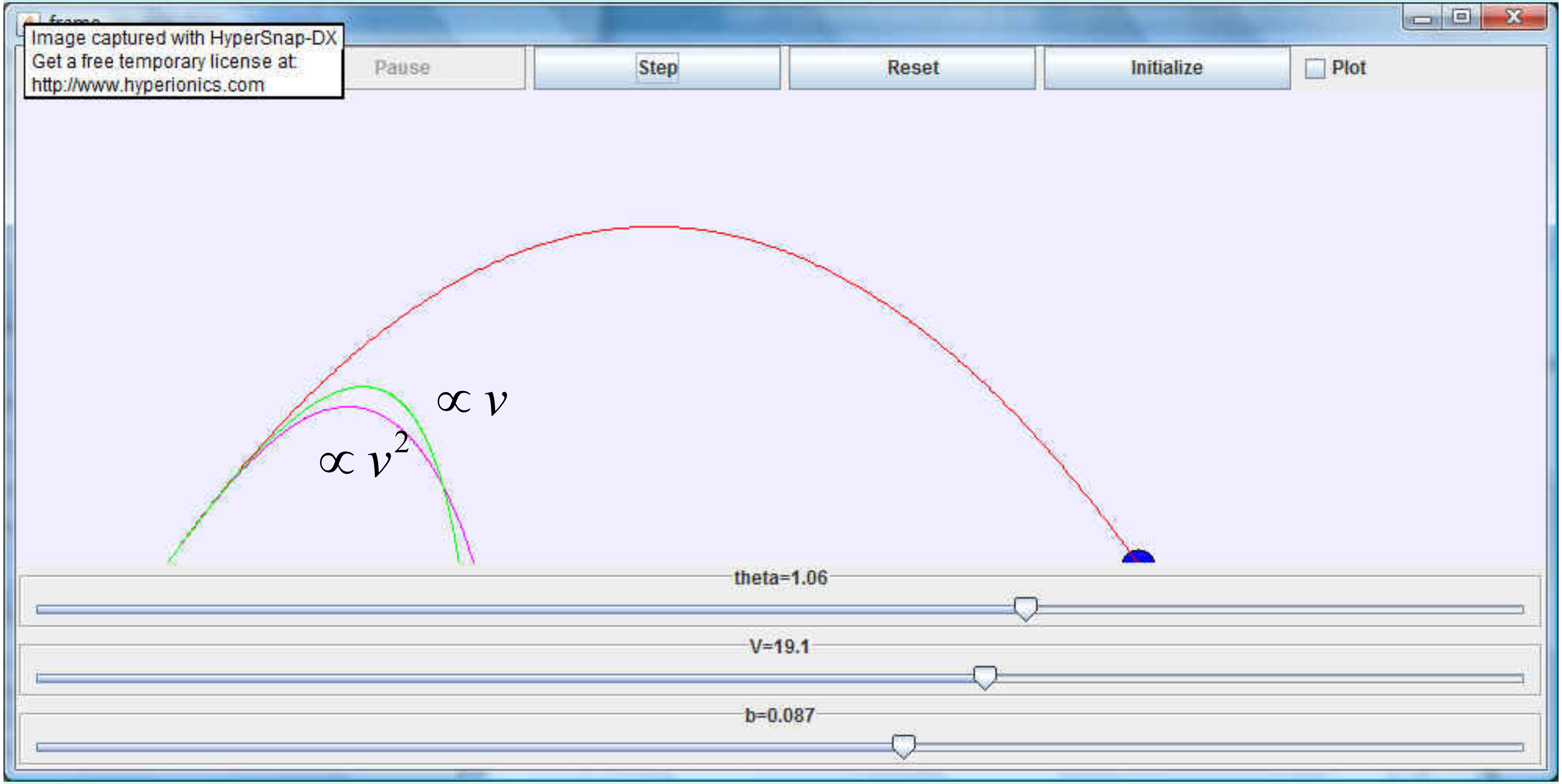
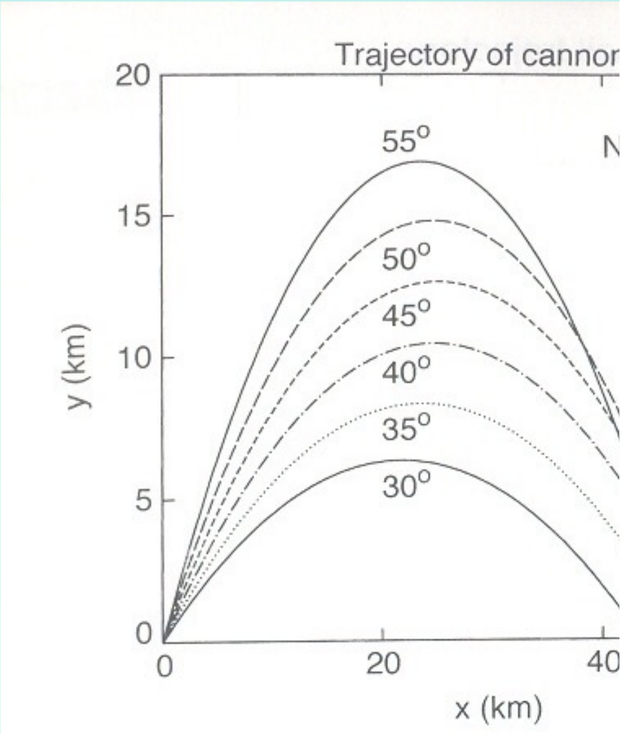
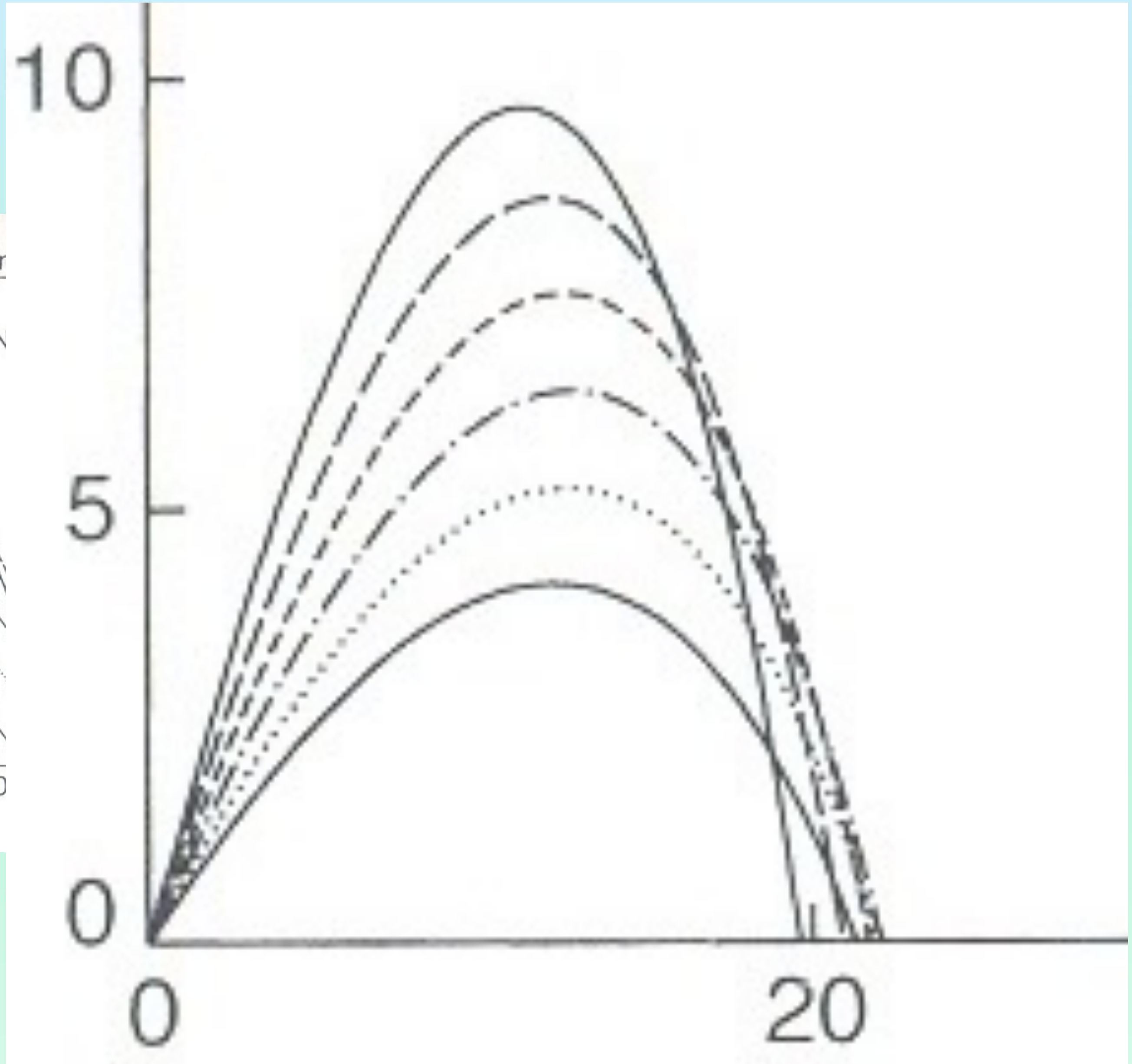


Image captured with HyperSnap-DX
Get a free temporary license at:
http://www.hyperionics.com
Pause
Step
Reset
Initialize
Plot
∝ v
∝ v²
theta=1.06
V=19.1
b=0.087





射程減少近一半

最大射程仰角降低

$$\frac{dx}{dt} = v$$ → $$v \sim \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

起始位置 x_0　　下一步走多遠由起始速度決定！

起始速度 v_0

$\Delta x \sim v \cdot \Delta t$ → $x(\Delta t) - x(0) = v(0) \cdot \Delta t$　這事實上只是近似！

但中值定理告訴我們的確時間在$(0 \to \Delta t)$之間，存在某一個時間t_0

$$x(\Delta t) - x(0) = v(t_0) \cdot \Delta t$$

是真實的等式。

當然，t_0的確切值未知，只知道一定存在。

所以上法是選擇$(0 \to \Delta t)$的一端0來近似在$(0 \to \Delta t)$之間的t_0。

如此容易偏頗，造成誤差容易累積。

比較聰明的辦法是以$(0 \to \Delta t)$的中點$\Delta t/2$來近似在$(0 \to \Delta t)$之間的t_0。

下一步走多遠由中點速度決定！

$$x(\Delta t) = x(0) + v\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \cdot \Delta t$$

$$x(0) \longrightarrow x(\Delta t)$$

$$v(0) \longrightarrow v\left(\frac{\Delta t}{2}\right)$$

$$v\left(\frac{\Delta t}{2}\right) - v_0 = a(x_0) \cdot \frac{\Delta t}{2} = \frac{f(x_0)}{m} \cdot \frac{\Delta t}{2}$$

而中點速度可以由起始位置及起始速度得到。

$$x(2\Delta t) = x(\Delta t) + v\left(\frac{3\Delta t}{2}\right) \cdot \Delta t$$

$x(0)$ → $x(\Delta t)$ → $x(2\Delta t)$

$v(0)$ → $v\left(\frac{\Delta t}{2}\right)$ → $v\left(\frac{3\Delta t}{2}\right)$

$$v\left(\frac{3\Delta t}{2}\right) - v\left(\frac{\Delta t}{2}\right) = \frac{f\big(x(\Delta t)\big)}{m} \cdot \Delta t$$

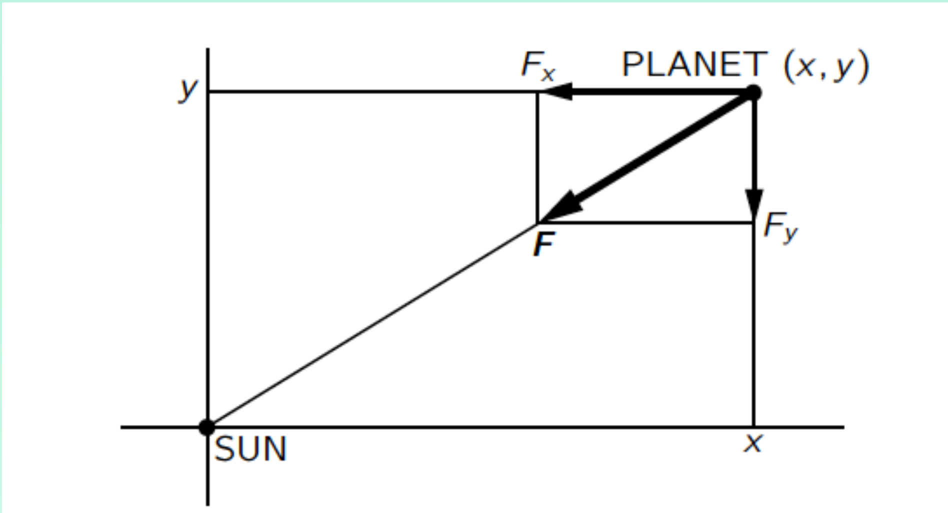
速度與位置會間隔分佈！

行星繞日軌道的模擬 simulation

$$m\frac{dv_x}{dt} = -\frac{GMm}{r^2}\frac{x}{r} = -\frac{GMm}{r^3}x$$

$$m\frac{dv_y}{dt} = -\frac{GMm}{r^2}\frac{y}{r} = -\frac{GMm}{r^3}y$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Solution of $dv_x/dt = -x/r^3$, $dv_y/dt = -y/r^3$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

Interval: $\epsilon = 0.100$

Orbit $v_y = 1.63$ $v_x = 0$ $x = 0.5$ $y = 0$ at $t = 0$

t	x	v_x	a_x	y	v_y	a_y	r	$1/r^3$
0.0	0.500		−4.000	0.000		0.000	0.500	8.000
		−0.200			1.630			
0.1	0.480		−3.685	0.163		−1.251	0.507	7.677
		−0.568			1.505			
0.2	0.423		−2.897	0.313		−2.146	0.527	6.847
		−0.858			1.290			
0.3	0.337		−1.958	0.443		−2.569	0.556	5.805
		−1.054			1.033			
0.4	0.232		−1.112	0.546		−2.617	0.593	4.794
		−1.165			0.772			
0.5	0.115		−0.454	0.623		−2.449	0.634	3.931
		−1.211			0.527			
0.6	−0.006		+0.018	0.676		−2.190	0.676	3.241
		−1.209			0.308			
0.7	−0.127		+0.342	0.706		−1.911	0.718	2.705
		−1.175			0.117			
0.8	−0.244		+0.559	0.718		−1.646	0.758	2.292
		−1.119			−0.048			

0.9	−0.356		+0.702	0.713		−1.408	0.797	1.974
		−1.048			−0.189			
1.0	−0.461		+0.796	0.694		−1.200	0.833	1.728
		−0.969			−0.309			
1.1	−0.558		+0.856	0.664		−1.019	0.867	1.536
		−0.883			−0.411			
1.2	−0.646		+0.895	0.623		−0.862	0.897	1.385
		−0.794			−0.497			
1.3	−0.725		+0.919	0.573		−0.726	0.924	1.267
		−0.702			−0.569			
1.4	−0.795		+0.933	0.516		−0.605	0.948	1.174
		−0.608			−0.630			
1.5	−0.856		+0.942	0.453		−0.498	0.969	1.100
		−0.514			−0.680			
1.6	−0.908		+0.947	0.385		−0.402	0.986	1.043
		−0.420			−0.720			
1.7	−0.950		+0.950	0.313		−0.313	1.000	1.000
		−0.325			−0.751			
1.8	−0.982		+0.952	0.238		−0.230	1.010	0.969
		−0.229			−0.774			
1.9	−1.005		+0.953	0.160		−0.152	1.018	0.949

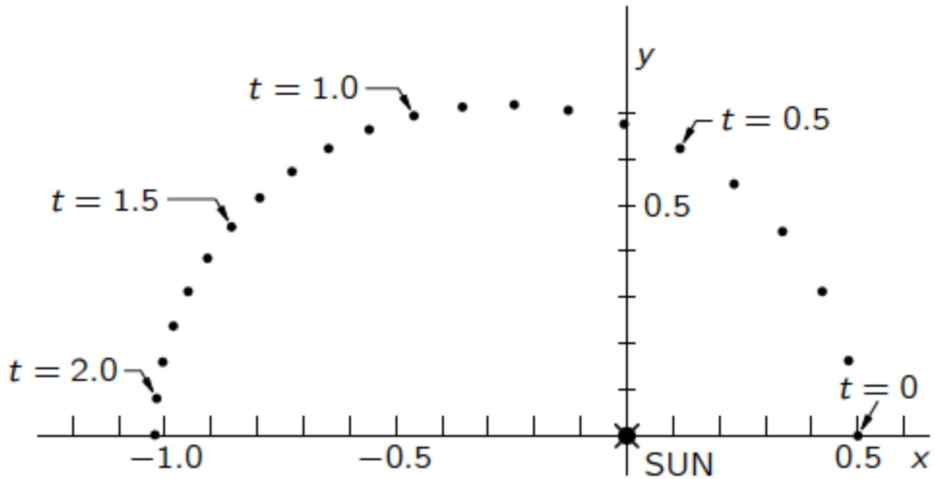
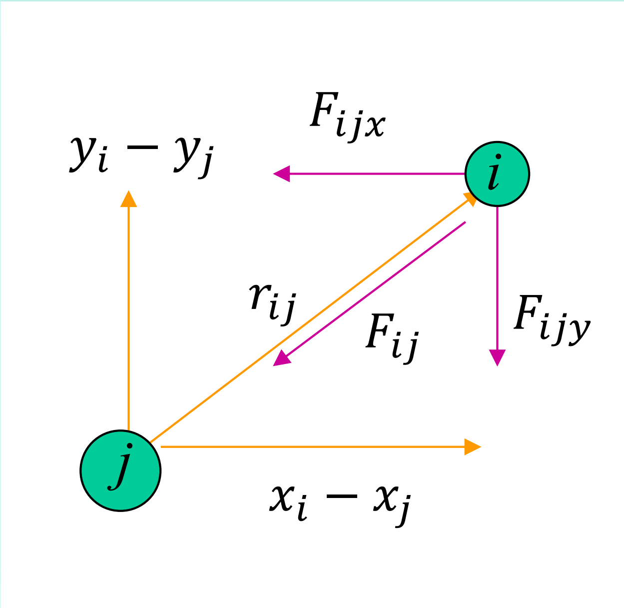


Fig. 9-6. The calculated motion of a planet around the sun.

行星系之運動

第 j 個星球對第 i 個星球的引力

$$F_{ij} = -\frac{Gm_i m_j}{r_{ij}^2} \qquad r_{ij} = \sqrt{\left(x_i - x_j\right)^2 + \left(y_i - y_j\right)^2}$$



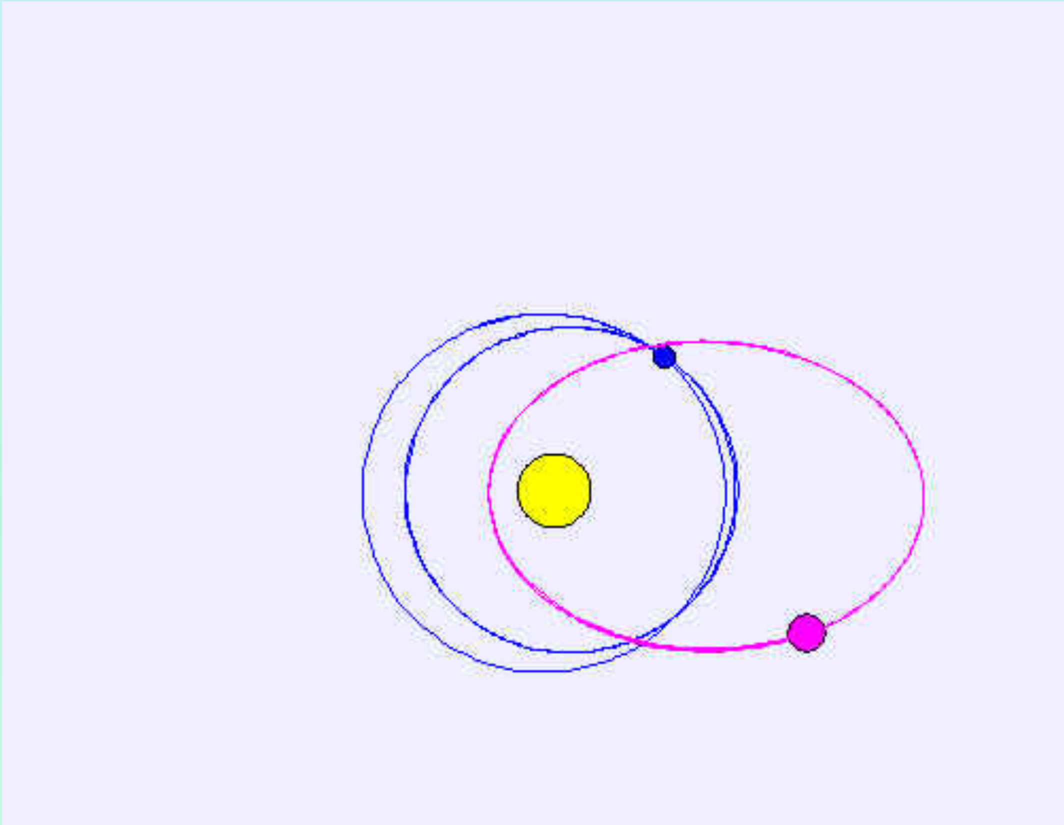
此引力的 x 分量：

$$F_{ijx} = -\frac{Gm_i m_j}{r_{ij}^2} \cdot \frac{\left(x_i - x_j\right)}{r_{ij}}$$

第 i 個星球的運動方程式：

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\sum_{j \neq i} Gm_j \frac{\left(x_i - x_j\right)}{\left[\left(x_i - x_j\right)^2 + \left(y_i - y_j\right)^2\right]^{3/2}} \cdot$$

$$\frac{d^2 y_i}{dt^2} = -\sum_{j \neq i} Gm_j \frac{\left(y_i - y_j\right)}{\left[\left(x_i - x_j\right)^2 + \left(y_i - y_j\right)^2\right]^{3/2}} \cdot$$



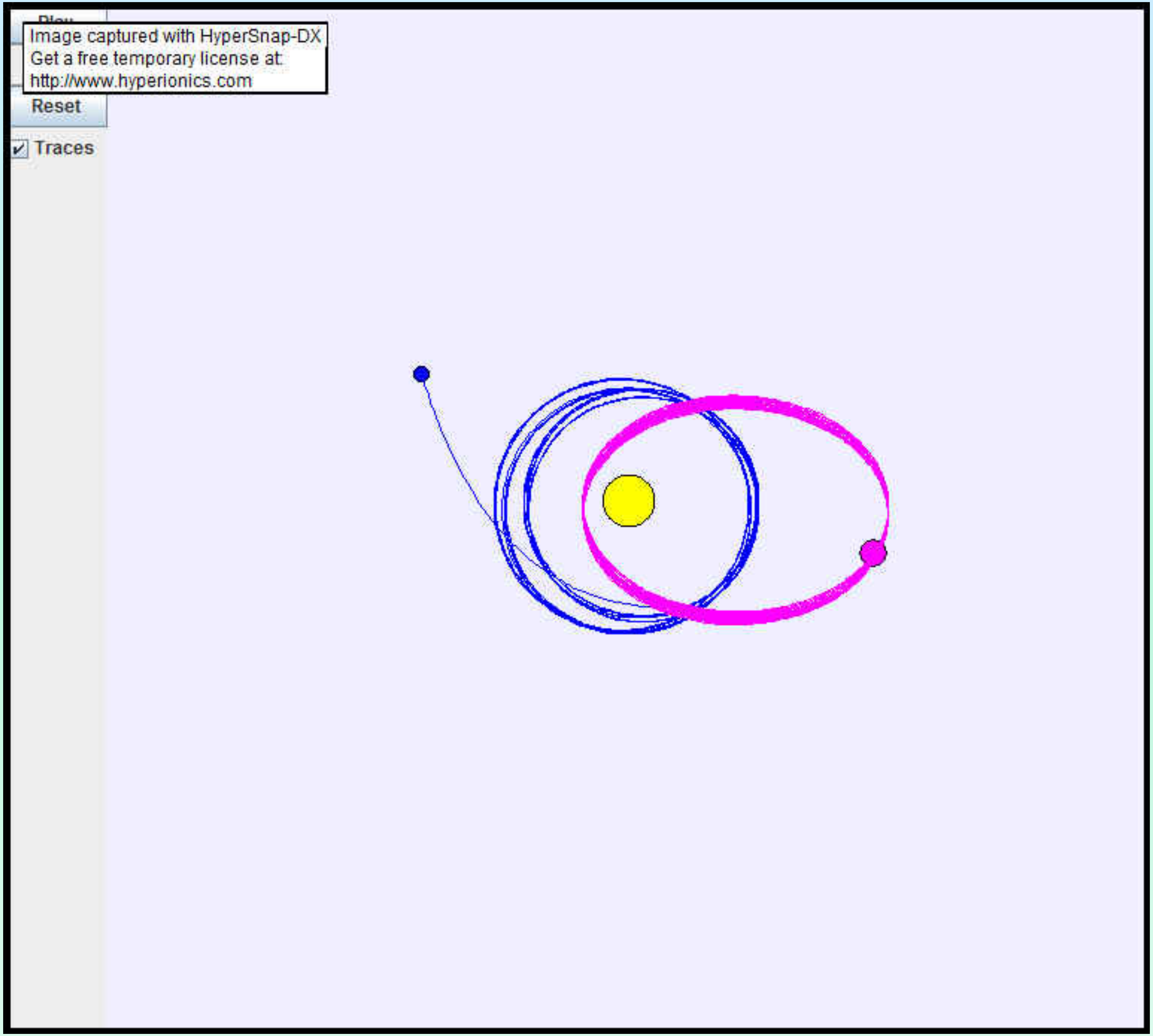


Image captured with HyperSnap-DX
Get a free temporary license at:
http://www.hyperionics.com
Reset
Traces

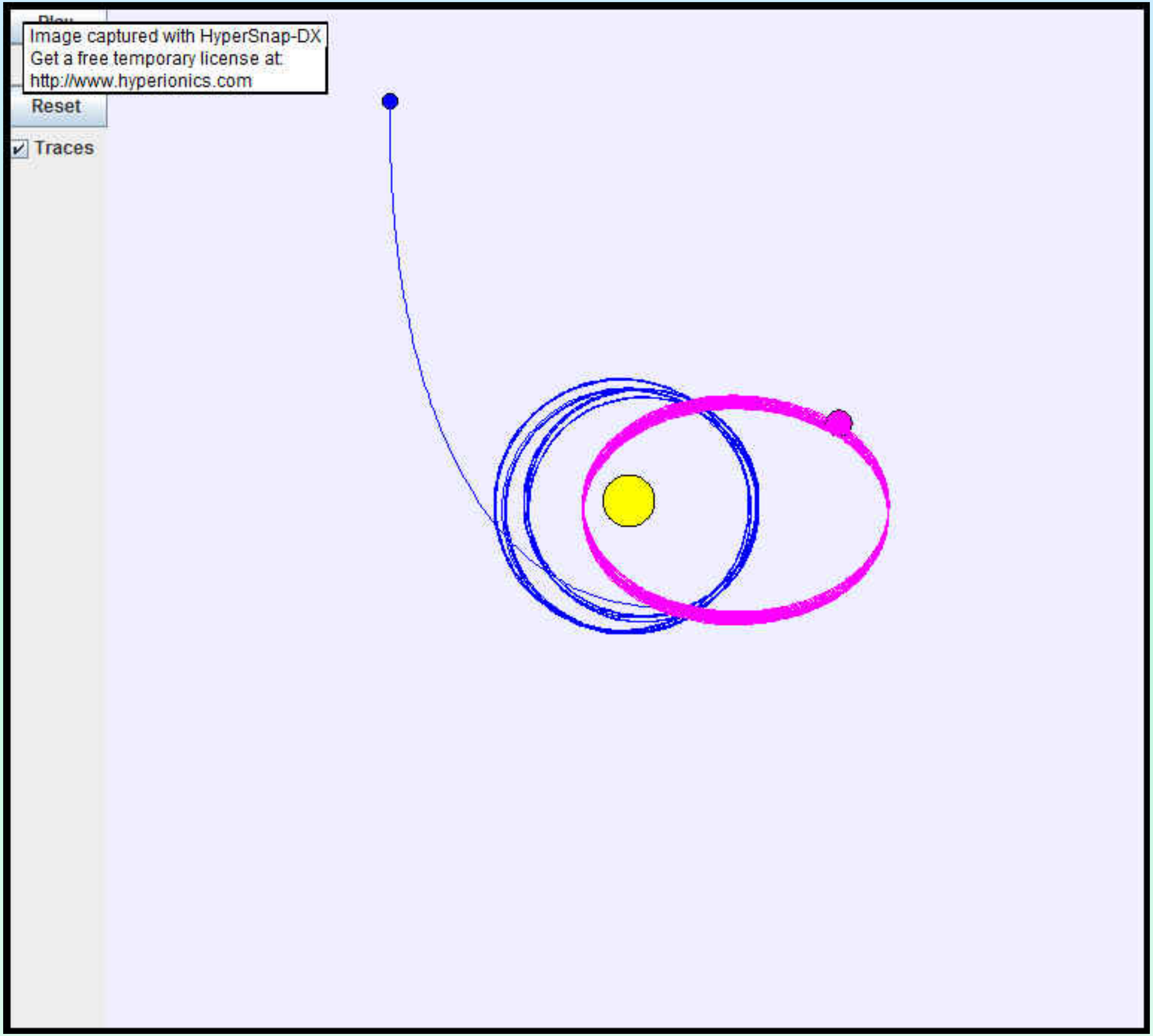
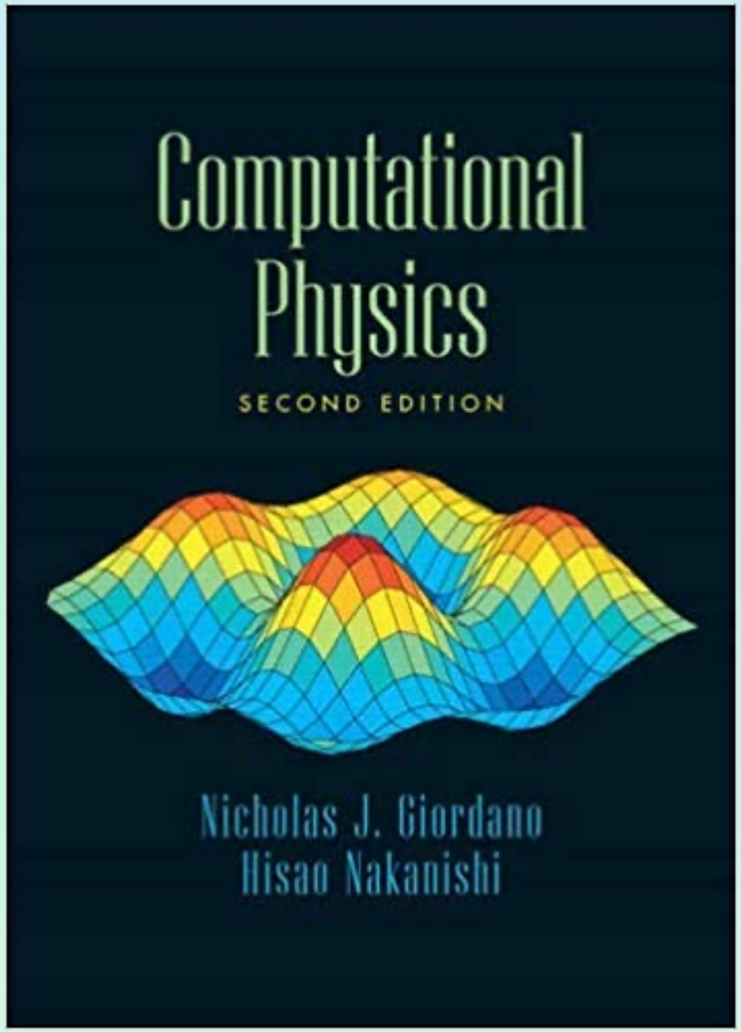


Image captured with HyperSnap-DX
Get a free temporary license at:
http://www.hyperionics.com
Reset
Traces


Computational
Physics
SECOND EDITION
Nicholas J. Giordano
Hisao Nakanishi

這樣的預測模式，不只適用於物理。

任何系統，有了運動方程式，加上起使條件，

便能決定此系統未來任一時間的狀態！

使用越精確的運動方程式，預測越準！