

力 Force



© 2012 Pearson Education, Inc.

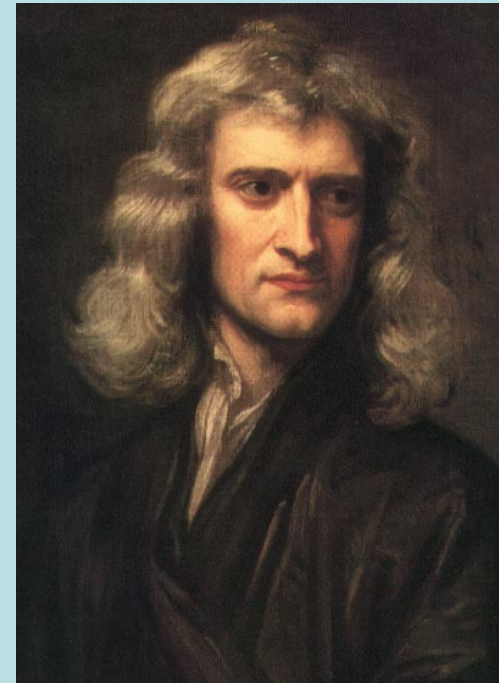


力是一個很熟悉的觀念





Is. Newton



Isaac Newton
(1642-1727)



A general Bill for this present year, ending the 19 of December 1665, according to the Report made to the KING'S most Excellent Majesty. By the Company of Parish Clerks of London, &c.

Parish	Parish	Parish	Parish
St Albans Woodberry	St Clements Eastcheap	St Dunstons	St Michael Cornhill
St Andrew's Church	St George Southwark	St Dunstons	St Michael Crowland
St Andrew's Dorset	St James Westminster	St Dunstons	St Michael Queenshithe
St Andrew's Green	St John's Westminster	St Dunstons	St Michael Rye
St Andrew's Hill	St Mary Abchurch	St Dunstons	St Michael Woodspire
St Andrew's Loft	St Mary Aldermanbury	St Dunstons	St Mildred Breadstreet
St Andrew's Lombard	St Mary Abchurch	St Dunstons	St Mildred Pothuok
St Andrew's North	St Mary le Bow	St Dunstons	St Nicholas Acon
St Andrew's St Dunstons	St Mary le Bow	St Dunstons	St Nicholas Acon
St Andrew's St Dunstons	St Mary le Bow	St Dunstons	St Nicholas Acon
St Andrew's St Dunstons	St Mary le Bow	St Dunstons	St Nicholas Acon
St Andrew's St Dunstons	St Mary le Bow	St Dunstons	St Nicholas Acon



1665 倫敦瘟疫

The Great Plague killed an estimated 100,000 people—almost a quarter of London's population—in 18 months.

It was the last plague in Europe.

Drawn

Males	Of the Plague
4857	4836
Females	Of the Plague
4833	4778
In all	In all
9690	9614

Increased in the Burials in the 150 Parishes and the 400 Houses in this year: 4856
 Increased of the Plague in the 150 Parishes and the 400 Houses in this year: 4856



Woolsthorpe Manor



登入



Google

Newton returned home. He built bookshelves and made a small study for himself. He opened the nearly blank thousand-page commonplace book he had inherited from his stepfather and named it his Waste Book. He began filling it with reading notes. These mutated seamlessly into original research. He set himself problems; considered them obsessively; calculated answers, and asked new questions. He pushed past the frontier of knowledge (though he did not know this).





Newton's Waste Book (MS Add.4004)

Much of Newton's important work on calculus is developed in this large notebook, which he began using in 1664 when he was away from Cambridge due to the plague. Newton inherited the book from his stepfather, Rev. Richard Smith, who used it from about 1642 to record his own theological

Abſtinentia.

Quæ in Moral. Du carnalis vita corrigatur et oſq; ad abſtinentia mediū a proficiendis peruenit' quali in altari in corpus noſtrū ſacra cati noſtra incenditur vel offeritur; Et quæ in coſpectu deitatis ſacrificiū reddat, unde prius culpa diſplicuit.

Cap. 1. 1.

$as=y. sm=x. mb=z. mp=a. \frac{qs=0}{x+z}. ab^2=xx+yy+z^2x+zz. \frac{zzyy+zzxx+zz3x+zz}{xx+zzx+zz} = nb^2.$

$\frac{zzzz+zzzz+zzzz+zzzz}{zzzz+zzzz+zzzz} = np^2 = aa + \frac{44zz}{xx+zzx+zz}. sb=z. mn=\frac{zy-yy}{zz}. ab^2=qb^2=zz+yy$

$nb^2 = \frac{zz+44zz-2zz-2xzz+xxzz+xx44}{zzzz+zzzz+zzzz} = \frac{zzzz+zzzz+zzzz}{zzzz+zzzz+zzzz}. i=1. \frac{zz}{zz}$

$z^4 - 2xz^3 + x^2z^2 + 2x44z - 44xx44 = 0. \text{ Suppose. } 44 = \frac{zz}{f}x^2 + gx + h. \frac{z}{f} = fx + g.$

$z+fx+g = w.$	$w^4 - 4fxw^3$	$+ 6ffxxw^2$	$- 4f^3x^3$	$z + 44z^4$	$= 0. \text{ \& } w = 6g.$
$z = w - fx - g$	$- 12fgx$	$+ 6gg$	$- 12fx^2g$	$+ 6ffxxg$	$+ 6ffxxg$
	$- 2x$	$+ 6fxx$	$- 4g^3$	$+ 4fxg^3$	$+ 4fxg^3$
		$+ 6fgx$	$- 4f^2x^3$	$+ 6f^2x^3$	$+ 6f^2x^3$
		$+ xx$	$- 6fgx^2$	$+ 6f^2x^2$	$+ 6f^2x^2$
			$- 6ggx$	$+ 6fgxg$	$+ 6fgxg$
		$- 2aa$	$- fx$	$+ fx^2g$	$+ fx^2g$
		$- h$	$+ 2gx$	$+ 2gx$	$+ 2gx$
			$+ 2fgx$	$+ 2fgx$	$+ 2fgx$
			$+ 2gax$	$+ 2gax$	$+ 2gax$
			$+ 4gaa$	$+ 4gaa$	$+ 4gaa$
			$+ 2hx$	$+ 2hx$	$+ 2hx$

$ab = \frac{z}{f}. sb^2 = \xi^2 - 4^2.$

$mb = \sqrt{\frac{z}{f} - 44} - x.$

$\frac{44\sqrt{\frac{z}{f} - 44} - 44}{\sqrt{\frac{z}{f} - 44}} = nm.$

$\xi\sqrt{\frac{z}{f} - 44} - \xi x = nb.$

$\frac{44\sqrt{\frac{z}{f} - 44}}{\sqrt{\frac{z}{f} - 44}} - 44 = \frac{z}{f} - 44$

$nb^2 = \frac{aa^2d + 44\xi\xi dd - 44^2d + 44xxd^2 - \xi^2 44x\sqrt{\frac{z}{f} - 44}}{\xi\xi\xi - 44\xi\xi} . dd = z. cc = 1.$

$= \frac{\xi\xi\xi - \xi\xi\xi 44 + \xi\xi\xi\xi x - \xi\xi\xi\xi x\sqrt{\frac{z}{f} - 44}}{\xi\xi\xi - 44\xi\xi} .$

$\xi a^2 \xi^2 - 2aa^2 44 + 344\xi^2 - 244 + 244xx - \xi^4 - \xi\xi xx \} = 0.$

$- 4444x\sqrt{\frac{z}{f} - 44} + 2\xi\xi x\sqrt{xx - 44}$

Problems. 1 To find y^e axis, diameters, centers, asymptotes of liſs
 2 To compare their crookedness with y^e crookedness of a given circle
 3 To find y^e longest & shortest liſs wch can be drawn w^{ch} & perpen-
 dicular to the liſe & to find all ſuch liſs are perpendicular at both ends to y^e



The plague year was his transfiguration. Solitary and almost incommunicado, he became the world's paramount mathematician.

Newton Gleick

瘟疫這年是牛頓完成的年代，在孤獨、與外界毫無聯繫的情況下，他由一個普通的學生變成了世界頂尖的數學家。

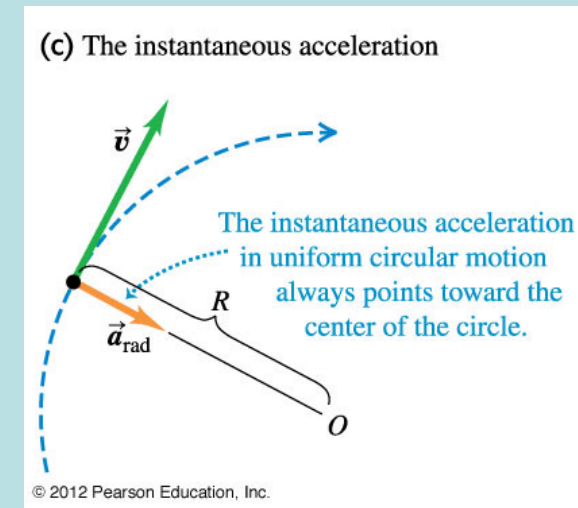
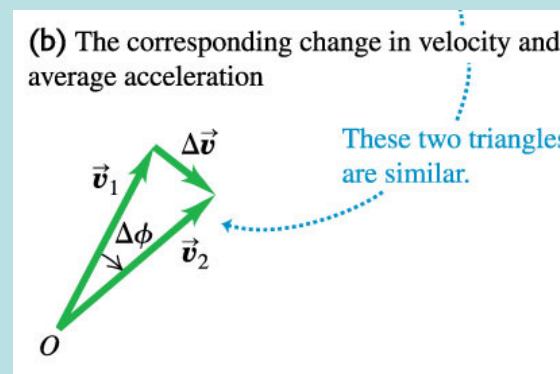
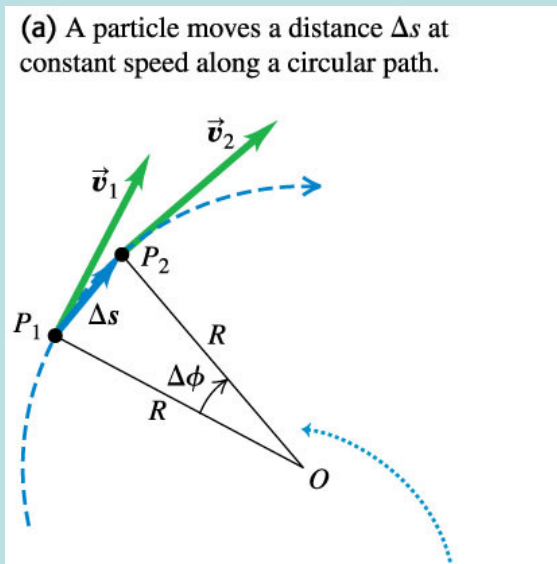
Although he had been undistinguished as a Cambridge student, Newton's private studies at his home in Woolsthorpe over the subsequent two years saw the development of his theories on **calculus**, **optics**, and the **law of gravitation**.

Wiki

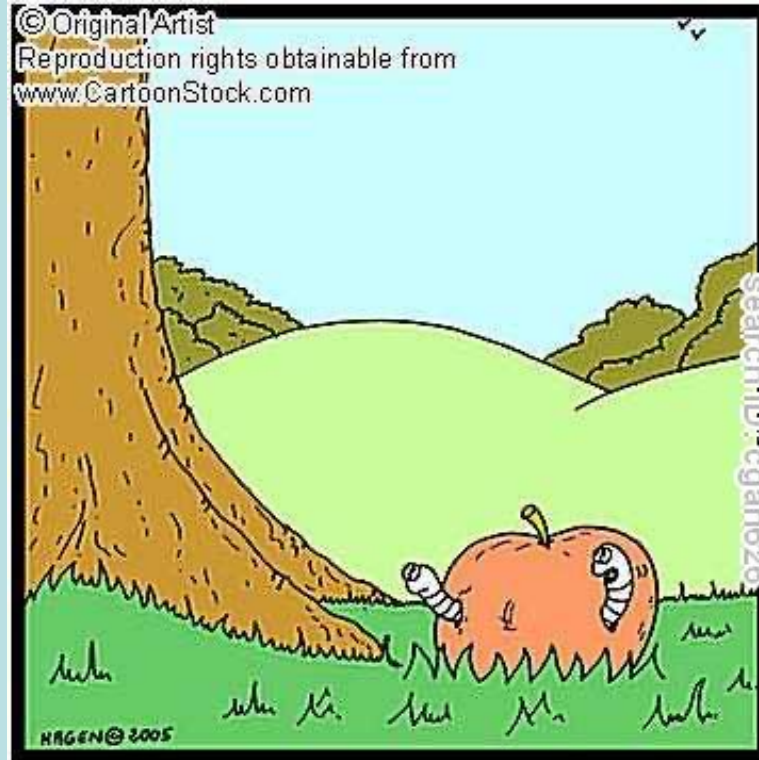
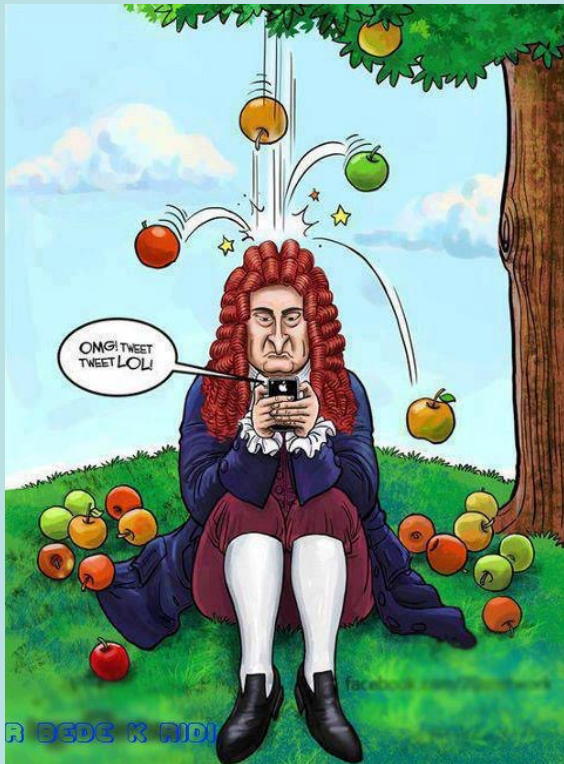
定義： 瞬時變化率 = $\lim_{\text{時間趨近於零}} \frac{\text{變化}}{\text{時間}}$

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \equiv \frac{dx}{dt} \equiv \dot{x}$$

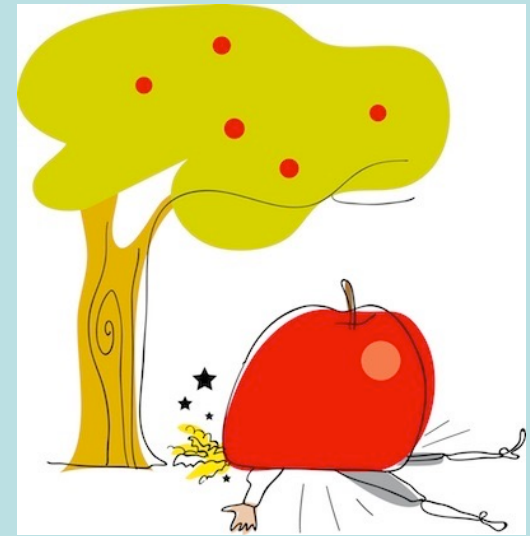
稱為導數或流數。



圓周運動的加速度指向地心！



Poor Mr Newton, we fell right onto his head...
Hope he'll be OK...



“After dinner, the weather being warm, we went into the garden and drank tea, under the shade of some apple trees...he told me, he was just in the same situation, as when formerly, the notion of gravitation came into his mind. It was occasioned by the fall of an apple, as he sat in contemplative mood. **Why should that apple always descend perpendicularly to the ground**, thought he to himself...”

...without the ground, it will reach the center of the earth eventually.....

Memoirs of Sir Isaac Newton's Life, written by William Stukeley

我發現重力的那天，與今天有點類似，那是起因於一顆蘋果落地。

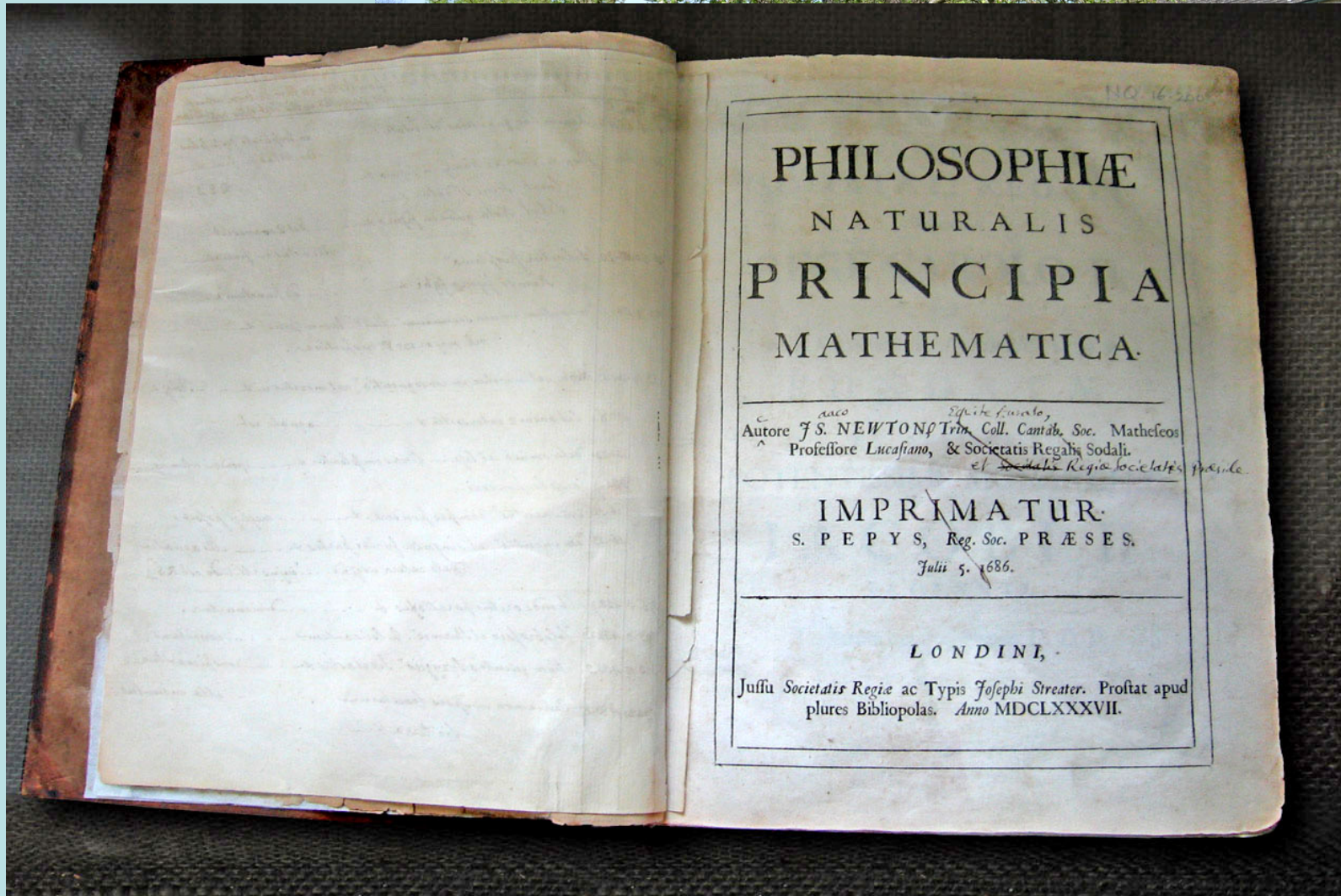
我心裡想：蘋果一定落地嗎？如果一直持續垂直下落，它最後應該掉到地心才對。







牛頓蘋果樹的後代 Cambridge University

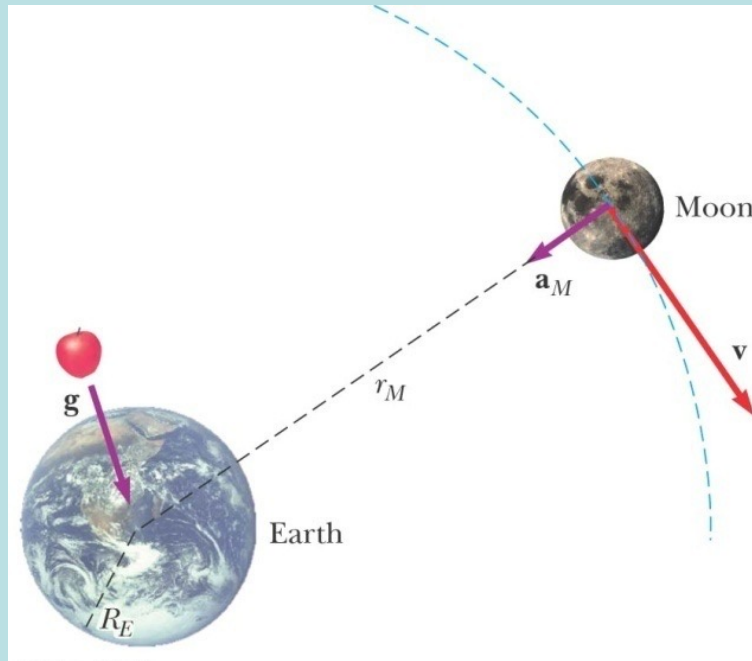


情況下，

Newton's own copy of his Principia, with hand-written corrections for the second edition, in the Wren Library at Trinity College, Cambridge.

月球的運動與蘋果的運動都是加速度運動！

兩者的加速度都同樣指向地心！

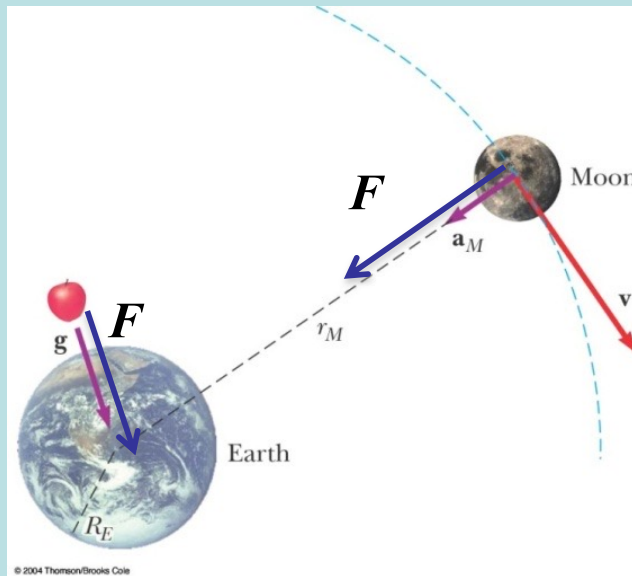


合理猜測：月球與蘋果同樣都在地球**影響**下運動！地球影響是運動的因！

同樣的因，必然造成同樣的果！

而月球與蘋果的運動軌跡相同之特質就是加速度！因此加速度是果！

因 果
地球影響 ↔ 蘋果加速度



$F \propto a$ 將一物體對另一物體的影響，稱為力 Force。

經驗顯示：質量越大越難推動！需要越大的力。

$$F = ma$$

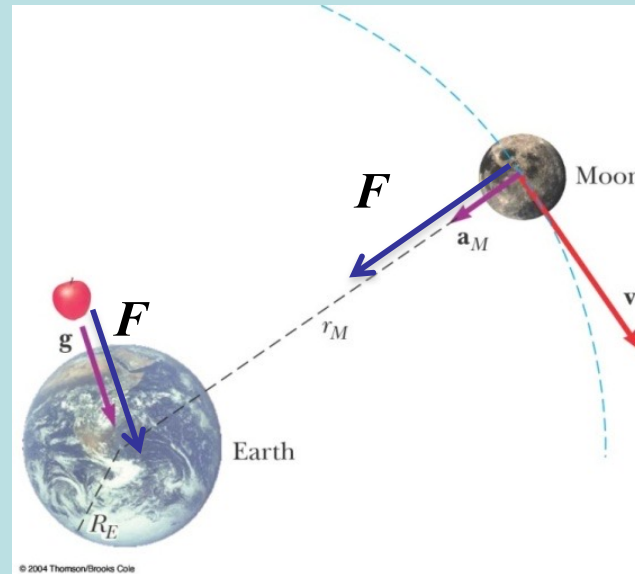
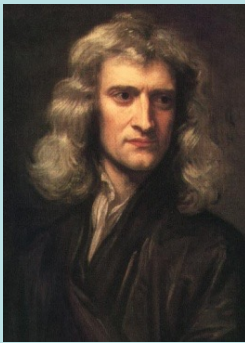
加速度是指向地心，因此力與加速度都有方向性。

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

牛頓運動定律

牛頓運動定律

$$\vec{F} = m\vec{a}$$



牛頓定律看來好像只是一個物理量力的定義。

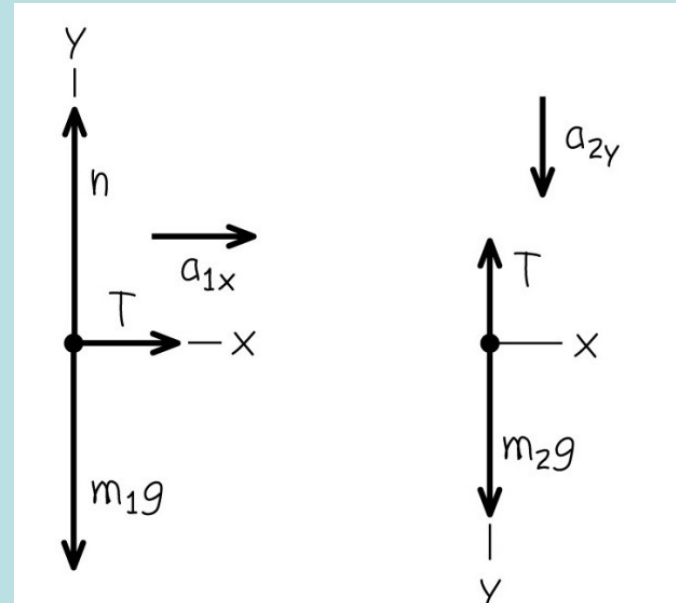
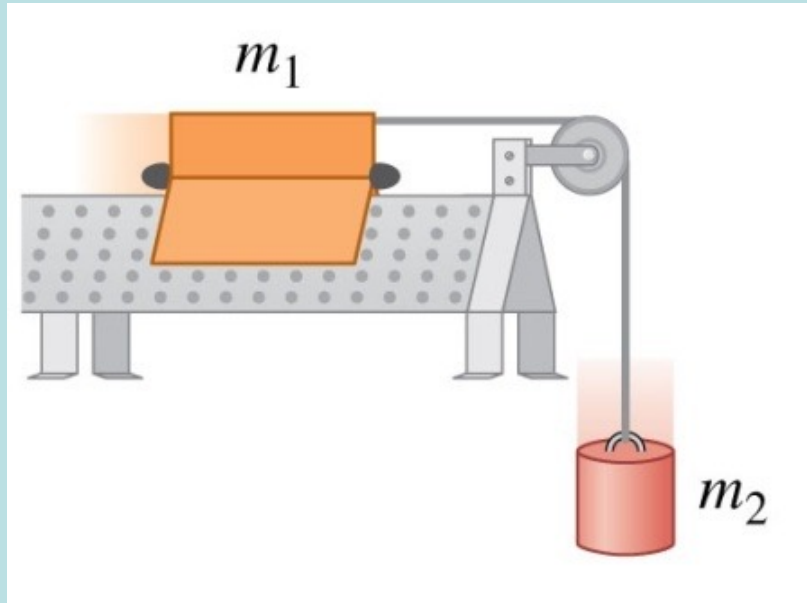
但它具體指出：一物體的 ma 將對應改變運動狀態的外在原因 **F** ！

”沿”著加速度去找，你一定可以找到一個具體的、施與影響的施力者。

先從與時間無關的常數力開始討論：

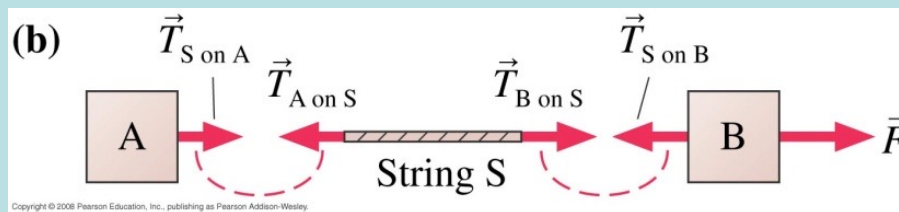
每一個質點都滿足一個牛頓第二定律。 $\vec{F} = m\vec{a}$

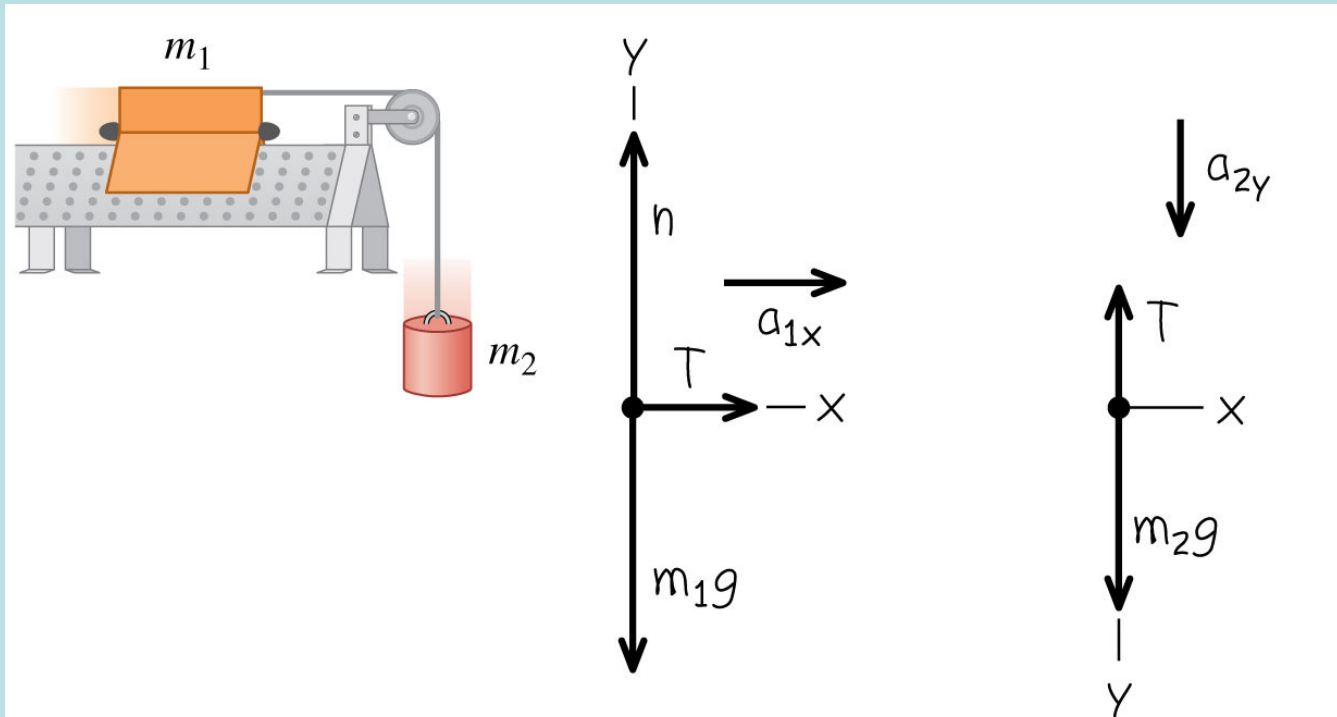
例 1: 因此解運動問題，首要分析每一個質點的受力！



繩的張力Tension T 一定沿著繩的方向。

如果忽略繩的質量，因為繩的 $ma = 0$ ，因此繩兩端張力必須相等。





繩兩端的張力 T 相等。

這還有一個條件：兩個物體的加速度 a 相等。

每一個質點都滿足一個牛頓第二定律。

$$T = m_1 a$$

$$m_2 g - T = m_2 a$$

未知量 a, T 就可以解出。

$$a = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2}$$

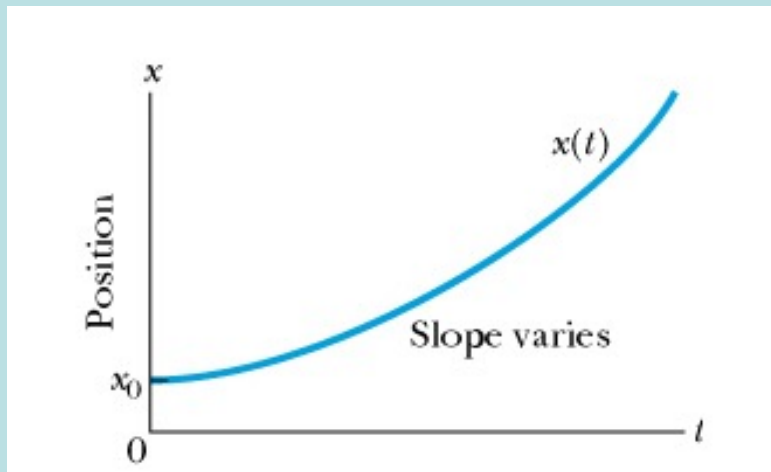
$$T = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$$

以上這個例子是等加速度運動，加速度不變：

$$a = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2}$$

找到加速度後，代入等加速度運動公式，物體運動的軌跡就可以全部得到。

任何時間 t ，物體運動的位置 $x(t)$ 與速度 $v(t)$ 都可以知道了。



例如，對方塊一：

$$x(t) = \frac{1}{2} \frac{m_2 g}{m_1 + m_2} t^2 + v_0 t + x_0$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2} t + v_0$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

力與加速度都是向量！

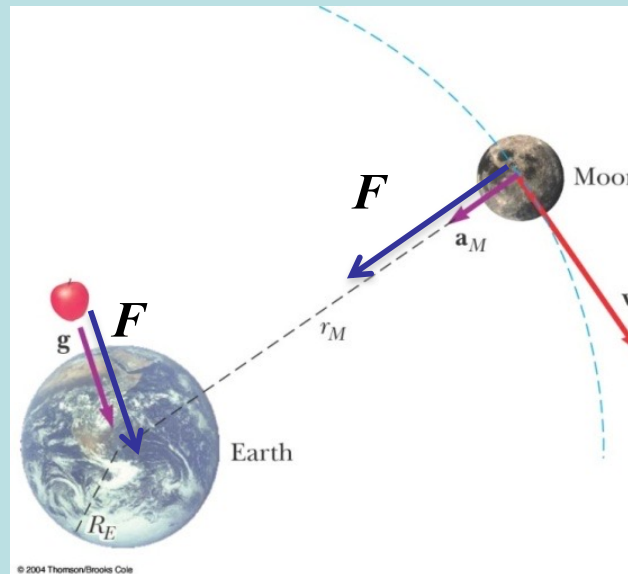
以分量來表示，向量的牛頓運動定律其實是三個方程式：

每一個方向都有一個牛頓運動定律！

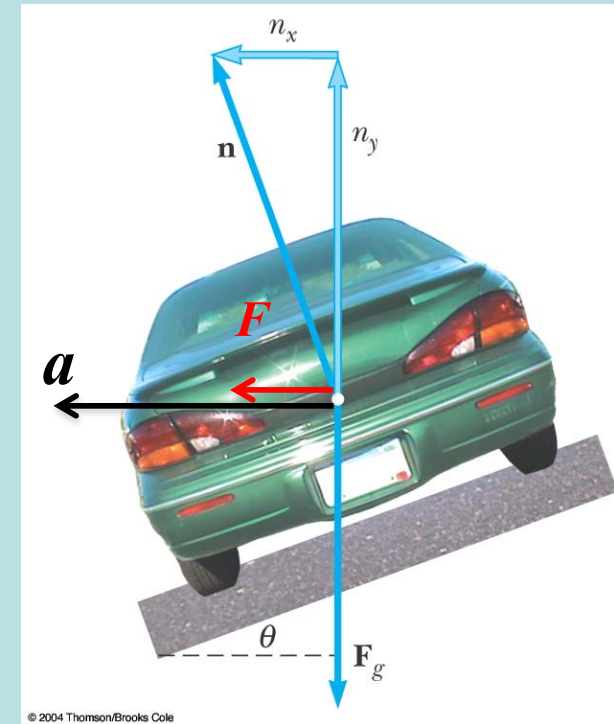
$$F_x = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$F_y = m \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$F_z = m \frac{d^2z}{dt^2}$$



例 2:

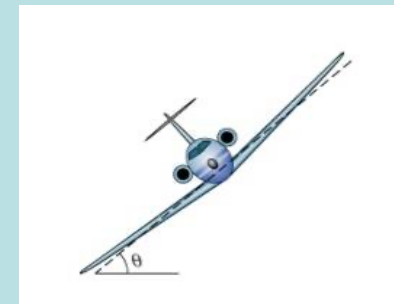


車輛受重力及地面施力：

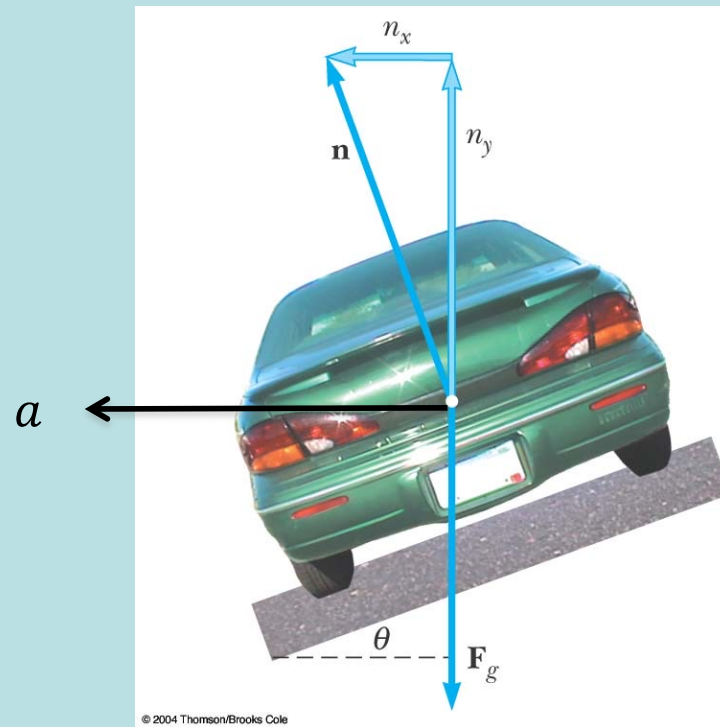
地面施力一定垂直於地面：正向力 (Normal Force) \vec{n} 。

車輛的加速度是指向圓形軌道的圓心，因此是水平方向。

所以可以確定：合力是指向水平方向。



用分量來討論向量問題是最容易的！



每一個方向都有一個牛頓運動定律！

$$F_x = ma_x$$

$$n \sin \theta = m \frac{v^2}{r}$$

$$n = \frac{mg}{\cos \theta}$$

$$F_y = ma_y$$

$$n \cos \theta - mg = 0$$

$$v = \sqrt{rg \tan \theta}$$


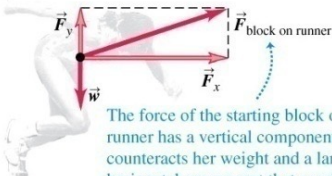
解題訣竅：

將未知的力與加速度以符號代表。


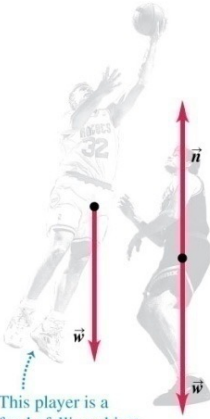
要求每一個有質量的物體，每一個方向都滿足一個牛頓第二定律！

無質量或質量可以忽略者，要求其所受合力必須為零。

聯立方程式，解出未知量。


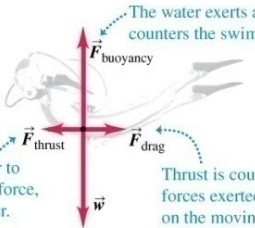
(a)  

The force of the starting block on the runner has a vertical component that counteracts her weight and a large horizontal component that accelerates her.

(b)  

To jump up, this player will push down against the floor, increasing the upward reaction force \vec{n} of the floor on him.

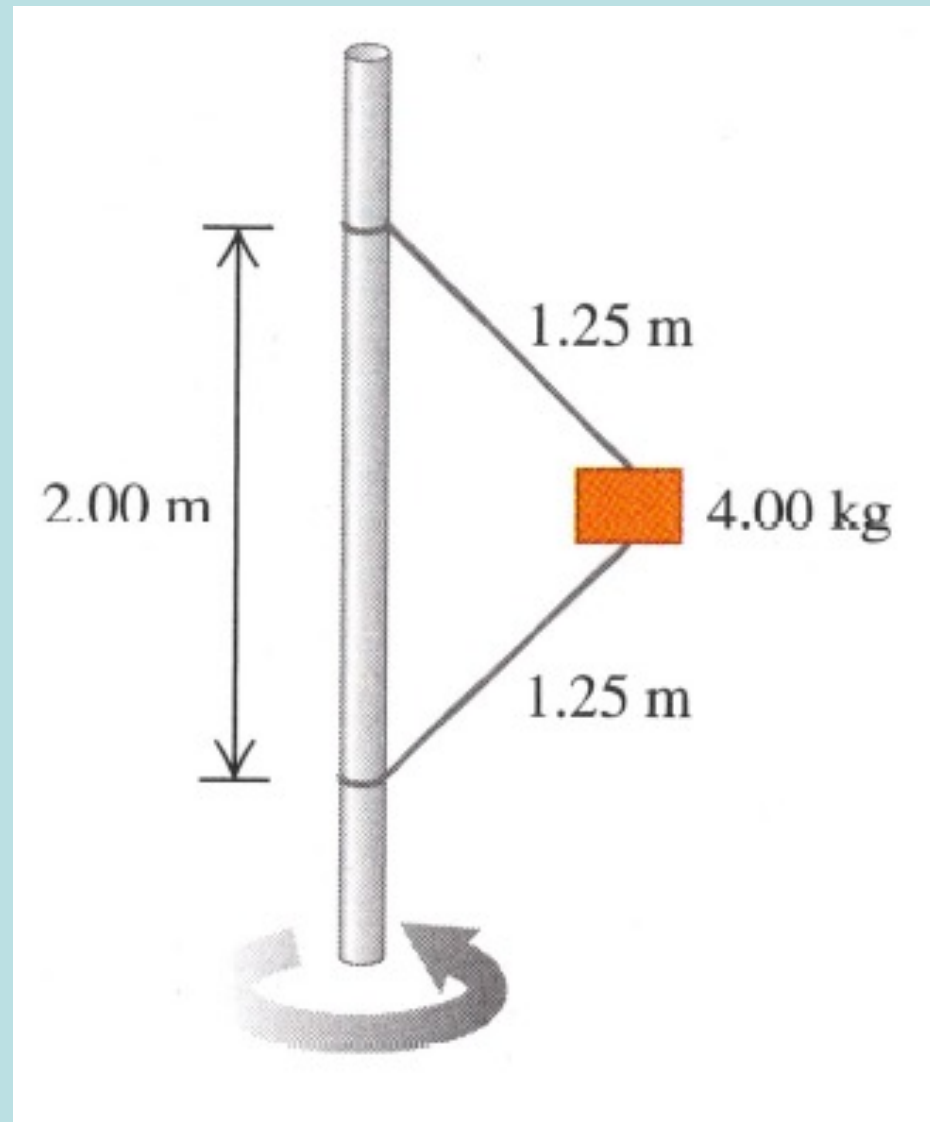
This player is a freely falling object.

(c)  

The water exerts a buoyancy force that counters the swimmer's weight.

Kicking causes the water to exert a forward reaction force, or thrust, on the swimmer.

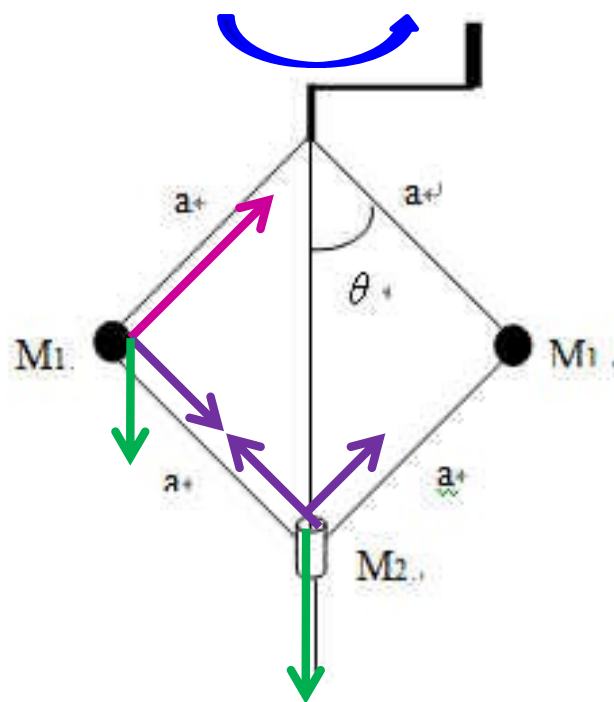
Thrust is countered by drag forces exerted by the water on the moving swimmer.



計算旋轉速度！

考慮一轉動裝置(如圖)，裝置啟動時對曲柄施力轉動軸承，再透過支架帶動整個裝置繞 Z 軸旋轉。在裝置內，質點 M_2 只能沿轉動軸上下運動，而質點 M_1 及長度 a 固定的支架，可在垂直平面上移動。假設 $M_2=2M_1$ ，而支架、曲柄及軸承很輕，質量都可以忽略，同時亦忽略所有軸承的摩擦力。

當旋轉愈來愈快，支架張開的角度 θ 會愈來愈大，當 $\theta=45^\circ$ 時，我們讓轉動速度維持不再增加，使 θ 維持在 45° ，請問此時裝置中 M_1 的旋轉速度為何。



考慮兩個質點的受力，請注意因支架可在垂直平面移動，支架對質點的施力只能沿支架的方向。 M_2 沒有加速度，故其總受力必需為零，在垂直方向總力為零：

$$2 \frac{1}{\sqrt{2}} F_1 - M_2 g = 0$$

對質點 M_1 的受力作分析，在垂直方向 M_1 沒有加速度：

$$M_1 g + \frac{1}{\sqrt{2}} F_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} F_2 = 0$$

作用於質點 M_1 水平方向總力必須等於 M_1 的向心加速度乘上 M_1 ，

$$\frac{1}{\sqrt{2}} F_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} F_2 = M_1 \frac{a}{\sqrt{2}} \omega^2$$

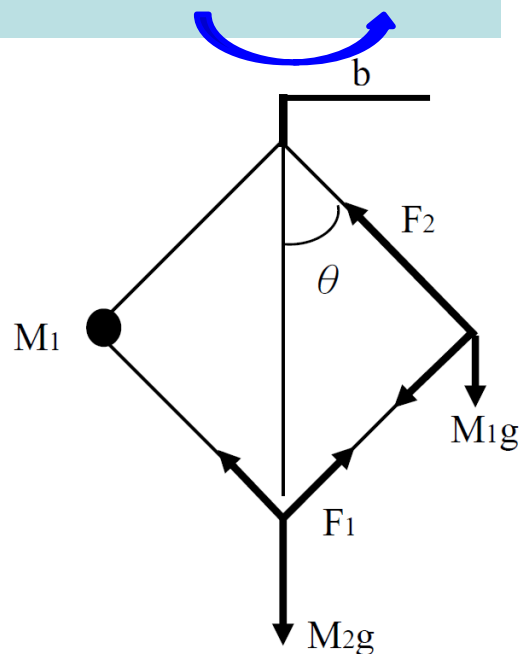
三個未知數正好有三個方程式，因此可以全部解出：

$$F_1 = \sqrt{2} M_1 g$$

$$F_2 = 2\sqrt{2} M_1 g$$

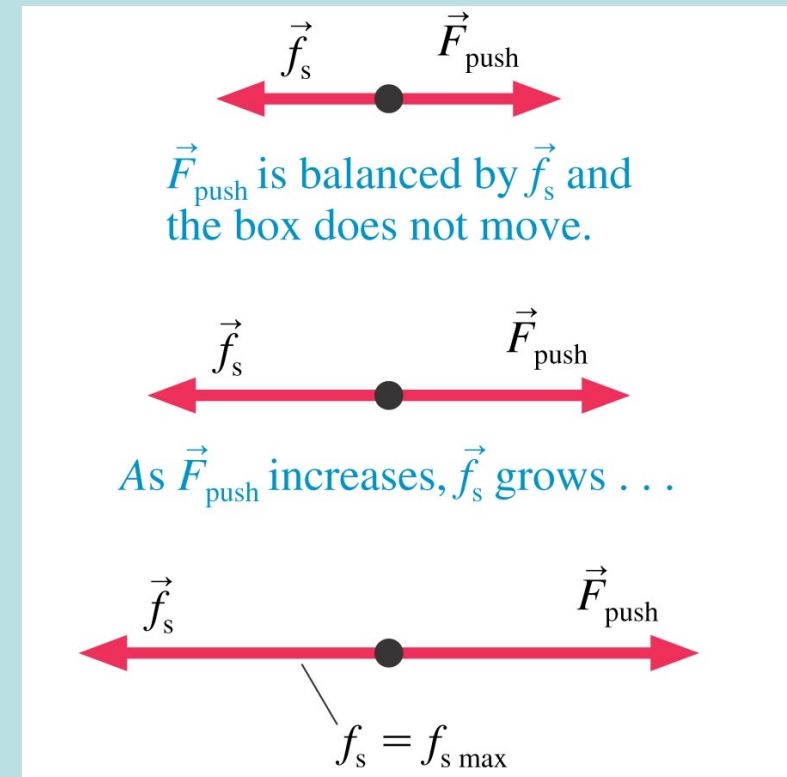
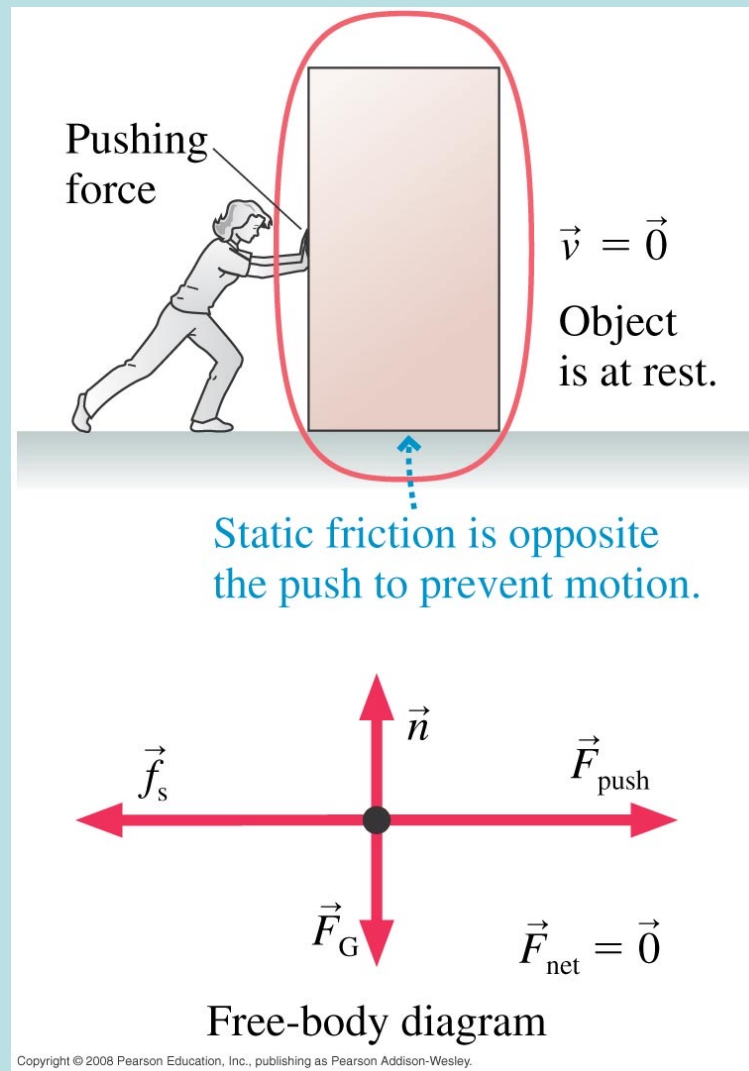
$$M_1 \frac{a}{\sqrt{2}} \omega^2 = 3M_1 g$$

$$\omega^2 = 3\sqrt{2} \frac{g}{a}$$



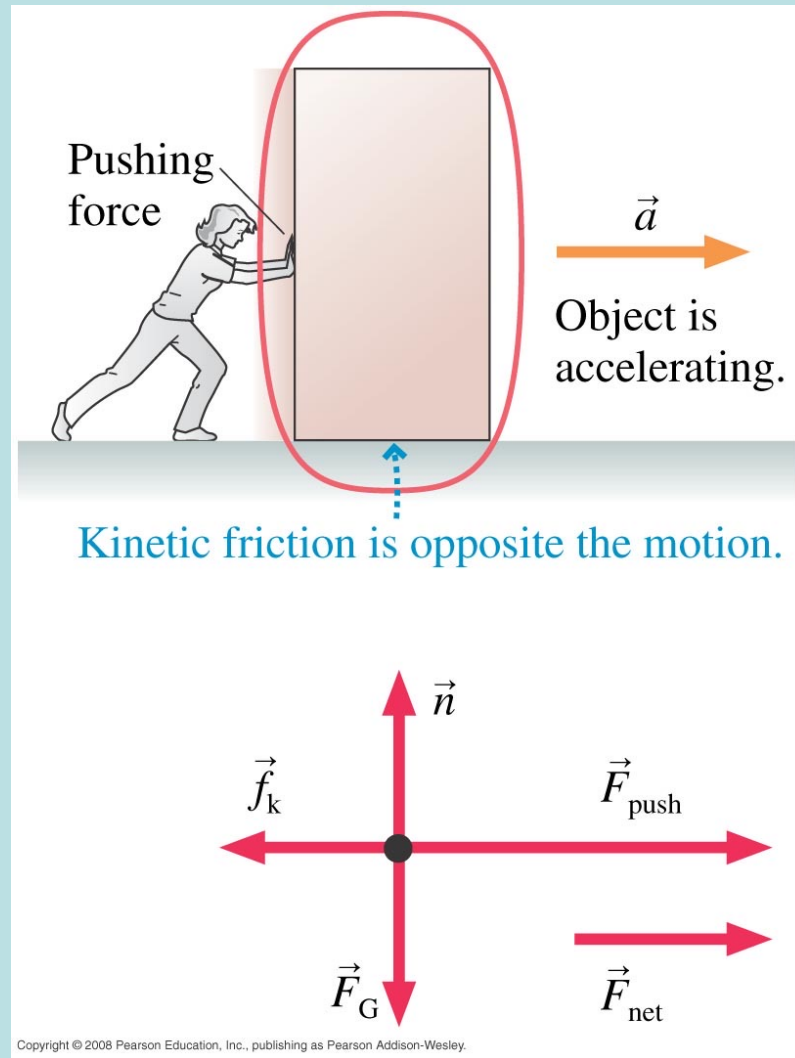
支架張力與重力的合力等於質量乘向心加速度！
合力提供了質量作等速圓周運動所需的向心力！

另一個日常生活中的力的描述：摩擦力 Friction Force

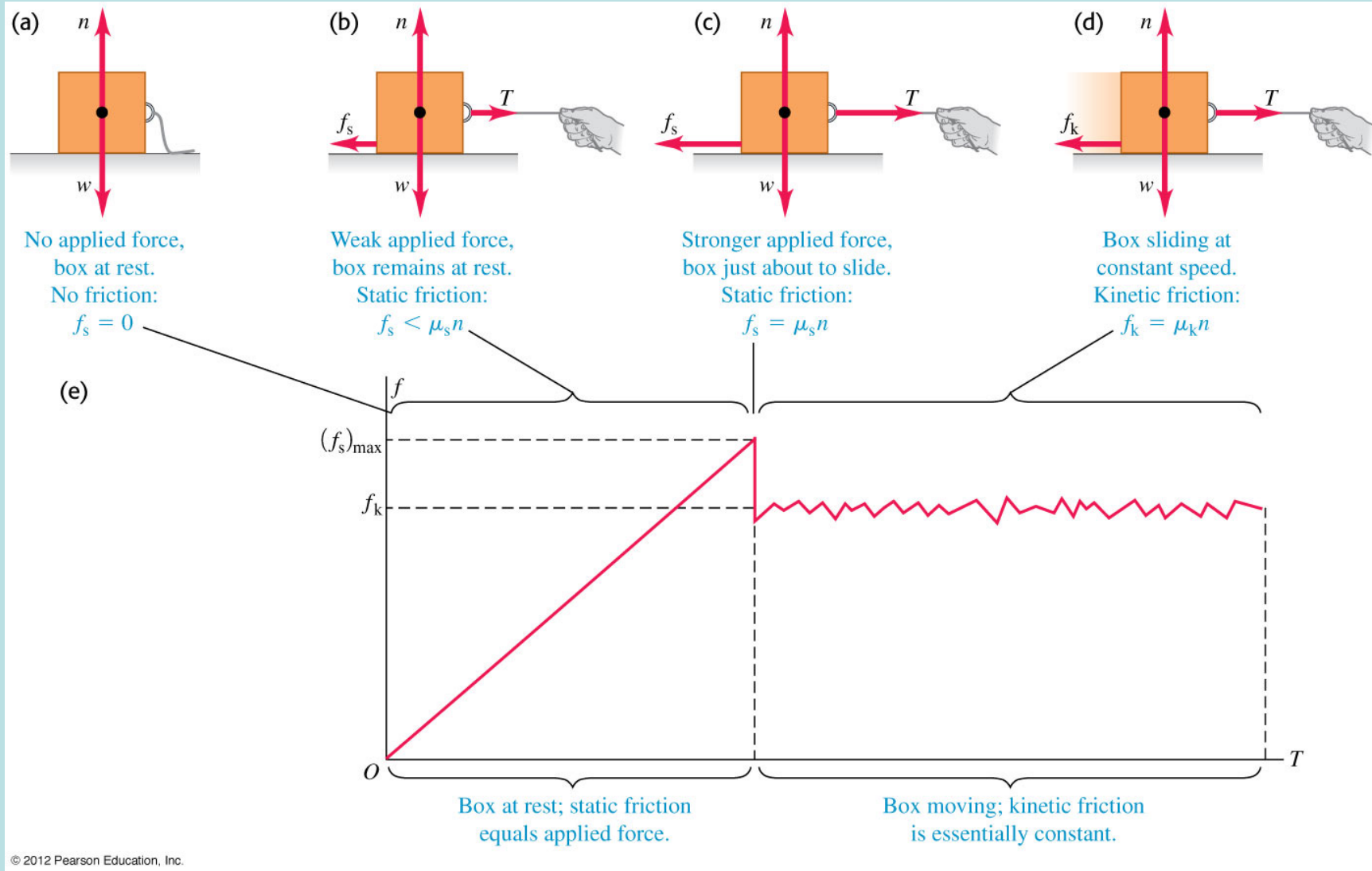


物體不動時的摩擦力稱靜摩擦力，力的大小隨情況而定。

動摩擦



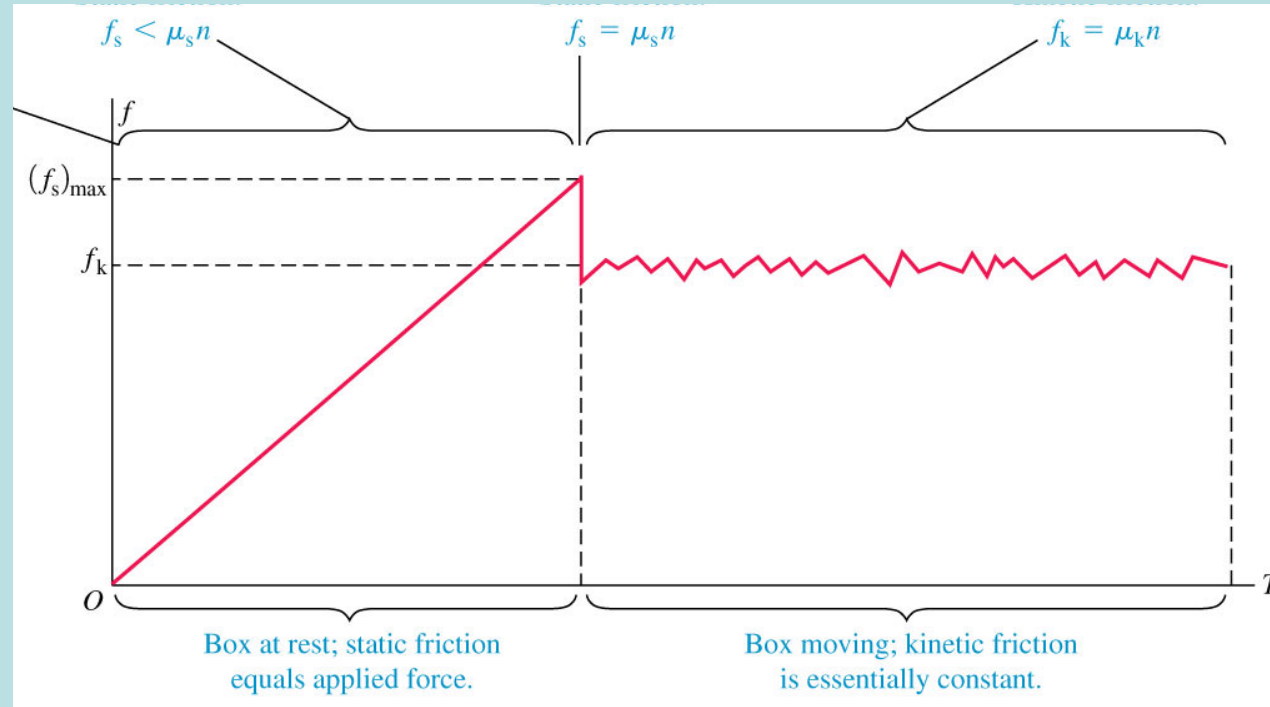
物體開始移動後的摩擦力稱動摩擦力。



動摩擦力近似是一個常數！與運動快慢無關。
 實驗發現，動摩擦力與垂直的正向力 n 成正比：

$$f_k = n\mu_k$$

μ_k :動摩擦係數



靜摩擦力大小由物體維持靜止這個條件來決定，
但最大值經測量發現一般都與垂直的正向力成正比。

$$f_s < n\mu_s$$

μ_s :最大靜摩擦係數

同時，動摩擦力一般來說是一定值，與垂直的正向力成正比：

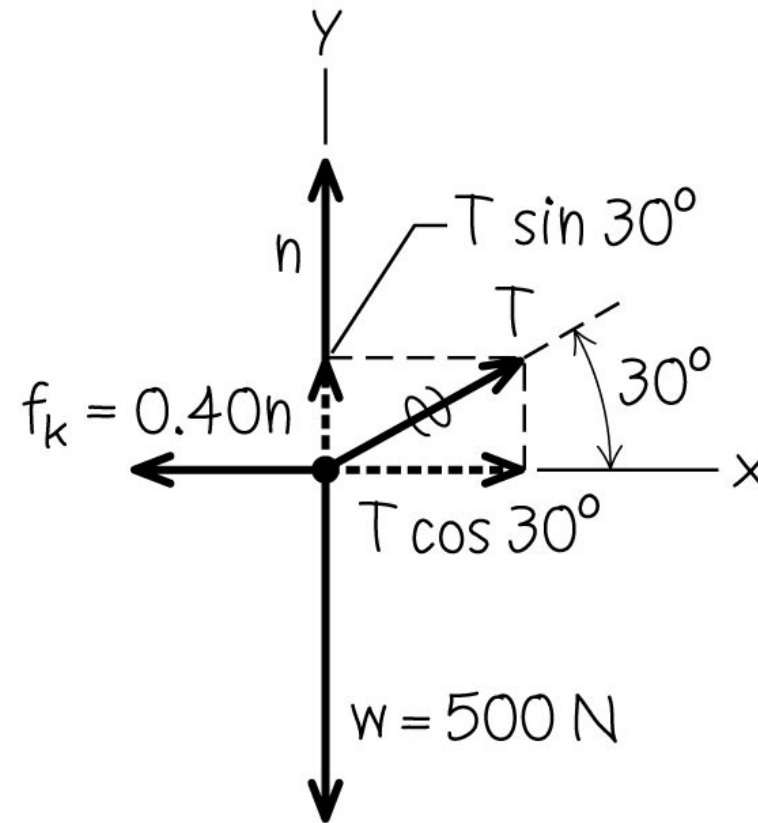
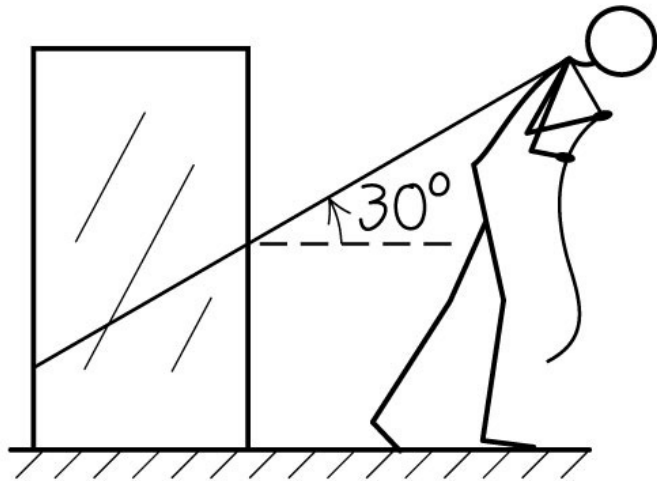
$$f_k = n\mu_k$$

μ_k :動摩擦係數

TABLE 6.1 Coefficients of friction

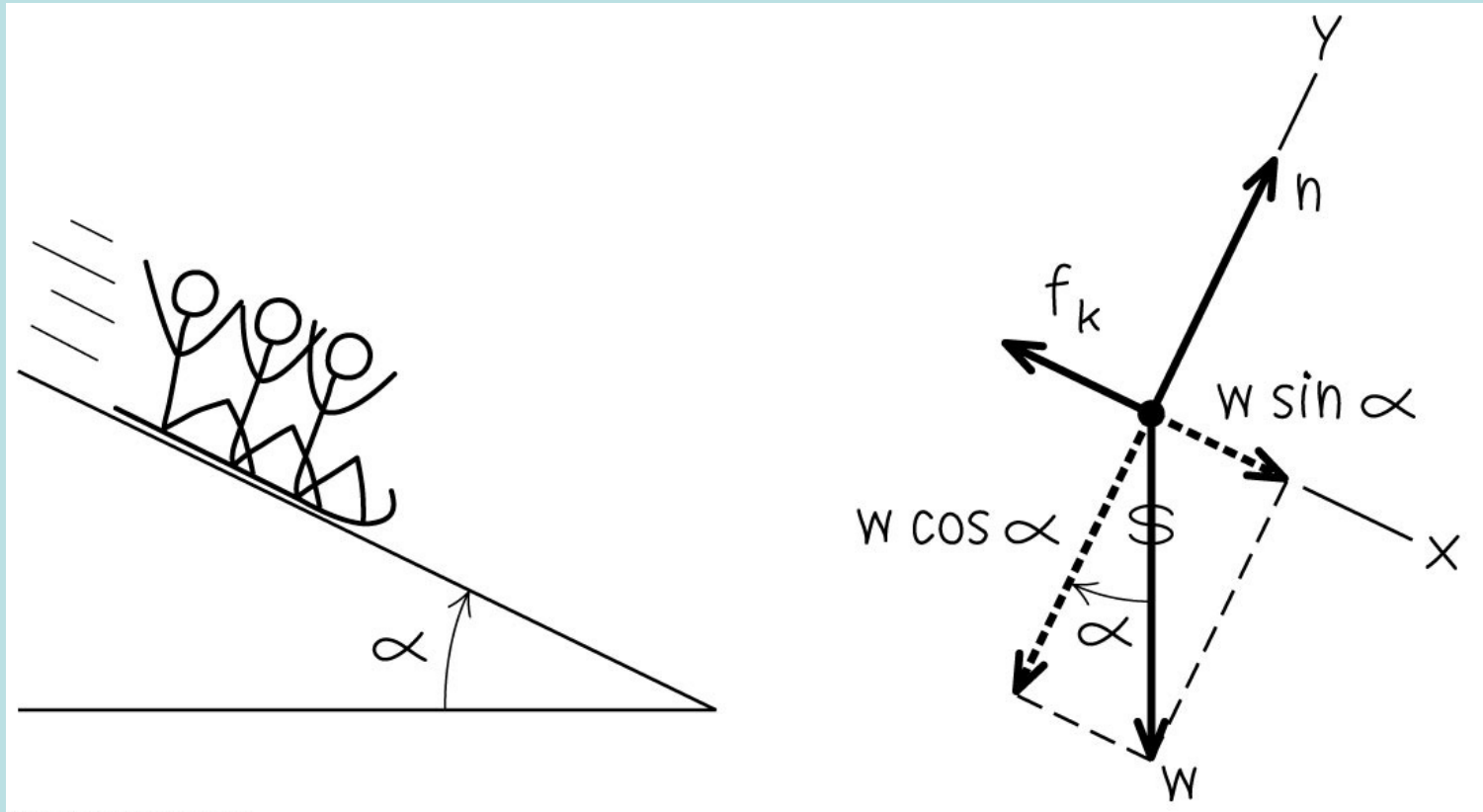
Materials	Static μ_s	Kinetic μ_k
Rubber on concrete	1.00	0.80
Steel on steel (dry)	0.80	0.60
Steel on steel (lubricated)	0.10	0.05
Wood on wood	0.50	0.20
Wood on snow	0.12	0.06
Ice on ice	0.10	0.03

(a) Pulling a crate at an angle



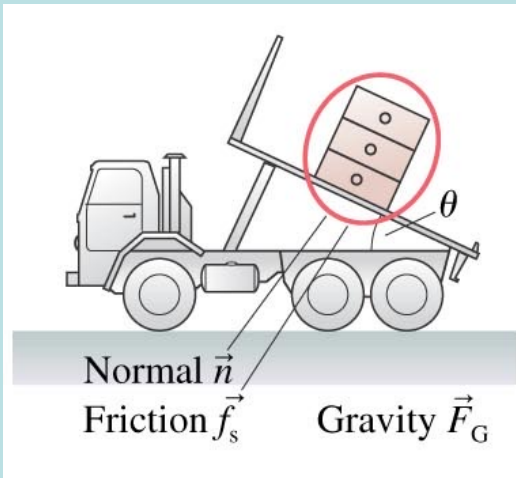
$$n + T \sin 30^\circ - Mg = 0$$

$$T \cos 30^\circ - n \cdot \mu_k = Ma$$



$$n - Mg \cos \alpha = 0$$

$$Mg \sin \alpha - n \cdot \mu_k = Ma$$



Known

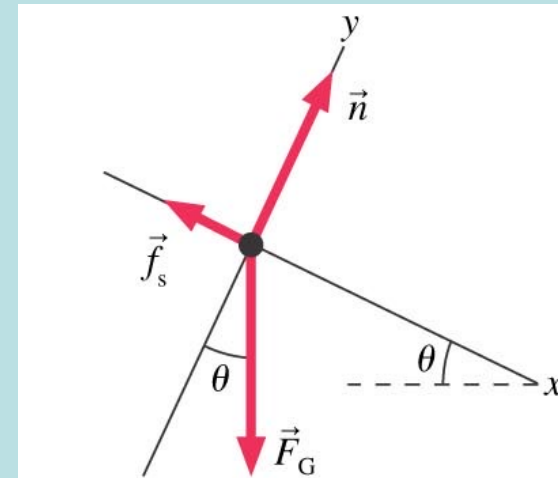
$$\mu_s = 0.80 \quad m = 50 \text{ kg}$$

$$\mu_k = 0.60$$

Find

$$f_s \text{ where } \theta = 20^\circ$$

$$\theta \text{ where cabinet slips}$$



開始下滑的角度？

$$n - Mg \cos \theta = 0$$

$$Mg \sin \theta - f_s = 0$$

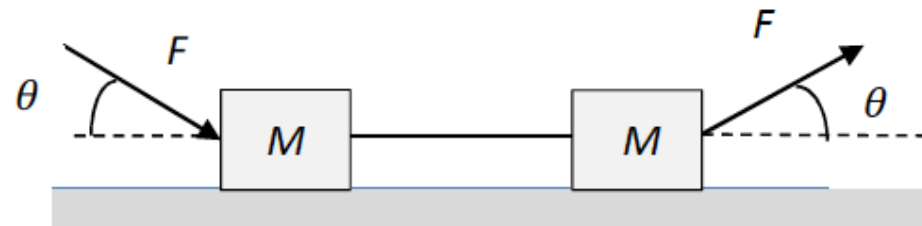
$$f_s \leq n \cdot \mu_s$$

開始下滑的角度 θ_c

$$f_s = n \cdot \mu_s$$

$$Mg \sin \theta_c = Mg \cos \theta_c \cdot \mu_s$$

在一個桌面上有兩個質量相等的方塊，中間以很輕的繩連接，繩的質量可以忽略。方塊的質量 M 為 3.0 kg ，如圖所示。對下圖中左方方塊施以一個斜向下方的推力，此力的方向與水平線的夾角為 $\theta = 30^\circ$ ，同時對右方方塊亦施以一個斜向上方的拉力，此力的方向與水平線的夾角亦為 $\theta = 30^\circ$ ，使整個系統在桌面上開始向右運動，兩個力的大小都為 10N 。已知在運動時繩是張緊的，因此兩個方塊是一起運動的。兩個方塊與地面之間的動摩擦係數都是 $\mu_k \approx 0.25$ 。問連接兩方塊的繩上的張力大小是多少 N ?(20)



解答：設繩的張力大小為 T 。左方方塊滿足的第二運動定律：

$$F \times \cos 30^\circ - (F \times \sin 30^\circ + Mg) \times \mu_k + T = Ma \circ$$

右方方塊滿足的第二運動定律：

$$F \times \cos 30^\circ - (-F \times \sin 30^\circ + Mg) \times \mu_k - T = Ma$$

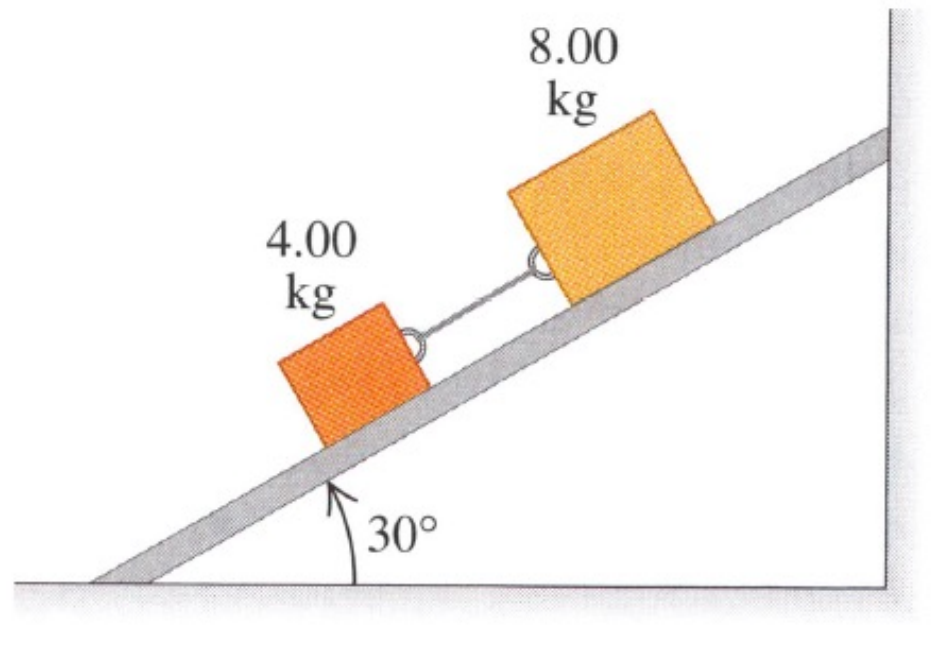
兩式相減即消去未知的加速度：

$$(2 \times F \times \sin 30^\circ) \times \mu_k = 2T$$

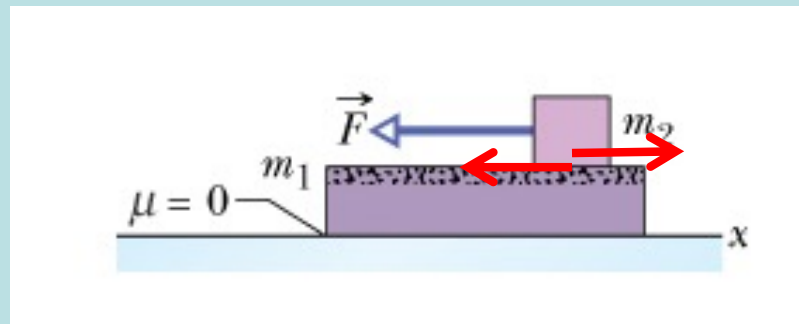
$$T = F \times \sin 30^\circ \times \mu_k = 1.25\text{N} \circ$$

behavior of the block?

5.98 ••• Two blocks with masses 4.00 kg and 8.00 kg are connected by a string and slide down a 30.0° inclined plane (Fig. P5.98). The coefficient of kinetic friction between the



4.00-kg block and the plane is 0.25; that between the 8.00-kg block and the plane is 0.35. (a) Calculate the acceleration of each block. (b) Calculate the tension in the string. (c) What happens if the positions of the blocks are reversed, so the 4.00-kg block is above the 8.00-kg block?

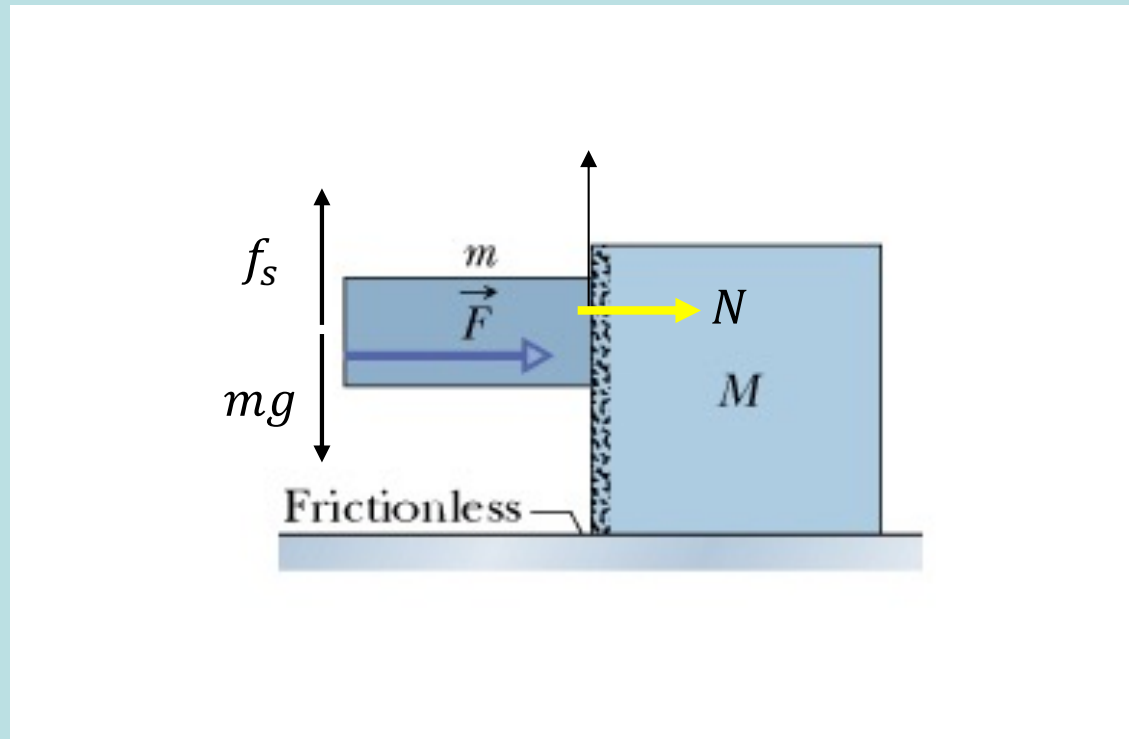


上方小方塊在下方方塊上滑行

$$m_1 a_1 = m_2 g \cdot \mu_k$$

$$m_2 a_2 = F - m_2 g \cdot \mu_k$$

施力 \vec{F} 使方塊組向右移動，在何條件下，左方的方塊會維持不向下滑動？



$$a = \frac{F}{M + m}$$

$$N = Ma = \frac{FM}{M + m}$$

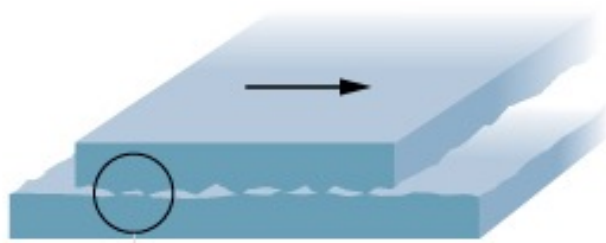
左方的方塊會維持不向下滑動

$$f_s = mg$$

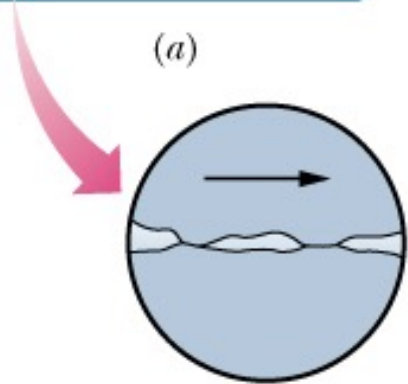
最大靜摩擦力： $N\mu_s$

不滑動條件 $f_s < N\mu_s$

$$mg < \frac{FM}{M + m} \mu_s$$



(a)



(b)

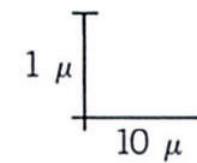
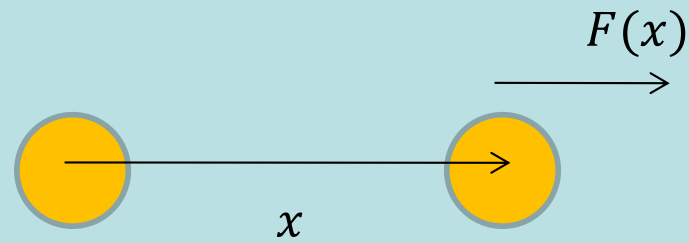


圖 6.1

即使拋光的表面，在微觀的尺度下也並不平坦。

摩擦力的根源是原子力或分子力。



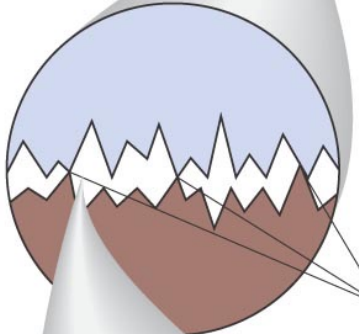
正力為排斥力，力為負則為吸引力

實際接觸的介面處的原子分子彼此互相吸引。

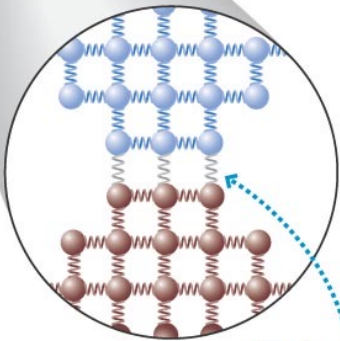
相對運動時必須施力以克服此吸引力，這即摩擦力！



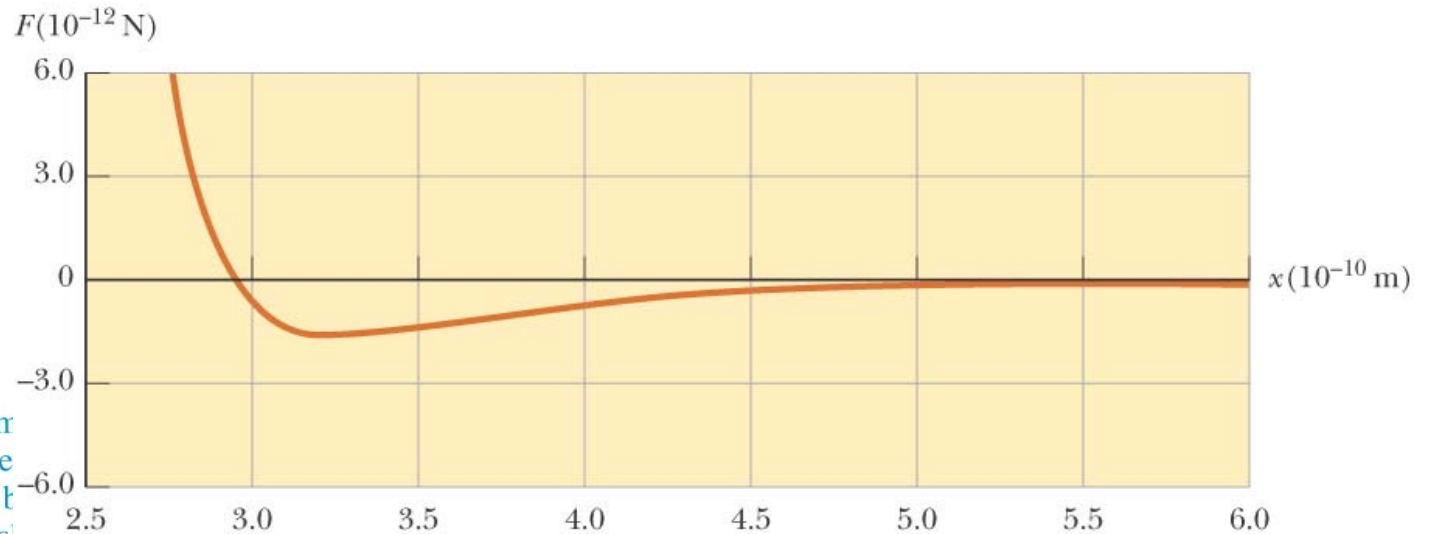
Two surfaces
in contact

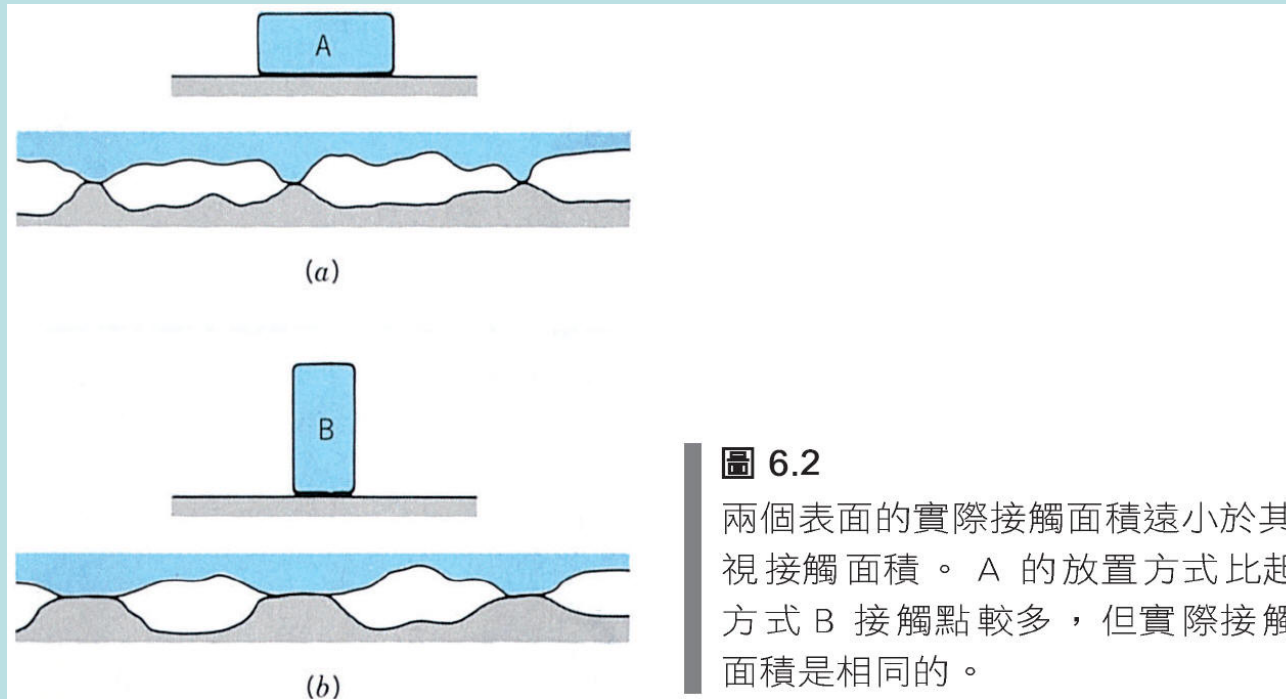


Very few points
are actually
in contact.



Molecular bonds form
between the two mate
These bonds have to be
broken as the object slides





巨觀的接觸面積與實際的接觸面積不同！

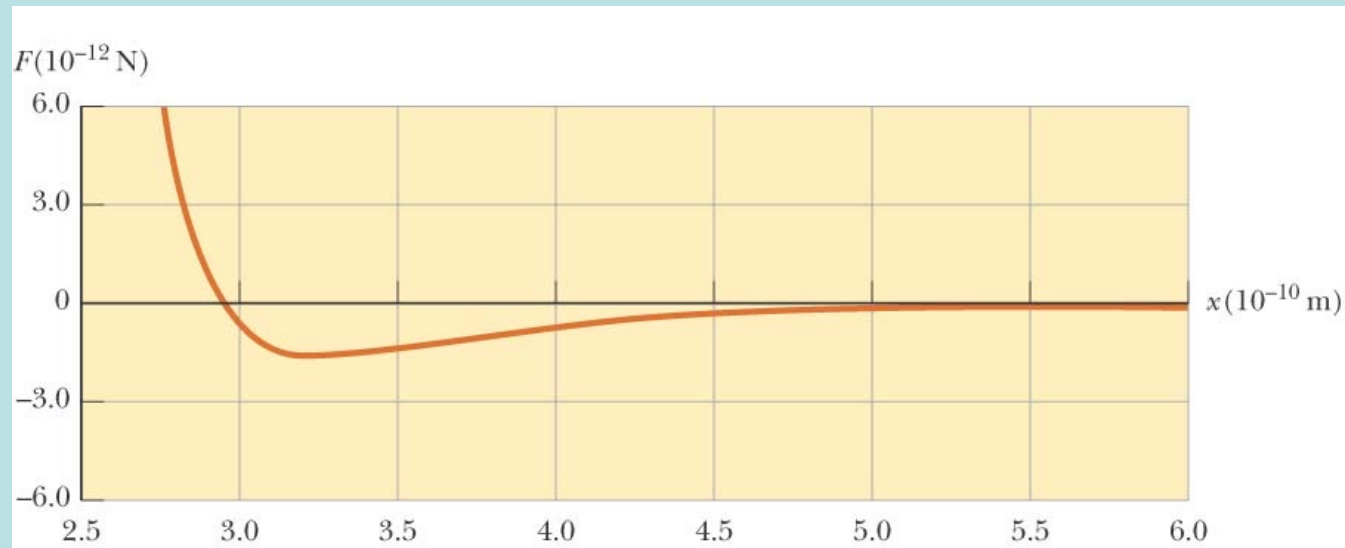
動摩擦力大致由微觀實際的接觸面積決定，

較大的正向力會增加實際接觸面積。

故正向力越大動摩擦力也越大。

$$f_k = n\mu_k$$

原子力 Lennard-Jones



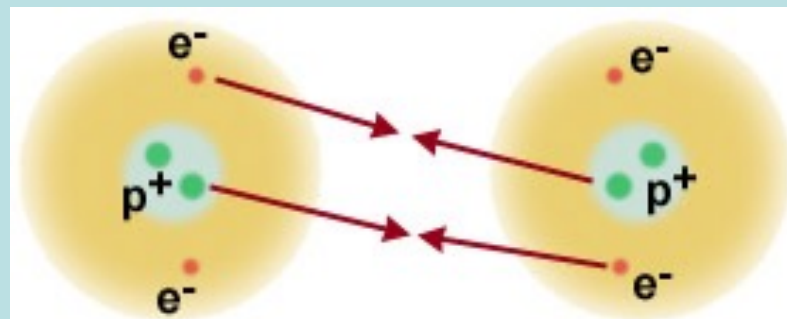
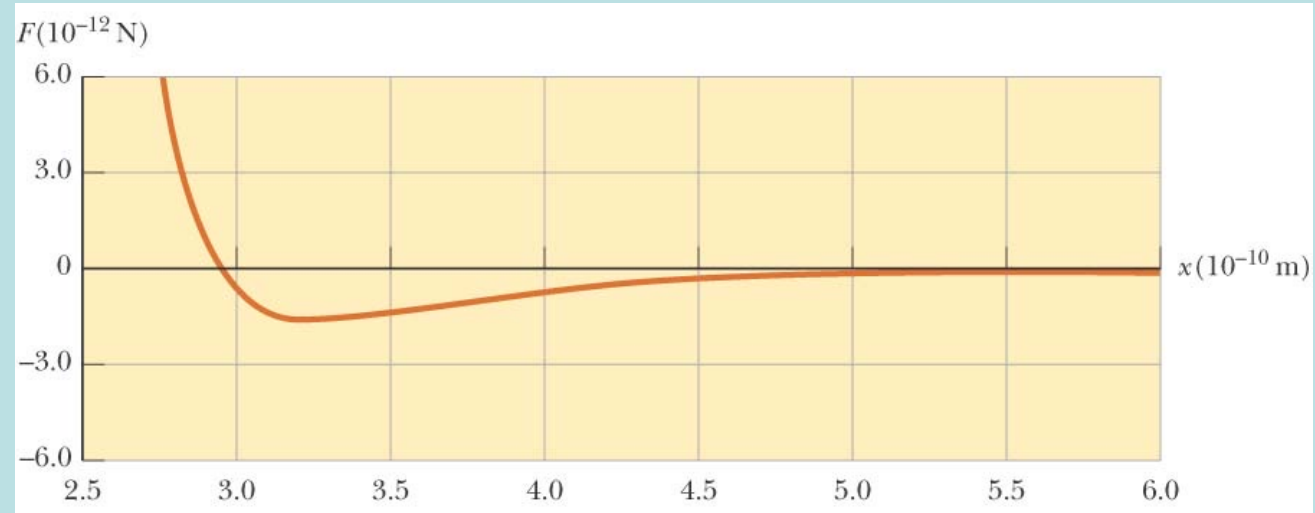
$$F(x) = 4 \frac{\varepsilon}{\sigma} \left[12 \left(\frac{\sigma}{x} \right)^{13} - 6 \left(\frac{\sigma}{x} \right)^7 \right]$$

$$\sigma = 0.263 \text{ nm}$$

$$\varepsilon = 1.51 \times 10^{-22} \text{ J}$$

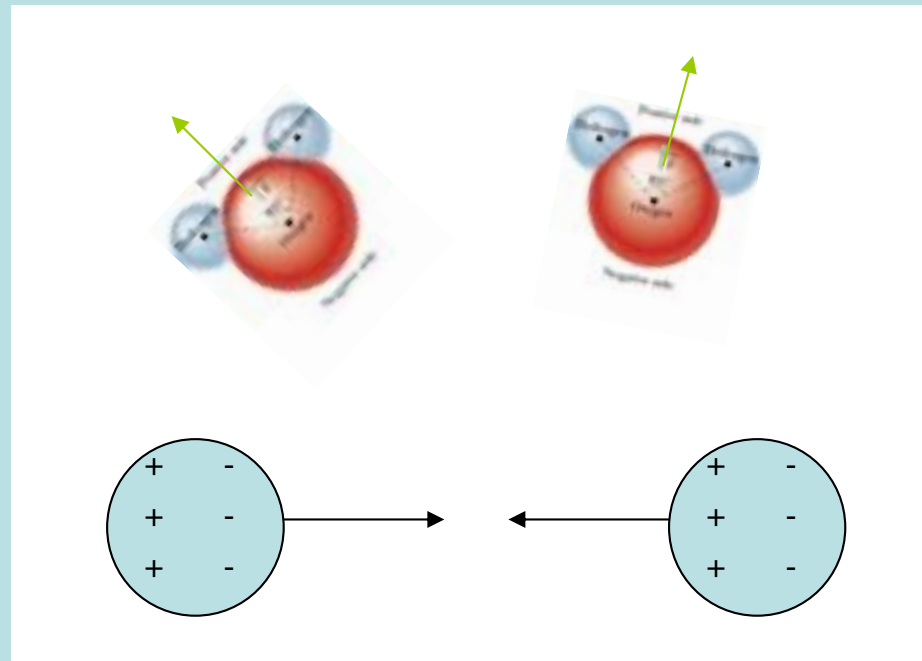
與萬有引力定律不同，此式只是一個近似，但很好用！

原子力是由電磁力產生



Residual E-M force in action: the atoms are electrically neutral, but the electrons in one are attracted to the protons in another, and vice versa!

原子力來自原子內電荷分布不均，所形成的電偶極之間的力



永久電偶極

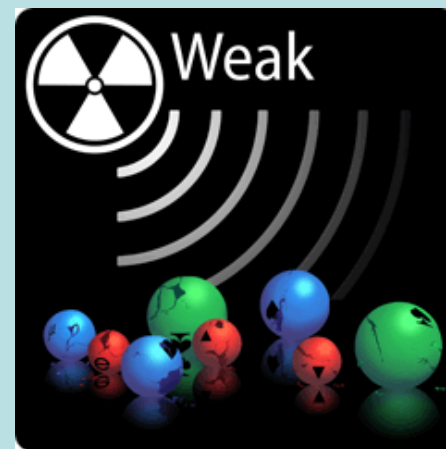
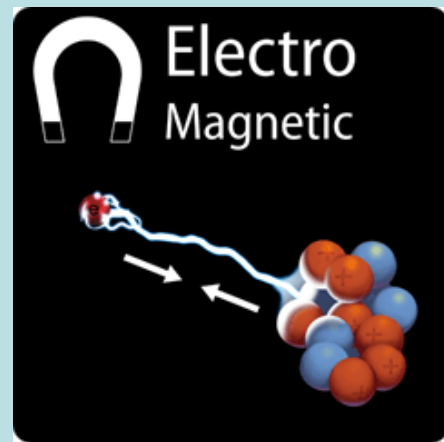
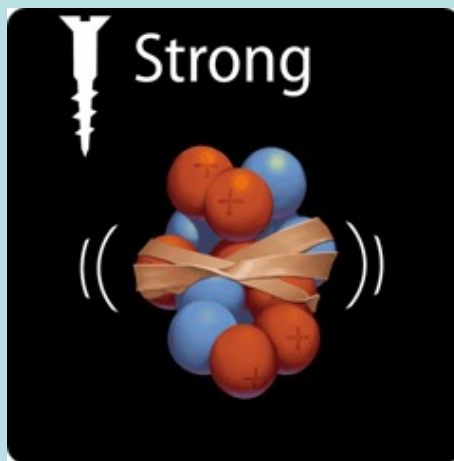
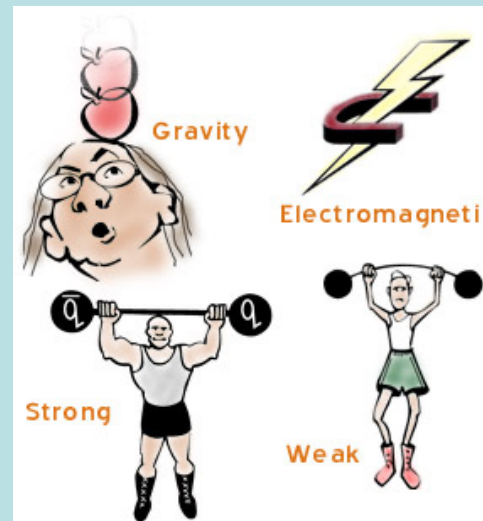
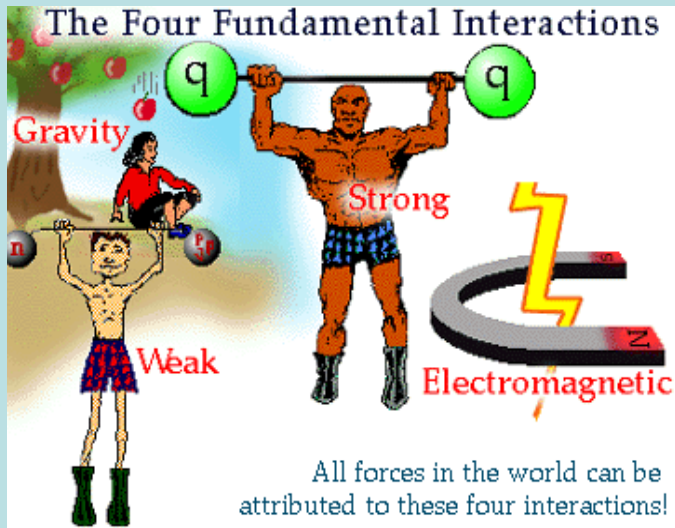
感應形成電偶極

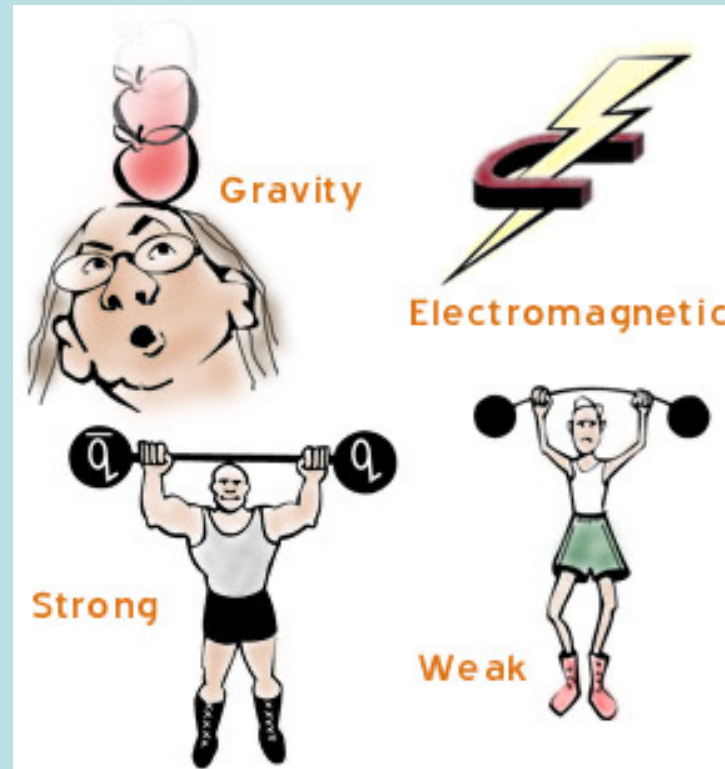
摩擦力可以分解為原子力，原子力又可以分解為電磁力。

宇宙間的所有力都可以分解為四個基本力！

在現代物理中，力的概念被交互作用取代。

宇宙間有四個基本交互作用：電磁、重力、強、弱交互作用。

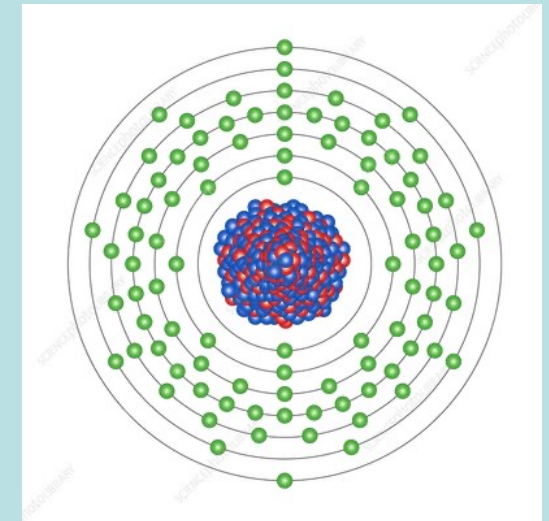
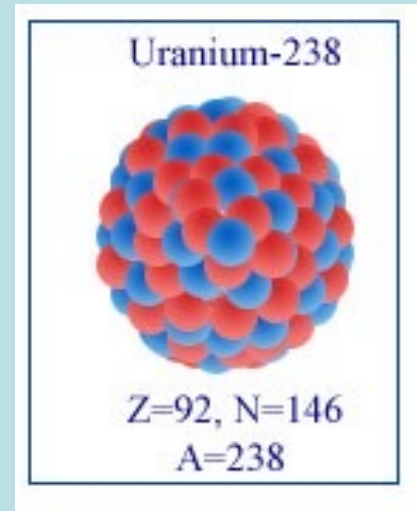
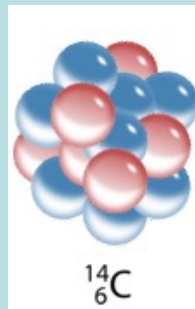
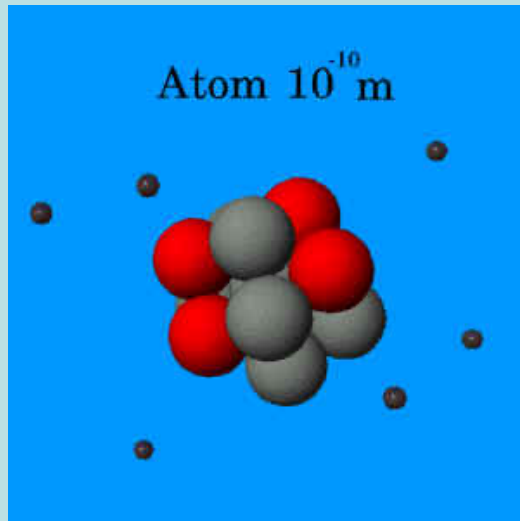




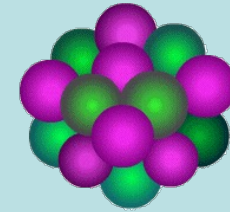
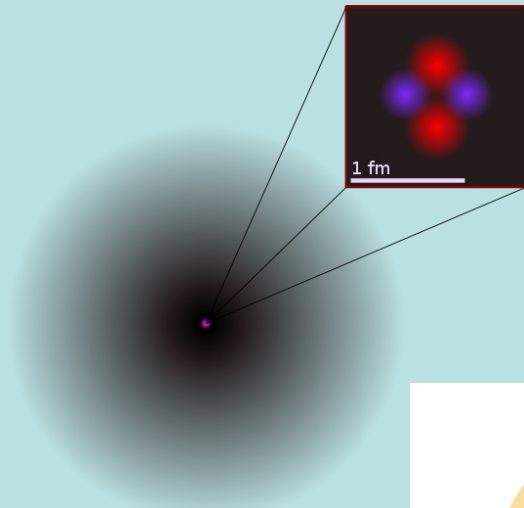
強力與弱力都有很小的範圍，因此只在微觀世界才能觀察的到！
重力太過微弱，在日常生活也只扮演有限角色！
可以說，日常自然就是電磁作用的個人秀！

核力或強作用力

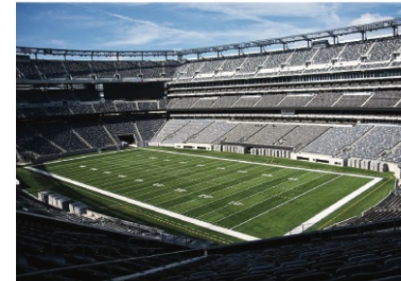
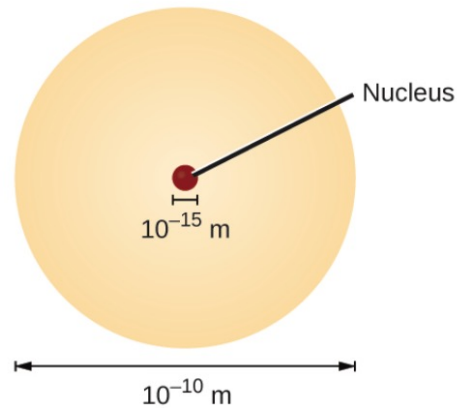
原子核由兩種核子：質子與中子組成



原子內的正電與大部分的質量集中於極小的**原子核 Nucleus**

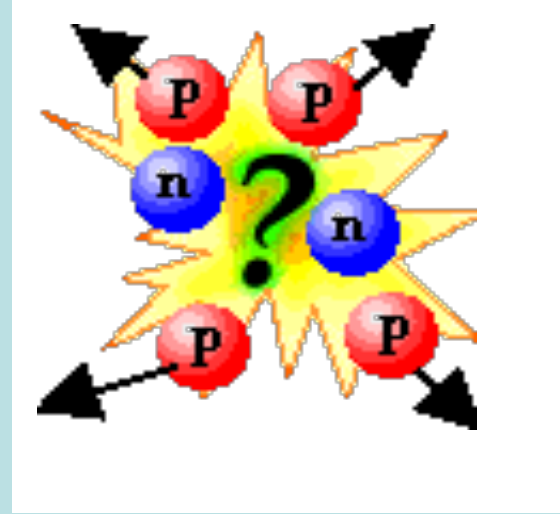
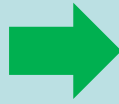
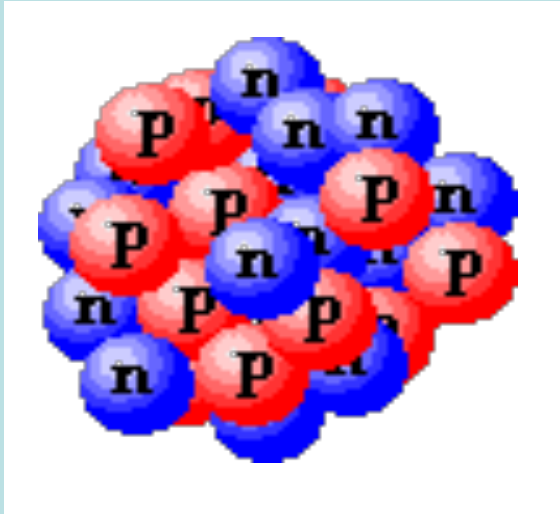


1 Ångström (=100,000 fm)



If an atom could be expanded to the size of a football stadium, the nucleus would be the size of a single blueberry. (credit middle: modification of work by "babyknight"/Wikimedia Commons; credit right: modification of work by Paxson Woelber)





原子核是由束縛很緊的質子與中子所組成。

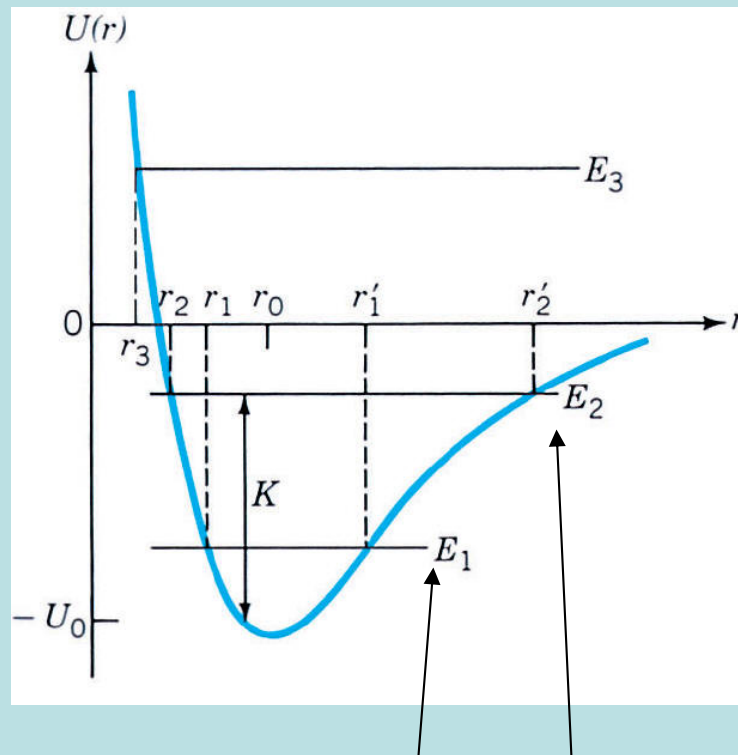
What holds them together?

將核子束縛於原子核內的力稱為核力或強作用。

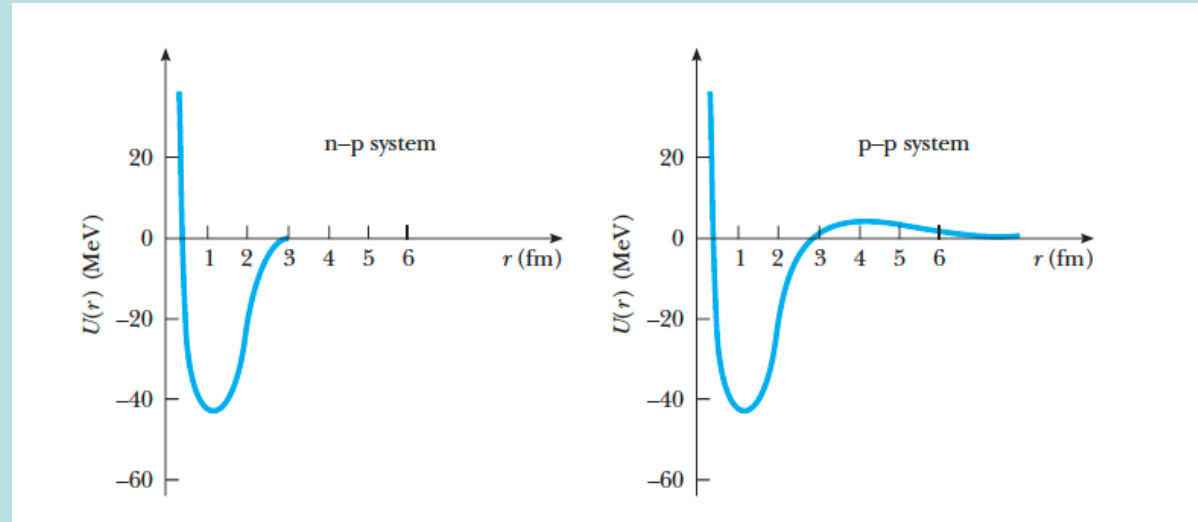
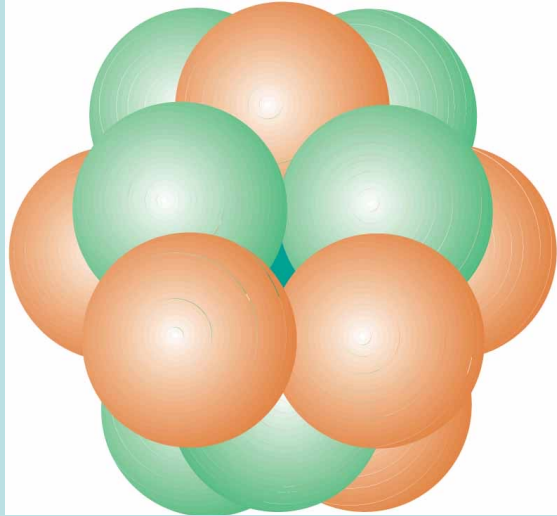
將核子束縛於原子核的核力，必須克服距離很近的質子彼此的電磁排斥力，是四個力中最強的，所以也稱強作用。



吸引力形成的束縛態：分子、原子、運動範圍被限制於一個區域內，這種情況，位能一般如下圖，機械能必須小於無限遠處的位能
兩端都有 turning point，所以只能拘限在這兩點之間運動。



束縛能：拆散束縛態所需的能量，平衡點位能與無限遠處位能的差！
位能陷得越深，束縛能越大。



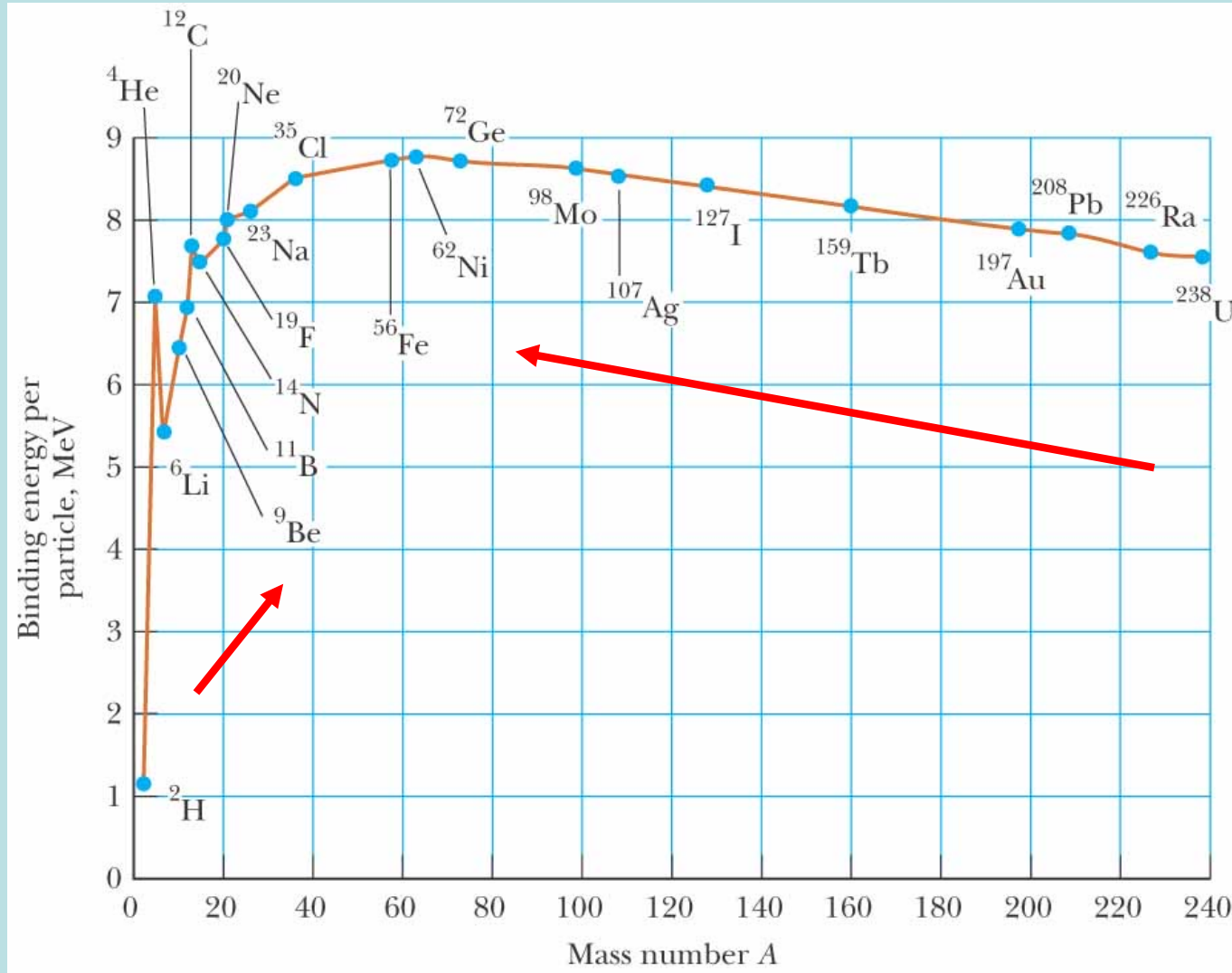
核子在很靠近時，彼此間出現很強核力吸引力，
若核子可以接近到 10^{-15} m，就會放出束縛能而束縛在一起！

$E = mc^2$ ，核力強到束縛能極大，對質量影響不能忽略！

原子核質量 = 質子中子總質量 - 總束縛能/ c^2

束縛能越大，質量越小。

原子核的平均束縛能竟然大致可以由質子數決定：

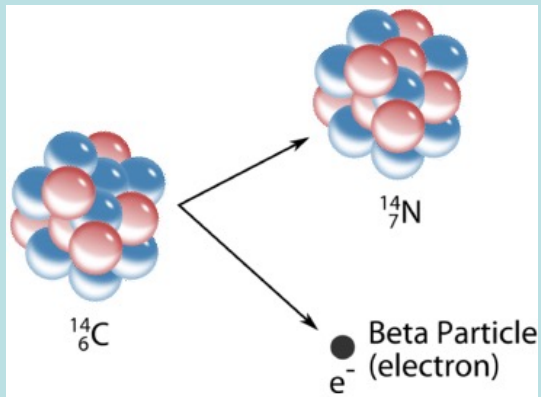


圖的中段每個核子平均束縛能最大，

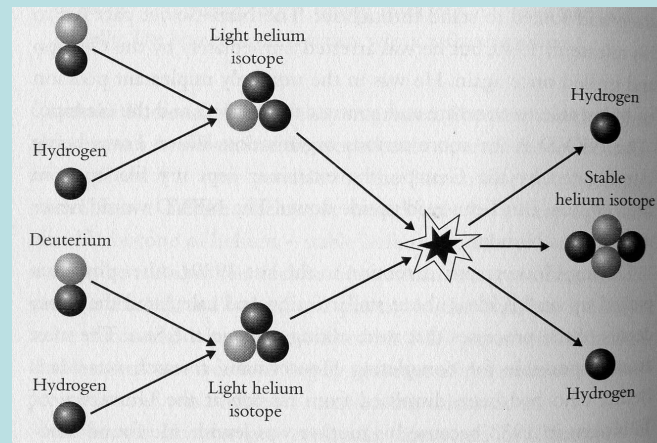
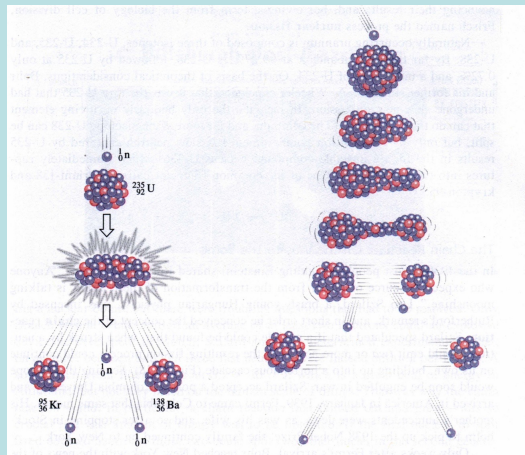
位於兩端的原子核會傾向變化為中段的核子，增加束縛能，放出能量。

核反應原則上即是透過原子核種的變化，增加束縛能，釋放能量：

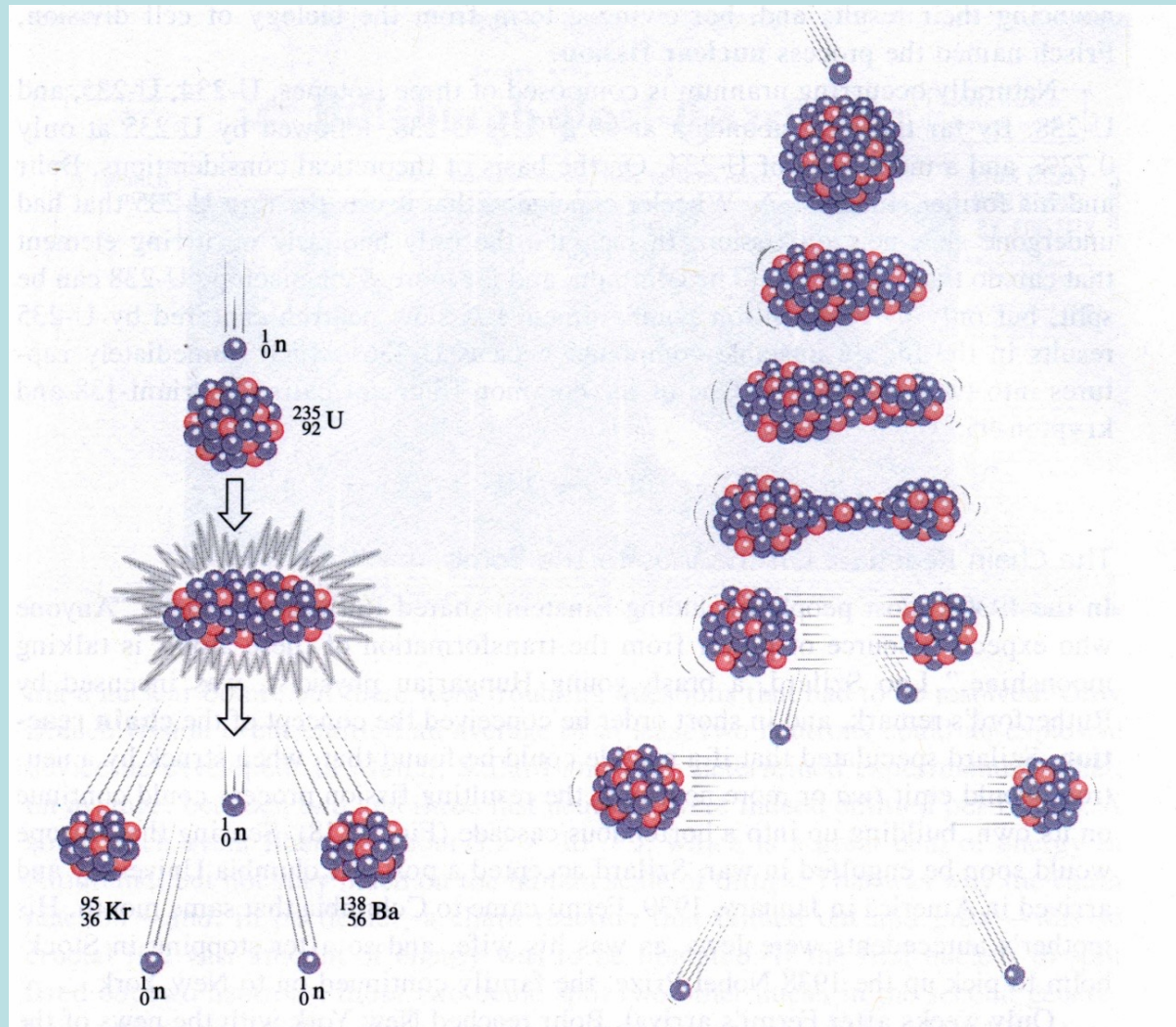
一：放射性原子核的衰變 Decay of Radioactive Nucleus



二：能量釋放的核分裂 Nuclear Fission，及核融合 Nuclear Fusion

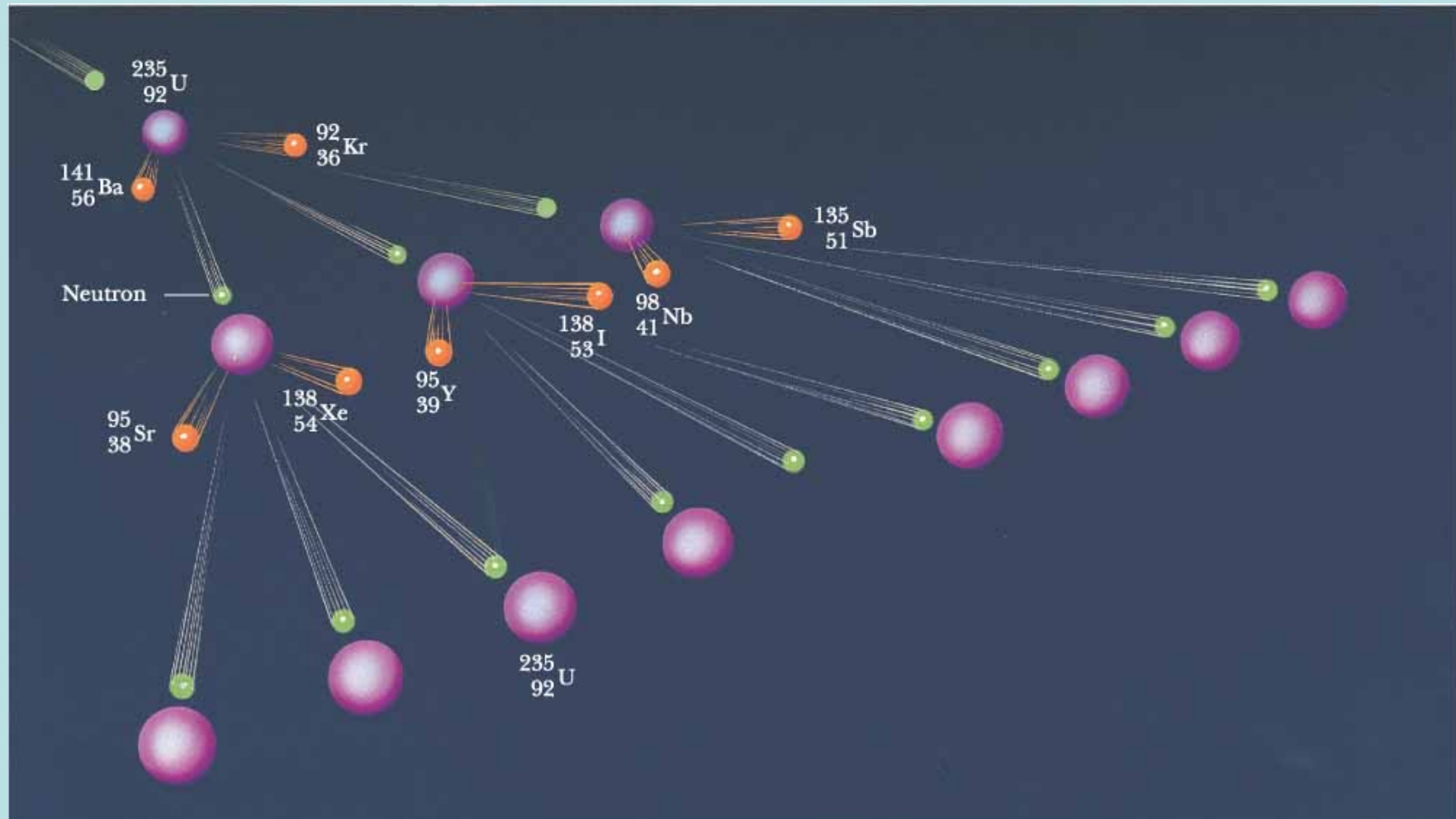


當某些較大原子核分裂為多個較小原子核後，總質量可以減少，稱核分裂。



總質量減少，消失的質量以能量形式釋出， $E = mc^2$ ，此能量的來源就是核力！

這核分裂過程可以在有序可控制情況下進行，Chain reaction

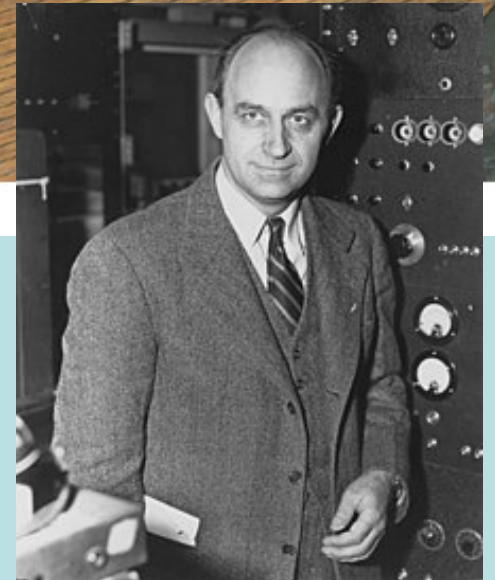


鈾的核分裂需要一個額外的中子來引發，因此原來是相對穩定。
但一旦開始，鈾的核分裂會製造額外的中子，因此形成連鎖反應。
因此可以以中子的數量來控制核分裂的速度。



© 2004 Thomson - Brooks/Cole

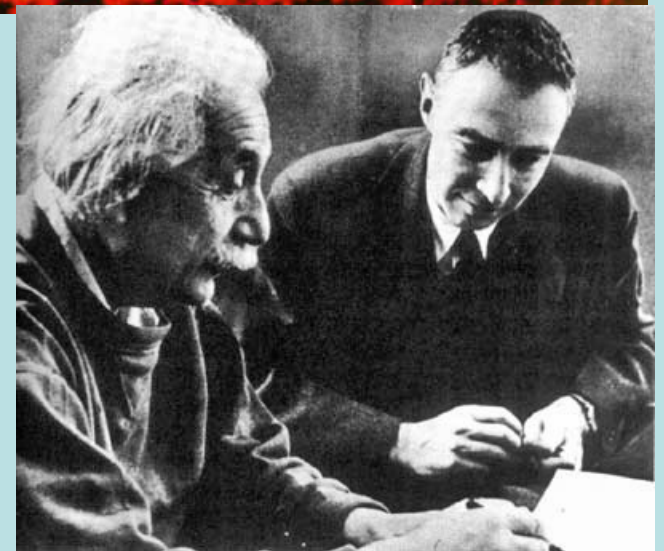
Enrico Fermi
1901 – 1954



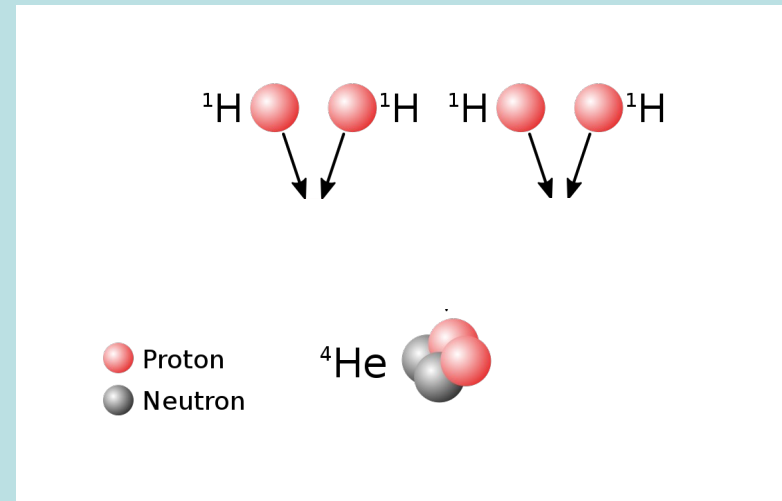
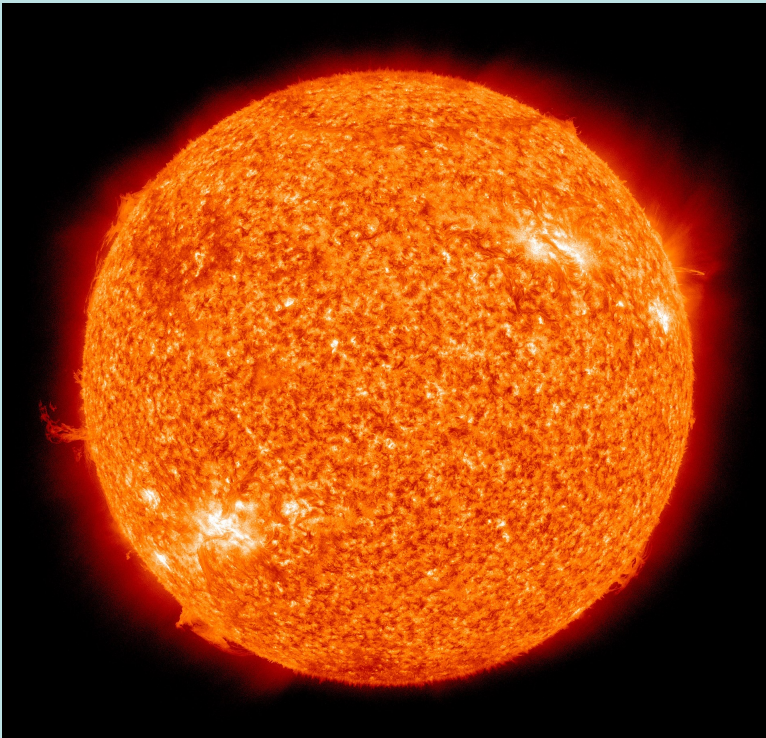
Atomic bomb



J. Robert Oppenheimer
1904 –1967
New York City



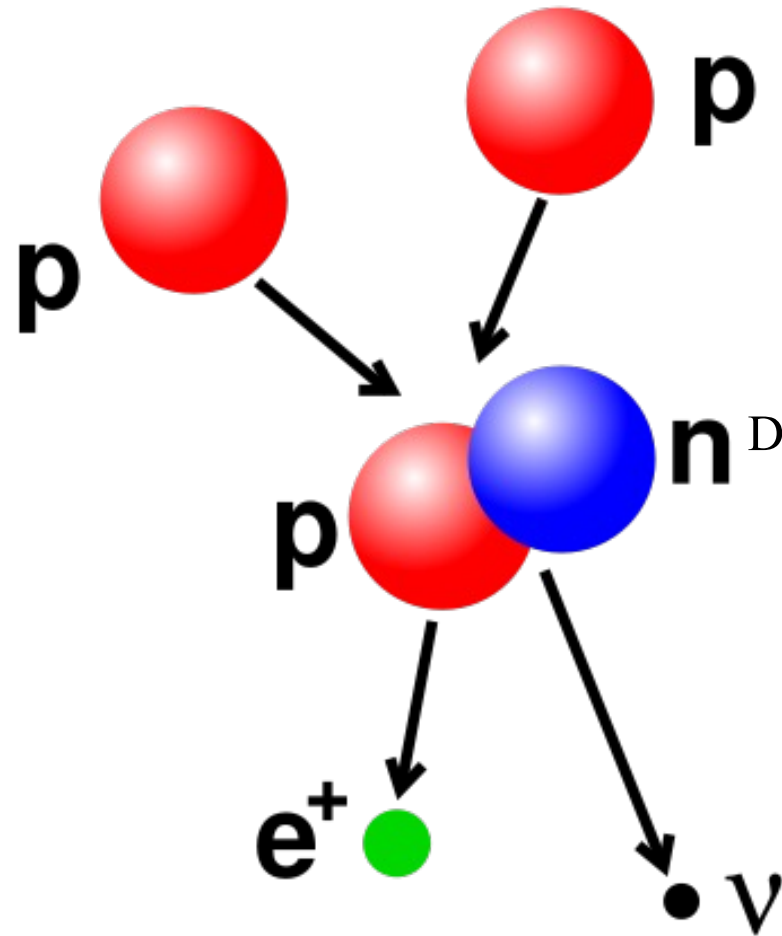
Sun and fusion 核融合



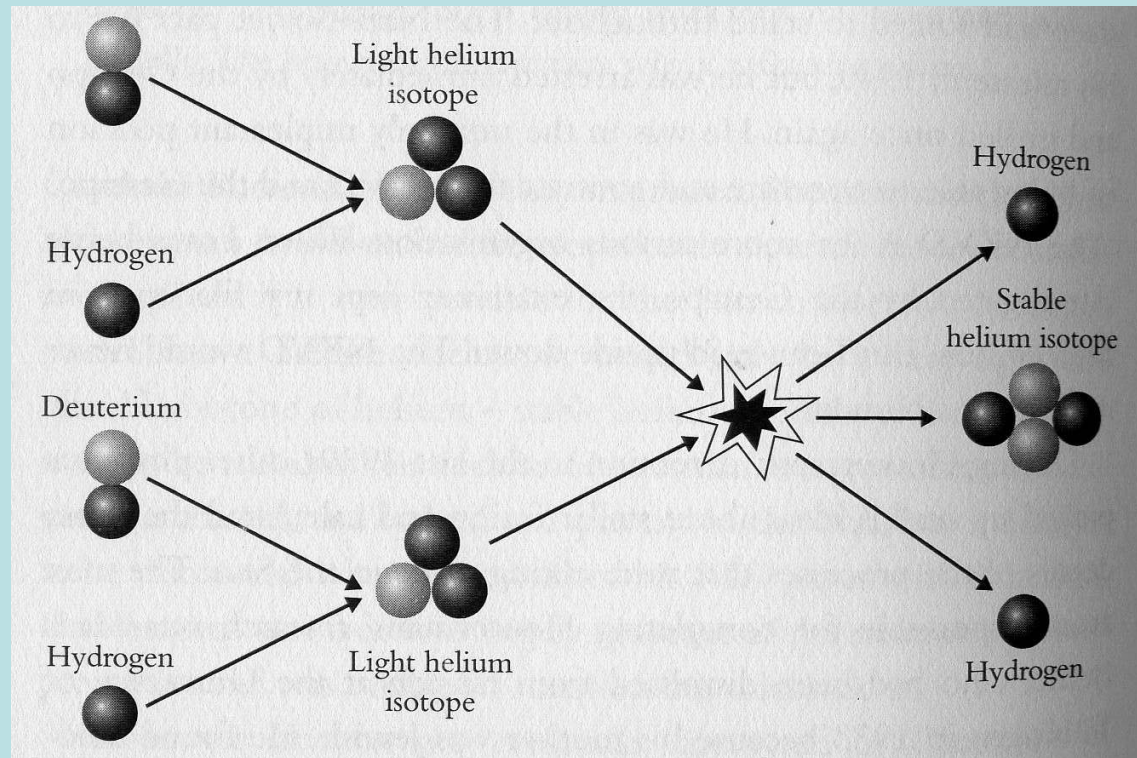
核融合是四個氫原子核融合成氦原子核，
釋放出巨大能量，源頭也是核力。
但其中兩個質子必須轉換成中子。
因此過程很複雜！

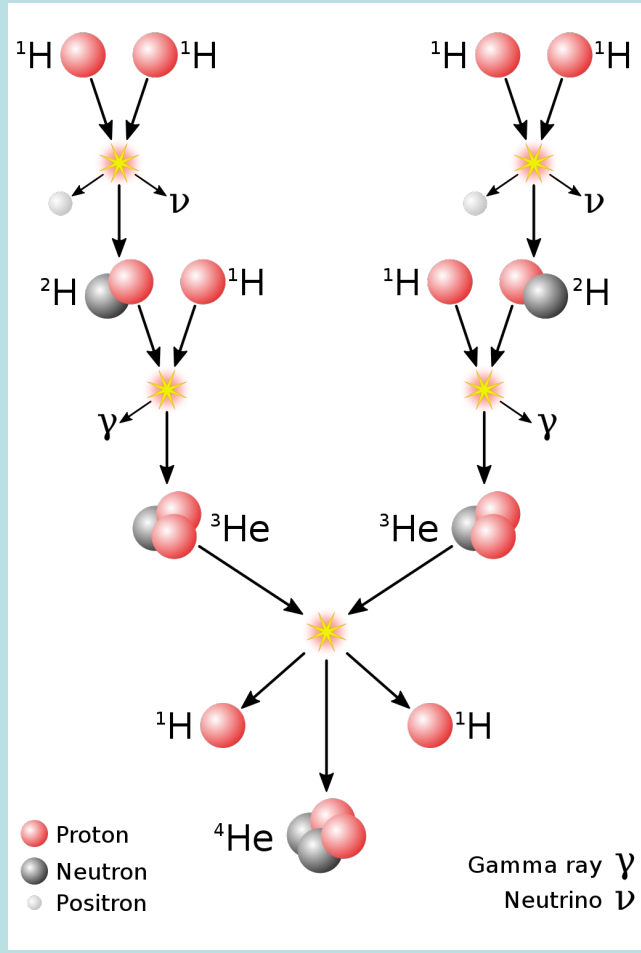
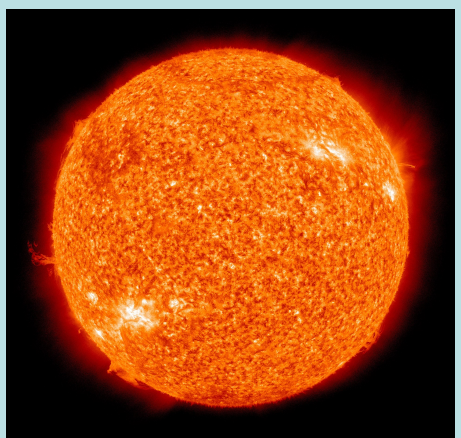
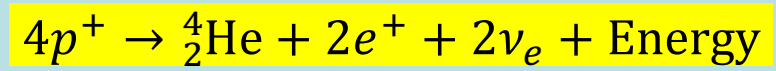
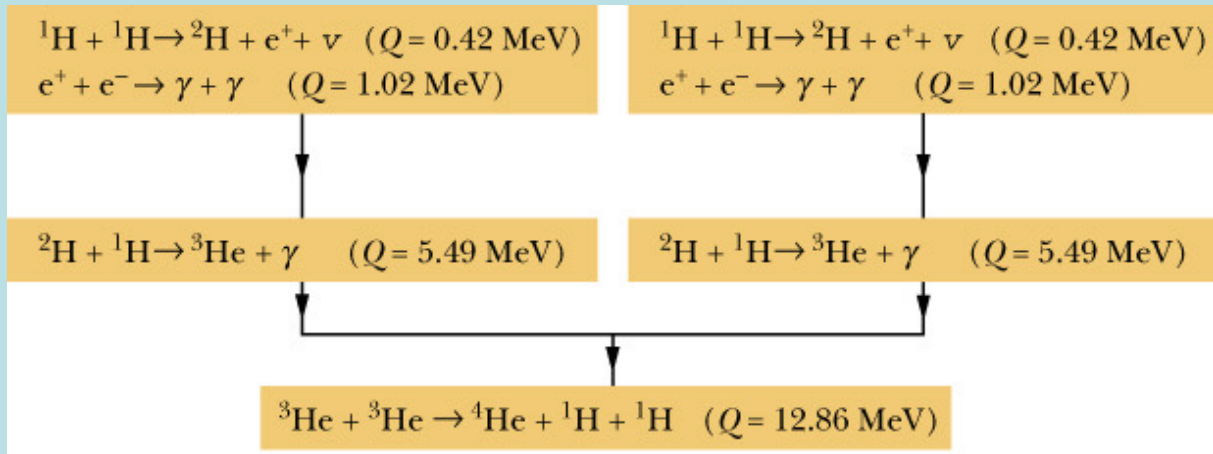
一個質子轉換成中子。這是弱交互作用！

氫原子核融合為氘(${}^2_1\text{H} = 1p^+1n$)，其中一個質子反過來轉換為中子！



氫原子核融合

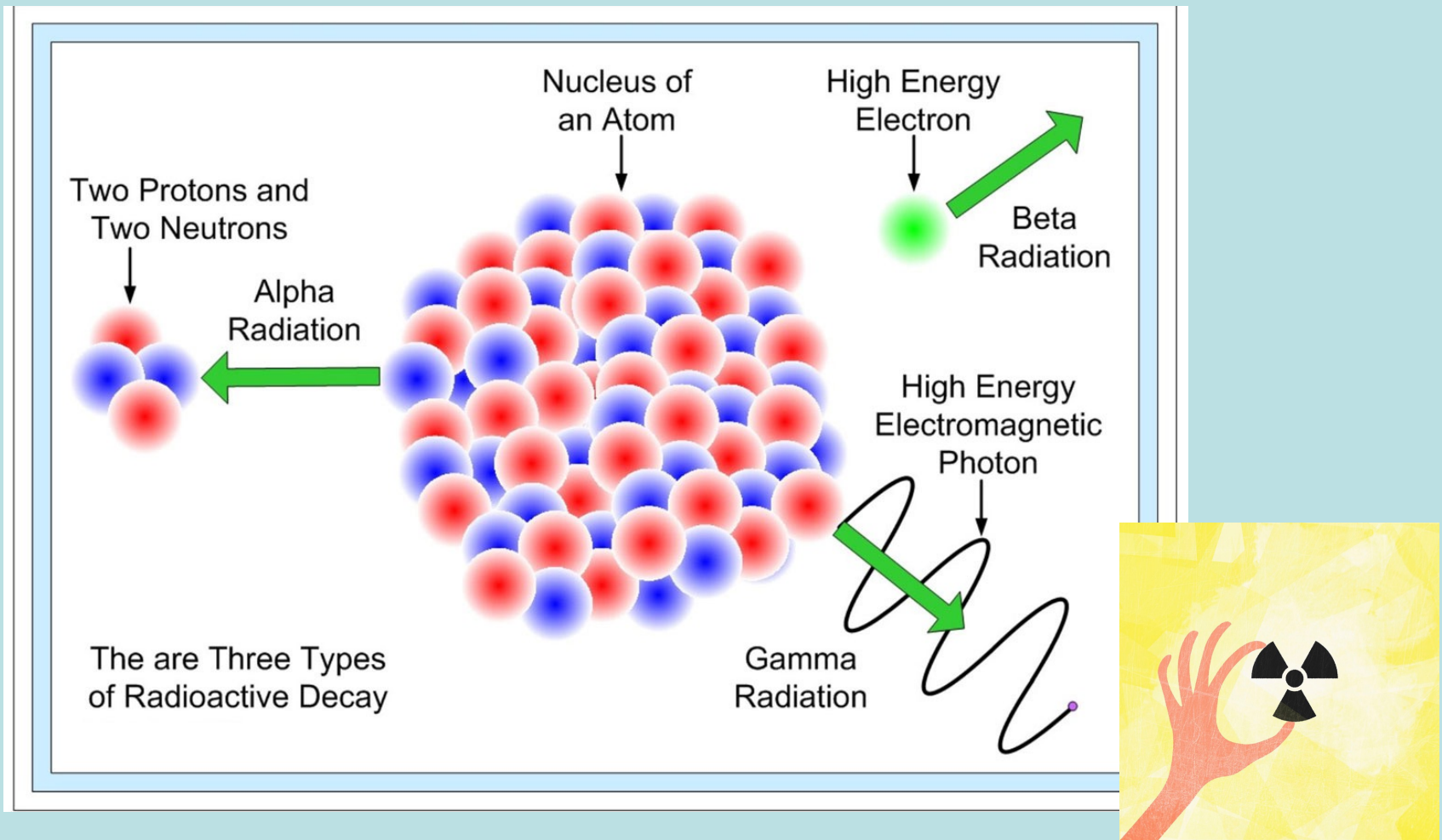




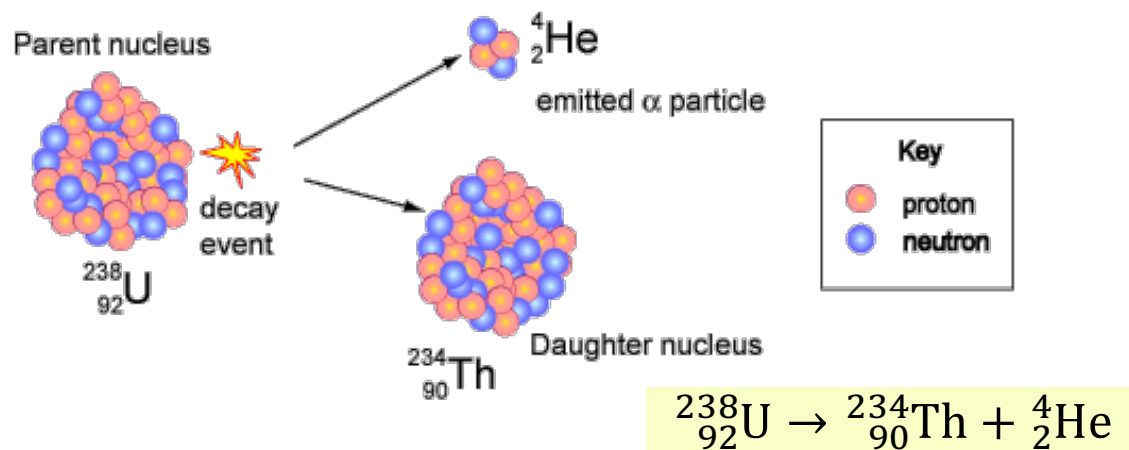
With the current rate of burning, the sun will last for another *five billion years*.

獨立原子核含大量核子，常不穩定，會自發分裂為較穩定的原子核，**Radioactive decay**稱為放射性原子核衰變。

但許多衰變十分緩慢，自然界就存在不穩定具放射性的原子核，



Alpha Decay of a Uranium-238 nucleus 鈾原子核的 α 衰變



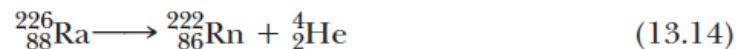
α 衰變放出一個氦原子核，總質子數、中子數都沒變，
 粒子身份都沒有改變，應該說是核分裂。

Alpha Decay

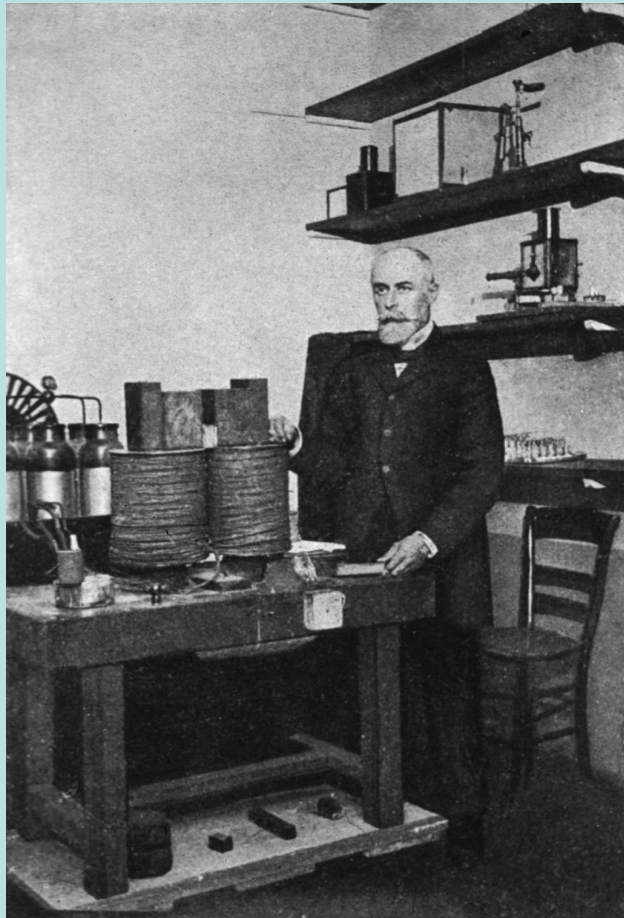
If a nucleus emits an α particle (${}^4_2\text{He}$), it loses two protons and two neutrons. Therefore, the atomic number Z decreases by 2, the mass number A decreases by 4, and the neutron number decreases by 2. The decay can be written as



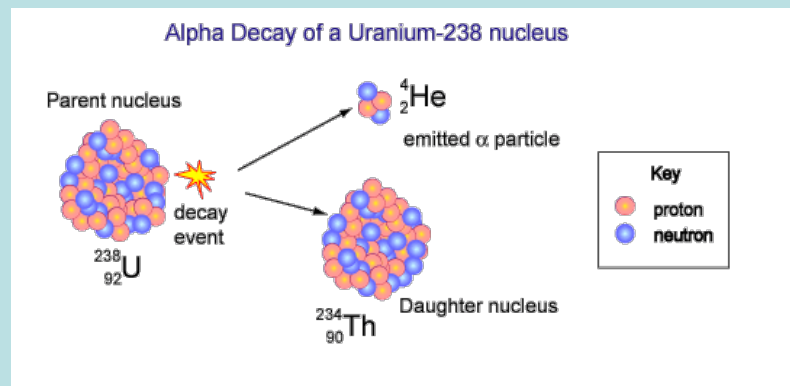
where X is called the **parent nucleus** and Y the **daughter nucleus**. For example, ${}^{238}\text{U}$ and ${}^{226}\text{Ra}$ are both alpha emitters and decay according to the schemes

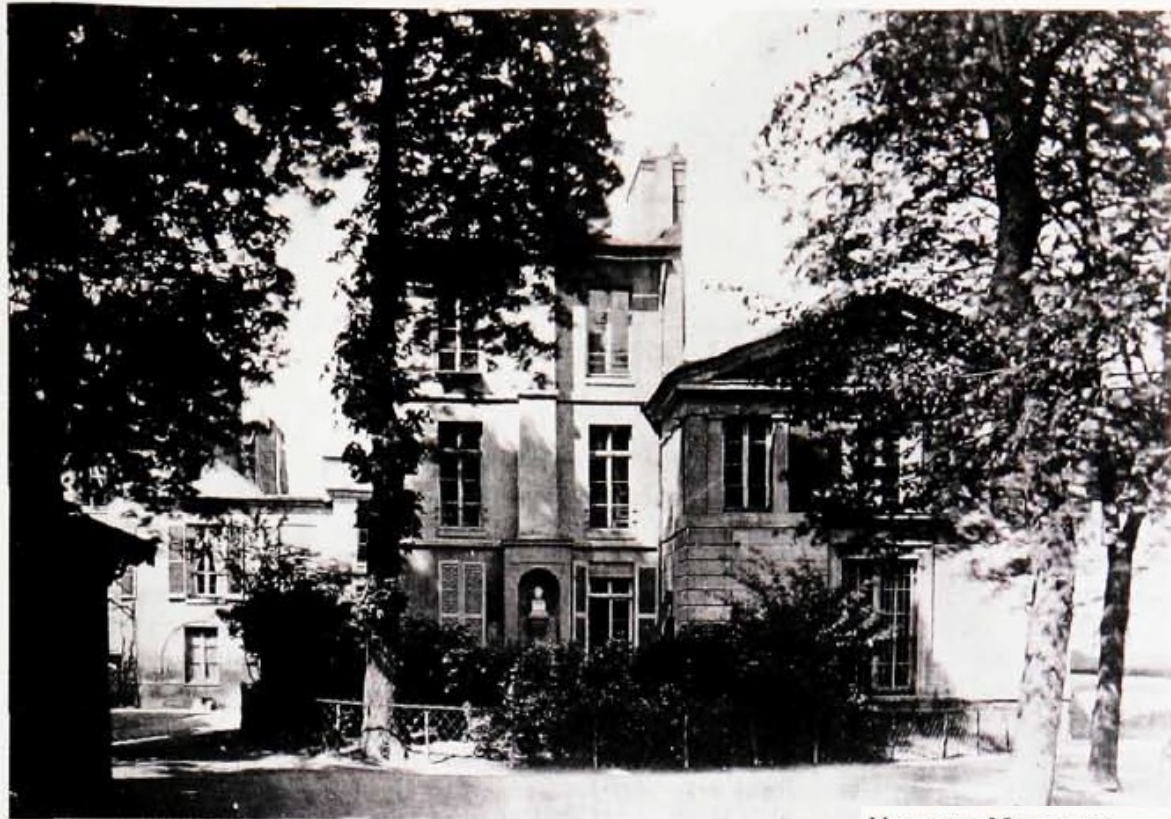


The half-life for the ${}^{238}\text{U}$ decay is 4.47×10^9 years, and that for ${}^{226}\text{Ra}$ decay is 1.60×10^3 years. In both cases, note that the mass number of the daughter nucleus is 4 less than that of the parent nucleus. Likewise, the atomic number



鈾原子核的 α 衰變放射之發現者：
Henri Becquerel 1852 – 1908 觀察自然的鈾鹽！





NATIONAL MUSEUM OF NATURAL HISTORY in Paris. On the second floor, at the left-hand side of the building, is the window in which Becquerel exposed uranium compounds to sunlight, mistakenly believing that the invisible penetrating radiation, which we know today as radioactivity, was associated with phosphorescence. The bust in the alcove depicts naturalist Georges Cuvier, long associated with both the museum and the French Academy of Sciences. (Photo obtained in 1965, courtesy of Yves Le Grand, who occupied the chair at the museum once held by Becquerel.) **FIGURE 2**



ELECTROLUMINESCENCE from this Gassiot cascade delighted and mystified 19th century audiences. The cascade consisted of a large goblet of uranium glass, lined with tin foil. When the goblet was placed on a metal plate, covered with a bell jar, and brought to the proper degree of evacuation, a machine for generating static electricity that was connected to the foil and plate caused, in the words of historian E. Newton Harvey, “spectacular electroluminescent effects . . . in the gas which seemed to flow over the edge of the goblet.” (Photo from the frontispiece to A. Privat Deschanel, *Elementary Treatise on Natural Philosophy*, vol. 3 [Blackie & Son, London, 1888].) **FIGURE 3**



含鈾的玻璃在紫外線照射下發出螢光！



Uranium, ${}_{92}\text{U}$

Uranium is weakly radioactive because all isotopes of uranium are unstable. Uranium decays slowly by emitting an α particle.



UO_2

Uranium-238 (99.2739–99.2752%),
Uranium-235 (0.7198–0.7202%)

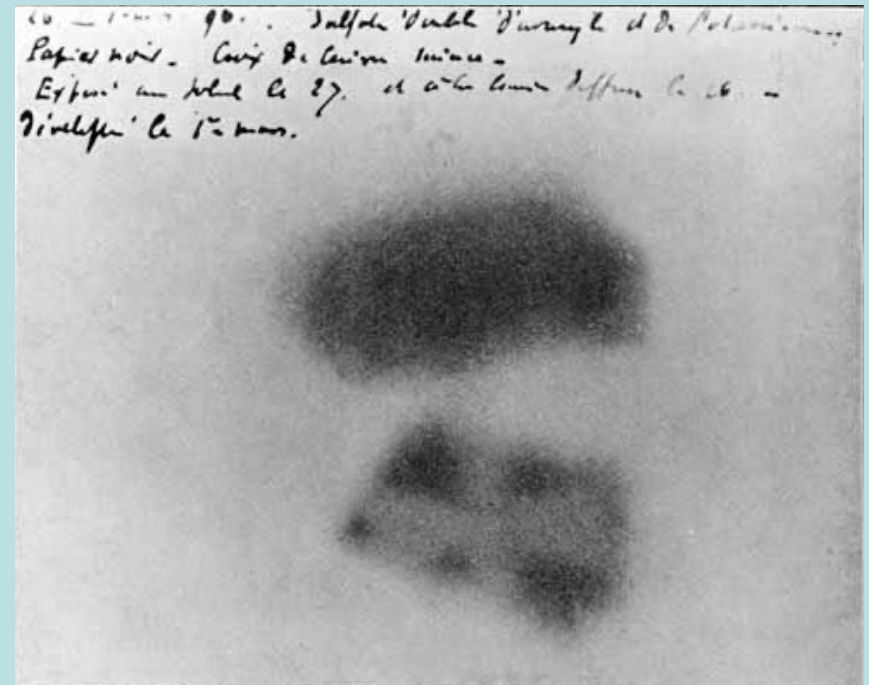
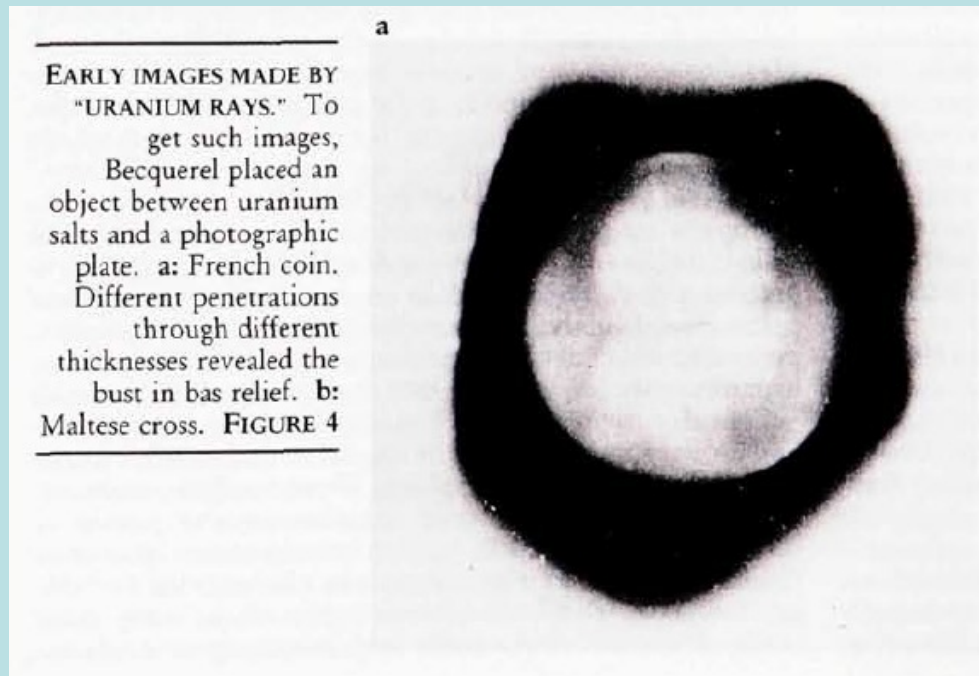
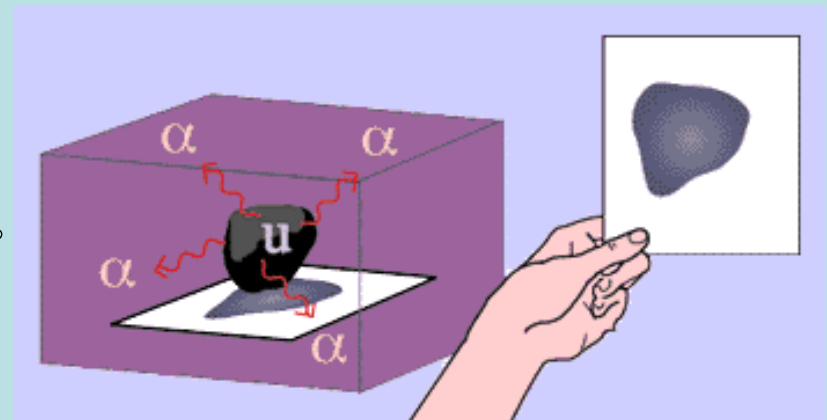
The half-life of Uranium-238 is about 4.47 billion years and that of Uranium-235 is 704 million years.

Becquerel 希望證實鈾塊在日光照射下發出的螢光是有穿透性的。

特別將底片與鈾塊間蓋上黑紙。

沒想到在沒有日光照射鈾塊時，也會感光。

放射性鈾鹽自發放射的 α 射線，使底片感光。



α 衰變中，核子的身份都沒有改變，原子核質量 = 質子中子總質量 - 總束縛能/ c^2
 原子核質量變化，就是束縛能變化，束縛能增加，能量就被釋放出來：
 動量守恆，因此較輕的氦原子核就會以高速放射出來！

Figure 13.16 depicts the spontaneous decay of ^{226}Ra . As a general rule, (1) the sum of the mass numbers A must be the same on both sides of the equation, and (2) the net charge must be the same on both sides of the equation. In addition, the total relativistic energy and momentum must be conserved. If we call M_X the atomic mass of the parent, M_Y the mass of the daughter, and M_α the mass of the alpha particle, we can define the **disintegration energy** Q :

$$Q = (M_X - M_Y - M_\alpha)c^2 \quad (13.15)$$

Note that atomic mass rather than nuclear mass can be used here, because the electronic masses cancel in an evaluation of the mass differences. Q is in joules when the masses are in kilograms, and c is the usual 3.00×10^8 m/s. However, when masses are expressed in the more convenient unit u , the value of Q can be calculated in MeV with the expression

$$Q = (M_X - M_Y - M_\alpha) \times 931.494 \text{ MeV}/u \quad (13.16)$$

The disintegration energy Q appears in the form of kinetic energy of the daughter nucleus and the α particle. The quantity given by Equation 13.16 is sometimes referred to as the Q value of the nuclear reaction. In the case of the ^{226}Ra decay described in Figure 13.16, if the parent nucleus is at rest when it decays, the residual kinetic energy of the products is 4.87 MeV. Most of the kinetic energy is associated with the alpha particle because this particle is much less massive than the recoiling daughter nucleus, ^{222}Rn . That is, because momentum must be conserved, the lighter α particle recoils with a much higher speed than the daughter nucleus. Generally, light particles carry off most of the energy in nuclear decays.

It is fairly easy to calculate the fraction of the disintegration energy carried

Disintegration energy Q

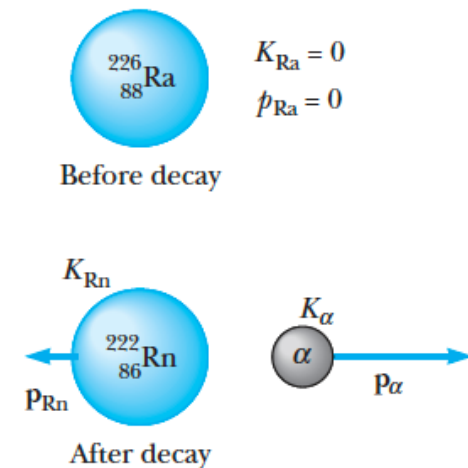
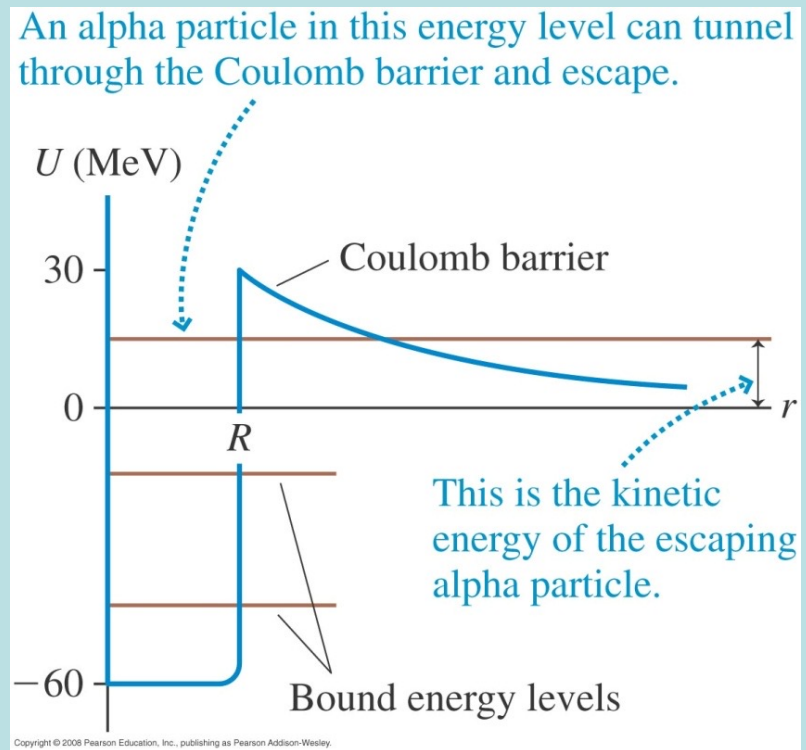
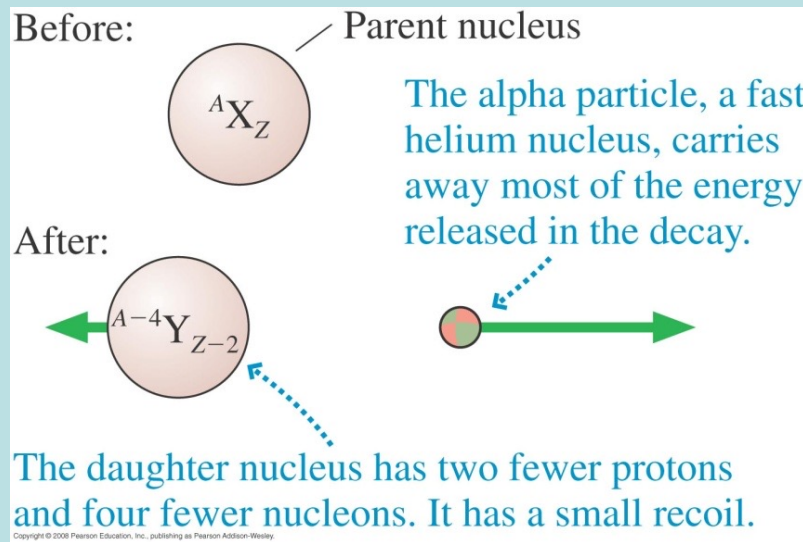


Figure 13.16 Alpha decay of radium. The radium nucleus is initially at rest. After the decay, the radon nucleus has kinetic energy K_{Rn} and momentum \mathbf{p}_{Rn} , and the alpha particle has kinetic energy K_α and momentum \mathbf{p}_α .

原子核的 α 衰變，可以將衰變原子核，看成 α 粒子與產物原子核的束縛態。吸引的核力很強，對應很深的位能，但只有短距 $r < R$ 。長距 $r > R$ ，位能則由排斥的庫倫位能取代。



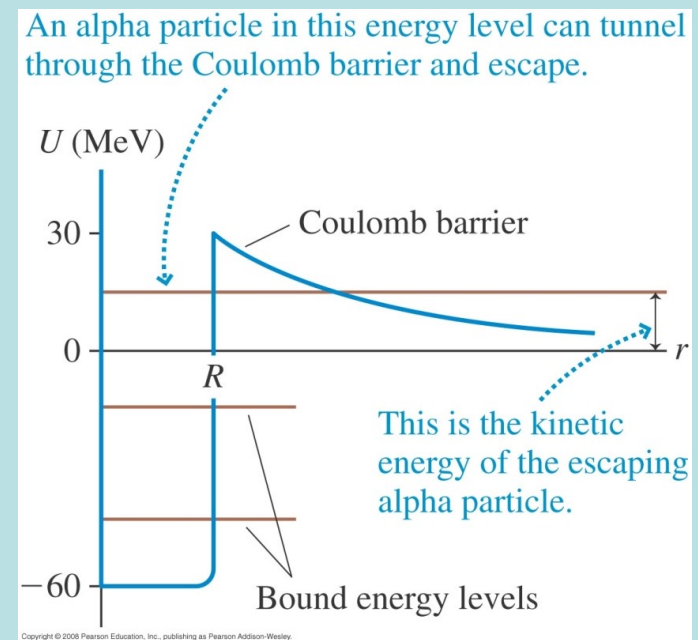
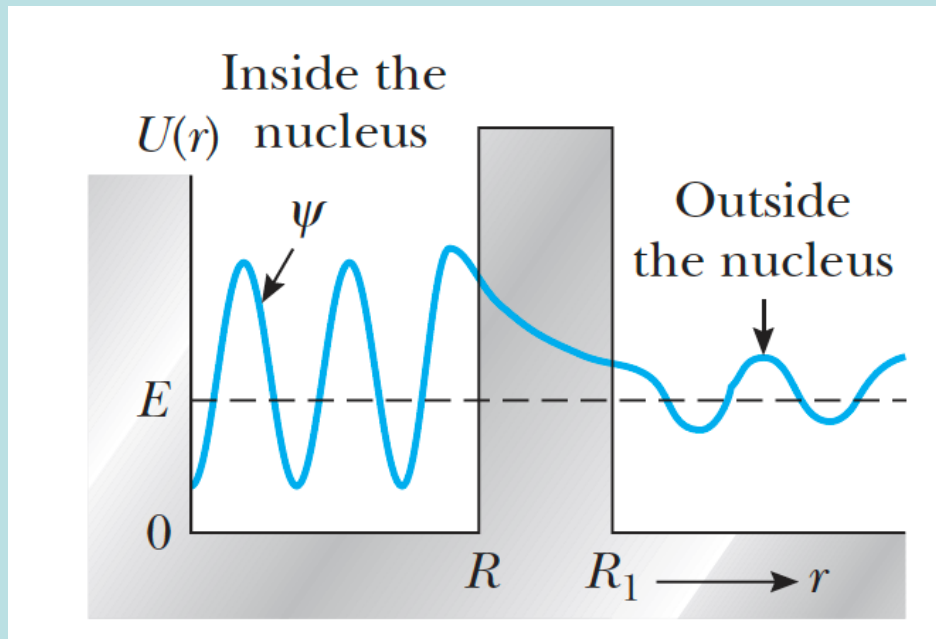
α 粒子可以透過量子穿隧效應，自發地穿透放射離開。

因為是量子效應，因此發生的可能是由機率控制！

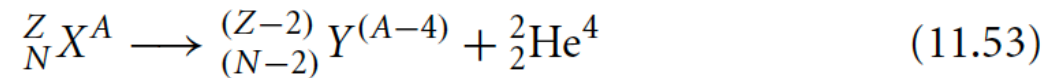
有就是每單位時間，有特定機率， α 粒子可以穿透，而發生 α 衰變。

但機率是不確定的，它有可能發生，也可能不發生。

衰變是一個沒有有確定性的過程。



tunneling. In this process, a heavy nucleus decays to a lighter one by the emission of an α -particle, that is, the nucleus He^4 . Using a compact notation, the process can be written as



where Z , N , and A are, respectively, the numbers of protons, neutrons, and total nucleons in the nuclear species denoted by X (the “parent”) or Y (historically the “daughter” nucleus).

Because this is a two-body decay, the energy of the emitted α is determined uniquely from conservation of energy and momentum, and can be calculated from a knowledge of the masses of the parent and daughter nuclear species. For the nuclei for which α -decay is an important decay mechanism, the range in numerical values for the appropriate dimensionful parameters in the problem is not very large,

$$R \sim 2\text{--}4 F, \quad E_\alpha \sim 2\text{--}8 \text{ MeV}, \quad \text{and} \quad Z \sim 50\text{--}100 \quad (11.54)$$

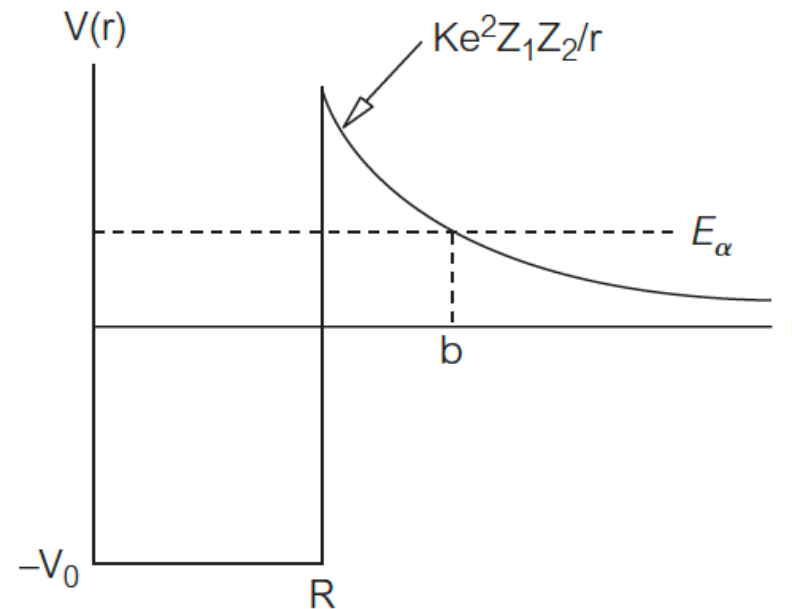
while the observed lifetimes have been measured over an incredibly large range

$$\tau \sim 10^{17} \text{ s} \text{--} 10^{-12} \text{ s} \quad (11.55)$$

A simple model for this process assumes that the α -particle moves in the potential of the *daughter* nucleus, modeled by a combination of an attractive square well (as in Section 8.2), along with the mutual Coulomb repulsion. This can be written as

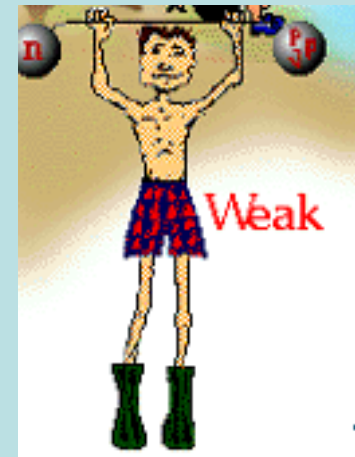
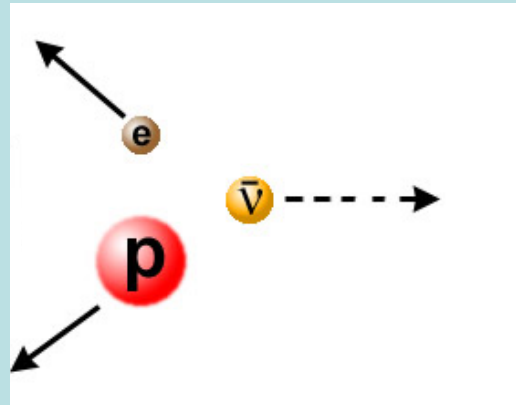
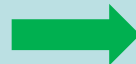
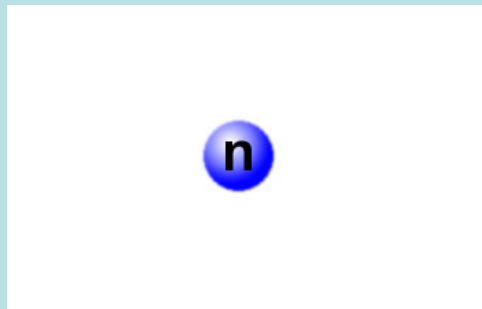
$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{for } r < R \\ Z_1 Z_2 K e^2 / r & \text{for } R < r \end{cases} \quad (11.56)$$

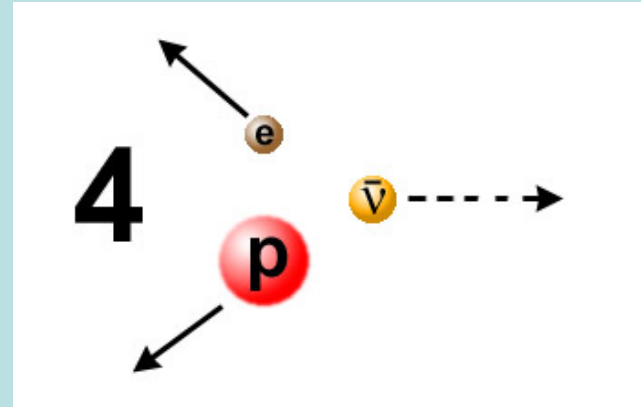
We would then take $Z_1 = Z_\alpha = 2$ and $Z_2 = Z - 2$ where Z is the charge of the *parent* nucleus. This potential is illustrated in Fig. 11.16 and the α -particle is assumed to have positive energy E_α equal, to its observed final kinetic energy; the model pictures the α -particle as “rattling around” inside the nucleus with a small (exponentially so) quantum tunneling probability of escaping each time it “hits” the Coulomb barrier. The tunneling probability for this process is then



弱交互作用 **Weak Interaction**：衰變的交互作用。

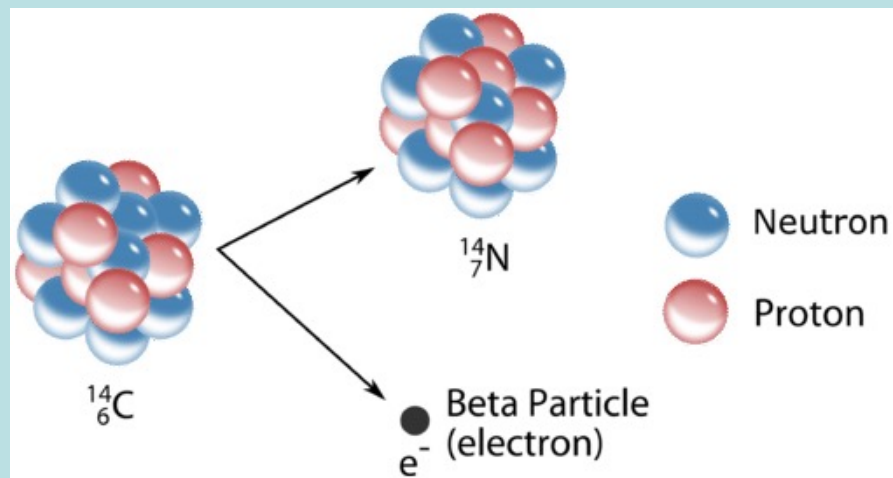
在自然界，單獨的中子是不穩定的。

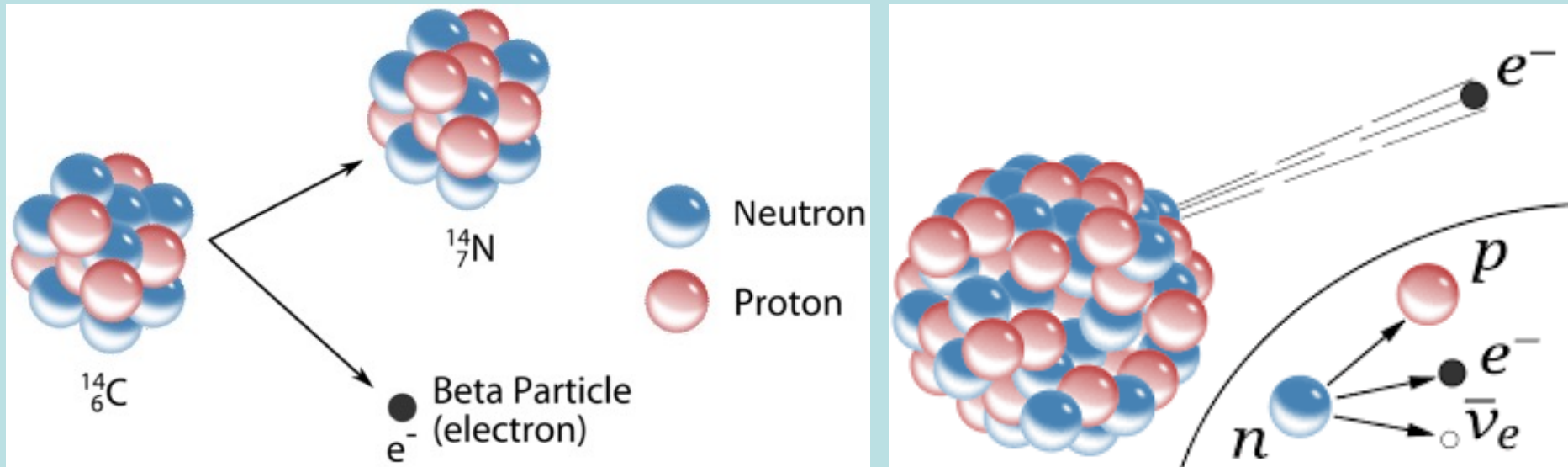




與 α 衰變不同，在 β 衰變中，核子的身份改變了，
同時會放出微中子 ν ！

原子核內的中子可以進行 β 衰變。





原子核中的質子數目決定原子的化學性質。

$n^0 \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$ 原子核中若發生 β 衰變，原子核的核種會改變！

不穩定的放射性原子核，可以透過 β 衰變，衰變為不同的原子核，
例如：碳同位素原子核衰變為氮原子核！

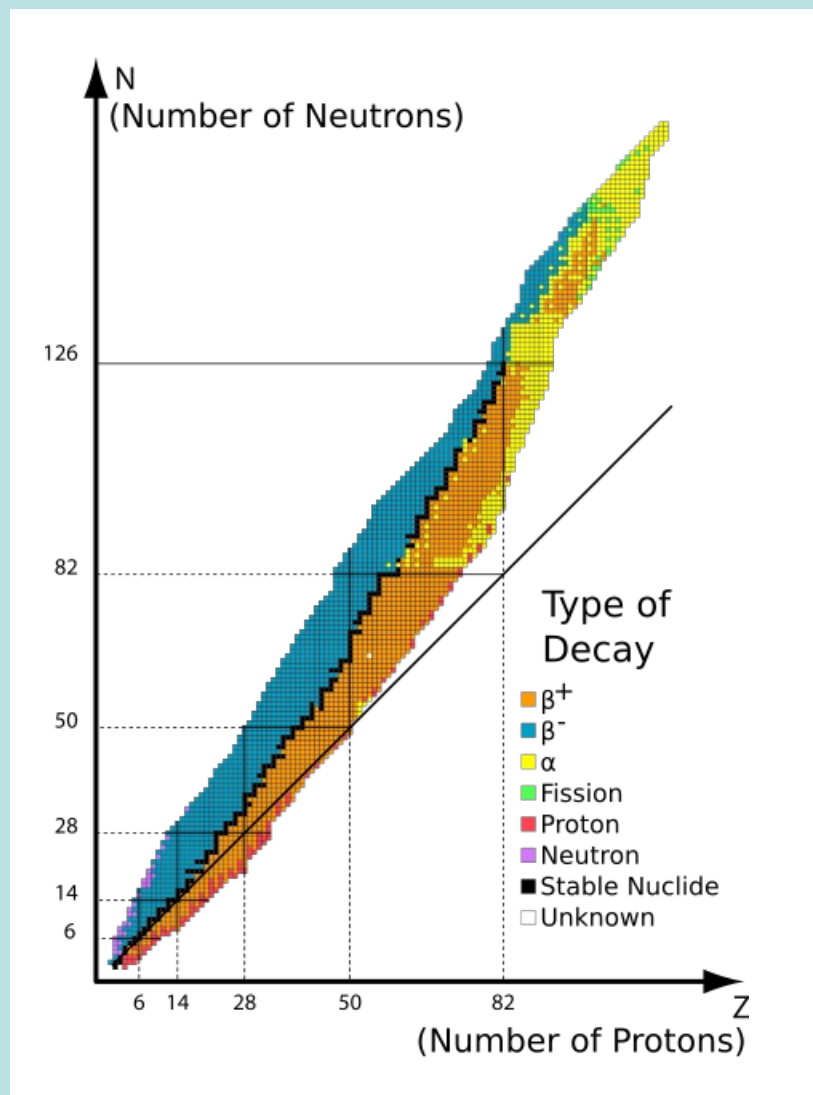
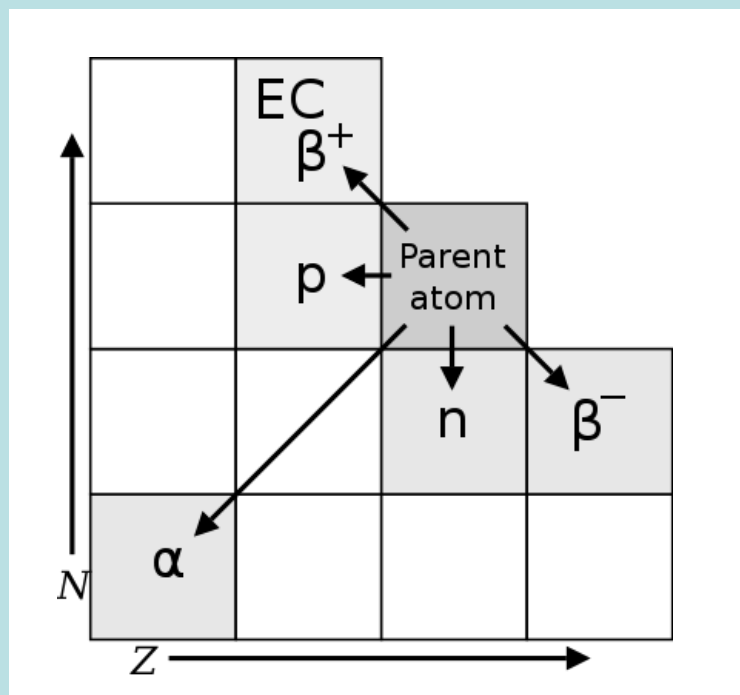


衰變前後原子核的質量會有差異，而有能量釋放。

大部分不穩定放射性原子核的放射性，就來自 β 衰變！

β 衰變會不會發生，就要看產物原子核是不是被容許！

這些衰變可以在圖上顯示。



Decay chain

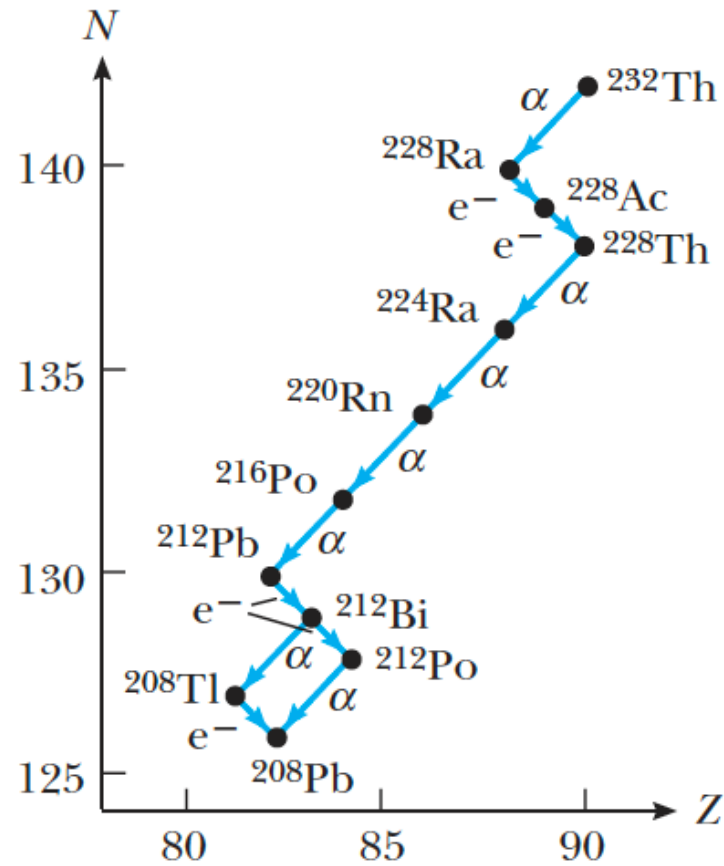
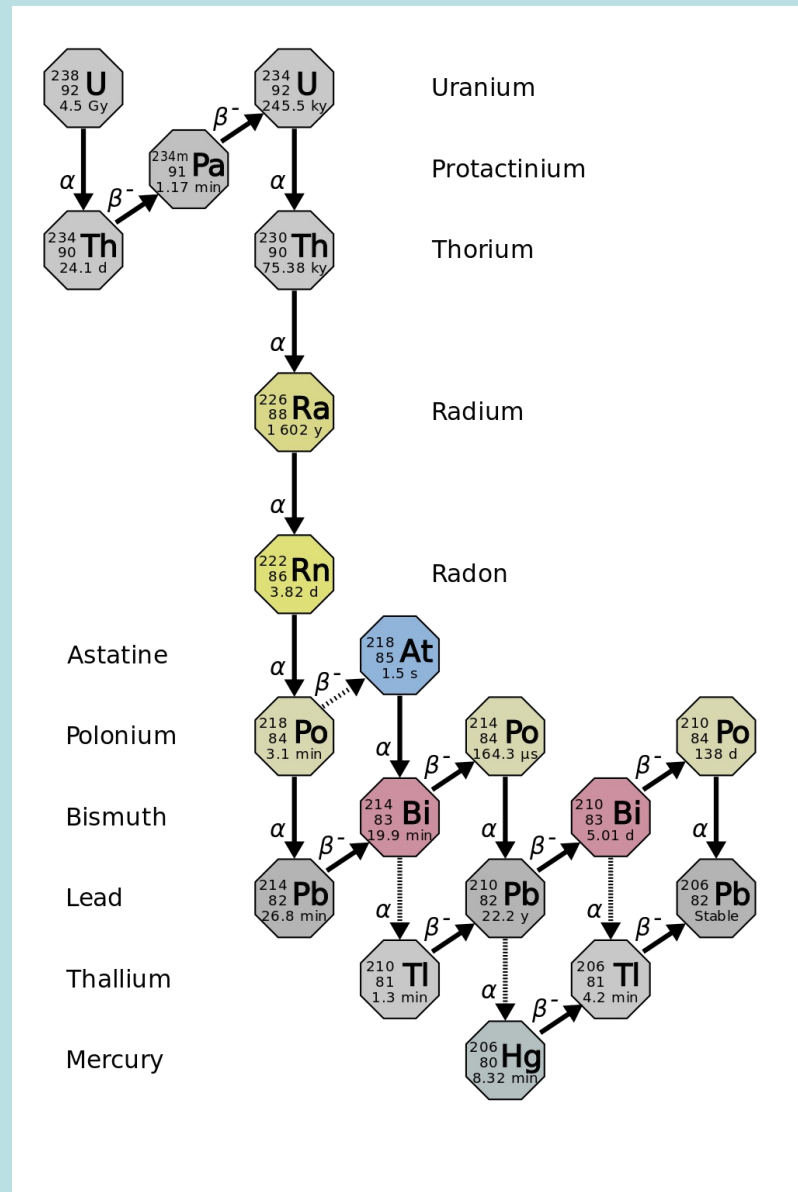
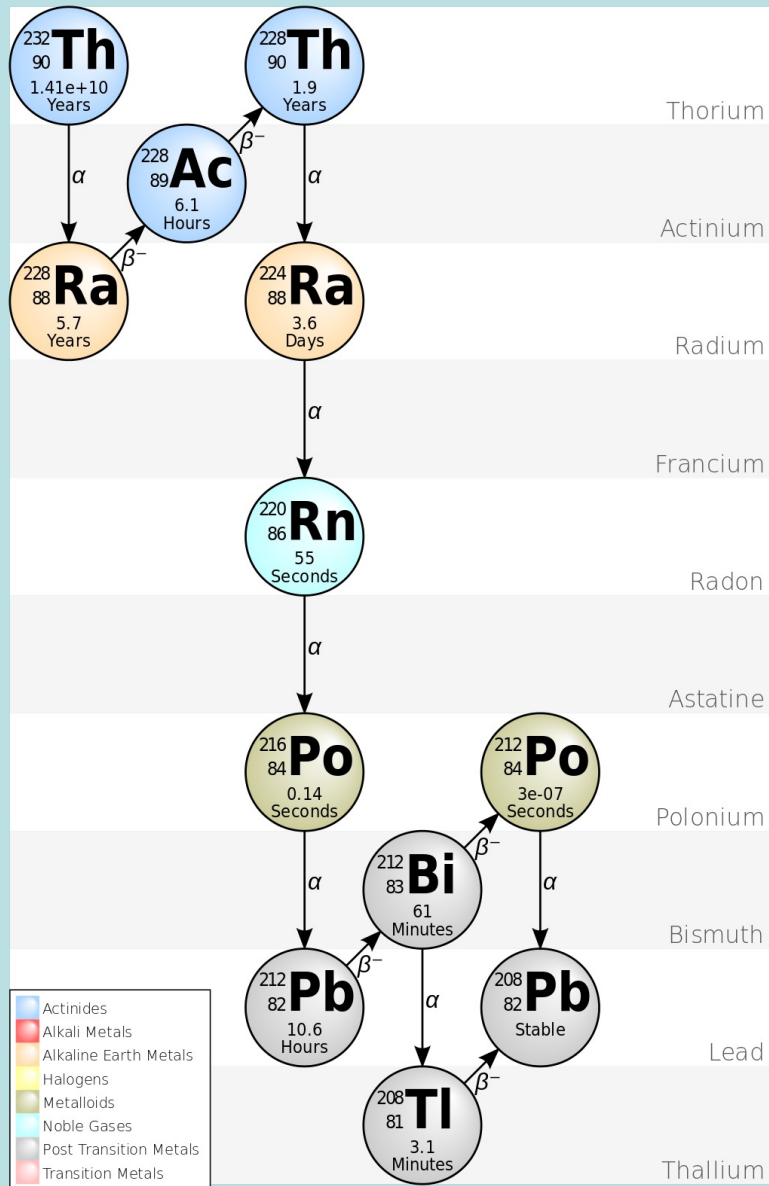


Figure 13.21 Successive decays for the ^{232}Th series.



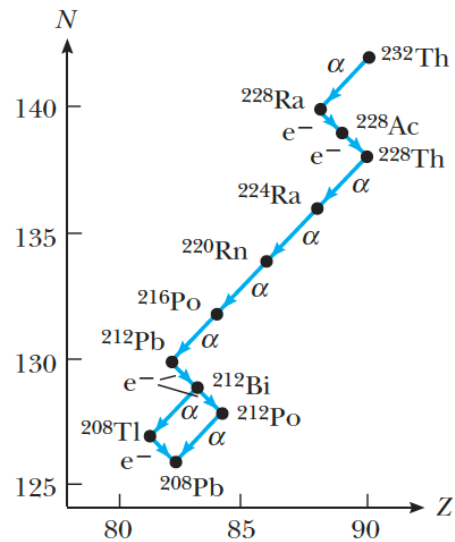


Figure 13.21 Successive decays for the ^{232}Th series.

Four Radioactive Series

Radioactive nuclei are generally classified into two groups: (1) unstable nuclei found in nature, which give rise to what is called **natural radioactivity**, and (2) nuclei produced in the laboratory through nuclear reactions, which exhibit **artificial radioactivity**. There are three series of naturally occurring radioactive nuclei (Table 13.5). Each series starts with a specific long-lived radioactive isotope whose half-life exceeds that of any of its descendants. The three natural series begin with the isotopes ^{238}U (**Uranium Series**), ^{235}U (**Actinium Series**), and ^{232}Th (**Thorium Series**), and the corresponding stable end products are three isotopes of lead: ^{206}Pb , ^{207}Pb , and ^{208}Pb . The fourth series in Table 13.5 is an artificial radioactive series called the **Neptunium Series** because Neptunium is the longest-lived member of the series other than its stable end product, ^{209}Bi . The element ^{237}Np is a transuranic element (one having an atomic number greater than that of uranium) not found in nature. This element has a half-life of “only” 2.14×10^6 years, much less than the age of the Earth; consequently, any ^{237}Np present when the Earth was created would long since have decayed away.

Figure 13.21 shows the successive decays for the ^{232}Th series. Note that ^{232}Th first undergoes α decay to ^{228}Ra . Next, ^{228}Ra undergoes two successive β

Table 13.5 The Four Radioactive Series

Series	Starting Isotope	Half-Life (years)	Stable End Product
Uranium	$^{238}_{92}\text{U}$	4.47×10^9	$^{206}_{82}\text{Pb}$
Actinium	$^{235}_{92}\text{U}$	7.04×10^8	$^{207}_{82}\text{Pb}$
Thorium	$^{232}_{90}\text{Th}$	1.41×10^{10}	$^{208}_{82}\text{Pb}$
Neptunium	$^{237}_{93}\text{Np}^a$	2.14×10^6	$^{209}_{83}\text{Bi}$

β 衰變所放出的電子的能量極大，因此稱為 β 射線，其能量分佈：
電子的速度最大可以到達接近光速的0.86。

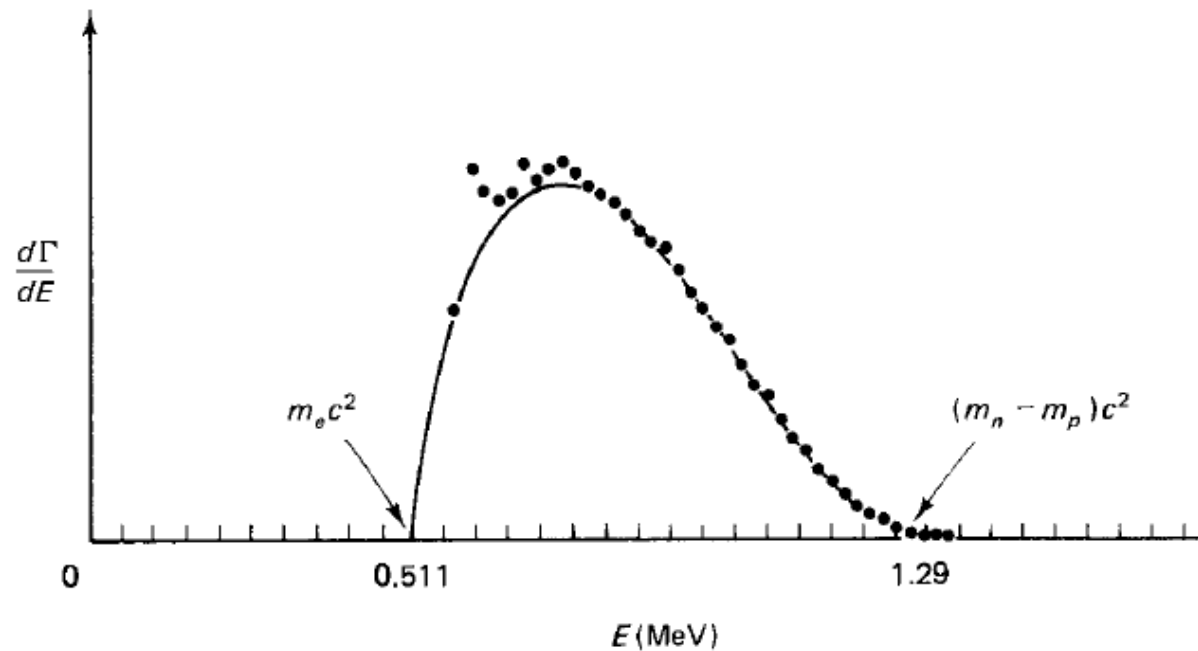


Figure 10.2. Electron energy distribution from neutron beta decay. (Solid line is the theoretical curve; dots are experimental data.) [Source: C. J. Christensen et al., *Phys. Rev. D5*, 1628 (1972), Figure 4.]

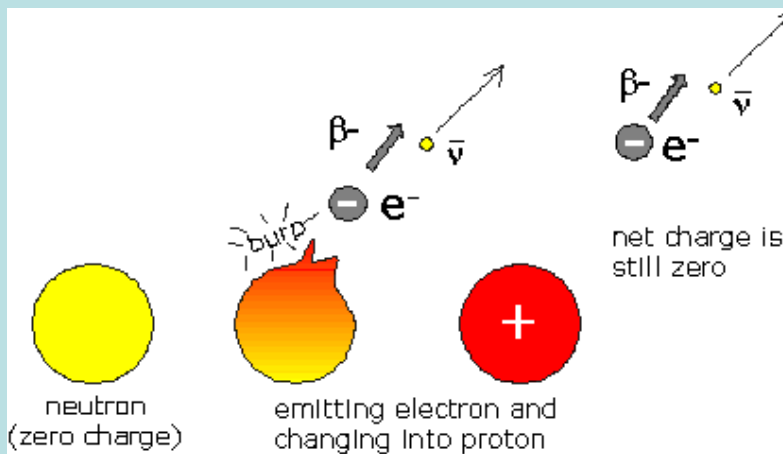
Beta Ray Bill 馬面雷神



β Beta 衰變代表中子並不穩定！



注意中子是基本粒子，可不是由質子與電子組成的！
質子與電子能組成的粒子是氫原子！中子要小非常多。



β 衰變不像 α 衰變，不是組成中子的電子脫離了質子。
衰變是中子消失了，產生了質子、電子與微中子。

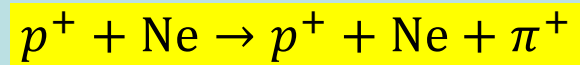
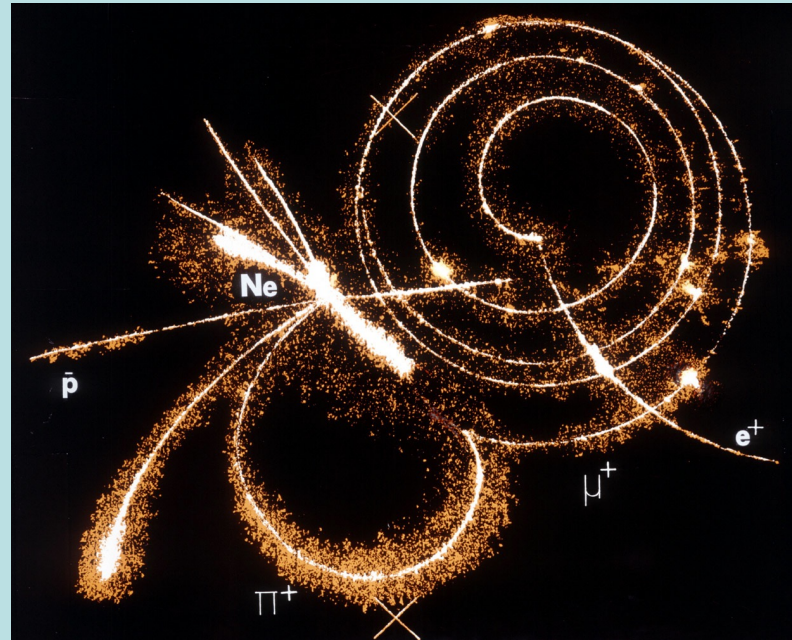
什麼！基本粒子也會衰變、消失？

對！幾乎所有基本粒子都會衰變！

如果基本粒子也會消失，人世間還有什麼會是永恆的？

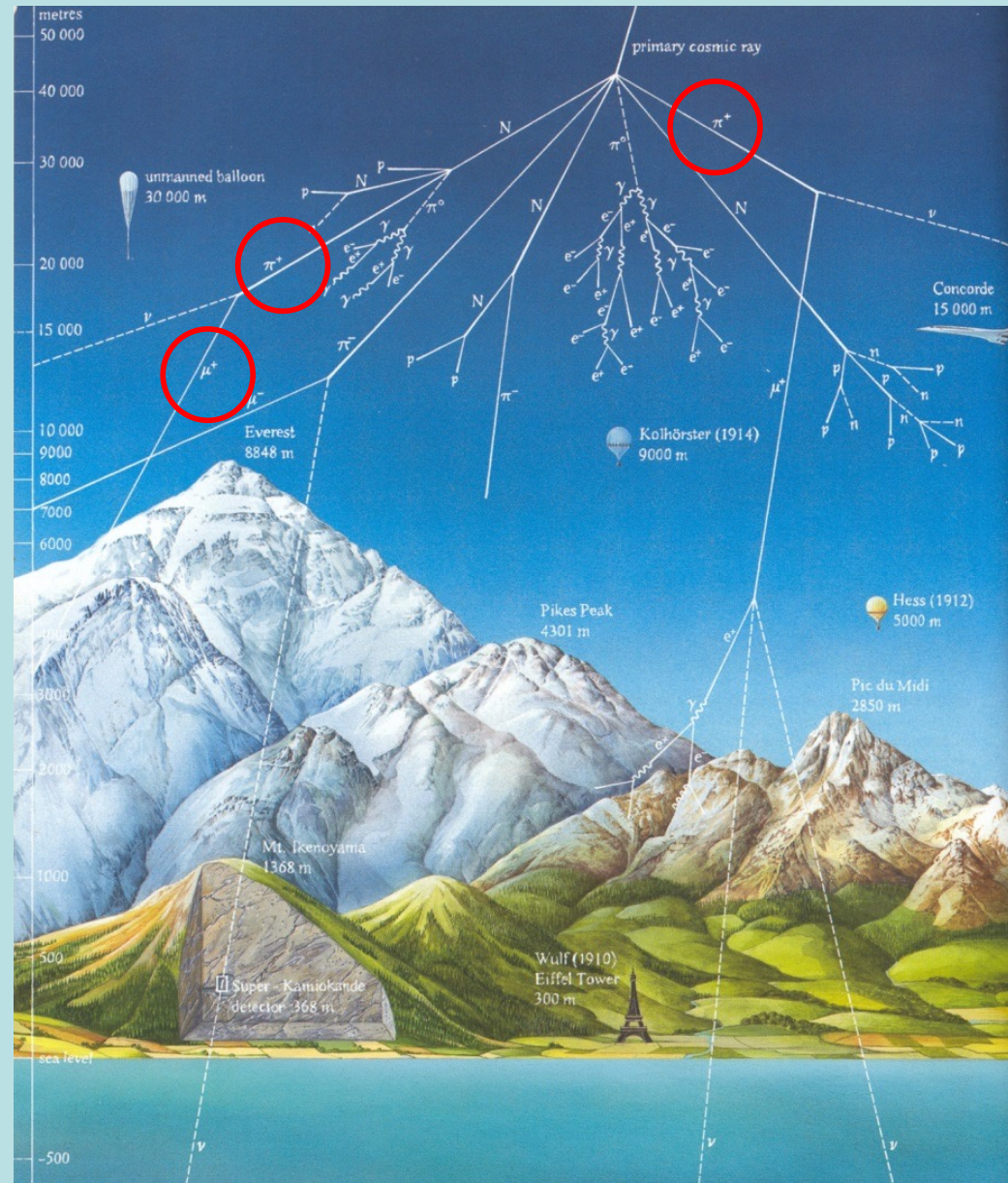


但話說回來，基本粒子可以衰變、可以產生也不奇怪。



相對論容許新粒子在撞擊中由能量產生： $E \rightarrow M$. $E = mc^2$

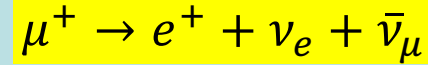
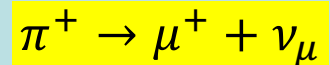
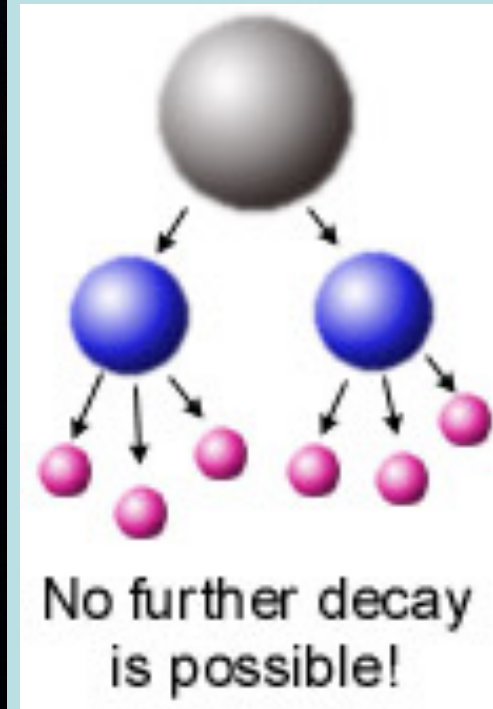
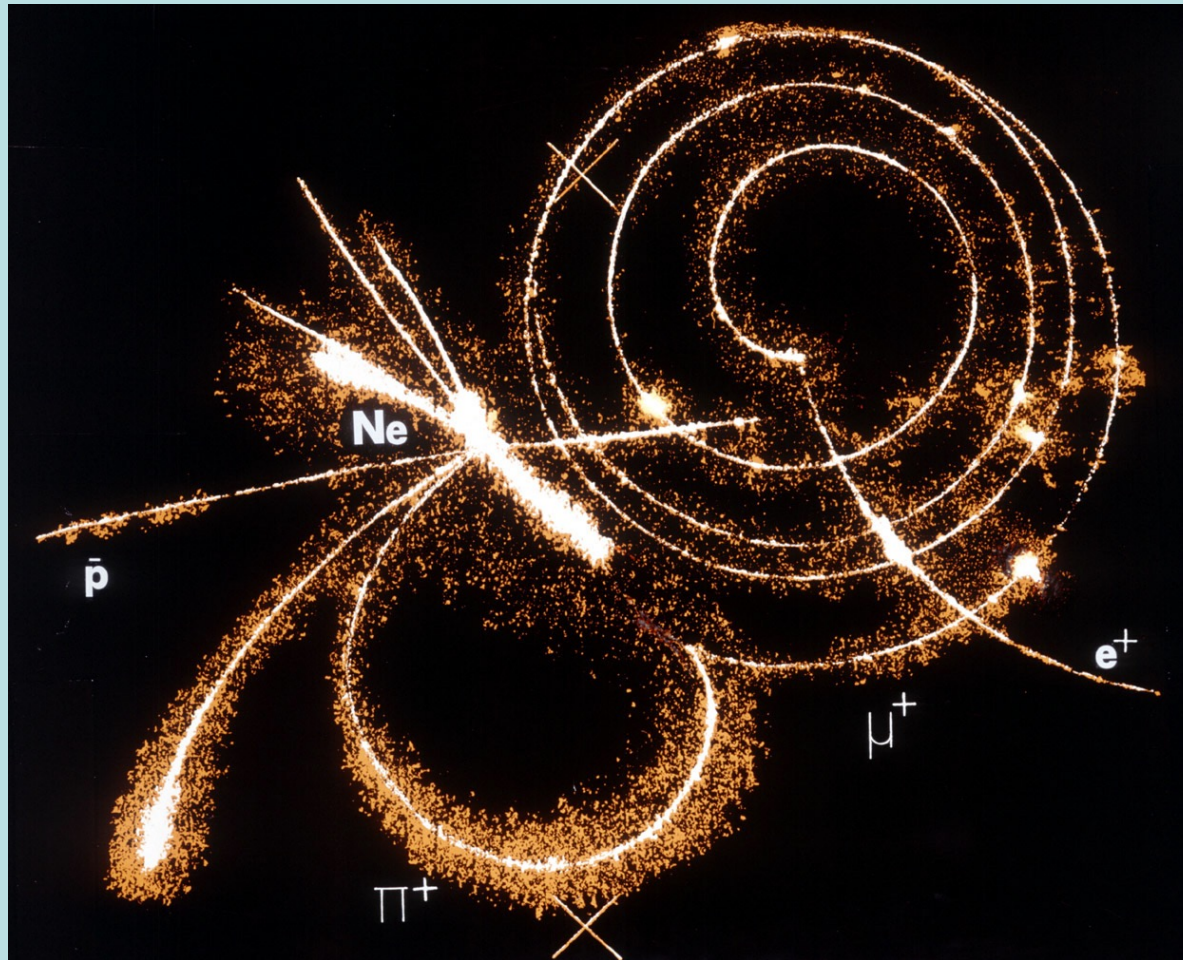
高速的宇宙射線在大氣層高空撞擊出許多新的基本粒子！



因為能量可以轉換為質量，產生新的粒子！

$$E = mc^2$$

這些新的基本粒子都會衰變！



同理，粒子也可以衰變，將質量轉化為衰變產物的能量： $M \rightarrow E$ 。

較重的粒子在自然界通常不存在。他們一產生不久就會衰變。

許多衰變都如貝他衰變是由弱交互作用造成。特徵是都產生微中子。

LIGHT UNFLAVORED MESONS ($S = C = B = 0$)

For $I = 1$ (π, ρ, a): $u\bar{d}, (u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}, d\bar{u}$;
for $I = 0$ ($\eta, \eta', h, h', \omega, \phi, f, f'$): $c_1(u\bar{u} + d\bar{d}) + c_2(s\bar{s})$

π^\pm

$$I^G(J^P) = 1^-(0^-)$$

Mass $m = 139.57018 \pm 0.00035$ MeV ($S = 1.2$)

Mean life $\tau = (2.6033 \pm 0.0005) \times 10^{-8}$ s ($S = 1.2$)

$$c\tau = 7.8045 \text{ m}$$

$\pi^\pm \rightarrow \ell^\pm \nu \gamma$ form factors [a]

$$F_V = 0.0254 \pm 0.0017$$

$$F_A = 0.0119 \pm 0.0001$$

$$F_V \text{ slope parameter } a = 0.10 \pm 0.06$$

$$R = 0.059^{+0.009}_{-0.008}$$

質量介於輕子與重子之間，稱為介子 Meson

π^- modes are charge conjugates of the modes below.

For decay limits to particles which are not established, see the section on Searches for Axions and Other Very Light Bosons.

π^+ DECAY MODES	Fraction (Γ_i/Γ)	Confidence level	p (MeV/c)
$\mu^+ \nu_\mu$	[b] (99.98770 ± 0.00004) %		30
$\mu^+ \nu_\mu \gamma$	[c] (2.00 ± 0.25) × 10 ⁻⁴		30
$e^+ \nu_e$	[b] (1.230 ± 0.004) × 10 ⁻⁴		70
$e^+ \nu_e \gamma$	[c] (7.39 ± 0.05) × 10 ⁻⁷		70
$e^+ \nu_e \pi^0$	(1.036 ± 0.006) × 10 ⁻⁸		4
$e^+ \nu_e e^+ e^-$	(3.2 ± 0.5) × 10 ⁻⁹		70
$e^+ \nu_e \nu \bar{\nu}$	< 5 × 10 ⁻⁶	90%	70

μ

$$J = \frac{1}{2}$$

Mass $m = 0.1134289267 \pm 0.0000000029$ u

Mass $m = 105.6583715 \pm 0.0000035$ MeV

Mean life $\tau = (2.1969811 \pm 0.0000022) \times 10^{-6}$ s

$$\tau_{\mu^+} / \tau_{\mu^-} = 1.00002 \pm 0.00008$$

$$c\tau = 658.6384$$
 m

Magnetic moment anomaly $(g-2)/2 = (11659209 \pm 6) \times 10^{-10}$

$$(g_{\mu^+} - g_{\mu^-}) / g_{\text{average}} = (-0.11 \pm 0.12) \times 10^{-8}$$

Electric dipole moment $d = (-0.1 \pm 0.9) \times 10^{-19}$ e cm

μ^- DECAY MODES	Fraction (Γ_j/Γ)	Confidence level	p (MeV/c)
$e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$	$\approx 100\%$		53
$e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu \gamma$	[d] $(1.4 \pm 0.4) \%$		53
$e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu e^+ e^-$	[e] $(3.4 \pm 0.4) \times 10^{-5}$		53
Lepton Family number (LF) violating modes			
$e^- \nu_e \bar{\nu}_\mu$	LF [f] < 1.2	%	90% 53
$e^- \gamma$	LF < 5.7	$\times 10^{-13}$	90% 53
$e^- e^+ e^-$	LF < 1.0	$\times 10^{-12}$	90% 53
$e^- 2\gamma$	LF < 7.2	$\times 10^{-11}$	90% 53

μ子會衰變的。因此自然界不存在。

n

$$I(J^P) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$$

$$\text{Mass } m = 1.0086649160 \pm 0.0000000004 \text{ u}$$

$$\text{Mass } m = 939.565379 \pm 0.000021 \text{ MeV [a]}$$

$$(m_n - m_{\bar{n}}) / m_n = (9 \pm 6) \times 10^{-5}$$

$$m_n - m_p = 1.2933322 \pm 0.0000004 \text{ MeV} \\ = 0.00138844919(45) \text{ u}$$

$$\text{Mean life } \tau = 880.3 \pm 1.1 \text{ s } (S = 1.9)$$

$$c\tau = 2.6391 \times 10^8 \text{ km}$$

$$\text{Magnetic moment } \mu = -1.9130427 \pm 0.0000005 \mu_N$$

$$\text{Electric dipole moment } d < 0.29 \times 10^{-25} \text{ e cm, CL} = 90\%$$

$$\text{Mean-square charge radius } \langle r_n^2 \rangle = -0.1161 \pm 0.0022 \\ \text{fm}^2 (S = 1.3)$$

$$\text{Magnetic radius } \sqrt{\langle r_M^2 \rangle} = 0.862^{+0.009}_{-0.008} \text{ fm}$$

n DECAY MODES	Fraction (Γ_i/Γ)	Confidence level	ρ (MeV/c)
$p e^- \bar{\nu}_e$	100	%	1
$p e^- \bar{\nu}_e \gamma$	[k] $(3.09 \pm 0.32) \times 10^{-3}$		1
Charge conservation (Q) violating mode			
$p \nu_e \bar{\nu}_e$	Q < 8	$\times 10^{-27}$	68% 1

獨立的中子半衰期是**10**分鐘，但如果是在穩定的原子核裡，中子就可以很長壽。

真正長壽的是質子。

N BARYONS ($S = 0, I = 1/2$)

$p, N^+ = uud; \quad n, N^0 = udd$

p

$$I(J^P) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$$

Mass $m = 1.00727646681 \pm 0.00000000009$ u

Mass $m = 938.272046 \pm 0.000021$ MeV [a]

$$|m_p - m_{\bar{p}}|/m_p < 7 \times 10^{-10}, \text{ CL} = 90\% [b]$$

$$|\frac{q_{\bar{p}}}{m_{\bar{p}}}|/(\frac{q_p}{m_p}) = 0.99999999991 \pm 0.00000000009$$

$$|q_p + q_{\bar{p}}|/e < 7 \times 10^{-10}, \text{ CL} = 90\% [b]$$

$$|q_p + q_e|/e < 1 \times 10^{-21} [c]$$

Magnetic moment $\mu = 2.792847356 \pm 0.000000023 \mu_N$

$$(\mu_p + \mu_{\bar{p}}) / \mu_p = (0 \pm 5) \times 10^{-6}$$

Electric dipole moment $d < 0.54 \times 10^{-23}$ ecm

Electric polarizability $\alpha = (11.2 \pm 0.4) \times 10^{-4}$ fm³

Magnetic polarizability $\beta = (2.5 \pm 0.4) \times 10^{-4}$ fm³ ($S = 1.2$)

Charge radius, μp Lamb shift = 0.84087 ± 0.00039 fm [d]

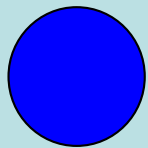
Charge radius, $e p$ CODATA value = 0.8775 ± 0.0051 fm [d]

Magnetic radius = 0.777 ± 0.016 fm

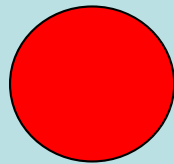
Mean life $\tau > 2.1 \times 10^{29}$ years, CL = 90% [e] ($p \rightarrow$ invisible mode)

Mean life $\tau > 10^{31}$ to 10^{33} years [e] (mode dependent)

造成衰變的弱交互作用是幾乎所有基本粒子都有的作用。人都會衰老。
 大部分粒子都衰變，五種基本粒子因為輕或其他因素，不會衰變，組成了自然。



Neutron



Proton



Electron



Photon



Neutrino

基本粒子

ELEMENTARY PARTICLES

Quarks	u up	c charm	t top	Force Carriers
	d down	s strange	b bottom	
	γ photon	g gluon	Z Z boson	
Leptons	ν_e electron neutrino	ν_μ muon neutrino	ν_τ tau neutrino	Force Carriers
	e electron	μ muon	τ tau	
	W W boson			

I II III
Three Generations of Matter

The PARTICLE ZOO

Handmade Subatomic Particle Plushies FROM THE STANDARD MODEL OF PHYSICS & beyond!
{ age 13 and up }

BUTTON BADGES NEW! TEMPORARY TATTOOS

QUARKS

UP QUARK A teeny little point inside the proton and neutron, it is friends forever with the down quark.	CHARM QUARK A charming second generation quark.	TOP QUARK This heavyweight champion doesn't live long enough to make friends with anyone.
DOWN QUARK A tiny little point inside the proton and neutron, it is friends forever with the up quark.	STRANGE QUARK What's so strange about this second generation quark?	BOTTOM QUARK This third generation quark is puttin' on the pounds.

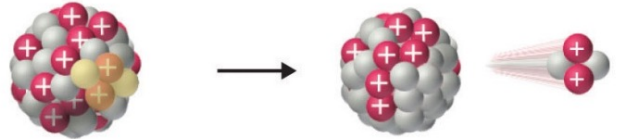
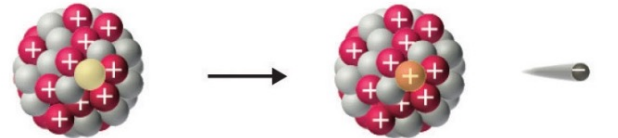
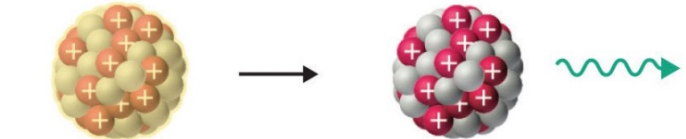
LEPTONS

ELECTRON-NEUTRINO This minuscule bandit is so light, he is practically massless.	MUON-NEUTRINO Like the other 2 neutrinos, he's got an identity crisis from oscillation.	TAU-NEUTRINO He's a tau now, but what type of neutrino will he be next?
ELECTRON A familiar friend, this negatively charged, busy li'l guy likes to bond.	MUON A "heavy electron" who lives fast and dies young.	TAU A "heavy muon" who could stand to lose a little weight.

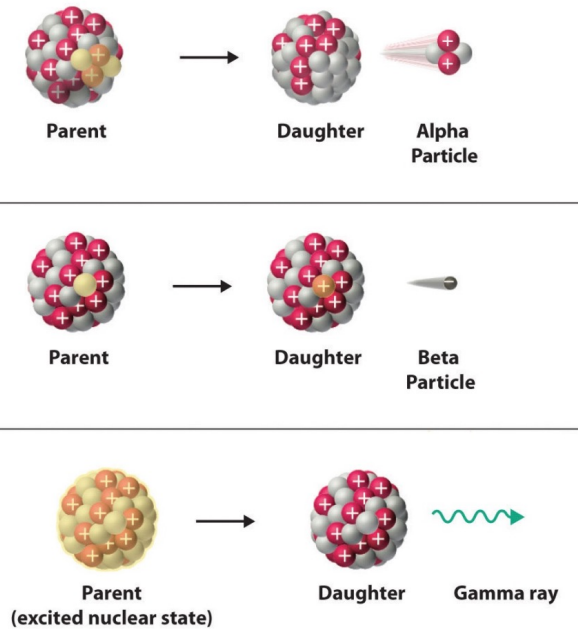
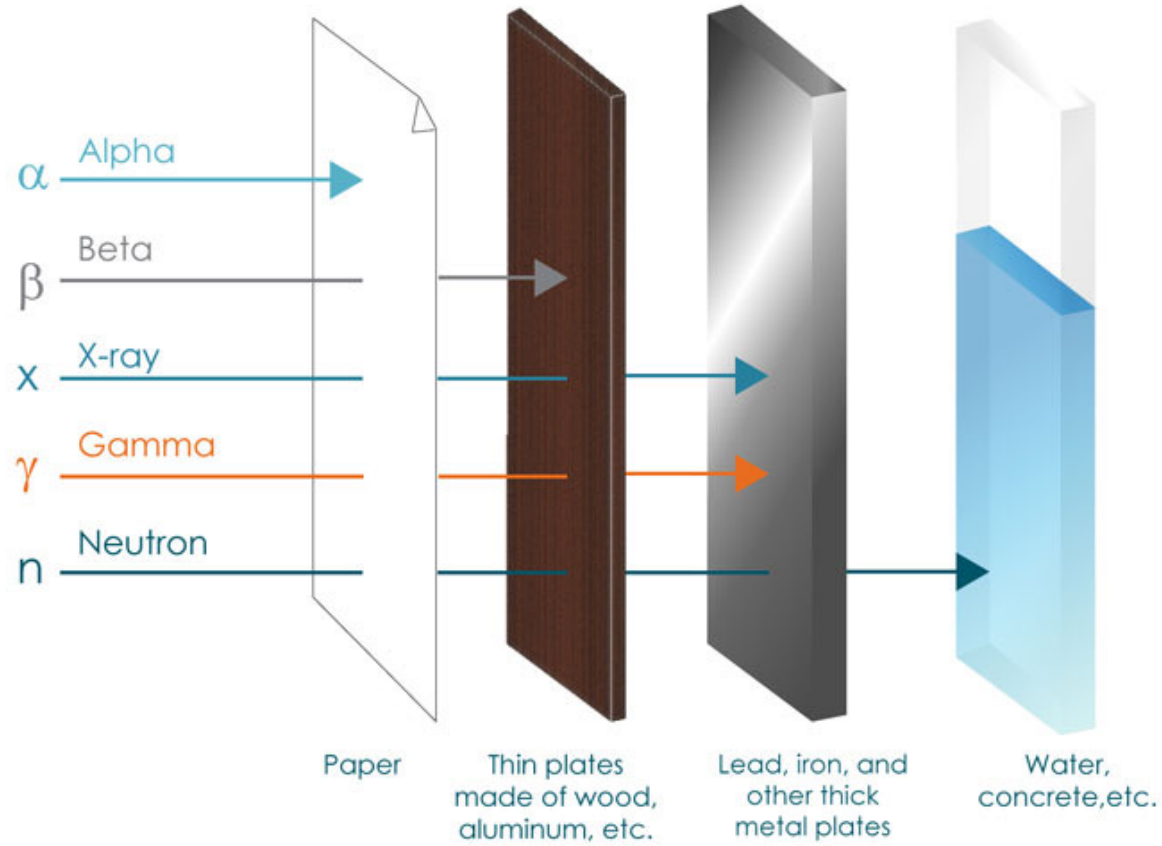
THE UNIVERSE
COSMIC MICROWAVE BACKGROUND RADIATION

ZIPPER POUCHES
PARTICLE PLAYING CARDS

FORCE CARRIERS
PHOTON
The massless wavicle we know and love.

Decay Type	Radiation Emitted	Generic Equation	Model
Alpha decay	${}^4_2\alpha$	${}^A_ZX \longrightarrow {}^{A-4}_{Z-2}X' + {}^4_2\alpha$	 <p>Parent → Daughter + Alpha Particle</p>
Beta decay	${}^0_{-1}\beta$	${}^A_ZX \longrightarrow {}^A_{Z+1}X' + {}^0_{-1}\beta$	 <p>Parent → Daughter + Beta Particle</p>
Gamma emission	${}^0_0\gamma$	${}^A_ZX^* \xrightarrow{\text{Relaxation}} {}^A_ZX' + {}^0_0\gamma$	 <p>Parent (excited nuclear state) → Daughter + Gamma ray</p>

TYPES OF RADIATION AND PENETRATION



Penetrating Powers of Alpha Particles, Beta Particles, Gamma Rays and X-Rays



ALPHA Particles

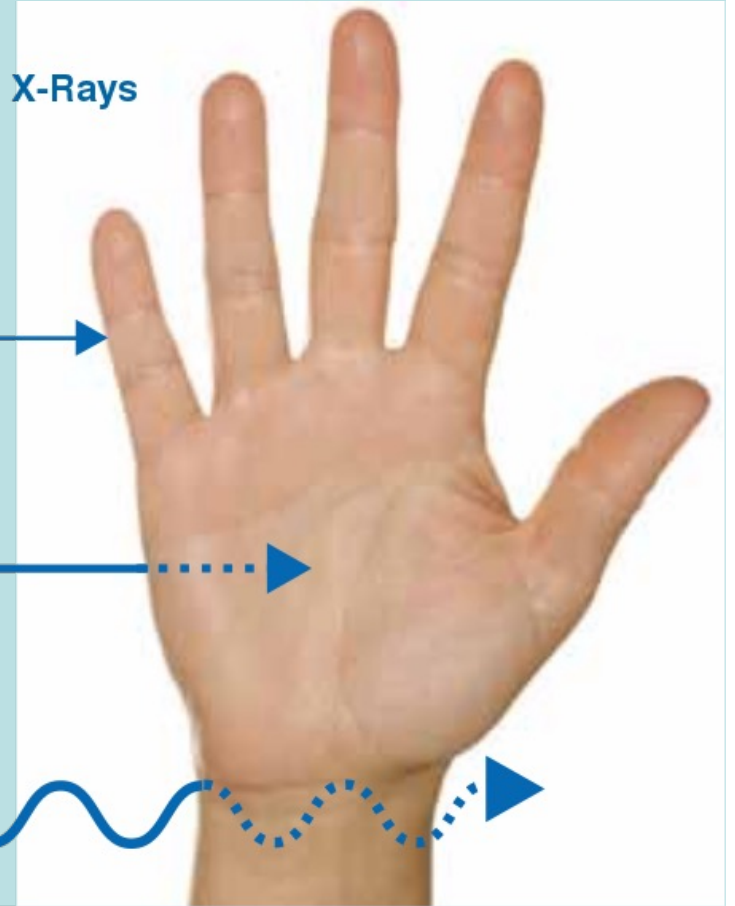
Stopped by a sheet of paper and cannot penetrate the outer dead layer of skin

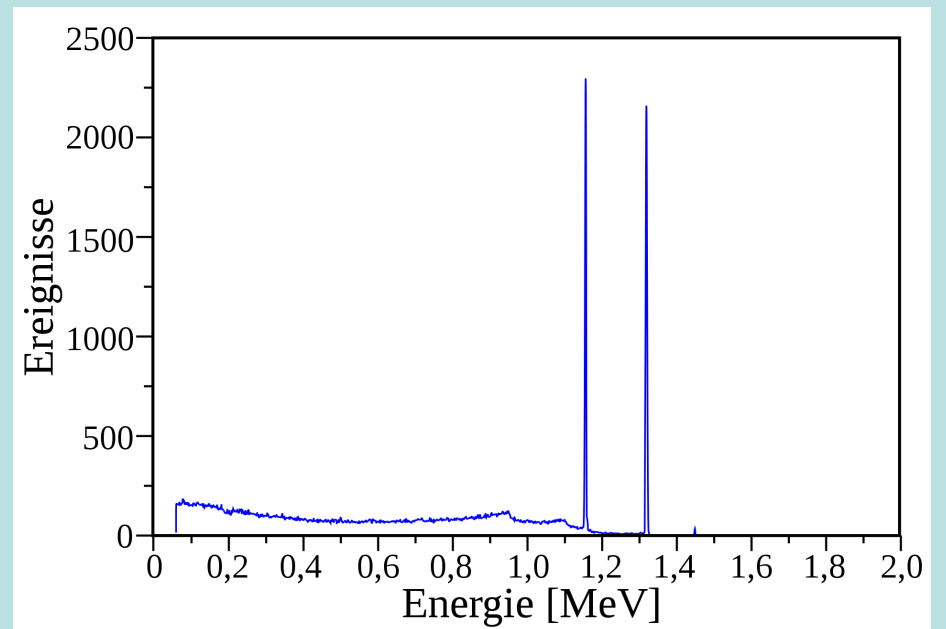
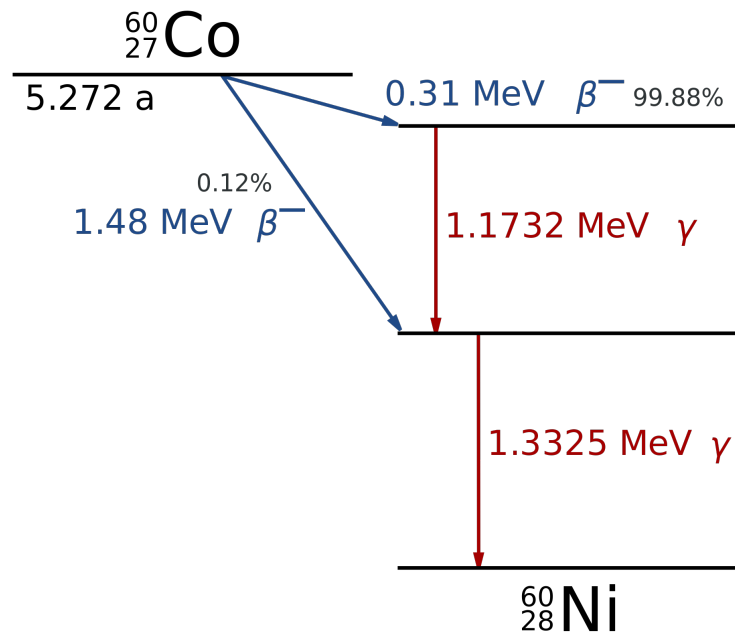
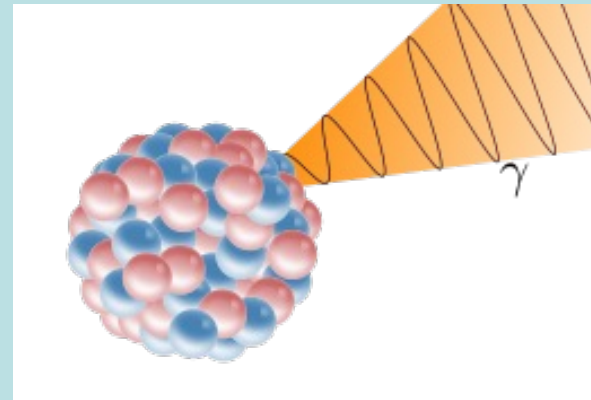
BETA Particles

Stopped by a layer of cloth or by a thin sheet of a substance such as aluminum

GAMMA Rays and X-Rays

Stopped by several feet of concrete or a few inches of lead





γ 衰變只是如氫原子在原子核的能態間躍遷，放出電磁波。

A nucleus may reach an excited state as the result of a violent collision with another particle. It is also very common for a nucleus to be in an excited state after undergoing an alpha or beta decay. The following sequence of events represents a typical situation in which gamma decay occurs:

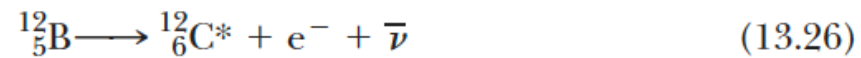
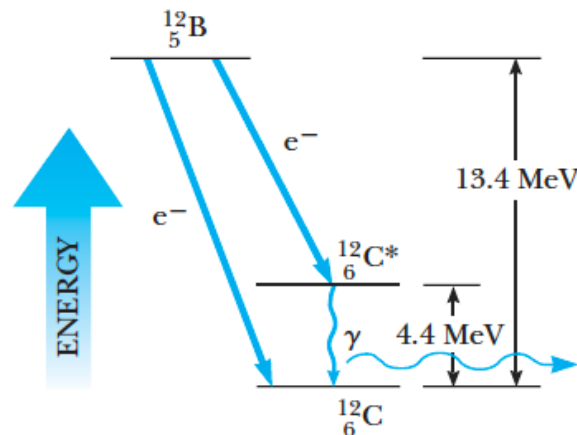


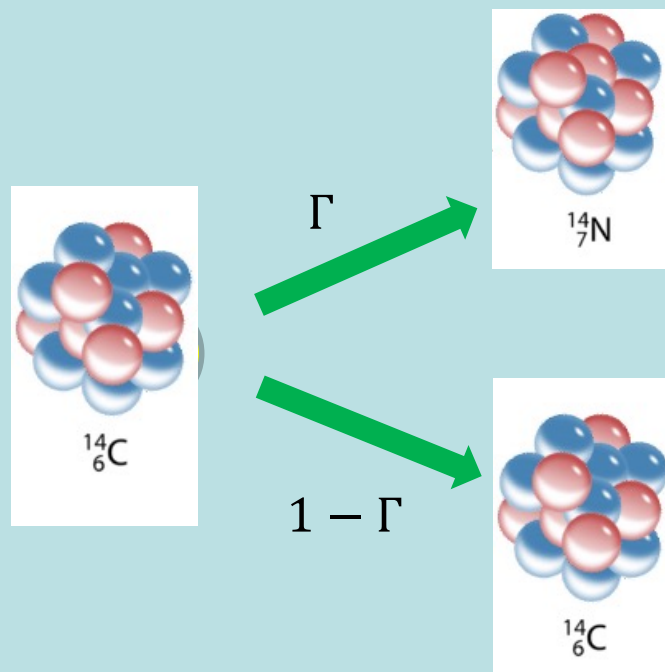
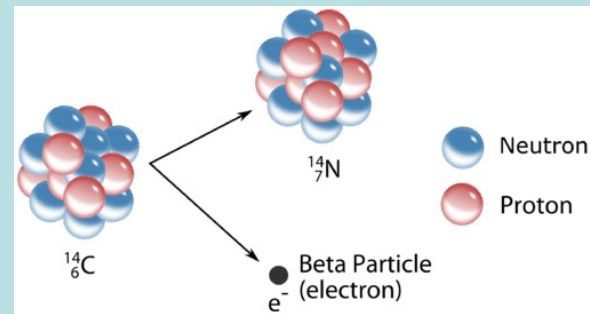
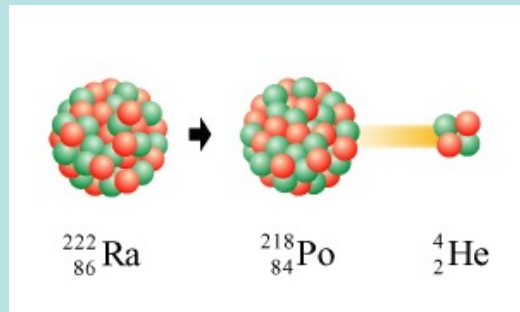
Figure 13.20 shows the decay scheme for ${}^{12}\text{B}$, which undergoes beta decay with a half-life of 20.4 ms to either of two levels of ${}^{12}\text{C}$. It can either (1) decay



原子核的衰變是一個微觀的量子現象。

我們無法預測單一一顆原子核何時及是否衰變，只能預測它衰變的機率。

注意即使完全相同的原子核，它的命運：何時及是否衰變，都不相同。



每單位時間衰變發生的機率通常是固定的。
對每一個相同的原子核都相等。



農場的每一株菜都不同，代表一樣品種的菜還是有先天與後天的差異。

但每一個放射性原子核都是一模一樣的，無從分辨，

根據科學的確定原則，照理講應該有一樣的性質與測量結果。

但事實是：完全相同的原子核，它的命運，何時及是否衰變，都不相同。



節目 知識好好玩

EP04 | 玩骰子的上帝——從放射性原子核談

如此的話，觀察一群一模一樣的氡原子核，等於重複同一個觀察單獨氡的實驗，照理講應該只能有一個結果。但事實就是，一群原子核不會同時衰變，如此就表示，在同樣條件下，單獨一個氡的觀察，結果將不是確定的。這就是物理學家在二十世紀初面對的局面，實驗明白顯示，一樣的因，卻可能得到不一樣的果。

在量子世界中，物理學家能預測的只有機率！

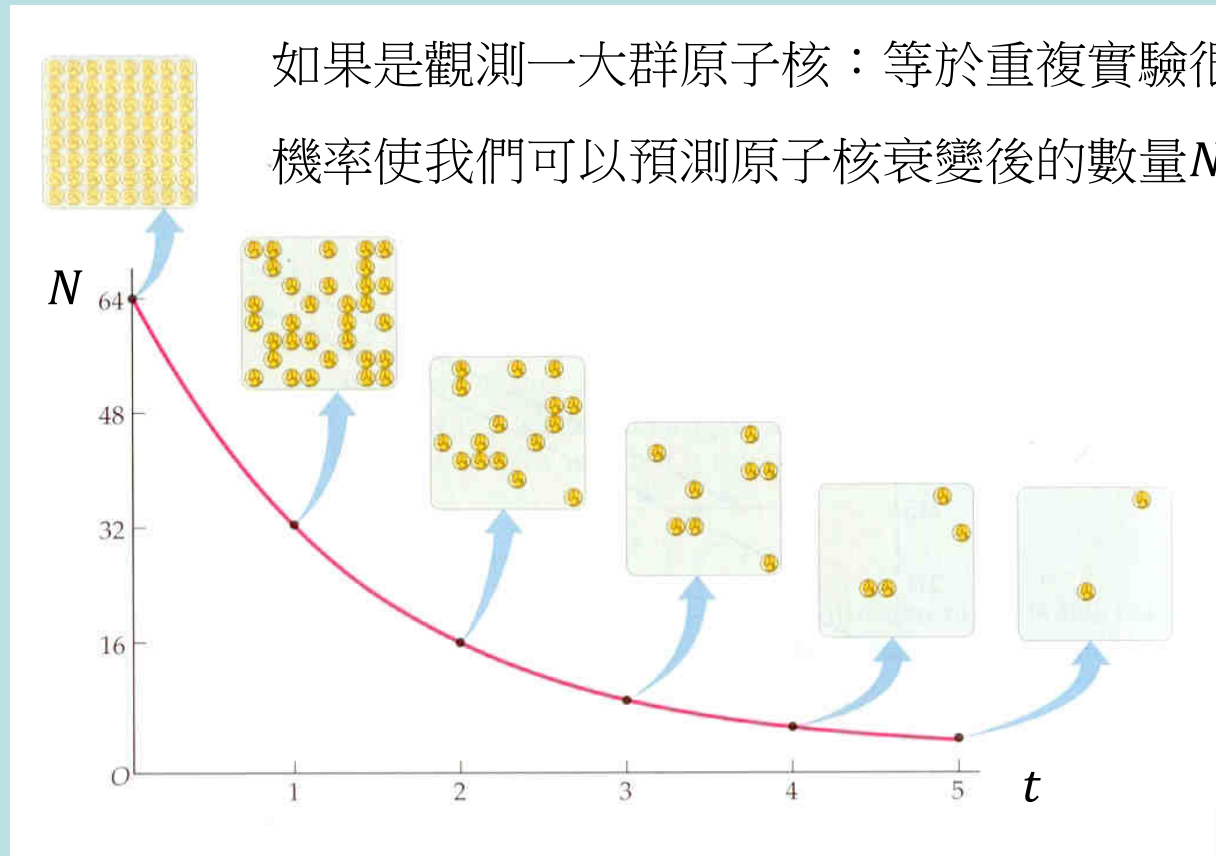
這樣的不確定性使物理喪失了對單一原子核預測未來的能力。但話說回來，我們的確能測量或預測原子核的半衰期，這代表如果是一大群原子核，我們可以很精確預測有多少比例會衰變，有多少比例不會衰變。細心的聽眾一定認出了，這就是我們在賭場賭博時遇到的情況。我們無法預測自己這一局的結果，但是賭場老闆卻可以利用機率預測整個場子的賺賠分布。所以在量子世界中，物理學家能預測的只有機率！愛因斯坦對這個情況，完全無法接受，因此也才說出上帝是不玩骰子這句名言。愛因斯坦認為我們的不確定，只是我們對粒子的研究不夠透徹，一定有隱藏的因子，使粒子其實與上述種子是一樣的。可惜這樣的想法，在1960年，被證實是不正確的。



機率對單一顆原子核的衰變無法預測，

如果是觀測一大群原子核：等於重複實驗很多次。

機率使我們可以預測原子核衰變後的數量 N 。



$$\frac{dN}{dt}(t) = -\Gamma N(t)$$

假設 Γ 是一個原子核每秒衰變的機率。

ΓN 即是一群 N 個原子核，每秒衰變發生的次數。

每衰變一次，數目就減1。 $-\Gamma N$ 等於數目變化率 $\frac{dN}{dt}$ 。

這是一個微分方程式！等式在任何時間 t 都成立，因此是一個函數方程式。

N 的一次微分這個函數，與 $N(t)$ 函數成正比。

$$\frac{dN}{dt} = -\Gamma N$$

函數的微分與自己成正比！

有沒有這樣的函數？不可能是多項式。也不是三角函數。

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

指數函數的微分依舊是指數函數。

指數函數的微分， a 是任一正數：

$$f(x) = a^x$$

$$\frac{d}{dx} a^x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$

中括號內的式子與 x 無關，可以視為一個常數，由 a 決定。

$$\frac{d}{dx} a^x = \left[\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} \right] \cdot a^x = c \cdot a$$

對於不同的 a ， c 也會不一樣，可以看成由 a 的值決定的函數 $c(a)$ 。

我們先從兩個極端來看這函數： $a = 1$ 時 $c = 0$ ，而 $a \rightarrow \infty$ 時， c 應該也 $\rightarrow \infty$ 。

那麼在 $a = 1$ 與 $a = \infty$ 之間，應該有一個 a ，它所對應的 $c = 1$ 。

將此數稱為 e ，那麼 $c(e) = 1$

$$\frac{d}{dx} e^x = c(e) \cdot e^x = e^x$$

於是我就找到一個函數的微分就是它自己！

如果 $\frac{d}{dx} e^x = e^x$

那麼 $\frac{d}{dx} e^{bx} = b e^{bx}$

$$\frac{d}{dx} e^{bx} = \frac{d}{d(bx)} e^{bx} \cdot \frac{d(bx)}{dx} = b e^{bx}$$

於是我就找到一個函數的微分與自己成正比！

若有了常數 e 的值，任意 a 的指數函數微分就可以計算出來。

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{\ln a \cdot x}$$

$$\frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dx} e^{\ln a \cdot x} = \ln a \cdot e^{\ln a \cdot x} = \ln a \cdot a^x$$

Euler's number

常數 e 是一個無理數，在數學上就像 π 一樣重要，其值大概是2.71828左右。

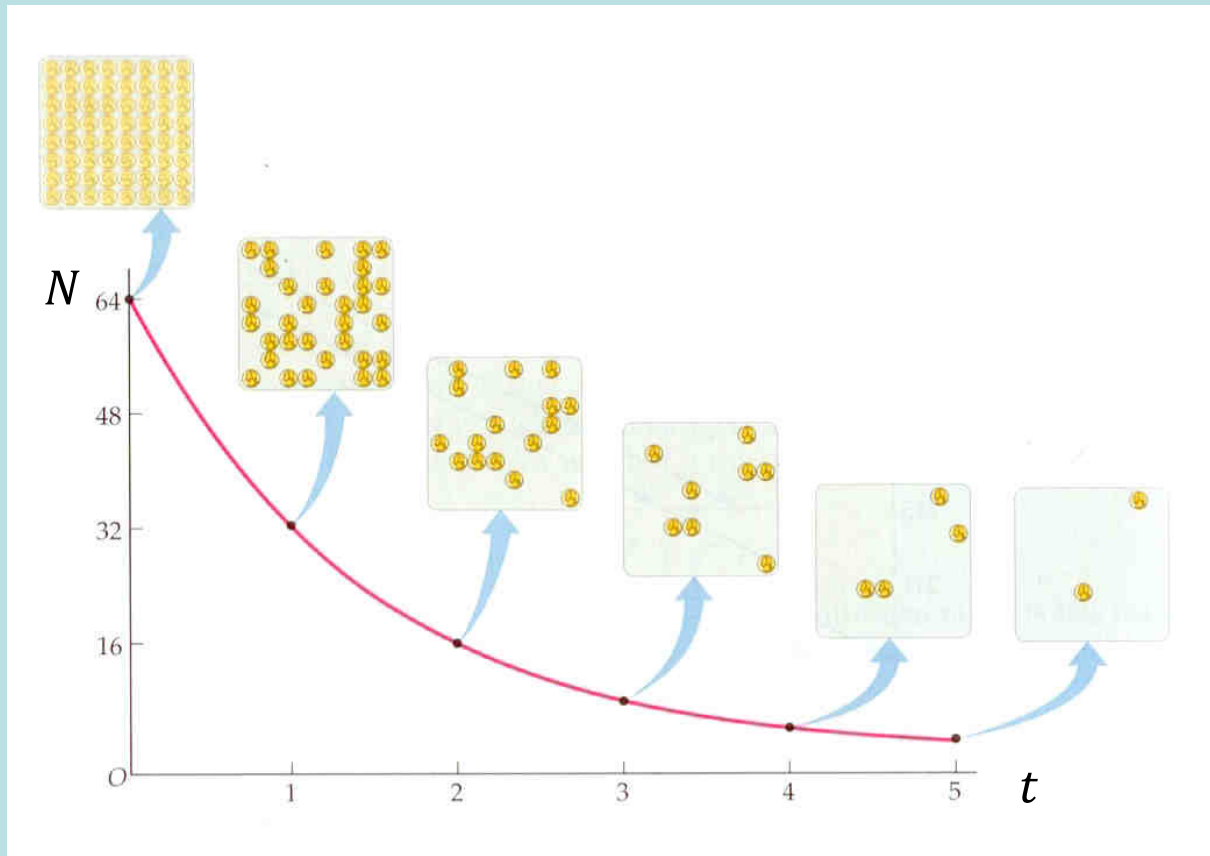
2.71828182845904523536028747135266249775724709369995

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$



Leonhard Euler
(1707-1783)



$$\frac{d}{dx} e^{bx} = b e^{bx}$$

$$\frac{dN}{dt} = -\Gamma N$$

$$N = e^{-\Gamma t}$$

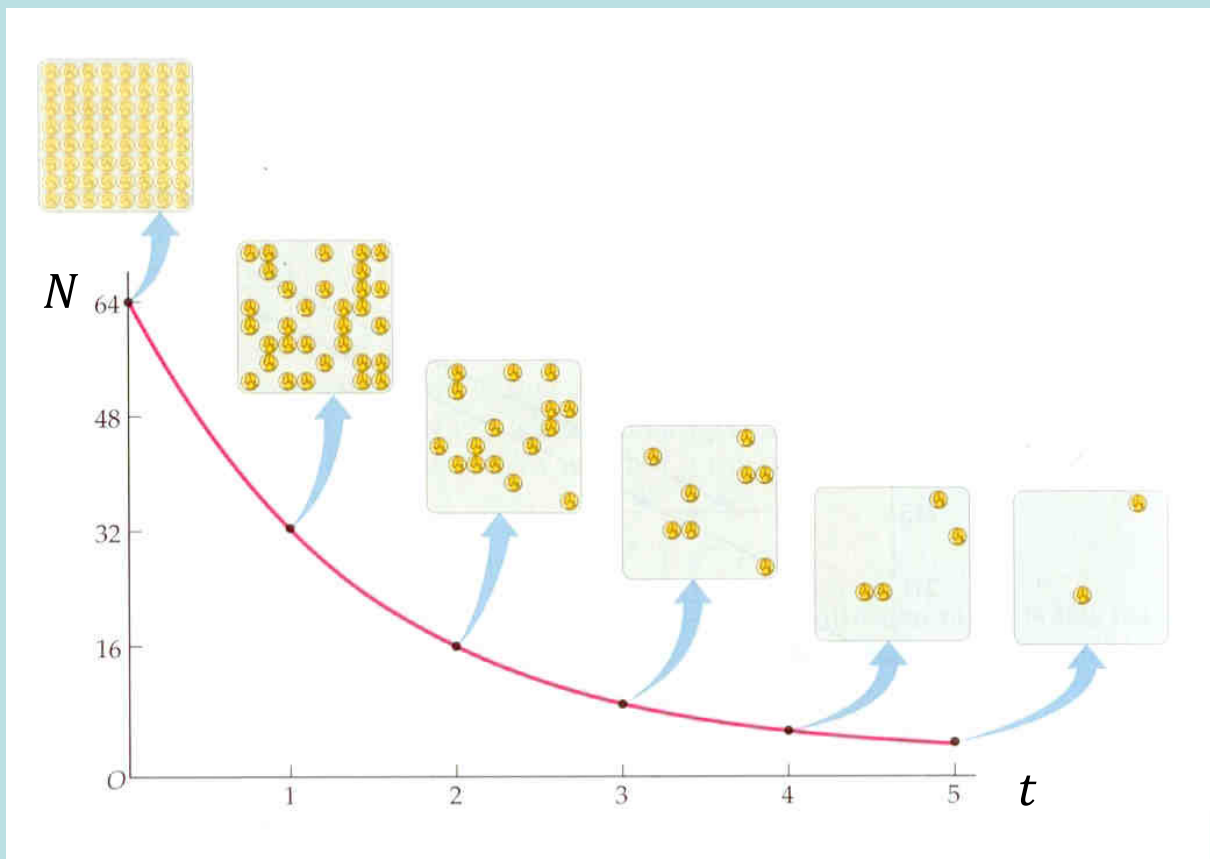
取常數 b 為 $-\Gamma$ ，即得到解！

但我可以在這個解的前面乘上任一個常數 C ，解仍成立

$$N = C e^{-\Gamma t}$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dC e^{-\Gamma t}}{dt} = C \frac{d e^{-\Gamma t}}{dt} = -C \Gamma e^{-\Gamma t} = -\Gamma N$$

注意常數 C 可以是任意數，我們似乎得到了無限多組解。



$$\frac{dN}{dt} = -\Gamma N$$

微分方程式只規定變化率與數量正比，
此規定的漏洞是無法禁止等比例增減，也就是將數量乘常數 C !

$$N = C e^{-\Gamma t}$$

但也因有 C 我們才能引入起始數目 N_0 ，否則起始數量只是 1。

事實上 $N(0) = C = N_0$

$$N = N_0 e^{-\Gamma t}$$

如果沒有引入起始的條件 N_0 ，微分方程式有無限多個解。

引入適當的起始條件，微分方程式就只有唯一解。

以積分來進行解微分方程式的技巧：

$$\frac{dN}{dt} = -\Gamma N$$



$$\frac{dN}{dt} = -\Gamma(t) \cdot f(N)$$

$$\frac{1}{N} dN = -\Gamma dt$$

$$\frac{1}{N} \Delta N = -\Gamma \Delta t$$

$$\sum \frac{1}{N} \Delta N = -\sum \Gamma \Delta t$$

這是把函數 N 看成變數時，其變化 dN 與原來的變數變化 dt 之間的比例。

兩邊都取積分：

$$\int_{N_0}^N \frac{1}{N'} dN' = -\Gamma \int_{t_0}^t dt'$$



$$\int_{N_0}^N \frac{1}{f(N')} dN' = -\int_{t_0}^t \Gamma(t') dt'$$

$$\ln N' \Big|_{N_0}^N = -\Gamma t' \Big|_{t_0}^t$$

$$\ln N - \ln N_0 = \ln \left(\frac{N}{N_0} \right) = -\Gamma(t - t_0)$$

兩邊都取指數：

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\Gamma(t-t_0)}$$

$$\int_{x_i}^x dx' \cdot \frac{1}{x'} = ?$$

證明：

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

$$e^{\ln x} = x$$

對 x 微分並使用連鎖律：

$$\frac{d}{d(\ln x)} e^{\ln x} \cdot \frac{d}{dx}(\ln x) = 1$$

$$e^{\ln x} \cdot \frac{d}{dx}(\ln x) = x \cdot \frac{d}{dx}(\ln x) = 1$$

得證：
$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

$$\int_{x_i}^x dx' \cdot \frac{1}{x'} = \ln x' \Big|_{x_i}^x = \ln x - \ln x_i = \ln \left(\frac{x}{x_i} \right)$$

指數遞減函數，比所有多項式遞減都快：

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}}{x^{-n}} = \frac{x^n}{e^x} \rightarrow 0$$

$$e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \dots$$

$$N = N_0 e^{-\Gamma t} = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\tau \equiv \frac{1}{\Gamma}$$

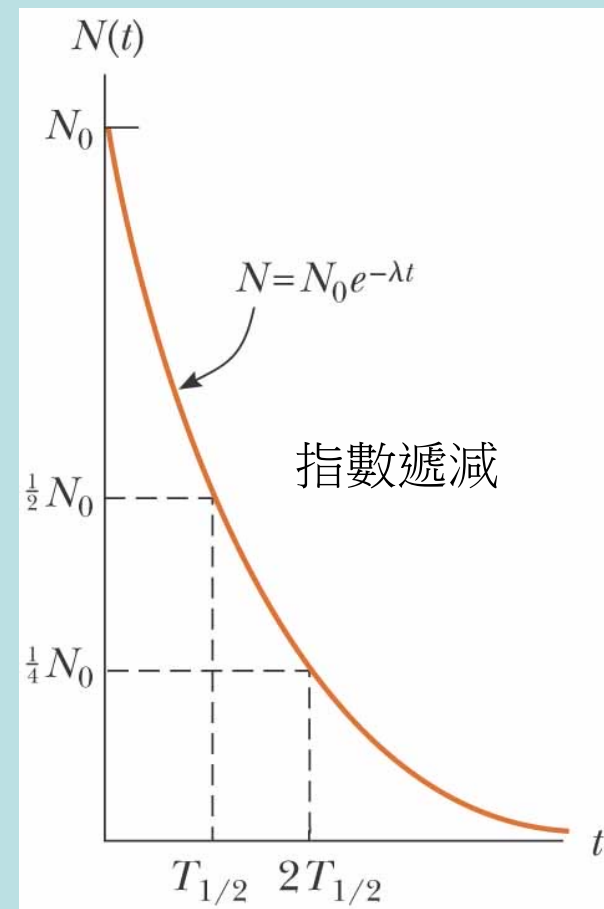
τ 稱平均壽命，數量變為 $1/e$ 的時間。

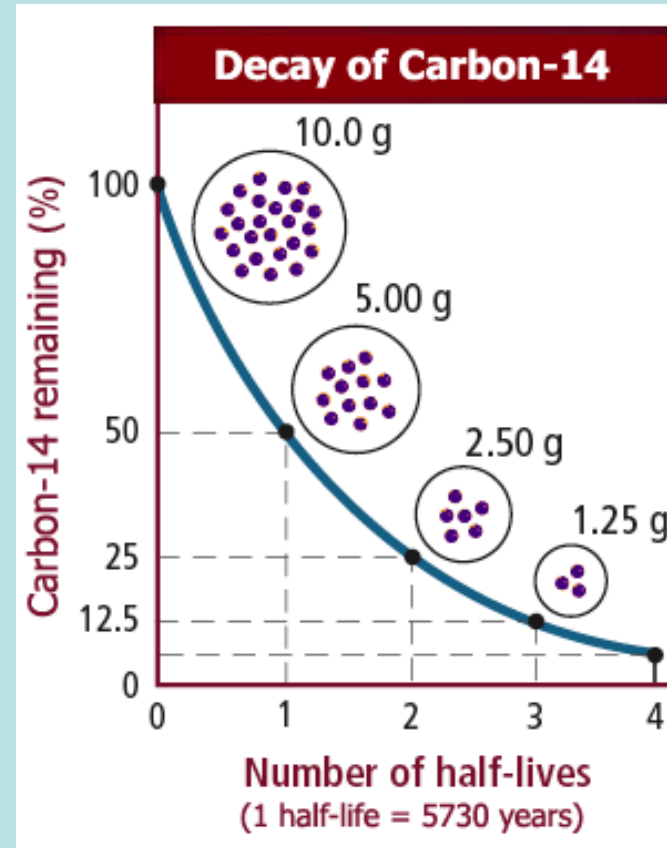
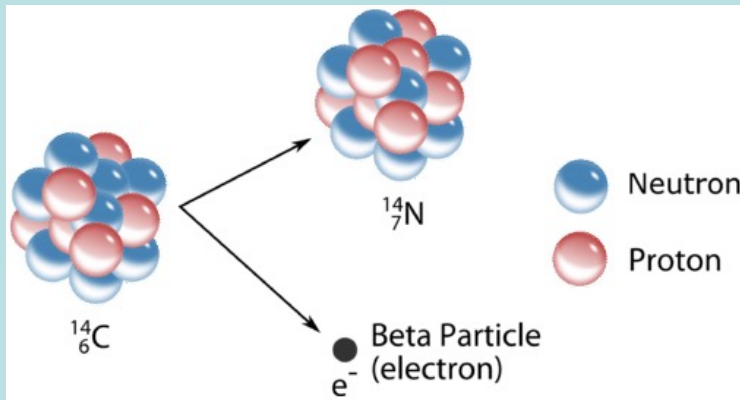
指數遞減函數，減少一半的時間永遠相同。

$$\frac{N(t_2)}{N(t_1)} = \frac{c \cdot e^{-\Gamma t_2}}{c \cdot e^{-\Gamma t_1}} = e^{-\Gamma(t_2 - t_1)} = \frac{1}{2}$$

$$(t_2 - t_1) = \frac{1}{\Gamma} \ln 2 \equiv T_{1/2}$$

半衰期

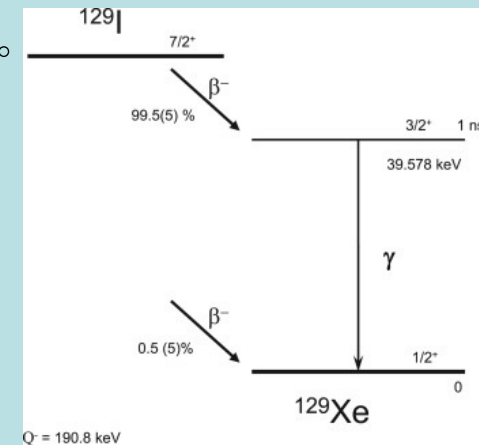




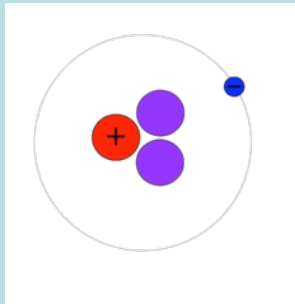
碳14的半衰期是 5700 ± 30 年。

例如核分裂產物中的放射性碘-129半衰期可以到1600萬年，

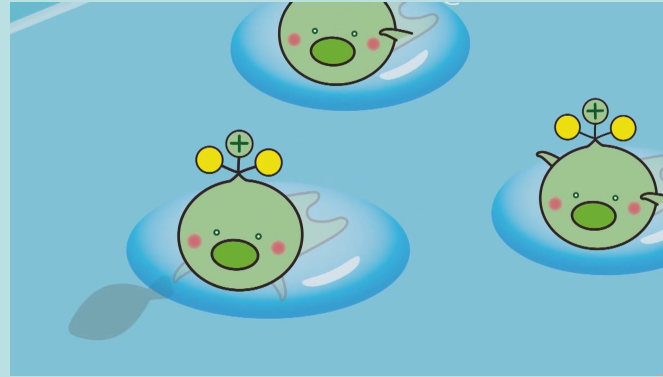
過程中一直有放射性，這就是核廢料難處理的原因。



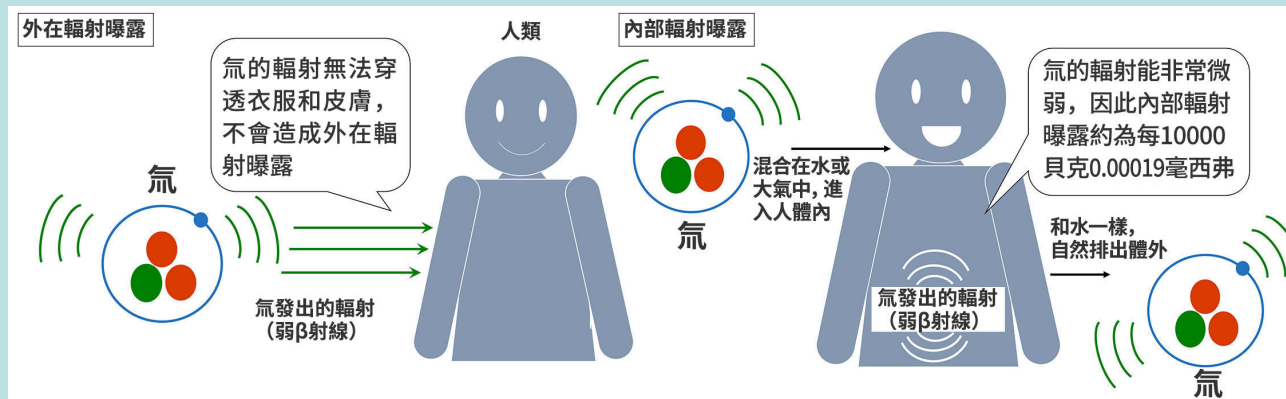
氚的原子核是氫原子核的同位素，一樣有一個質子，但氚多了兩個中子。因此氚原子核由三個粒子組成，這個字就是氫氣的氫，在部首的氣的下方，以一個三撇的川字取代。因為質子數目一樣，氚原子化學性質與氫原子一樣，所以可以取代氫原子，與氧



氚Tritium



量少不代表可以放心，氚與氫不同，氚是有放射性的。意思就是氚的原子核並不穩定，它會自動消失，而同時產生較輕的穩定氦-3 原子核，加上一個電子，與一個不帶電的微中子。這個過程就稱為衰變。這個詞聽起來，好像食物慢慢腐敗變質，或是生很危險，可以穿透人的皮膚，造成輻射傷害。但氚原子核的貝他衰變是罕見的例外，因為氚與氦-3 原子核質量差距不大，衰變所放出的電子的能量只有典型衰變能量的百分之一左右，根本無法穿透人的皮膚，因此氚的放射性基本上對人體是不會造成傷害



裡，中子就可以很長壽，例如穩定的原子核幾乎就是長生不老的。放射性原子核半衰期較短，但也有很大個別差異。例如核分裂產物中的放射性碘-129 半衰期可以到 1600

萬年，過程中一直有放射性，這就是核廢料難處理的原因。還好核分裂產物中最危險的碘-131，半衰期只有 8 天。氚原子核的半衰期則是 12 年，所以原則上福島儲存的放射性水，倒入海中，大約經過數十年，就會衰變殆盡，而不再有放射性了。



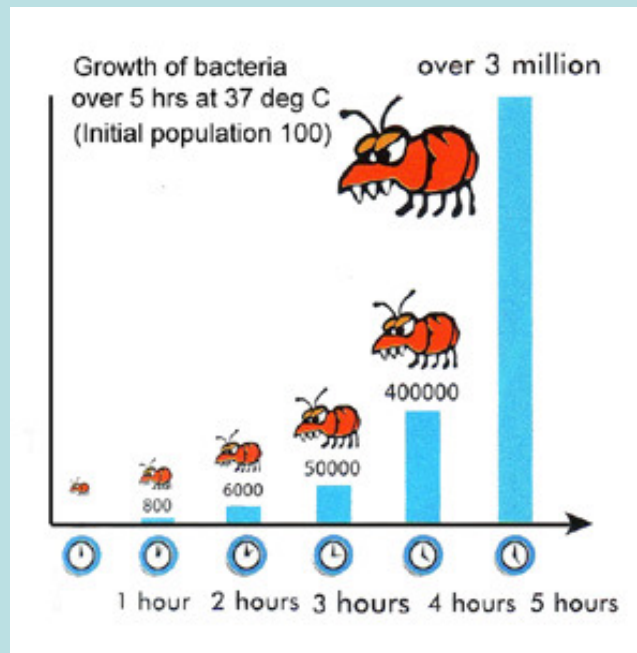
同理，細菌的生長及傳染病傳播也是類似。

現在比例常數為正！

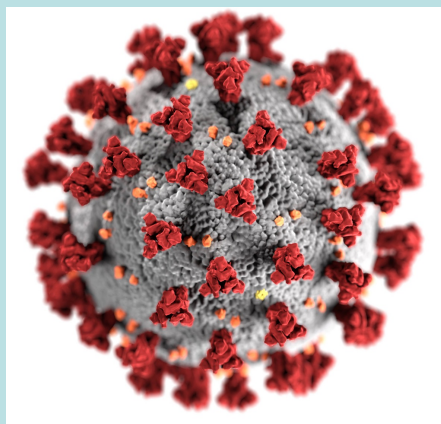
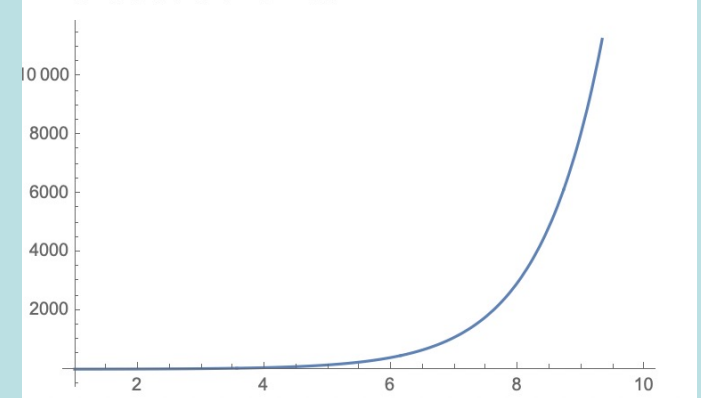
$$\frac{dN}{dt} = +\Gamma N$$

Γ 是單位時間傳播比例infection rate：一個人會傳給多少人。

ΓN 就是單位時間新增染病人數。



Plot[Exp[x], {x, 1, 10}]



$$N = N_0 e^{+\Gamma t}$$

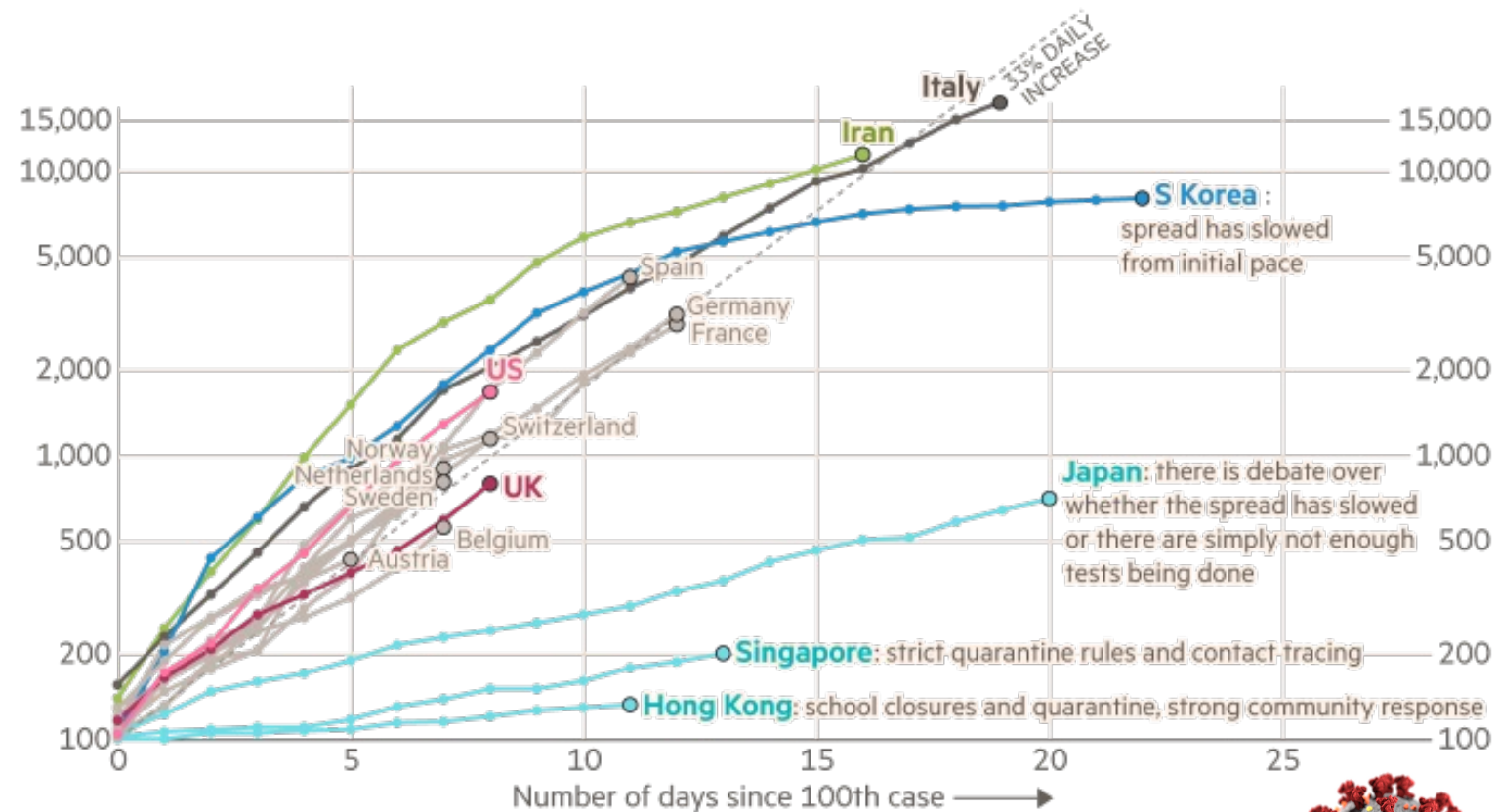
數量隨時間增加以指數遞增。

$$\ln N = \ln N_0 + \Gamma t$$

隨時間以指數遞增的函數的對數，是時間的線性函數。

Country by country: how coronavirus case trajectories compare

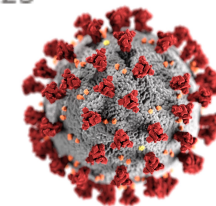
Cumulative number of cases, by number of days since 100th case



FT graphic: John Burn-Murdoch / @jburnmurdoch

Sources: FT analysis of Johns Hopkins University, CSSE; FT research. Data updated March 13, 17:21 GMT

© FT



$$\ln N = \ln N_0 + \Gamma t$$

隨時間以指數遞增的函數的對數，是時間的線性函數。

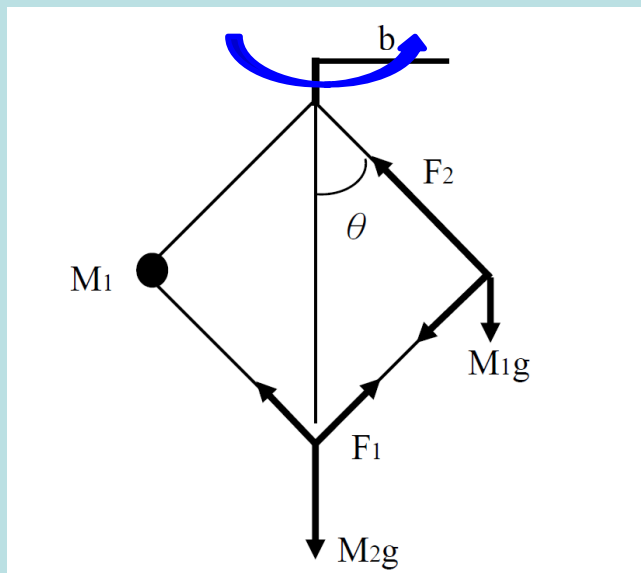
斜率就是單位時間傳播比例 Γ 。



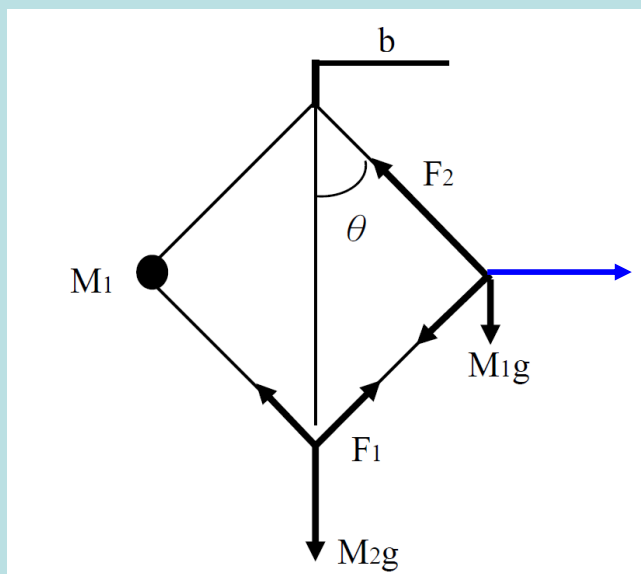
牛頓運動定律適用於靜止或相對以等速運動的觀察者。

對於加速中，或旋轉的觀察者，牛頓運動定律是不對的。

這些觀察者就被稱為非慣性座標系。有時這樣的座標系比較方便。



合力等於質量乘向心加速度！



但如果觀察者跟著一起旋轉：

此質點看起來就是靜止的。靜力平衡問題。

但原來的合力依舊存在，質量應該向內運動！

牛頓運動定律似乎失效了！

但我們可以假想一個虛幻的離心力，

若離心力恰與合力抵消，牛頓運動定律就還是對的！

這個憑空加入的力稱為假力。

由以上可知，假力恰與合力抵消，合力與上圖的向心力相等。

因此，離心力與向心力大小相等，方向相反。 $\vec{F} = mr\omega^2\hat{r}$

注意此假力所有質點都會受到，而大小與質量成正比，並由轉速 ω 決定。

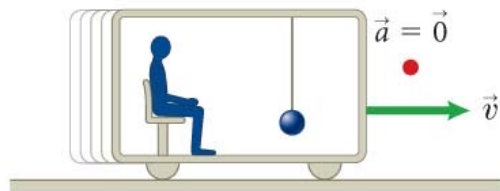
非慣性座標系中，憑空加入一假力，便能使牛頓運動定律成立。

因為我們已習慣了牛頓定律，也可以說：加速觀察者會觀察到一個額外的力！

他感覺到的力沒有來源，因此稱為假力。

Vehicle: Effects caused by acceleration

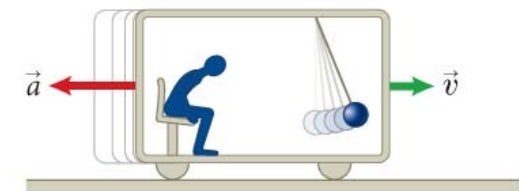
(a) Constant velocity



(c) Forward acceleration (speeding up)



(e) Rearward acceleration (slowing down)



以加速觀察者為例，因為慣性，物體並不會如加速觀察者一起加速。

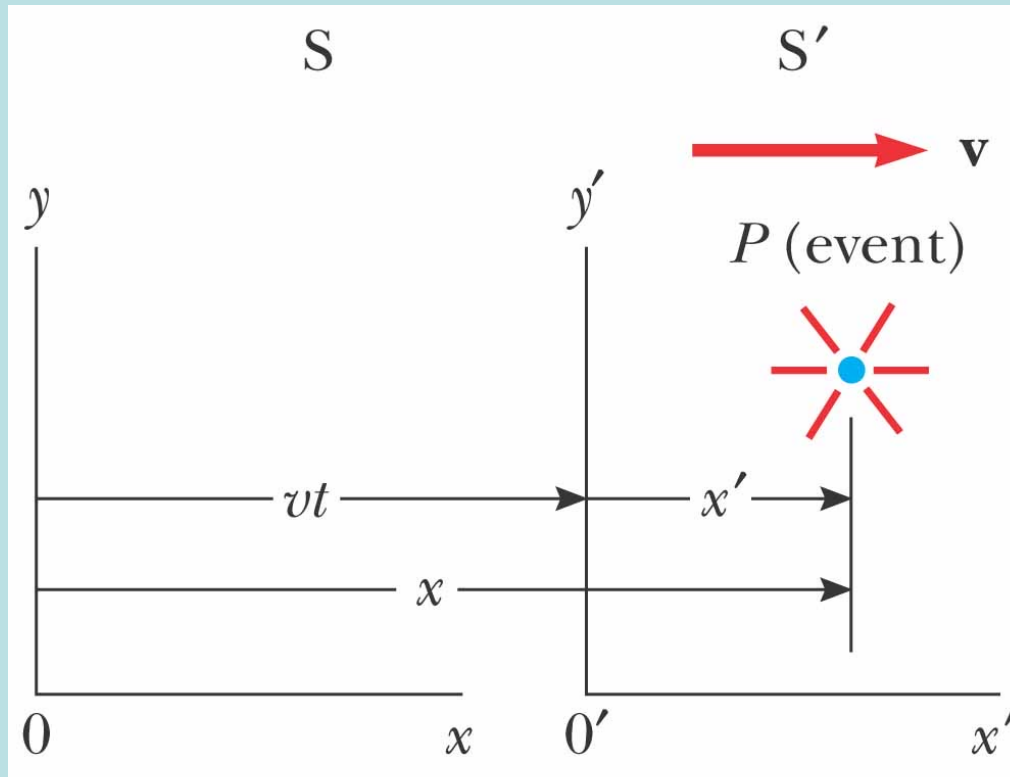
對以 \vec{a} 加速的觀察者，所有物體會出現一反向，似乎由假力造成的加速度 $-\vec{a}$ 。

所有物體，無論輕重，假力加速度 $-\vec{a}$ 是一樣的！

因此物體所受假力與其質量成正比： $-m\vec{a}$ ，這與重力完全一致。

這兩個以定速相對運動的觀察者，稱為兩個慣性座標系！

根據日常生活經驗，兩個慣性座標系所測量到的時間與空間滿足以下關係：

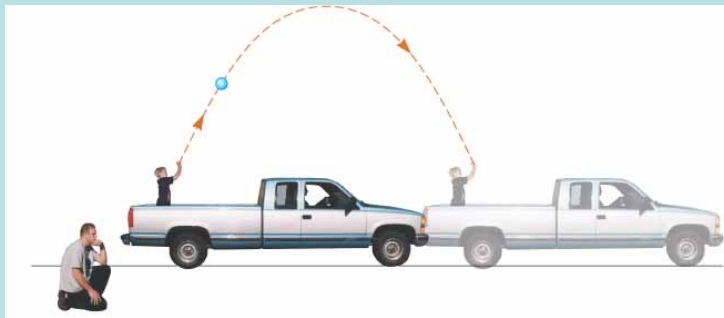


$$x' = x - vt$$

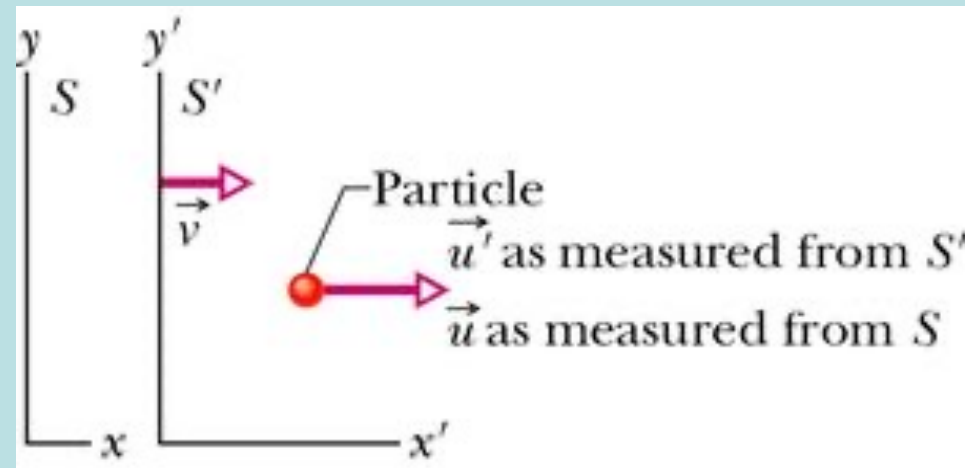
$$y' = y$$

$$t' = t$$

伽利略變換



從伽利略變換可以推導出慣性座標系之間的速度的變換



$$x' = x - vt$$

$$u'_x = \frac{dx'}{dt} = \frac{d(x - vt)}{dt} = \frac{dx}{dt} - v = u_x - v$$

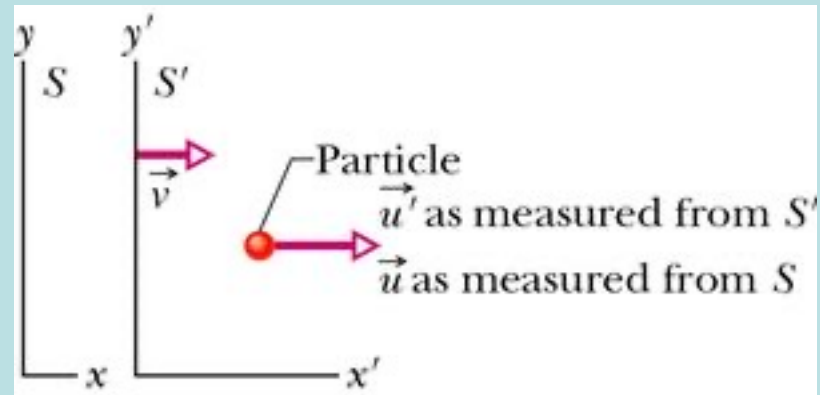
$$u'_x = u_x - v$$

$$u'_y = u_y$$



$$u'_x = u_x - v$$

慣性座標系之間的加速度的變換



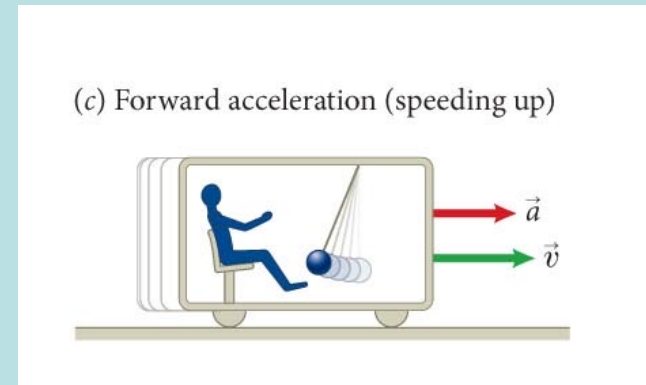
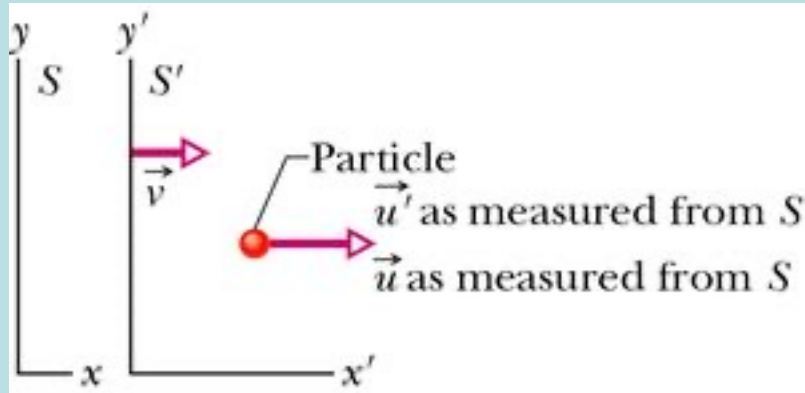
$$u'_x = u_x - v$$

$$a'_x = \frac{du'_x}{dt} = \frac{d(u_x - v)}{dt} = a_x$$

$$a'_x = a_x$$

若移動觀察者有等加速度 a_0 ，則為加速座標系，變換必須修改：

注意兩原點間的距離為： $vt + \frac{1}{2}a_0t^2$ 。



$$x' = x - vt - \frac{1}{2}a_0t^2$$

$$u'_x = u_x - v - a_0t$$

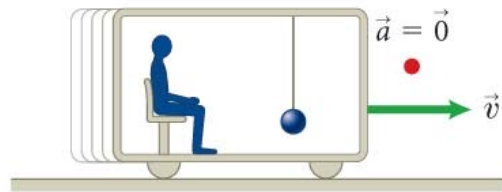
$$a'_x = \frac{du'_x}{dt} = \frac{d(u_x - v - a_0t)}{dt} = a_x - a_0$$

$$a'_x = a_x - a_0$$

加速觀察者會觀察到一個假力！
他感覺的力沒有來源，因此稱為假力。

Vehicle: Effects caused by acceleration

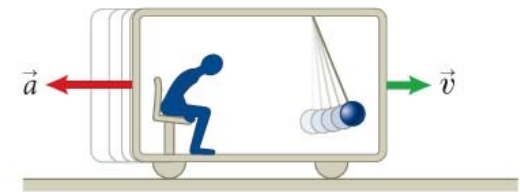
(a) Constant velocity



(c) Forward acceleration (speeding up)



(e) Rearward acceleration (slowing down)



因為慣性，物體並不會如加速觀察者一起加速。

對以 \vec{a} 加速的觀察者，所有物體會出現一反向，似乎由假力造成的加速度 $-\vec{a}$ 。

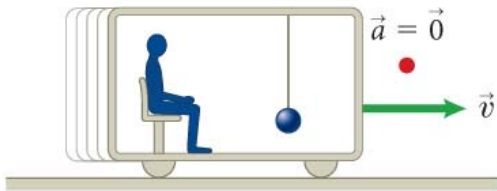
所有物體，無論輕重，假力加速度 $-\vec{a}$ 是一樣的！

因此物體所受假力與其質量成正比： $-m\vec{a}$ ，這與重力完全一致。

加速觀察者會觀察到一個假力！
他感覺的力沒有來源，因此稱為假力。

Vehicle: Effects caused by acceleration

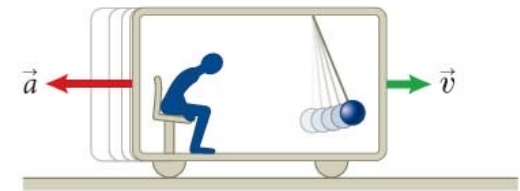
(a) Constant velocity



(c) Forward acceleration (speeding up)

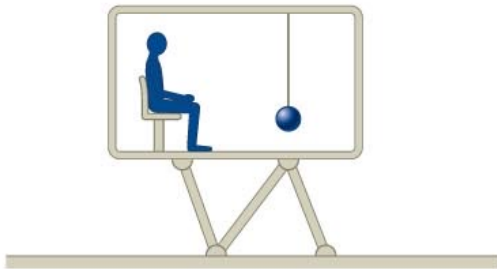


(e) Rearward acceleration (slowing down)



Simulator: Identical effects caused by tilting

(b) No tilt



(d) Backward tilt



(f) Forward tilt



假力與質量成正比，假力的加速度如重力加速度一樣是常數。

質量為 m_1 和 m_2 的物體綁在繩的兩端，繩跨在雙斜面的頂部（圖 5-1）。斜面質量為 m ，與水平面的夾角為 α_1 和 α_2 。整個系統起初靜止，求放開後斜面的加速度和物體的加速度。斜面保持靜止的條件是什麼？摩擦可忽略。

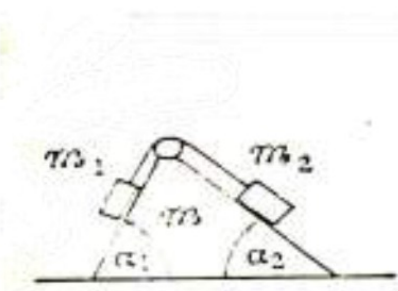


圖 5-1

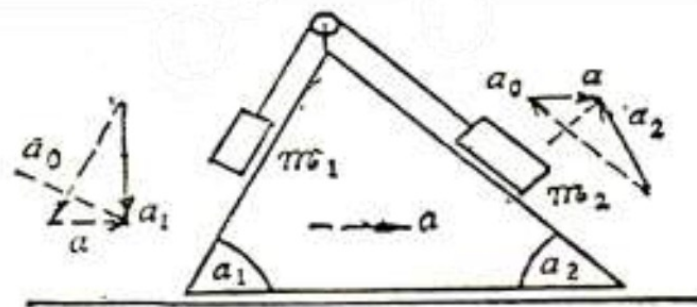


圖 5-2

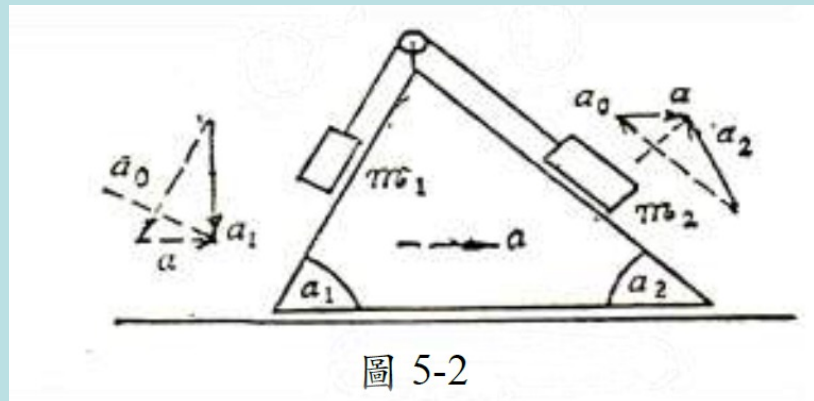


圖 5-2

我們用 a 表示雙斜面在慣性參照系中的加速度（正號表示向右的方向），用 a_0 表示物體相對斜面的加速度（正號表示左邊物體 m_1 下降），兩個物體在慣性系中的加速度 a_1 和 a_2 可由矢量 a 和 a_0 相加得知，用 F 表示繩中的張力（圖 5-2）。

對沿斜面方向的力量應用牛頓第二定律，使物體 m_1 加速下降的力是

$$m_1 g \sin \alpha_1 - F$$

在慣性系中， m_1 沿斜面方向的加速度分量為：

$$a_0 - a \cos \alpha_1$$

所以，對此斜面的力量，牛頓第二定律為：

$$m_1 (a_0 - a \cos \alpha_1) = m_1 g \sin \alpha_1 - F$$

同樣，對於 m_2 有

$$m_2 (a_0 - a \cos \alpha_2) = F - m_2 g \sin \alpha_2$$

兩式相加：

$$\begin{aligned} & (m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2) a \\ & = (m_1 + m_2) a_0 - (m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2) g \end{aligned}$$

斜面在慣性系中的速度為 v （向右），物體相對於斜面的速度為 v_0

的兩物體在慣性系中的速度的水平分量（向左）分別為

$$v_0 \cos \alpha_1 - v \quad \text{和} \quad v_0 \cos \alpha_2 - v$$

利用動量守恆原理：

$$m_1(v_0 \cos \alpha_1 - v) + m_2(v_0 \cos \alpha_2 - v) = mv$$

對勻加速移動，速度與加速度成正比，因此有：

$$m_1(a_0 \cos \alpha_1 - a) + m_2(a_0 \cos \alpha_2 - a) = ma$$

所以

$$a = \frac{m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2}{m + m_1 + m_2} a_0$$

上式給出了有關加速度的信息，很明顯，只有當兩個物體都靜止，即兩個物體平衡時，斜面才靜止，這是動量守恆原理的自然結果。

由方程（1）和（2），可得到加速度為：

$$a_0 = \frac{(m + m_1 + m_2)(m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2)}{(m_1 + m_2)(m + m_1 + m_2) - (m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)} g$$

$$a = \frac{(m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)(m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2)}{(m_1 + m_2)(m + m_1 + m_2) - (m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)} g$$

如果

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}$$

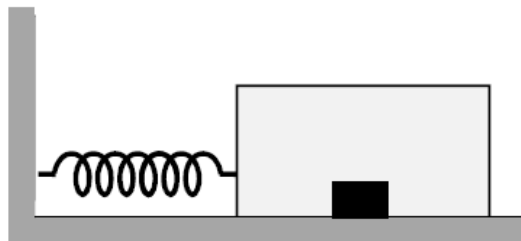
則兩個加速度均為零。

2. 考慮在水平光滑桌面上一封閉並裝滿水的水箱，水箱運動時水與其一起移動而可忽略流動的現象，水箱與水的總質量為 M 。此箱連著一個繫於固定牆上的彈簧，彈力常數為 k 。箱內水中有一方塊，質量為 m 。假設方塊在水中運動時，阻力與相對於水的速率成正比，阻力係數為 b 。時間為零時，彈簧處於平衡長度，方塊位於水箱的正中間，以此點設為 x 軸的原點，兩者皆靜止。此時突然碰撞水箱，使水箱與水往 $+x$ 方向以速率 v_0 開始移動。方塊與箱底的摩擦，及水箱與桌面的摩擦都可以忽略。運動過程方塊不會撞擊水箱。
- A. 計算整個系統的質心位置 x_{CM} 與時間的關係。

B. 方塊相對於桌面的位置可以寫成： $B \cos(\omega t + \delta) + c \cdot e^{-\frac{b m + M}{m M} t} + d$ 。

式中常數 $\omega = \sqrt{\frac{k}{M+m}}$ ， c, d, B 與 δ 都是常數，求常數 B 及 δ 。

- C. 當時間漸長之後，第二項： $c \cdot e^{-\frac{b m + M}{m M} t}$ 的貢獻會越來越小，方塊的運動會近似於一簡諧運動，求此簡諧運動的平衡點 d 。
- D. 當時間很久之後，水箱與水的質心位置可以寫成 $A \cdot \sin(\omega t + \delta - \delta')$ ，求常數 A 及 δ' 。



解答：

A. 因為系統質心只受到彈簧的彈力，因此作角頻率為 $\omega = \sqrt{\frac{k}{M+m}}$ 的簡諧運動，

而初速為 $\frac{Mv_0}{(M+m)}$ 。設 $\frac{Mv_0}{(M+m)\omega} \equiv x_0$ ，則質心的位置可以寫成 $x_{\text{CM}} = x_0 \sin \omega t$ 。

B. 取質心坐標系來考慮方塊的運動，如此會有虛力。對方塊此虛力等於：

$-m \frac{d^2 x_{\text{CM}}}{dt^2} = m\omega^2 x_0 \sin \omega t$ 。設方塊的位置為 x_1 ，水箱與水的質心位置為：

x_2 。 x_1 滿足如下的方程式：

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -b \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right)$$

而 $x_{\text{CM}} = \frac{mx_1 + Mx_2}{m+M}$ ，因此： $x_2 = \frac{(m+M)}{M} x_{\text{CM}} - \frac{m}{M} x_1$

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} + b \frac{m+M}{M} \frac{dx_1}{dt} = \frac{b(m+M)}{M} \frac{dx_{\text{CM}}}{dt} = \frac{\omega b(m+M)}{M} x_0 \cos \omega t$$

題目中所給的解： $x_1 = B \cos(\omega t + \delta) + c \cdot e^{-\frac{b(m+M)}{mM}t} + d$ ，第二項及第三項代入左式皆為零。將 $B \cos(\omega t + \delta)$ ，代入則得：

$$-B\omega^2 \left[\cos(\omega t + \delta) + \frac{b}{m\omega} \frac{m+M}{M} \sin(\omega t + \delta) \right] = \frac{\omega b(m+M)}{mM} x_0 \cos \omega t$$

為使此式能成立，角 δ 必須選為

$$\tan \delta = \frac{b}{m\omega} \frac{m+M}{M}$$

則可以得到：

$$\begin{aligned} & -B \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{b}{m\omega} \frac{m+M}{M}\right)^2} [\cos \delta \cos(\omega t + \delta) + \sin \delta \sin(\omega t + \delta)] \\ & = -B \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{b}{m\omega} \frac{m+M}{M}\right)^2} \cos \omega t = \frac{b}{m\omega} \frac{m+M}{M} x_0 \cos \omega t \end{aligned}$$

因此振幅等於

$$B = -\frac{x_0 \cdot \frac{b}{m\omega} \frac{m+M}{M}}{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{m\omega} \frac{m+M}{M}\right)^2}} = -x_0 \sin \delta$$

C. 方塊對桌面的位置為 $-x_0 \sin \delta \cos(\omega t + \delta) + c \cdot e^{-\frac{b+m}{mM}t} + d$ ，時間為零時，起始位置及起始速度皆為零：

$$\begin{aligned} \omega x_0 \sin^2 \delta - c \cdot \frac{b}{m} \frac{m+M}{M} &= 0 \\ -x_0 \sin \delta \cos \delta + c + d &= 0 \end{aligned}$$

可以得到 $d = 0$ 。

D. 水箱與水的質心位置：

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{(m+M)}{M} x_{\text{CM}} - \frac{m}{M} x_1 = \frac{(m+M)}{M} x_0 \sin \omega t + \frac{m}{M} x_0 \sin \delta \cos(\omega t + \delta) \\ &= \frac{(m+M)}{M} x_0 \sin(\omega t + \delta - \delta) + \frac{m}{M} x_0 \sin \delta \cos(\omega t + \delta) = \\ &= \frac{(m+M)}{M} x_0 \sin(\omega t + \delta) \cos \delta - \frac{(m+M)}{M} x_0 \sin \delta \cos(\omega t + \delta) \\ &\quad + \frac{m}{M} x_0 \sin \delta \cos(\omega t + \delta) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(m+M)}{M} x_0 \cos \delta \sin(\omega t + \delta) - x_0 \sin \delta \cos(\omega t + \delta) = \\
&= \sqrt{\left(\frac{(m+M)}{M} \cos \delta\right)^2 + (\sin \delta)^2} \cdot x_0 \cdot \sin(\omega t + \delta - \delta') \\
&= \sqrt{1 + \frac{m^2 + 2mM}{M^2} \cos^2 \delta} \cdot x_0 \cdot \sin(\omega t + \delta - \delta')
\end{aligned}$$

角度：

$$\tan \delta' = \frac{M}{m+M} \tan \delta$$

振幅為：

$$\sqrt{1 + \frac{m^2 + 2mM}{M^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{b}{m\omega} \frac{m+M}{M}\right)^2}}$$

旋轉座標系

$\hat{e}_i, i = 1, 2, 3$ 是旋轉的座標軸，相對於慣性系是在旋轉之中。

因此座標軸與時間有關。

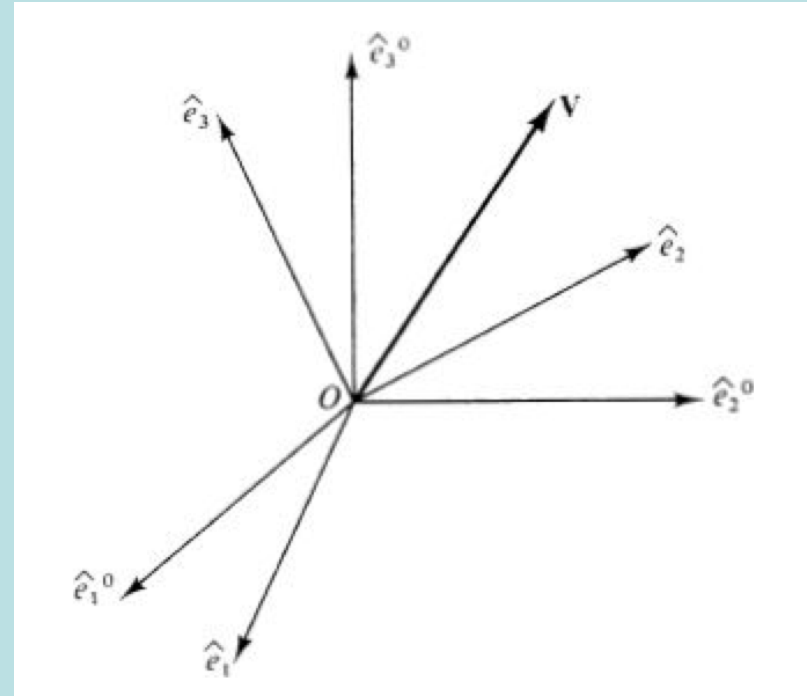
已知位置向量 \vec{r} 可以以分量表示：

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^3 r_i \hat{e}_i$$

計算向量的時變率：

$$\frac{d}{dt} \vec{r} = \sum_{i=1}^3 \frac{dr_i}{dt} \hat{e}_i + \sum_{i=1}^3 r_i \frac{d\hat{e}_i}{dt}$$

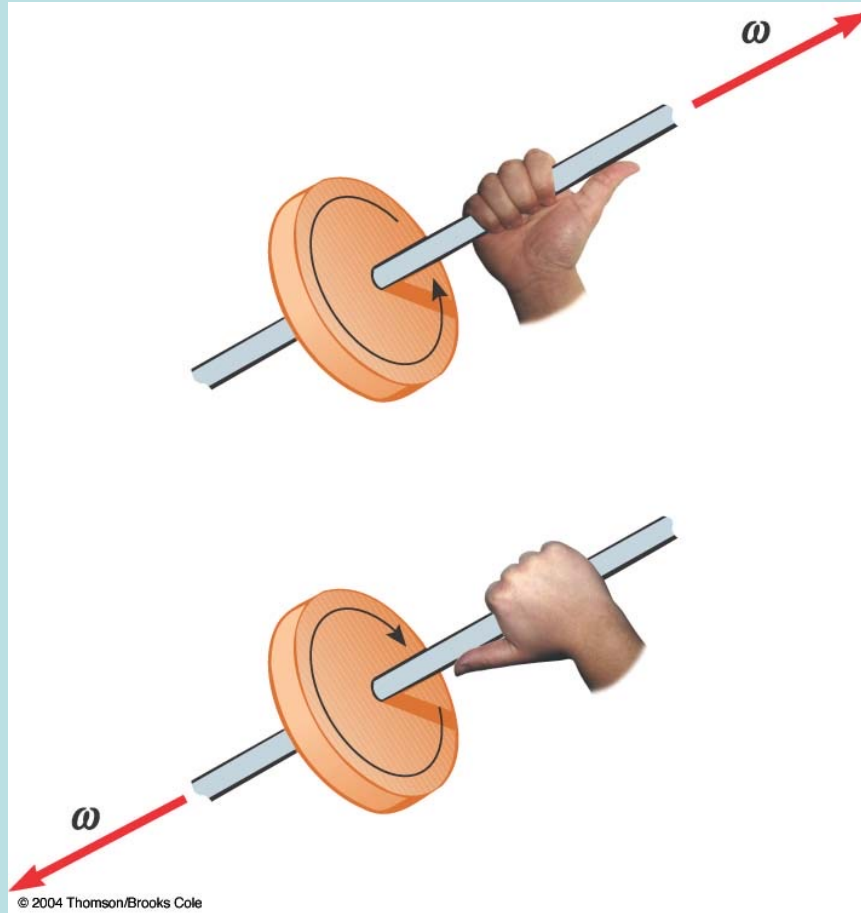
第一項是旋轉座標中的分量 r_i 的時間微分，第二項是座標軸本身的時間微分。



如何描述轉動的快慢。

$$\omega = \frac{d\phi}{dt}$$

角速度向量 $\vec{\omega}$ ： $\omega \rightarrow \vec{\omega}$



剛體每一瞬間都有一旋轉軸。

$\vec{\omega}$ 大小就是旋轉角速度

方向就設為**瞬間旋轉軸**的方向！

右手手指繞旋轉時，大拇指的方向！

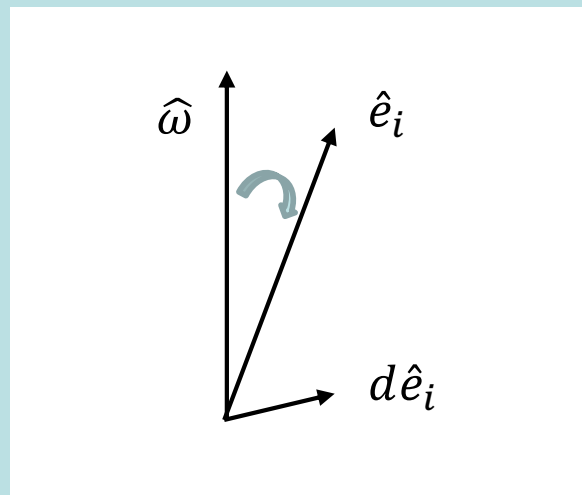
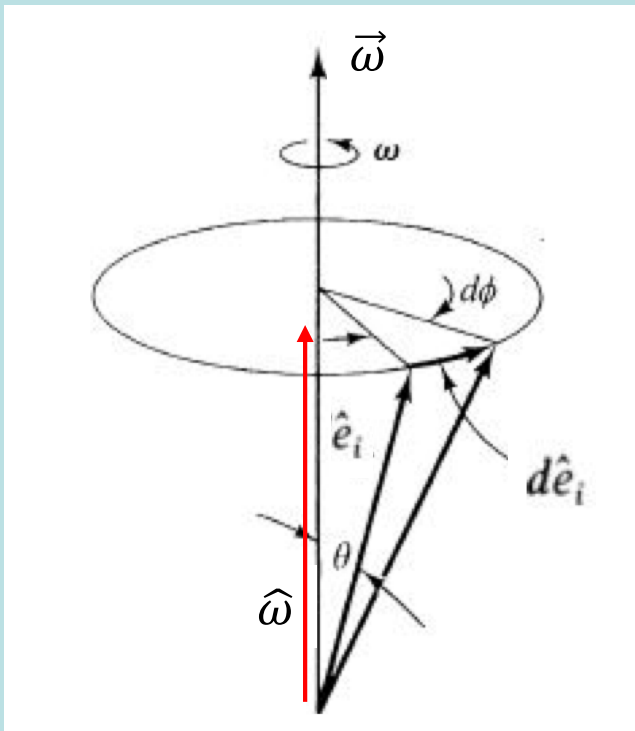
坐標軸 \hat{e}_i 在旋轉下的變化，可以以角速度向量 $\vec{\omega}$ 表示。

\hat{e}_i 與 $\vec{\omega}$ 之間的夾角設為 θ 。

$$d\phi = \omega \cdot dt$$

$$\Delta\phi = \omega \cdot \Delta t$$

$$d\hat{e}_i = d\phi \cdot \sin\theta \cdot \widehat{d\hat{e}_i} = (\widehat{\omega} \times \hat{e}_i) \cdot d\phi = (\widehat{\omega} \times \hat{e}_i) \cdot \omega dt = \vec{\omega} \times \hat{e}_i \cdot dt$$



$$\frac{d\hat{e}_i}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{e}_i$$

$$\sum_{i=1}^3 r_i \frac{d\hat{e}_i}{dt} = \sum_{i=1}^3 r_i (\vec{\omega} \times \hat{e}_i) = \vec{\omega} \times \sum_{i=1}^3 (r_i \hat{e}_i) = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\frac{d}{dt} \vec{r} = \sum_{i=1}^3 \frac{dr_i}{dt} \hat{e}_i + \sum_{i=1}^3 r_i \frac{d\hat{e}_i}{dt}$$



$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{dr_i}{dt} \hat{e}_i + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{dr_i}{dt} \hat{e}_i + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

再對時間微分一次（假設 $\vec{\omega}$ 與時間無關）：

$$\frac{d\hat{e}_i}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{e}_i$$

慣性座標系中加速度 \vec{a} :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \vec{r} &= \sum_{i=1}^3 \frac{d^2 r_i}{dt^2} \hat{e}_i + \sum_{i=1}^3 \frac{dr_i}{dt} \frac{d\hat{e}_i}{dt} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{d^2 r_i}{dt^2} \hat{e}_i + \sum_{i=1}^3 \frac{dr_i}{dt} (\vec{\omega} \times \hat{e}_i) + \vec{\omega} \times \left(\sum_{i=1}^3 \frac{dr_i}{dt} \hat{e}_i + \vec{\omega} \times \vec{r} \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{d^2 r_i}{dt^2} \hat{e}_i + 2\vec{\omega} \times \left(\sum_{i=1}^3 \frac{dr_i}{dt} \hat{e}_i \right) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \end{aligned}$$

旋轉座標系中的加速度 \vec{a}'

旋轉座標系中的速度 \vec{v}'

慣性座標系中的 \vec{a} :

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$



慣性座標系中加速度 \vec{a} 旋轉座標系中的加速度 \vec{a}'

兩邊一起乘上質量： $m\vec{a} = \vec{F}$

$$\vec{F} = m\vec{a}' + 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' + m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

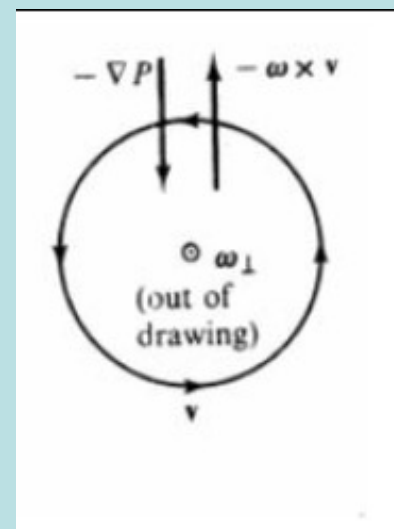
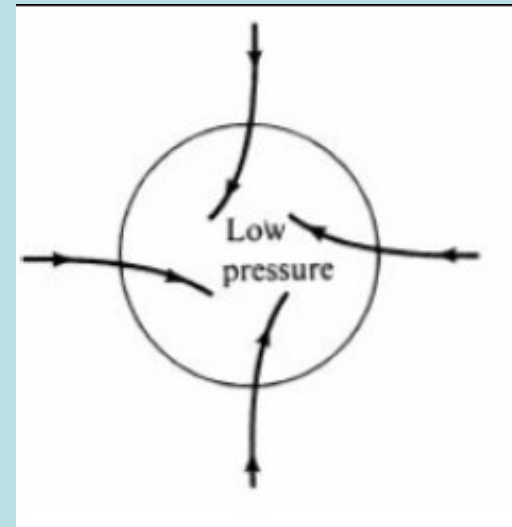
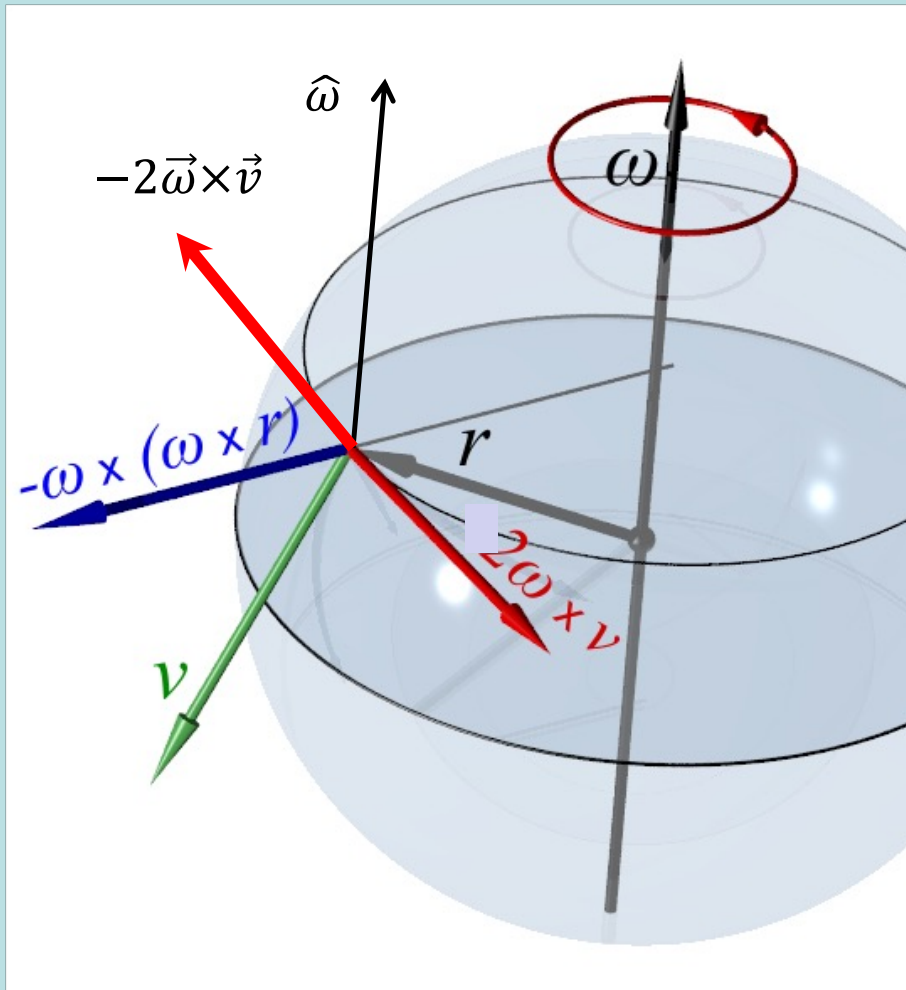
$$m\vec{a}' = \vec{F} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

Coriolis Force

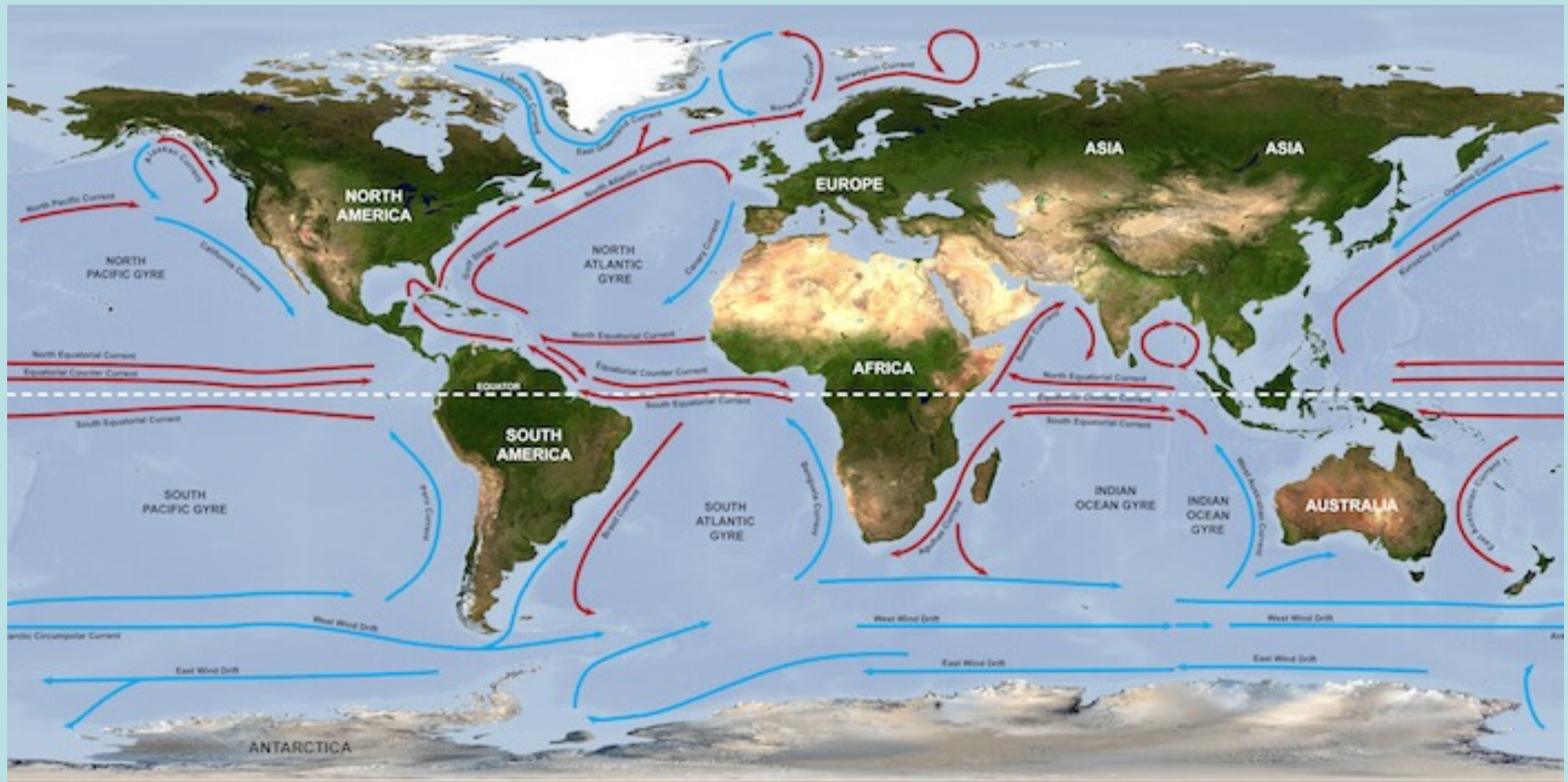
離心力

在旋轉座標系中，使用牛頓定律時，必須加上以上兩個假力。

此式適用於任何有質量的物體。

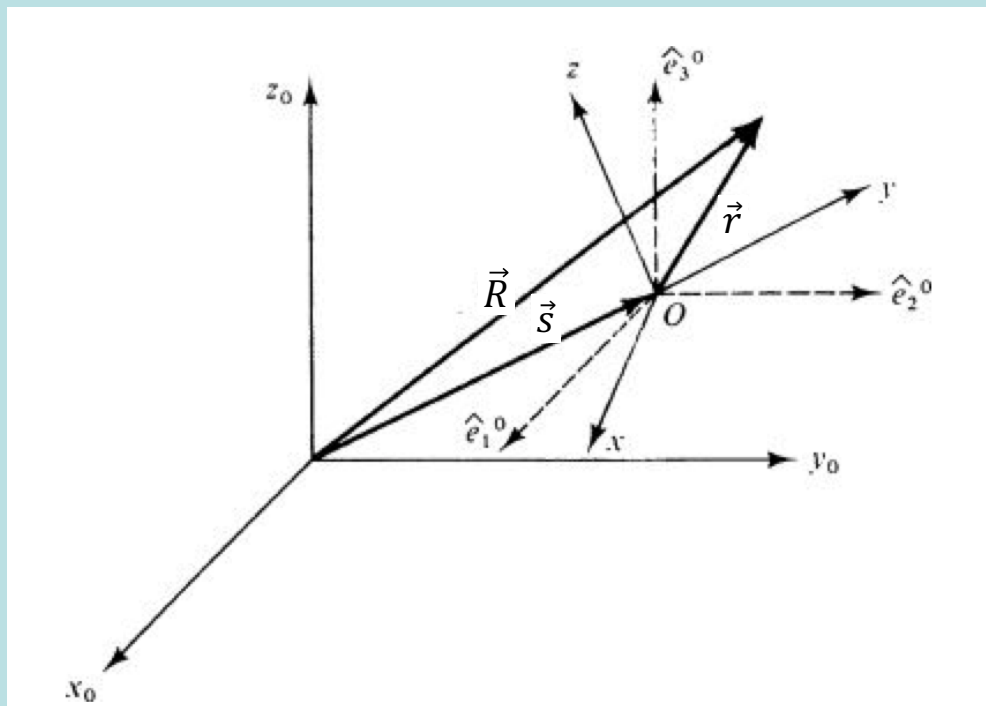


北半球朝南走會有向西的柯氏力
北半球朝北走會有向東的柯氏力



北半球的gulf stream是順時鐘方向

非慣性系同時有加速與旋轉：



$$\vec{R} = \vec{r} + \vec{s} = \vec{V} = \sum_{i=1}^3 r_i \hat{e}_i + \vec{s}$$

多出一項，原點的加速度

$$\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{d^2 \vec{s}}{dt^2} = \sum_{i=1}^3 \frac{d^2 r_i}{dt^2} \hat{e}_i + 2\vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \frac{d^2 \vec{s}}{dt^2}$$

$$m\vec{a}' = \vec{F} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - m \frac{d^2 \vec{s}}{dt^2}$$

考慮一個彈簧，彈力常數為 k ，一端連在固定的牆上，一端連一個可以在水平地面上自由移動的碗。碗的底面是一個半徑為 R 的半球形，在碗底放一個質量為 m 的質點。以此彈簧的方向定為 x 軸，設碗底的位置為 x ，以彈簧平衡時的碗底位置為原點，質點與碗的球心之連線與垂直線的夾角為 θ 。假設碗的質量相較於質點很小，碗的質量可以忽略而設為零。同時假設碗與地面皆平滑，碗與地面，及質點與碗面之間的摩擦力都可以忽略。



對質點施以一個沿碗面方向的力，使得質點在碗面內自碗底緩慢上升，過程中施力方向跟著改變而一直保持沿碗面方向，直到 θ 等於 θ_0 ，在該處保持該施力使質點維持於該處，整個系統處於平衡狀態。此時碗亦已離開原來位置，設此時的碗底位置為 x_0 ， x_0 等於_____ (以 θ_0, g, k, R, m 表示)。於時間為零時使此外力消失，若 θ_0 很小，外力消失之後質點會在碗中作簡諧運動，其角頻率 ω 是多少_____。時間 t 時，此質點相對於地面的水平速度是_____。(以 θ_0, g, k, R, m 表示)。因 θ_0 很小，所以在運動過程中， θ 會保持很小。

解答：

因為維持平衡，考慮質點的受力，重力在碗面方向的分力與所施外力恰抵消，而重力在垂直碗面方向的分力則與碗面對質點的正向力 N 抵消： $N = mg \cos \theta_0$ 。而考慮碗的受力時，質點對碗面施以上述正向力的反作用力 N (垂直於碗面)，彈簧對碗施以彈力，碗的總受力必須為零，因此在水平方向可以得到： $kx_0 = N \cdot \sin \theta_0 = mg \cos \theta_0 \cdot \sin \theta_0$

$kx_0 = N \cdot \sin \theta_0 = mg \cos \theta_0 \cdot \sin \theta_0$ 。 N 在鉛直方向的分力則由地面對碗的正向力抵消。當外力消失，質點受到沿碗面方向的淨力而在碗中向下運動。為方便起見，選擇在碗的靜止座標系來進行討論。在此加速座標系中，質點會受到一個水平的虛力： $-m\ddot{x}$ 。對於質點的運動，考慮沿著碗面及垂直於碗面的方向是最方便的。首先考慮質點在垂直於碗面的方向的運動，此方向淨力必須提供圓周運動的向心加速度，因此： $N + m\ddot{x} \cdot \sin \theta = mg \cos \theta + mR\dot{\theta}^2$ $N + m\ddot{x} \cdot \sin \theta - mg \cdot \cos \theta = mR\dot{\theta}^2$ 。但在小角度運動條件下： $\theta \ll 1$ ，角速度 $\dot{\theta}$ 也很小，所以 $N \approx mg$ 。

因為碗的質量可以忽略，它的總受力永遠為零。因此在水平方向可以得到：

$kx = N \cdot \sin \theta \approx mg \cdot \sin \theta \approx mg \cdot \theta$ $kx = N \cdot \sin \theta \approx mg \cdot \sin \theta \approx mg \theta$ ，此關係 $kx = mg \theta$ 在運動過程中一直保持。（這個關係與起始狀態所滿足的關係在小角度近似下是一致的，因此起始狀態會很平滑的進入以下的簡諧運動。）

質點沿碗面方向的運動，沿碗面質點的總受力為 $-mg \sin \theta - m\ddot{x} \cdot \cos \theta \approx -mg \cdot \theta - m\ddot{x}$

$-mg \cdot \sin \theta - m\ddot{x} \cdot \cos \theta \approx -mg \cdot \theta - m\ddot{x}$ ，夾角 θ 滿足： $mR\ddot{\theta} = -mg \cdot \theta - m\ddot{x}$ $mR\ddot{\theta} = -mg \cdot$

$\theta - m\ddot{x}$ ，代入關係： $kx = mg \cdot \theta$ $kx = mg \cdot \theta$ ，可以得到簡諧運動的運動方程式：

$$\left(R + \frac{mg}{k}\right)\ddot{\theta} = -g \cdot \theta \quad \left(R + \frac{mg}{k}\right)\ddot{\theta} = -g \cdot \theta$$

從該式可以讀出簡諧運動的頻率為：

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{R + \frac{mg}{k}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{\frac{R}{g} + \frac{m}{k}}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{R + \frac{mg}{k}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{\frac{R}{g} + \frac{m}{k}}}$$

福科擺

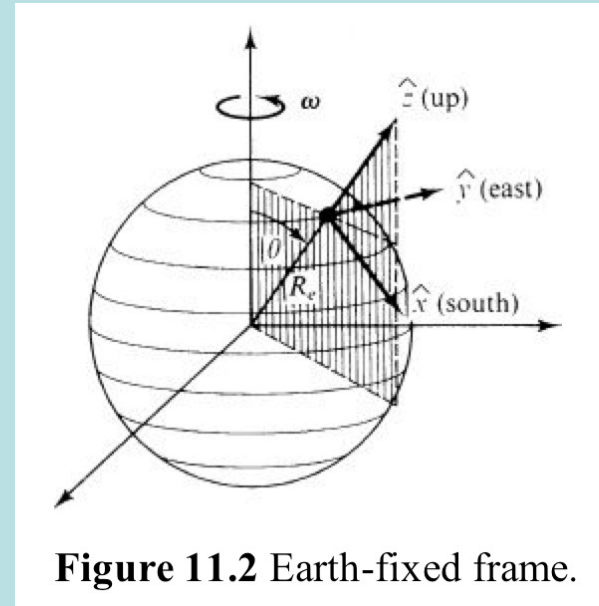
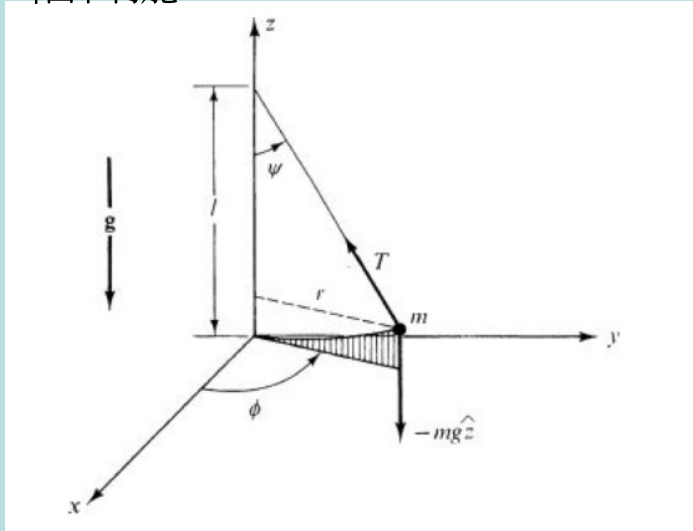


Figure 11.2 Earth-fixed frame.

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}' - 2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}$$

$$\vec{\omega} = (-\omega \sin \theta, 0, \omega \cos \theta)$$

$$\dot{\mathbf{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

$$-2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} = 2m\omega(\dot{y} \cos \theta, -\dot{x} \cos \theta - \dot{z} \sin \theta, \dot{y} \sin \theta)$$

$$m\mathbf{g} + \mathbf{F}' = (-T \sin \psi \cos \phi, -T \sin \psi \sin \phi, T \cos \psi - mg)$$

垂直方向

$$m\ddot{z} = T \cos \psi - mg + 2m\omega\dot{y} \sin \theta$$

$$mv \sim 7 \times 10^{-7} \text{ m/s}^2 \ll g$$

$$T \cos \psi \approx T \approx mg$$

$$\ddot{z} \ll g$$

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}' - 2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}$$

$$-2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} = 2m\omega(\dot{y} \cos \theta, -\dot{x} \cos \theta - \dot{z} \sin \theta, \dot{y} \sin \theta)$$

$$m\mathbf{g} + \mathbf{F}' = (-T \sin \psi \cos \phi, -T \sin \psi \sin \phi, T \cos \psi - mg)$$

水平方向

$$m\ddot{x} = -T \sin \psi \cos \phi + 2m\omega\dot{y} \cos \theta$$

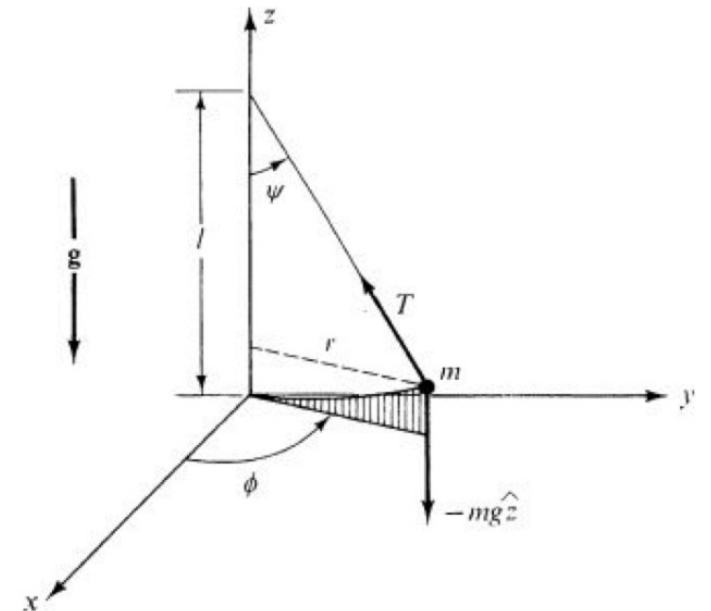
$$m\ddot{y} = -T \sin \psi \sin \phi - 2m\omega(\dot{x} \cos \theta + \dot{z} \sin \theta)$$

$$\sin \psi \cos \phi \sim \frac{x}{l}$$

$$\sin \psi \sin \phi \sim \frac{y}{l}$$

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l}x + 2\omega\dot{y} \cos \theta$$

$$\ddot{y} = -\frac{g}{l}y - 2\omega\dot{x} \cos \theta$$



$$\ddot{x} = -\frac{g}{l}x + 2\omega\dot{y} \cos \theta$$

$$\ddot{y} = -\frac{g}{l}y - 2\omega\dot{x} \cos \theta$$

將水平面視為一複數平面

$$\zeta(t) = x(t) + iy(t)$$

以上兩個方程式可以寫成一個複數方程式：

$$\ddot{\zeta} = -\frac{g}{l}\zeta - 2i\omega \cos \theta \dot{\zeta}$$

取指數函數解代入：

$$\zeta(t) = \zeta_0 e^{-i\sigma t}$$

$$\sigma^2 - 2\omega \cos \theta \sigma - g/l = 0$$

$$\sigma_{\pm} = p \pm q$$

$$p = \omega \cos \theta \equiv \omega_{\perp} \quad q = \left(\omega_{\perp}^2 + \frac{g}{l} \right)^{1/2}$$

普遍解可以寫成：

$$\zeta(t) = Ae^{-i(p+q)t} + Be^{-i(p-q)t}$$

考慮以下起始條件： $\zeta(0) = x(0) = a$ ， $\dot{\zeta}(0) = 0$

$$\zeta(t) = Ae^{-i(p+q)t} + Be^{-i(p-q)t}$$

$$\zeta(t) = ae^{-ipt}(\cos qt + ipq^{-1} \sin qt)$$

$$p = \omega \cos \theta \equiv \omega_{\perp} \quad q = \left(\omega_{\perp}^2 + \frac{g}{l}\right)^{1/2}$$

在實際情況下 $p \sim 10^{-4} \ll q \sim \sqrt{\frac{g}{l}}$

$$\zeta(t) \sim a \cos qt e^{-ipt}$$

$$|\zeta(t)|^2 = |x(t) + iy(t)|^2 = x(t)^2 + y(t)^2 \approx a^2 \cos^2 qt$$

$$x(t) = \text{Re } \zeta(t) \approx a \cos pt \cos qt \approx a \cos \omega_{\perp} t \cos \left[\left(\frac{g}{l}\right)^{1/2} t \right]$$

$$y(t) = \text{Im } \zeta(t) \approx -a \sin pt \cos qt \approx -a \sin \omega_{\perp} t \cos \left[\left(\frac{g}{l}\right)^{1/2} t \right]$$

擺以 $q \sim \sqrt{\frac{g}{l}}$ 的角頻率做擺動，同時擺面以 $p = \omega \cos \theta$ 的角速度繞鉛直軸旋轉。

另一做法：

$$\ddot{x} = +2\omega \cos \theta \dot{y} - \frac{g}{l} x$$
$$\ddot{y}' = -2\omega \cos \theta \dot{x}' - \frac{g}{l} y$$

$$x = (a \cdot e^{\alpha t}), y = (b \cdot e^{\alpha t})$$

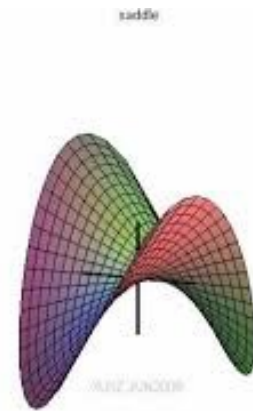
$$\left[\alpha^2 + \frac{g}{l} \right] a - 2\omega \cos \theta \alpha b = 0$$
$$2\omega \cos \theta \alpha a + \left[\alpha^2 + \frac{g}{l} \right] b = 0$$

$$\left(\alpha^2 + \frac{g}{l} \right)^2 + 4\omega^2 \cos^2 \theta \alpha^2 = 0$$

$$\alpha = \pm i\omega \cos \theta \pm i \sqrt{\omega^2 \cos^2 \theta + \frac{g}{l}} = \pm ip \pm iq$$

3. 考慮一個剛體的馬鞍面，垂直放置，使此表面滿足方程式： $z = \frac{1}{R}(x^2 - y^2)$ ，選 z 軸為垂直軸（考慮重力）。在此表面上放一個小球，質量為 m 。假設在球運動的過程，一直保持在馬鞍面上。此球極小，它的旋轉效應可以忽略。使馬鞍面繞 z 軸以固定角速度 ω 旋轉。選在相對於馬鞍面靜止的旋轉座標系中觀察，此球的位置記為 $\vec{r}' = (x', y', z')$ 。假設時間為零時，靜止座標與旋轉座標的軸重合，因此 $x' = x \cos \omega t + y \sin \omega t$ ， $y' = y \cos \omega t - x \sin \omega t$ 。因為旋轉座標系為非慣性座標系，在此座標系中觀察時，所有物體都會受到假力： $m\omega^2 \vec{r}' - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}'$ 。在此 $\vec{\omega} \equiv \omega \hat{e}_z$ 。第一項即是離心力，而第二項與運動速度有關，稱為科氏力。

(a) 寫下此球的 x' 座標以及 y' 座標所必須滿足的方程式。



$$E = \frac{m}{2} [v_x^2 + v_y^2 + v_z^2] + U$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \propto x \cdot v_x + y \cdot v_y \sim 0 \quad \text{當球離原點不遠}$$

$$E = \frac{m}{2} [v_x^2 + v_y^2 + v_z^2] + U \rightarrow \frac{m}{2} [v_x^2 + v_y^2] + mgz = \frac{m}{2} [v_x^2 + v_y^2] + \frac{mg}{R} (x^2 - y^2)$$

球的運動等價於一二維運動：

對二維表面來說，此位能會對球施予一個力：

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x'} = -\frac{2mg}{R}x', F_y = -\frac{\partial U}{\partial y'} = \frac{2mg}{R}y'$$

再加上科氏力： $-2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' = (+2\omega\dot{y}' \quad -2\omega\dot{x}')$ 及離心力，可以得到 x', y'

座標滿足的方程式： $m\omega^2\vec{r}'$

$$\ddot{x}' = +2\omega\dot{y}' + \left(\omega^2 - \frac{2g}{R}\right)x'$$

$$\ddot{y}' = -2\omega\dot{x}' + \left(\omega^2 + \frac{2g}{R}\right)y'$$

(b) 球有可能滑下馬鞍面，也有可能留在原點附近來回移動。以普遍的方法，來求解這兩個方程式最方便的辦法，就是推廣兩個座標為複數，而將其可能的解寫成一個複數 αt 的指數函數： $x' = a \cdot e^{\alpha t}$ ， $y' = b \cdot e^{\alpha t}$ ，常數 a, b, α 為複數。得到這樣的解後，作線性組合，將適當的實數起始條件代入後，上述的解就自然維持是實數。

若 $x' = a \cdot e^{\alpha t}$ ， $y' = b \cdot e^{\alpha t}$ 是球的運動方程式的解，寫下常數 α 必須滿足的條件。

當角速度 ω 大於某值 ω_{cr} ，所有的解，無論時間多長，都會留在有限的範圍內，不會運動到無限遠處（也就是球不會滑下馬鞍面）。找出 ω_{cr} 。

當 $\omega > \omega_{cr}$ ，針對所有可能的常數 α ，寫下對應的常數 a, b 彼此的關係。

(c) 設 $\omega > \omega_{cr}$ 。在時間為零時，將球放置於原點，相對於靜止實驗室朝 y 軸方向給予一速度 v_0 。寫下在旋轉的座標系中觀察時，此球的 y' 座標及 x' 座標與時間的關係。

(b) 將 $x' = (a \cdot e^{\alpha t})$, $y' = (b \cdot e^{\alpha t})$ 代入以上方程式：

$$\left[\alpha^2 - \left(\omega^2 - \frac{2g}{R} \right) \right] a - 2\omega\alpha b = 0$$

$$2\omega\alpha a + \left[\alpha^2 - \left(\omega^2 + \frac{2g}{R} \right) \right] b = 0$$

$$\ddot{x}' = +2\omega\dot{y}' + \left(\omega^2 - \frac{2g}{R} \right) x'$$

$$\ddot{y}' = -2\omega\dot{x}' + \left(\omega^2 + \frac{2g}{R} \right) y'$$

若 a, b 有不全為零的解， α 必須滿足：

$$\left[\alpha^2 - \left(\omega^2 - \frac{2g}{R} \right) \right] \cdot \left[\alpha^2 - \left(\omega^2 + \frac{2g}{R} \right) \right] + 4\omega^2\alpha^2 = 0$$

化簡後得：

$$\alpha^4 + 2\omega^2\alpha^2 + \left(\omega^4 - \frac{4g^2}{R^2} \right) = 0$$

$$\alpha^2 = -\omega^2 \pm \frac{2g}{R}$$

如果 α 不是虛數，在時間無限大時， $e^{\alpha t}$ 也將趨近無限大。因此如果要求球

不會運動到無限遠處，角速度 ω 必須滿足：

$$\omega^2 > \frac{2g}{R}, \omega > \sqrt{\frac{2g}{R}}$$

若 $\omega > \sqrt{\frac{2g}{R}}$ ， α 有四個虛數解：

$$\alpha = \pm i \left(\sqrt{\omega^2 + \frac{2g}{R}} \right) \equiv \pm i\omega_1, \text{ 對應的常數滿足： } \omega a_{1\pm} = \pm i\omega_1 b_{1\pm} \circ$$

$$\alpha = \pm i \left(\sqrt{\omega^2 - \frac{2g}{R}} \right) \equiv \pm i\omega_2, \text{ 對應的常數滿足： } \omega b_{2\pm} = \mp i\omega_2 a_{2\pm}$$

不同的模式

(c) 以上得到四個解，兩個座標可以寫成四個解的和：

$$x' = a_{1+} \cdot e^{i\omega_1 t} + a_{1-} \cdot e^{-i\omega_1 t} + a_{2+} \cdot e^{i\omega_2 t} + a_{2-} \cdot e^{-i\omega_2 t}$$

$$y' = b_{1+} \cdot e^{i\omega_1 t} + b_{1-} \cdot e^{-i\omega_1 t} + b_{2+} \cdot e^{i\omega_2 t} + b_{2-} \cdot e^{-i\omega_2 t}$$

$$= -i \frac{\omega}{\omega_1} a_{1+} \cdot e^{i\omega_1 t} + i \frac{\omega}{\omega_1} a_{1-} \cdot e^{-i\omega_1 t} - i \frac{\omega_2}{\omega} a_{2+} \cdot e^{i\omega_2 t} + i \frac{\omega_2}{\omega} a_{2-} \cdot e^{-i\omega_2 t}$$

起始條件為 $x(0) = 0$ ， $\dot{x}(0) = 0$ ， $y(0) = 0$ ， $\dot{y}(0) = v_0$ ，

$$x' = a_{1+} \cdot e^{i\omega_1 t} + a_{1-} \cdot e^{-i\omega_1 t} + a_{2+} \cdot e^{i\omega_2 t} + a_{2-} \cdot e^{-i\omega_2 t}$$

$$y' = b_{1+} \cdot e^{i\omega_1 t} + b_{1-} \cdot e^{-i\omega_1 t} + b_{2+} \cdot e^{i\omega_2 t} + b_{2-} \cdot e^{-i\omega_2 t}$$

$$= -i \frac{\omega}{\omega_1} a_{1+} \cdot e^{i\omega_1 t} + i \frac{\omega}{\omega_1} a_{1-} \cdot e^{-i\omega_1 t} - i \frac{\omega_2}{\omega} a_{2+} \cdot e^{i\omega_2 t} + i \frac{\omega_2}{\omega} a_{2-} \cdot e^{-i\omega_2 t}$$

起始條件為 $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = v_0$,

利用座標的轉換關係 $x' = x \cos \omega t + y \sin \omega t$, $y' = y \cos \omega t - x \sin \omega t$,

可以得到旋轉座標系中的起始條件：

$$x'(0) = 0 , \dot{x}'(0) = 0 ,$$

$$y'(0) = 0 , \dot{y}'(0) = v_0 ,$$

將座標的解 x', y' 代入此四個起始條件：

$$a_{1+} + a_{1-} + a_{2+} + a_{2-} = 0$$

$$\omega_1 a_{1+} - \omega_1 a_{1-} + \omega_2 a_{2+} - \omega_2 a_{2-} = 0$$

$$- \frac{\omega}{\omega_1} a_{1+} + \frac{\omega}{\omega_1} a_{1-} - \frac{\omega_2}{\omega} a_{2+} + \frac{\omega_2}{\omega} a_{2-} = 0$$

$$-\omega a_{1+} - \omega a_{1-} - \frac{\omega_2^2}{\omega} a_{2+} - \frac{\omega_2^2}{\omega} a_{2-} = v_0$$

$$a_{1+} + a_{1-} + a_{2+} + a_{2-} = 0$$

$$\omega_1 a_{1+} - \omega_1 a_{1-} + \omega_2 a_{2+} - \omega_2 a_{2-} = 0$$

$$-\frac{\omega}{\omega_1} a_{1+} + \frac{\omega}{\omega_1} a_{1-} - \frac{\omega_2}{\omega} a_{2+} + \frac{\omega_2}{\omega} a_{2-} = 0$$

$$-\omega a_{1+} - \omega a_{1-} - \frac{\omega_2^2}{\omega} a_{2+} - \frac{\omega_2^2}{\omega} a_{2-} = v_0$$

由第二式及第三式可以得到： $a_{1+} = a_{1-}$ ， $a_{2+} = a_{2-}$ 。

因此第一式及第四式可以化簡為：

$$a_{1+} + a_{2+} = 0$$

$$-2\omega a_{1+} - 2\frac{\omega_2^2}{\omega} a_{2+} = v_0$$

求解可以得到：

$$a_{1+} = -a_{2+} = \frac{\omega v_0}{\frac{4g}{R}} = \frac{\omega R v_0}{4g}$$

因此

$$y' = i \frac{\omega}{\omega_1} a_{1+} \cdot (-e^{i\omega_1 t} + e^{-i\omega_1 t}) + i \frac{\omega_2}{\omega} a_{2+} \cdot (-e^{i\omega_2 t} + e^{-i\omega_2 t})$$

$$= \frac{R\omega^2 v_0}{2\omega_1 g} \sin \omega_1 t - \frac{R\omega_2 v_0}{2g} \sin \omega_2 t$$

$$x' = \frac{\omega R v_0}{4g} \cdot \cos \omega_1 t - \frac{\omega R v_0}{4g} \cdot \cos \omega_2 t \quad \text{耦合震盪}$$