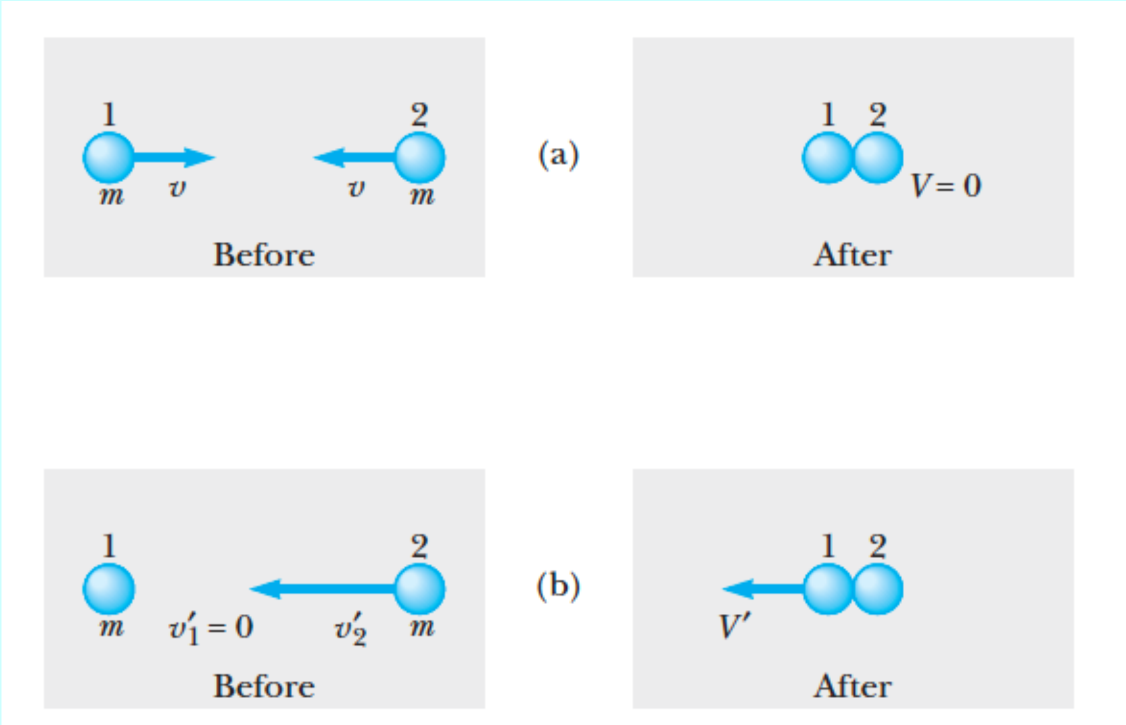
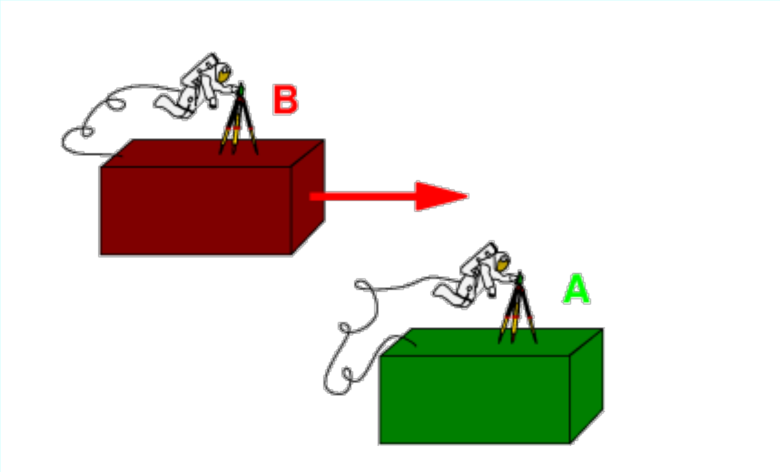
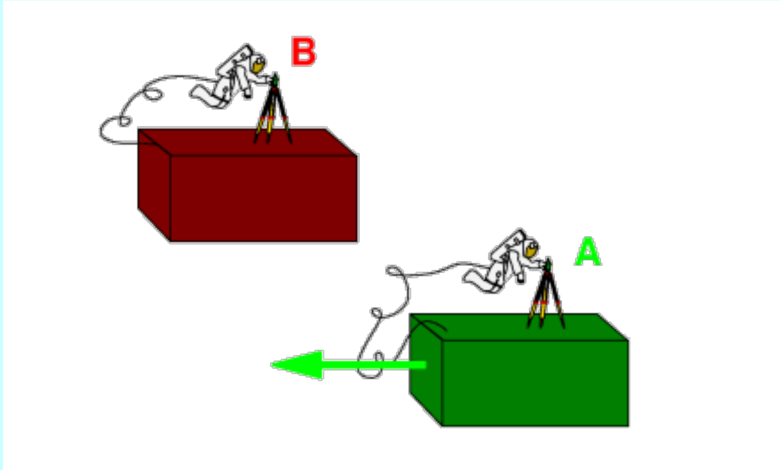
動量與能量

動量與能量守恆定律滿不滿足相對性原則？







相對性原則 The Principle of Relativity

速度是相對的。

覺得自己是如右圖靜止的實驗者B，由實驗結果歸納的物理定律，

與在左圖中靜止的A所歸納的物理定律應該一模一樣！

符合這個條件的物理定律才是正確的物理定律。

因此，相對性原則成為物理定律是否正確的一個新的檢驗標準！

所有還沒檢驗過的都要拿來確認一下！

生長屬性		野生 魚/蝦		野生 貝/頭足海鮮		人工養殖 魚/蝦	
供貨來源		江醫師の魚舖子	一般市售	江醫師の魚舖子	一般市售	江醫師の魚舖子	一般市售
檢驗項目	重金屬5項	V 勝	X	V 勝	X	V 勝	3-5種
	漂白劑	V 勝	X	V 勝	X	V 勝	X
	增色劑	V 勝	X	V 勝	X	V 勝	X
	甲醛	V 勝	X	V 勝	X	V 勝	X
	防腐劑11項	V 勝	X	V 勝	X	V 勝	X
	戴奧辛17項	V 勝	X	V 勝	X	V 勝	X
	多氯聯苯12項	V 勝	X	V 勝	X	V 勝	X
	藥殘190項					V 勝	23種
	農藥216項					V 勝	2種
	三聚氰胺					V 勝	?
	三聚氰酸					V 勝	X
	總計	共計48項 勝	共計0項	共計48項 勝	共計0項	共計456項 勝	共計30項
檢驗方式		逐批檢驗 勝	X	逐批檢驗 勝	X	逐批檢驗 勝	抽驗
處理方式		HACCP 勝	X	HACCP 勝	X	HACCP 勝	?
包裝方式		真空包裝 勝	一般	真空包裝 勝	一般	真空包裝 勝	一般
儲藏方式		-40℃急速冷凍 勝	?	-40℃急速冷凍 勝	?	-40℃急速冷凍 勝	?
運送方式		全程冷凍鏈 勝	?	全程冷凍鏈 勝	?	全程冷凍鏈 勝	?

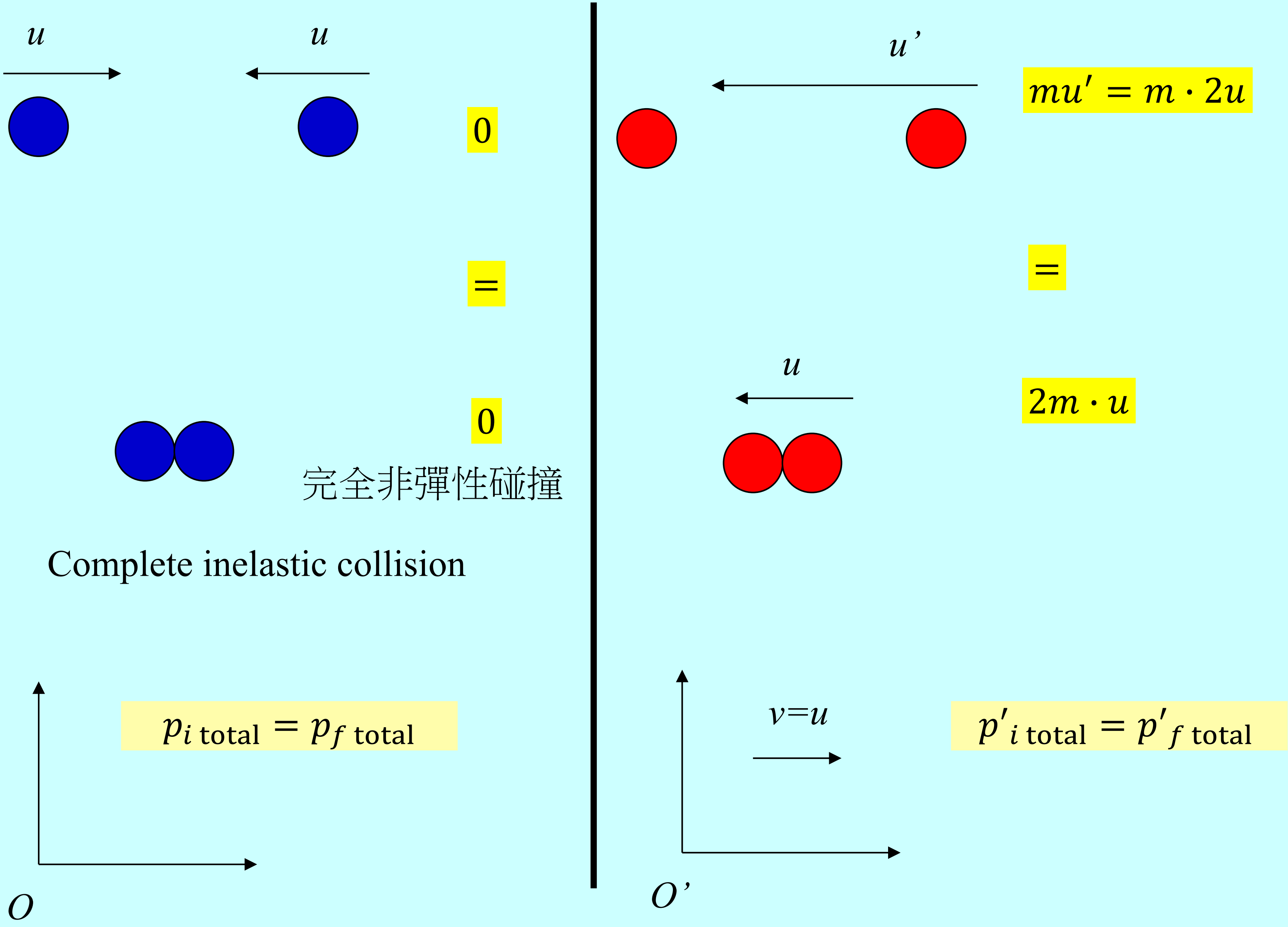
檢驗的標準為何？

動量與能量守恆定律在羅倫茲變換下會不會變？

動量與能量守恆定律滿不滿足相對性原則？

Is Momentum Conservation Law invaraint under Lorentz transformation?

牛頓版動量守恆 $\vec{p} = m\vec{v}$

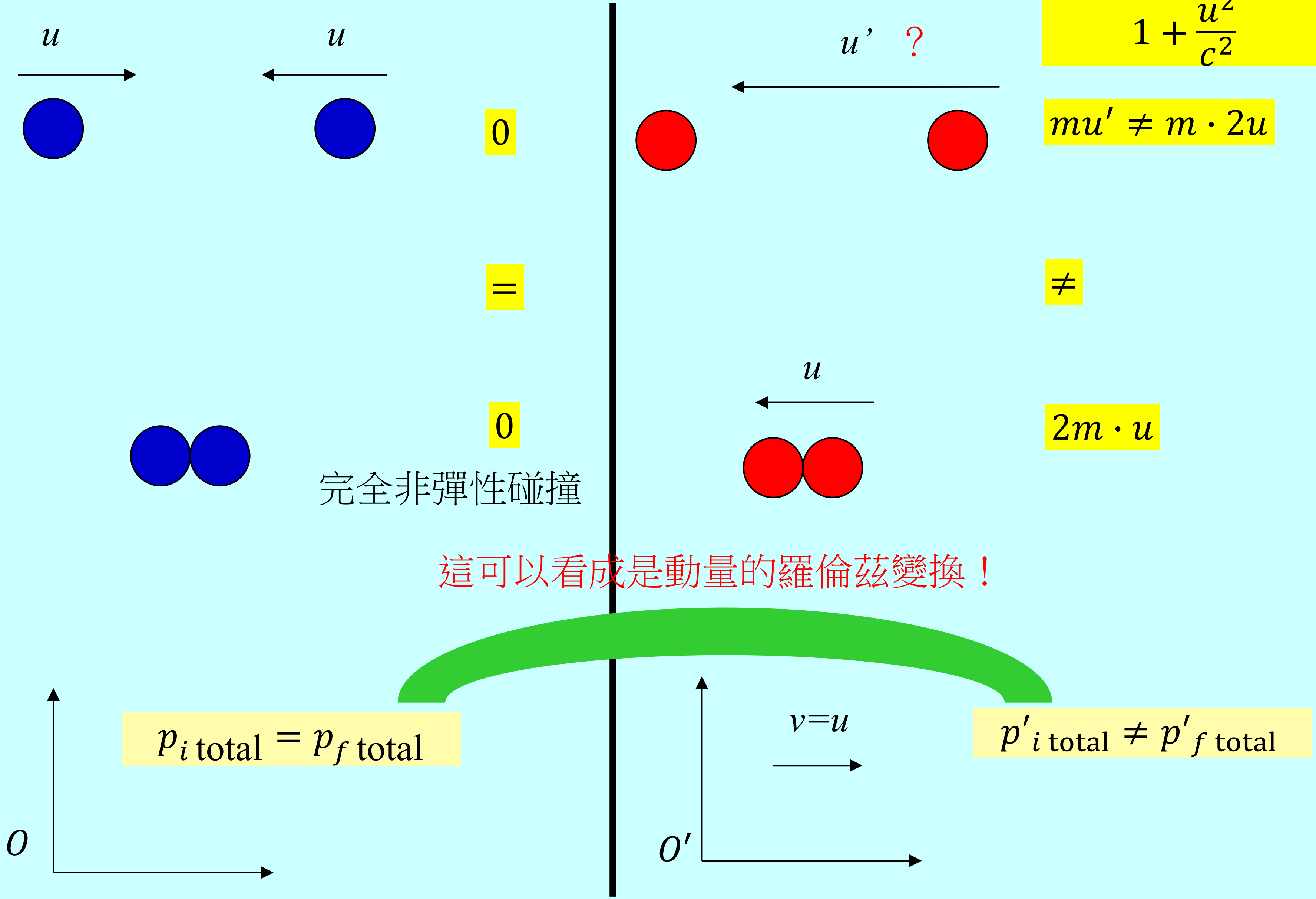


牛頓版的動量守恆遵守伽利略變換下的相對性原則

但？如果考慮相對性效應.....

$$u' = \frac{u+u}{1+\frac{u^2}{c^2}} \neq 2u$$

$$mu' \neq m \cdot 2u$$



這可以看成是動量的羅倫茲變換！

動量守恆定律在左方是正確，但在右方就不正確，反之亦然

動量守恆定律在羅倫茲轉換後就不像動量守恆了！

看來動量得重新定義，使動量守恆定律在羅倫茲轉換前後都是正確的！

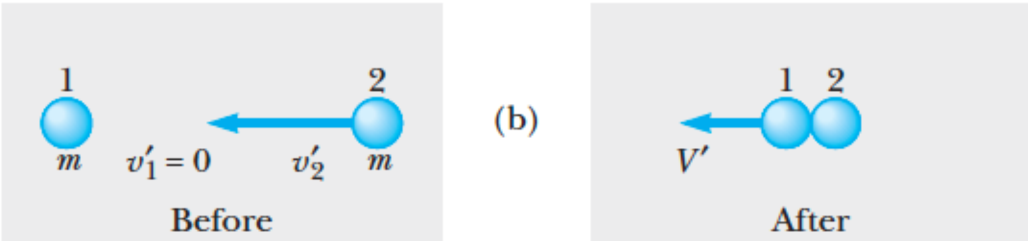
$p_i = p_f$

Momentum is conserved according to S

$p_{\text{before}} = mv + m(-v) = 0$

$p_{\text{after}} = 0$

這可以看成是動量的羅倫茲變換！



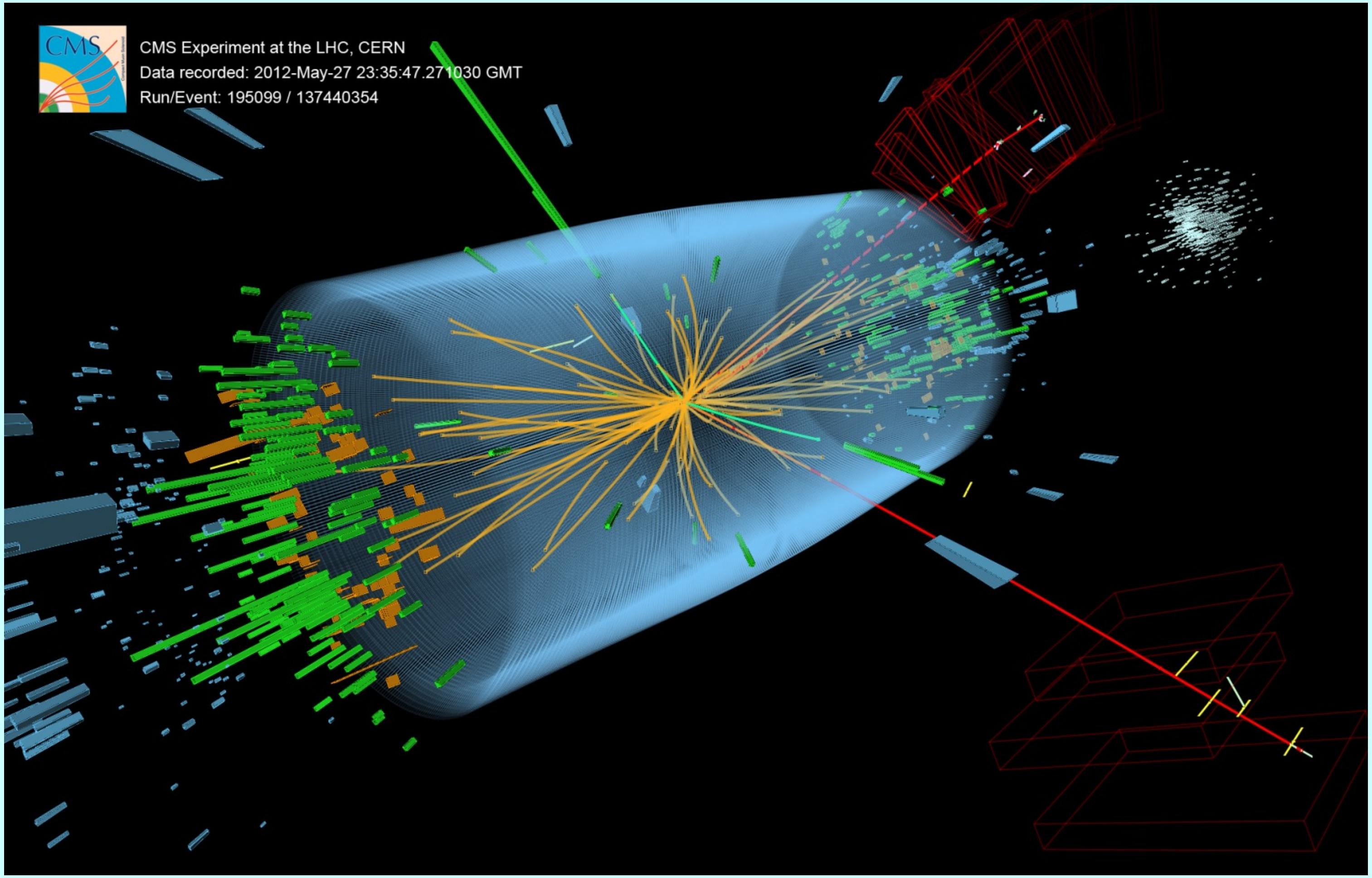
$p'_i = p'_f$

Momentum is *not* conserved according to S′

$$p'_{\text{before}} = \frac{-2mv}{1 + v^2/c^2}$$

$p'_{\text{after}} = -2mv$

Figure 2.1 (a) An inelastic collision between two equal clay lumps as seen by an observer in frame S. (b) The same collision viewed from a frame S′ that is moving to the right with speed v with respect to S.



實驗證實在高速碰撞下，能量與動量守恆都是正確的！

相對論的動量：

$$p = \frac{mu}{\sqrt{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)}}$$

$u \ll c$ 時, $\gamma \to 1$, 因此 $p \to mu$ 　　接近牛頓的定義

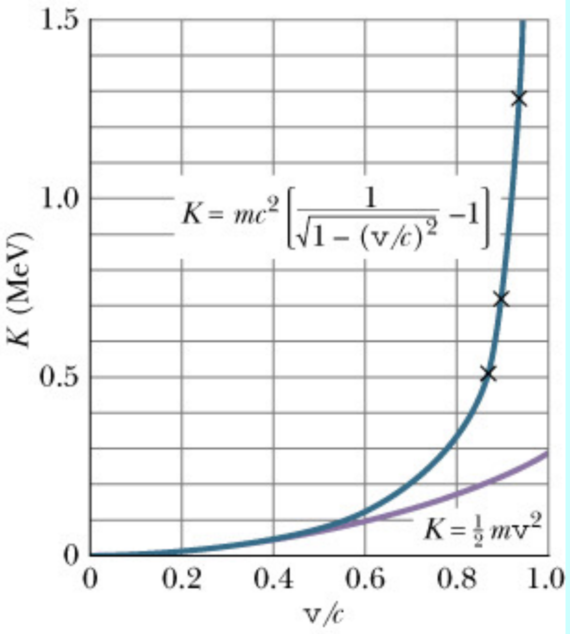
相對論的能量：

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

當 $u \ll c$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}} = mc^2\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \sim mc^2\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{u^2}{c^2}\right] = \underbrace{mc^2}_{\text{靜止能量}} + \underbrace{\frac{m}{2}u^2}_{\text{動能}}$$

動能的牛頓定義 $\frac{1}{2}mv^2$ 是不正確的！



相對論修改了能量的形式，

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

如此定義的動能才滿足動能守恆定律

（牛頓定義下的動能 $\frac{1}{2}mv^2$ 在高速時即不守恆）

但在速度遠小於光速時，相對論的動能會趨近牛頓力學中的動能 $\frac{1}{2}mv^2$ 。

當速度等於光速 $v = c$ 時，物體的能量是無限大，因此我們無法將物體的速度加大超過光速。

當物體靜止時，它的質量對應一個不為零的能量 $E = mc^2$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \qquad E = mc^2$$

靜止的物體因為其質量，能量亦不為零

這個公式暗示了能量與質量可以彼此互相轉換。

$$E = mc^2 + K$$

質量的減少可能變為動能的增加！

質量是能量的一種形式，能量守恆蘊含質量可以轉換為其他形式的能量，

其他形式的能量亦可轉換為質量，質量不再守恆。Mass is not conserved.

相對論的動量：

$$p = \frac{mu}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

相對論的能量：

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

EXAMPLE 2.6

Show that use of the relativistic definition of momentum

$$p = \frac{mu}{\sqrt{1-(u^2/c^2)}}$$

leads to momentum conservation in both S and S′ for the inelastic collision shown in Figure 2.1.

Solution In frame S:

$$p_{\text{before}} = \gamma mv + \gamma m(-v) = 0$$

$$p_{\text{after}} = \gamma MV = (\gamma M)(0) = 0$$

Hence, momentum is conserved in S. Note that we have used M as the mass of the two combined masses after the collision and allowed for the possibility in relativity that M is not necessarily equal to $2m$.

In frame S′:

$$p'_{\text{before}} = \gamma m v'_1 + \gamma m v'_2 = \frac{(m)(0)}{\sqrt{1-(0)^2/c^2}}$$

$$+ \frac{m}{\{\sqrt{1-[-2v/1+(v^2/c^2)]^2}\}(1/c^2)} \times \left(\frac{-2v}{1+v^2/c^2}\right)$$

After some algebra, we find

$$\frac{m}{\{\sqrt{1-[2v/1+(v^2/c^2)]^2}\}(1/c^2)} = \frac{m(1+v^2/c^2)}{(1-v^2/c^2)}$$

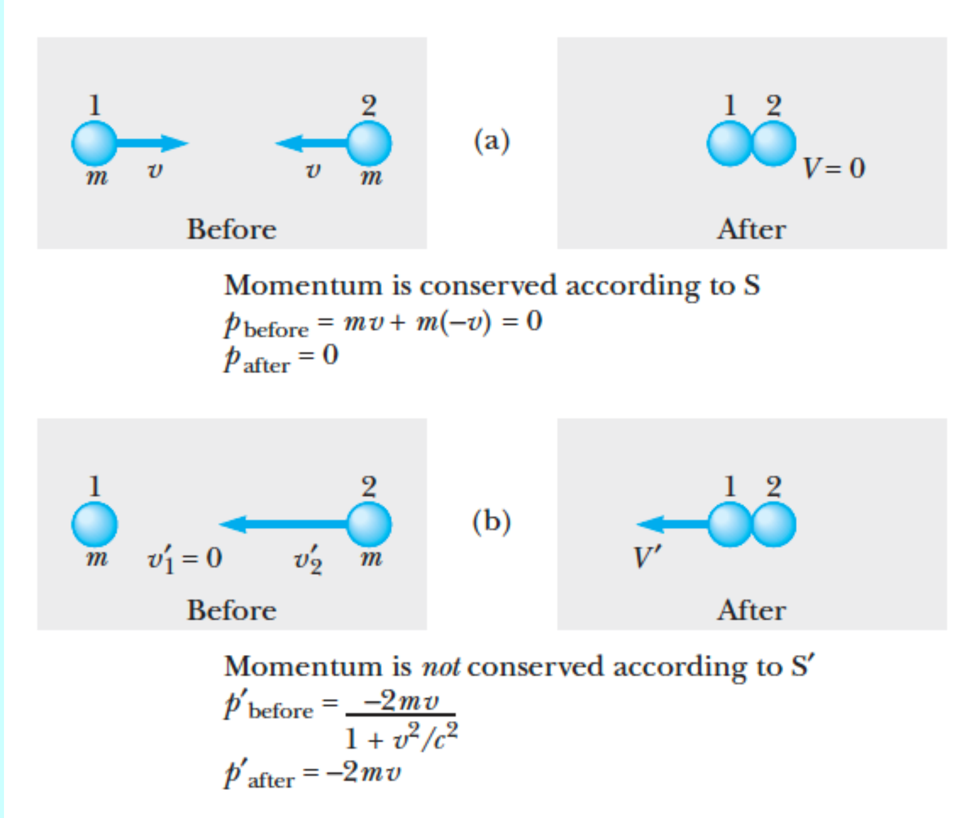
and we obtain

$$p'_{\text{before}} = \frac{m(1+v^2/c^2)}{(1-v^2/c^2)}\left(\frac{-2v}{1+v^2/c^2}\right) = \frac{-2mv}{(1-v^2/c^2)}$$

$$p'_{\text{after}} = \gamma MV' = \frac{M(-v)}{\sqrt{1-[(-v)^2/c^2]}} = \frac{-Mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

使用這兩個新的定義，計算之後，

動量守恆在兩個觀察者看起來都是對的。



To show that momentum is conserved in S′, we use the fact that M is not simply equal to $2m$ in relativity. As shown, the combined mass, M, formed from the collision of two particles, each of mass m moving toward each other with speed v, is greater than $2m$. This occurs because of the equivalence of mass and energy, that is, the kinetic energy of the incident particles shows up in relativity theory as a tiny increase in mass, which can actually be measured as thermal energy. Thus, from Equation 2.13, which results from imposing the conservation of mass–energy, we have

$$M = \frac{2m}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

Substituting this result for M into p'_{after}, we obtain

$$\begin{aligned} p'_{\text{after}} &= \frac{2m}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \frac{-v}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \\ &= \frac{-2mv}{1 - (v^2/c^2)} = p'_{\text{before}} \end{aligned}$$

Hence, momentum is conserved in both S and S′, provided that we use the correct relativistic definition of momentum, $p = \gamma m u$, and assume the conservation of mass–energy.

新定義的動量與能量在所有座標系都同時守恆，這個結果還有一較優雅的推導：

羅倫茲變換

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

以下的分量組合在羅倫茲變換下是不變的： $c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2$

$$c^2t'^2 - x'^2 = \gamma^2\left[c^2\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)^2 - (x - vt)^2\right]$$

$$= \gamma^2\left[(c^2 - v^2)t^2 - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)x^2\right] = c^2t^2 - x^2$$

$$\gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 1$$

$c^2t^2 - x^2$ 這是一個羅倫茲變換不變量，意思每一個慣性座標系量起來都一樣！

$c^2t^2 - x^2$ 這是一個羅倫茲變換不變量，意思每一個慣性座標系量起來都一樣！

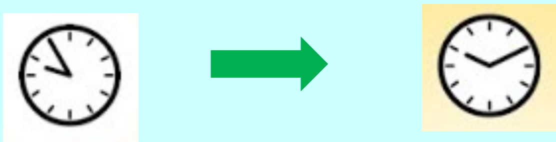
此量極為重要，因此給一個新的名字：

$c^2t^2 - x^2 \equiv c^2\tau^2$ $\tau = \tau'$

注意這個量非常類似向量的內積，只是空間分量與時間分量的貢獻是反號的！

現在考慮兩個事件，位置差或位移為Δx，時間差為Δt。

例如一個移動的時鐘：



可以對位移與時間差定義一個類似的τ差：$\Delta\tau$，也是不變量：

$c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 \equiv c^2(\Delta\tau)^2$ $\Delta\tau = \Delta\tau'$

τ的物理意義： $c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 \equiv c^2(\Delta\tau)^2$

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$$

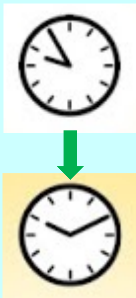
$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \longrightarrow \Delta x' = 0$$

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right)$$

以v運動的觀察者看來，這兩件事是在同一地點x'發生，

可以以同一時鐘測量$\Delta t'$，$\Delta\tau = \Delta t'$，就是這個時鐘量到的時間。

以前一頁的例子來說，此觀察者就是跟著時鐘一起運動！



但前提是： $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} < c$ $c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 > 0$

只要這條件成立，一定可以找到一個觀察者，

對它來說，這兩件事是在同一位置發生。

Time-like Events

若 $\frac{\Delta x}{\Delta t} > c$ $\quad c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 < 0$

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$$

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right)$$

原來的定義得倒過來：

$$(\Delta x)^2 - c^2(\Delta t)^2 \equiv c^2(\Delta\sigma)^2$$

我們反而可以選一個運動觀察者，速度為

$$v = \frac{\Delta t}{\Delta x}c^2 < c \quad \Rightarrow \quad \Delta t' = 0$$

在此以運動的觀察者看來，這兩件事是在同一時間t'發生，

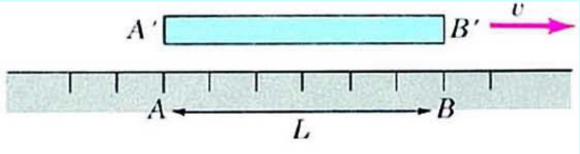
可以以一隻尺在同時測量$\Delta x'$，

$\Delta\sigma = \Delta x'$，就是這隻尺量到的位移。

前提是： $c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 < 0$

只要這條件成立，一定可以找到一個觀察者，

對它來說，這兩件事是在同一時間發生。



Space-like Events

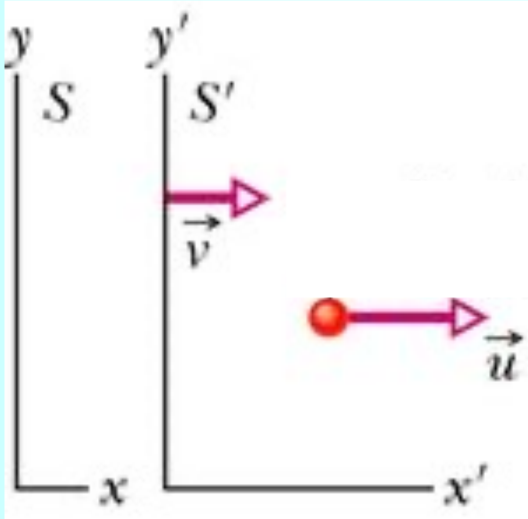
τ的物理意義：接下來將它運用在一個運動中的粒子。

對於一個速度為u的運動粒子的位移Δx與時間間隔Δt，一定是Time-like Events。

τ的變化$\Delta\tau$就與時間間隔Δt成正比。

$$c^2\Delta\tau^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 = c^2\ \Delta t^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)$$

$$\Delta\tau = \Delta t\sqrt{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)} = \Delta\tau' = \Delta t'\sqrt{\left(1-\frac{u'^2}{c^2}\right)}$$

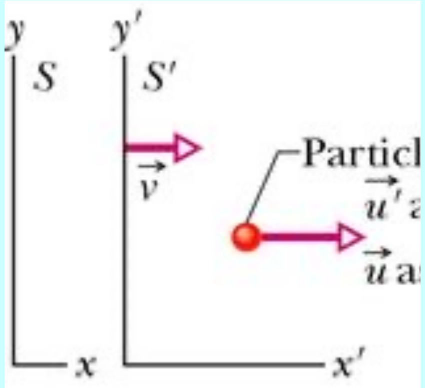


而且此式適用於任何觀察者。

設想有一個時鐘隨著粒子移動，在此時鐘看來，粒子$u'' = 0$。

$u'' = 0$時，$\Delta\tau'' = \Delta t'' = \Delta\tau$。因此Proper time τ是隨著粒子移動的時鐘量到的時間。

$$\Delta\tau = \Delta t\sqrt{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}$$



注意$\Delta\tau$與Δt的比例常數，就是動量新定義與舊定義的比例常數。

所以新定義可以寫成位移除以$\Delta\tau$。

$$p = \frac{mu}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}m\frac{\Delta x}{\Delta t} = m\frac{\Delta x}{\Delta\tau}$$

而且新定義的能量可以寫成時間差Δt除以$\Delta\tau$。

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}}cm\frac{\Delta t}{\Delta t} = cm\frac{\Delta t}{\Delta\tau}$$

我們在動量的定義中，以不變量τ取代了時間t，

$$p = m\frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow m\frac{\Delta x}{\Delta \tau}$$

而且還將一個動量推廣為兩個動量，能量也可以視為一種動量：

$$(E, p) = m\left(c\frac{\Delta t}{\Delta \tau}, \frac{\Delta x}{\Delta \tau}\right)$$

因為τ對所有慣性觀察者來說，測量結果都相等。 $\Delta \tau = \Delta \tau'$

這兩個動量在羅倫茲變換後，會是變換前兩個動量的線性組合，如同時間空間座標：

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$$

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right)$$

$$\Delta \tau = \Delta \tau'$$

$$p' = \gamma\left(p - \frac{v}{c}E\right)$$

$$E' = \gamma\left(E - \frac{v}{c}p\right)$$

動量(E, p)在羅倫茲變換前後的關係，與時空是一樣的。

在羅倫茲變換後的動量，可以寫成原來動量與能量的線性組合！

$$p' = \gamma\left(p - \frac{v}{c}E\right)$$

將此結果運用於前述粒子碰撞實驗中，變換前後的粒子總動量滿足：

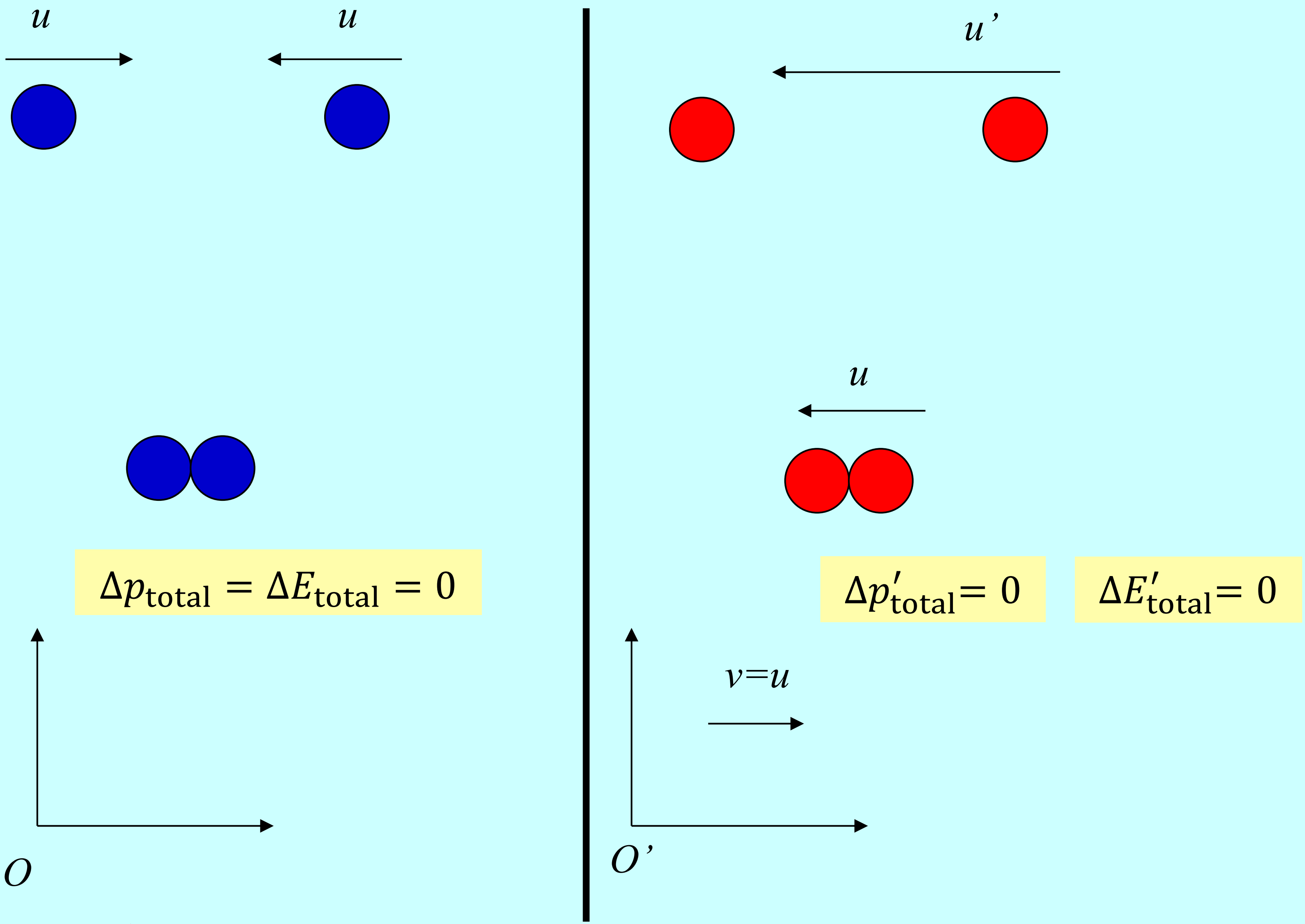
$$p'_{\text{total}} = \gamma\left(p_{\text{total}} - \frac{v}{c}E_{\text{total}}\right)$$

$$E'_{\text{total}} = \gamma\left(E_{\text{total}} - \frac{v}{c}p_{\text{total}}\right)$$

如果變換前， p及E在碰撞中都守恆，自然保證變換後p'及E'在碰撞中也守恆。

$$\Delta p_{\text{total}} = \Delta E_{\text{total}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta p'_{\text{total}} = 0 \quad \Delta E'_{\text{total}} = 0$$

動量守恆定律對一個觀察者是對的，那對所有觀察者也都是對的。



新定義使動量守恆定律遵守相對性原則

新的定義下的動量若守恆，在羅倫茲變換後保證一定守恆。

而且在任何情況下都對，不只限於前述非彈性碰撞。

動量守恆定律通過了檢驗。

生長屬性		野生 魚/蝦		野生 貝/頭足海鮮		人工養殖 魚/蝦	
供貨來源		江醫師の魚舖子	一般市售	江醫師の魚舖子	一般市售	江醫師の魚舖子	一般市售
檢驗項目	重金屬5項	V	X	V	X	V	3-5種
	漂白劑	V	X	V	X	V	X
	增色劑	V	X	V	X	V	X
	甲醛	V	X	V	X	V	X
	防腐劑11項	V	X	V	X	V	X
	戴奧辛17項	V	X	V	X	V	X
	多氯聯苯12項	V	X	V	X	V	X
	藥殘190項					V	23種
	農藥216項					V	2種
	三聚氰胺					V	?
	三聚氰酸					V	X
	總計	共計48項	共計0項	共計48項	共計0項	共計456項	共計30項
檢驗方式		逐批檢驗	X	逐批檢驗	X	逐批檢驗	抽驗
處理方式		HACCP	X	HACCP	X	HACCP	?
包裝方式		真空包裝	一般	真空包裝	一般	真空包裝	一般
儲藏方式		-40℃急速冷凍	?	-40℃急速冷凍	?	-40℃急速冷凍	?
運送方式		全程冷凍鏈	?	全程冷凍鏈	?	全程冷凍鏈	?

動量與能量的羅倫茲變換就如時空一樣！

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$$

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right)$$

$$\Downarrow$$

$$p_x' = \gamma\left(p_x - \frac{v}{c^2}\cdot E\right)$$

$$E' = \gamma(E - v\cdot p_x)$$

$$p_{y,z}' = p_{y,z}$$

相對論的動量：

$$p = \frac{mu}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

相對論的能量：

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

如同時間與空間的分別只是表面的，動量與能量的分別也只是表面的。

粒子速度就是$E, |\vec{p}|$兩者的比：

$$u = \frac{pc^2}{E}$$

羅倫茲變換

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

變換後的時間不只與變換前的時間有關，也跟空間有關

時間與空間不能分開來討論

為了討論方便，應該把時空一起記載！

$$(t, x, y, z)$$

四個分量的物件　4-vector

將時間t乘上常數c，使其單位與空間分量相同，

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, x, y, z) \equiv x^\mu, \mu = 0,1,2,3$$

也就是把ct看成4-vector的一個向量分量 。

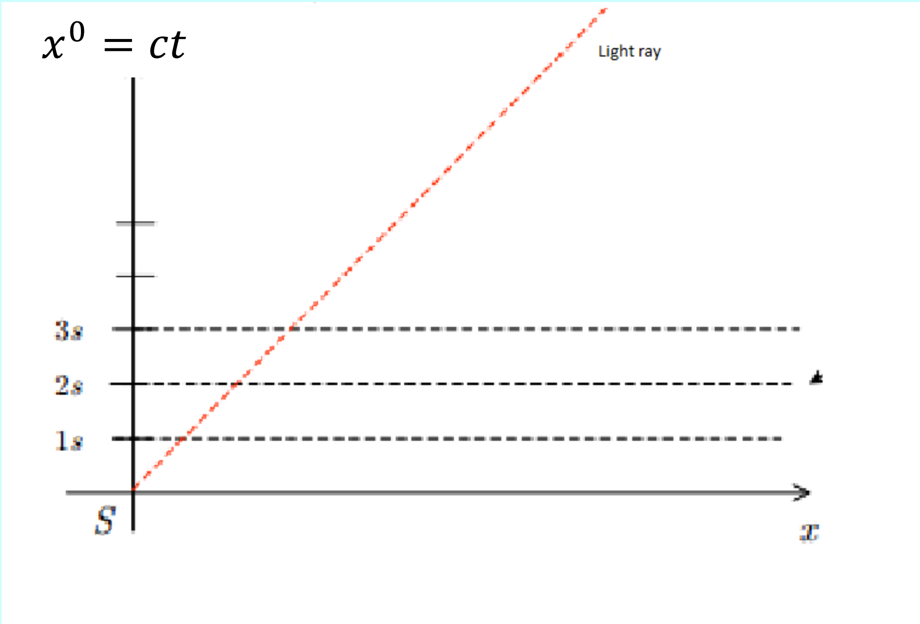
Hermann Minkowski

忽略y,z座標：　$(x^0,x^1)\equiv(ct,x)$

將$x^0=ct$當成空間分量與其他分量x畫在一起，這稱為時空圖！

同時的事件就落在一條條的水平線上。

原點所發出的光的路徑則在對角線上。

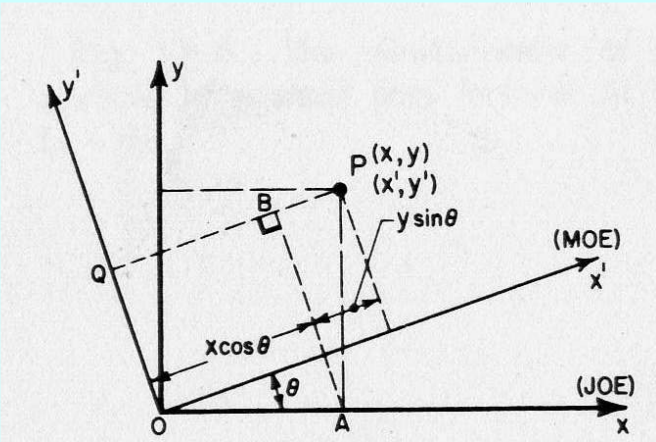


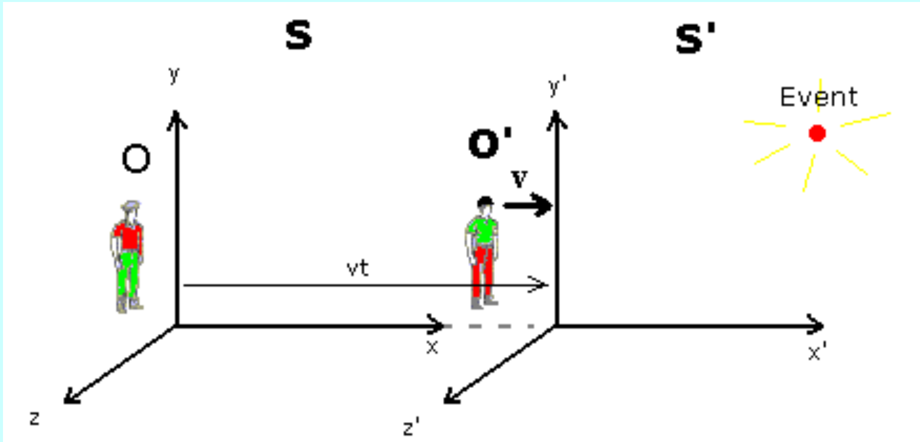
羅倫茲變換是一個時間座標x^0與空間座標x^1的線性變換。

羅倫茲變換後的分量$(x^{0\prime}, x^{1\prime})$，是原來分量$(x^0, x^1)$的線性組合。

最典型的線性變換，就是座標軸旋轉變換。

選擇一組新的正交座標軸後，向量的分量也會是原來分量的線性組合。





$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$

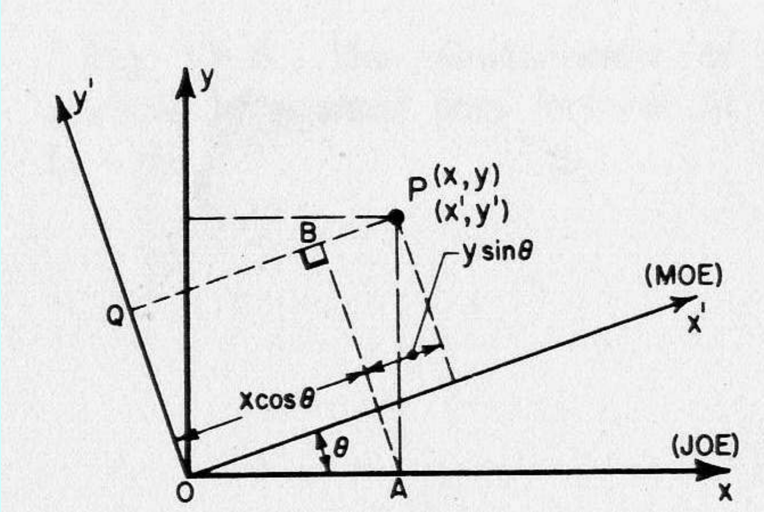
$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$$

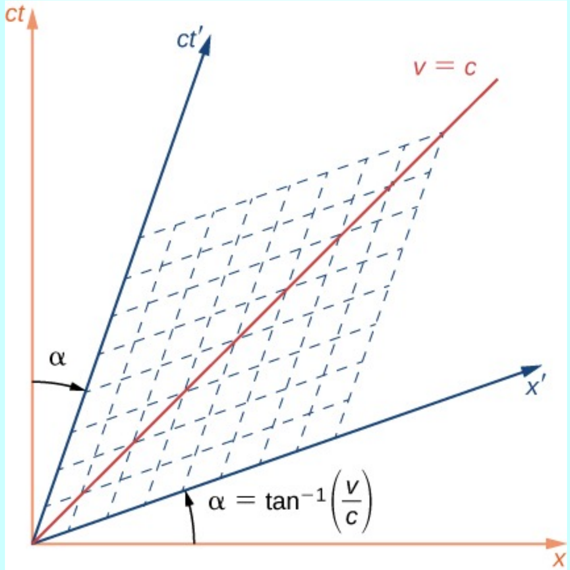
兩者很像！

$$x^{1\prime} = \gamma\left(x^1 - \frac{v}{c}x^0\right)$$

$$x^{0\prime} = \gamma\left(-\frac{v}{c}x^1 + x^0\right)$$

$$(x^0, x^1) \equiv (ct, x)$$





$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$

$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$$

$$x^{1\prime} = \gamma\left(x^1 - \frac{v}{c}x^0\right)$$

$$x^{0\prime} = \gamma\left(-\frac{v}{c}x^1 + x^0\right)$$

羅倫茲變換可以看成一個時間與空間座標軸的重新選擇。

只是時間與空間座標軸的選擇在幾何上有點非典型，如右圖。

這是為了光速恆定。原點發出的光的路徑在對角線上，

若要維持對角線在變換後還是對角線，時間與空間軸只能這樣選！

旋轉變換與羅倫茲變換的相似處還不只如此！

旋轉變換

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$

$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$$

向量長度在旋轉軸旋轉下不變

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$$

羅倫茲變換

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

類似的分量組合在羅倫茲轉換下也是不變的。

$$c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2$$

注意空間座標與時間的貢獻是反號的！

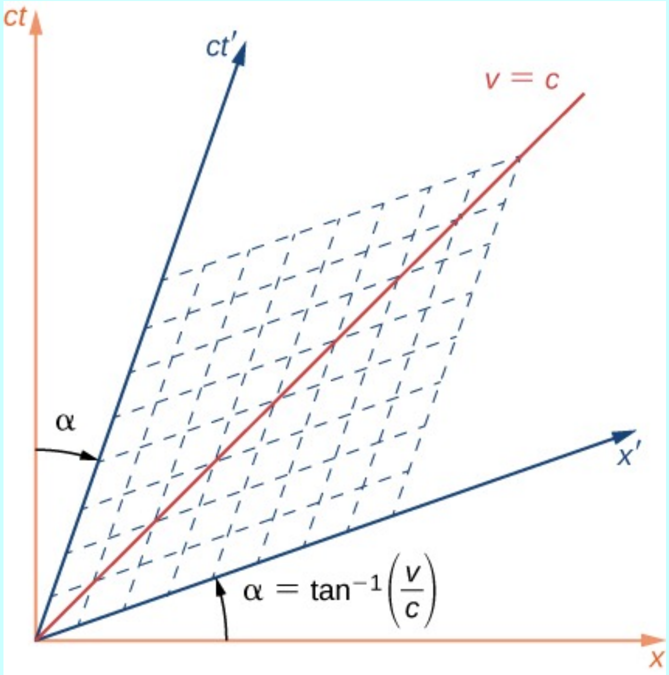
$$(x^0)^2 - (x^1)^2 = (x^{0\prime})^2 - (x^{1\prime})^2$$

推廣到三維空間：

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \equiv c^2\tau^2$$

這就是前述的proper time τ，如同向量長度是旋轉不變量，τ是羅倫茲不變量。

有時就把τ稱為4-vector x^μ的長度。$c^2\tau^2$有時也如向量長度記為x^2。



可以說羅倫茲變換就是保持這個組合不變的變換：$c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2$

原點發出的光的路徑在對角線上，$c^2t^2 - x^2 = c^2\tau^2 = 0$

在新的時空座標，$\tau = \tau'$不變。

以新的時空座標，光的路徑滿足： $c^2\tau'^2 = c^2t'^2 - x'^2 = 0$

光的路徑也還在對角線上，因此光速是守恆的。

我們將4-vector Δx^{μ}除以不變量$\Delta\tau$，就得到一個新的4-vector的動量。

$$m\frac{\Delta}{\Delta\tau}(ct,x,y,z) \to m\left(c\frac{dt}{d\tau},\frac{dx}{d\tau},\frac{dy}{d\tau},\frac{dz}{d\tau}\right) \equiv (p^0,p^1,p^2,p^3)$$

三維動量是4-vector動量 p^{μ}的空間分量！能量是4-vector動量p^{μ}的時間分量！

這有前例可循：因為位置是向量，時間是純量，故兩者的商，速度是向量。

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$p^{\mu} \equiv (p^0,p^1,p^2,p^3) = \left(\frac{E}{c},p^x,p^y,p^z\right)$$

$$\vec{p} = \gamma m\vec{u}$$

$$E = \gamma mc^2$$

動量守恆與能量守恆便整合成一個定律：4 momentum conservation。

時間與空間的4-vector長度組合$c^2t^2 - x^2$是不變量，

動量$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, p^x\right)$的類似組合$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - p_x^2$呢？

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - p_x^2 = \left(\frac{mc}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right)^2 - \left(\frac{mu}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right)^2 = \frac{m(c^2-u^2)}{1-\frac{u^2}{c^2}} = m^2c^2$$

質量是一個粒子四維動量的長度，是一個羅倫茲不變量。

推廣到三維空間。

$$p^2 \equiv \frac{E^2}{c^2} - |\vec{p}|^2 = m^2c^2$$

另一證明：

$$p^2 = m^2\left[\left(\frac{cdt}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2\right] = m^2c^2$$

$$c^2d\tau^2 = c^2dt^2 - dx^2$$

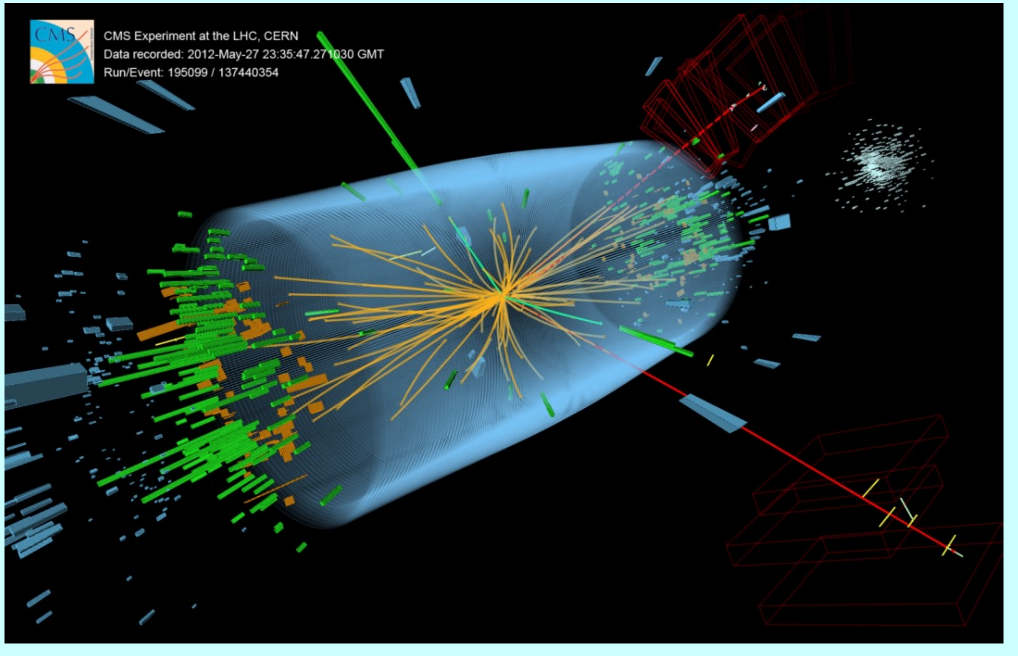
$$p^2 = m^2c^2$$

$\frac{E^2}{c^2} - |\vec{p}|^2 = m^2c^2$ 這個式子更加好用，因為速度$\vec{u}$比$\vec{p}$難測量。

有了$E, |\vec{p}|$，粒子速度就是兩者的比：$u = \frac{p}{E}c^2$ $\vec{u} = \frac{\vec{p}}{E}c^2$

這兩個量都可以直接測量。

這就是質量的現代定義！對一個基本粒子是一個定值常數。



$$E = mc^2$$

為方便起見，在計算過程中，取一個單位系統使 $c = 1$

如此能量、動量、質量就有一樣的單位，一般取為能量單位 eV。

等到計算結束再依單位加入適當的c（以及$\hbar$）。

LEPTONS

e

$J = \frac{1}{2}$

Mass $m = (548.57990943 \pm 0.00000023) \times 10^{-6}$ u

Mass $m = 0.510998910 \pm 0.000000013$ MeV

$\left|m_{e^+} - m_{e^-}\right|/m < 8 \times 10^{-9}$, CL = 90%

$\left|q_{e^+} + q_{e^-}\right|/e < 4 \times 10^{-8}$

Magnetic moment anomaly

$(g-2)/2 = (1159.65218073 \pm 0.00000028) \times 10^{-6}$

$(g_{e^+} - g_{e^-}) \,/\, g_{\text{average}} = (-0.5 \pm 2.1) \times 10^{-12}$

Electric dipole moment $d = (0.07 \pm 0.07) \times 10^{-26}$ e cm

Mean life $\tau > 4.6 \times 10^{26}$ yr, CL = 90% [a]

μ

$J = \frac{1}{2}$

Mass $m = 0.1134289256 \pm 0.0000000029$ u

Mass $m = 105.658367 \pm 0.000004$ MeV

N BARYONS
$(S = 0,\ I = 1/2)$

$p,\ N^+ = uud;\quad n,\ N^0 = udd$

p

$I(J^P) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$

Mass $m = 1.00727646677 \pm 0.00000000010$ u

Mass $m = 938.272013 \pm 0.000023$ MeV [a]

W

$J = 1$

Charge $= \pm 1\ e$

Mass $m = 80.399 \pm 0.023$ GeV

Z

$J = 1$

Charge $= 0$

Mass $m = 91.1876 \pm 0.0021$ GeV [d]

注意光子是以光速 c 前進：

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \xrightarrow[u \to c]{} \infty$$

除非 $m = 0$

事實上從馬克斯威爾方程式可推得電磁波的能量與動量密度成正比：

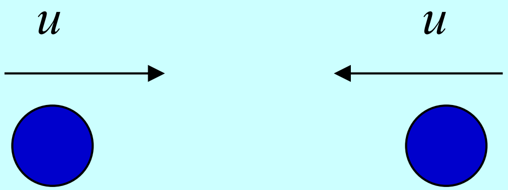
$$E = |\vec{p}|c$$

$$\frac{E^2}{c^2} - |\vec{p}|^2 = 0$$

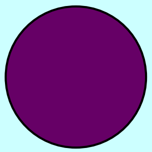
因此光子質量為零，Massless

無質量的粒子必定以光速前進。

完全非彈性碰撞的質量不守恆！



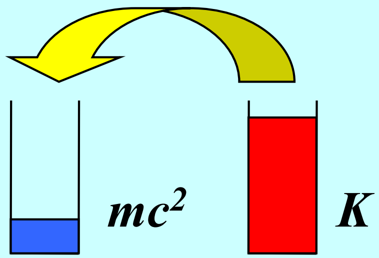
$$E_{i\ \mathrm{total}} = \frac{2mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}$$

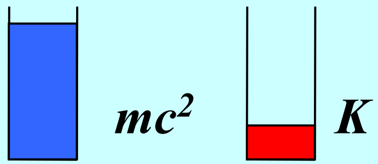


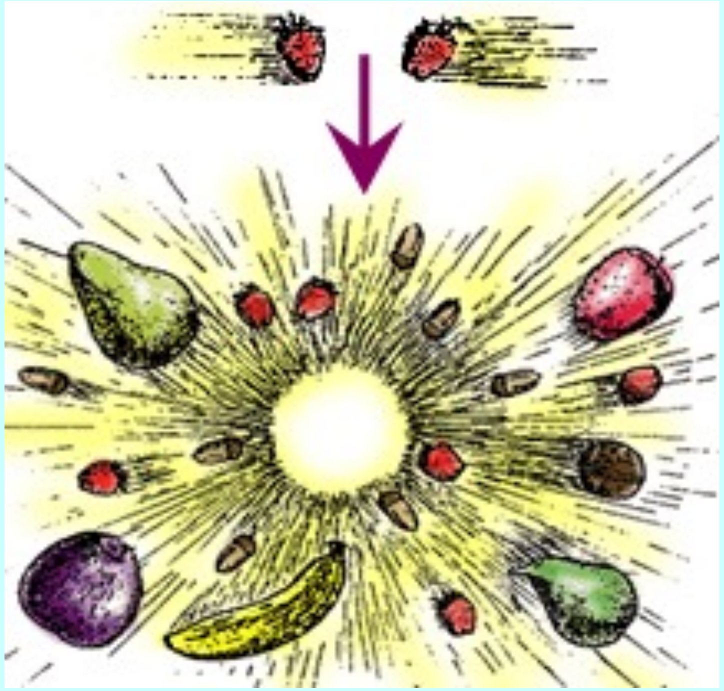
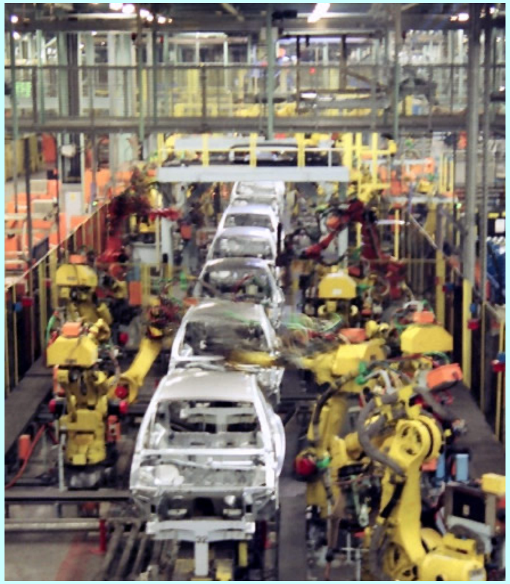
$$E_{f\ \mathrm{total}} = Mc^2$$

$$M = \frac{2m}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} \neq 2m$$

質量不守恆，入射粒子的動能轉換成質量。





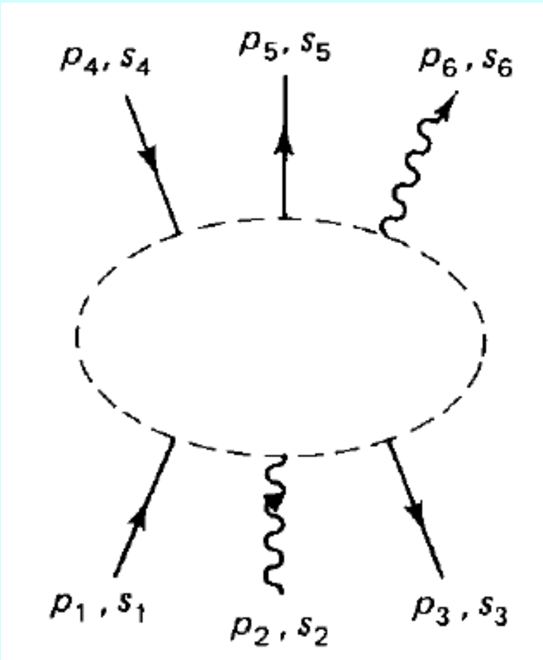
$E = mc^2$

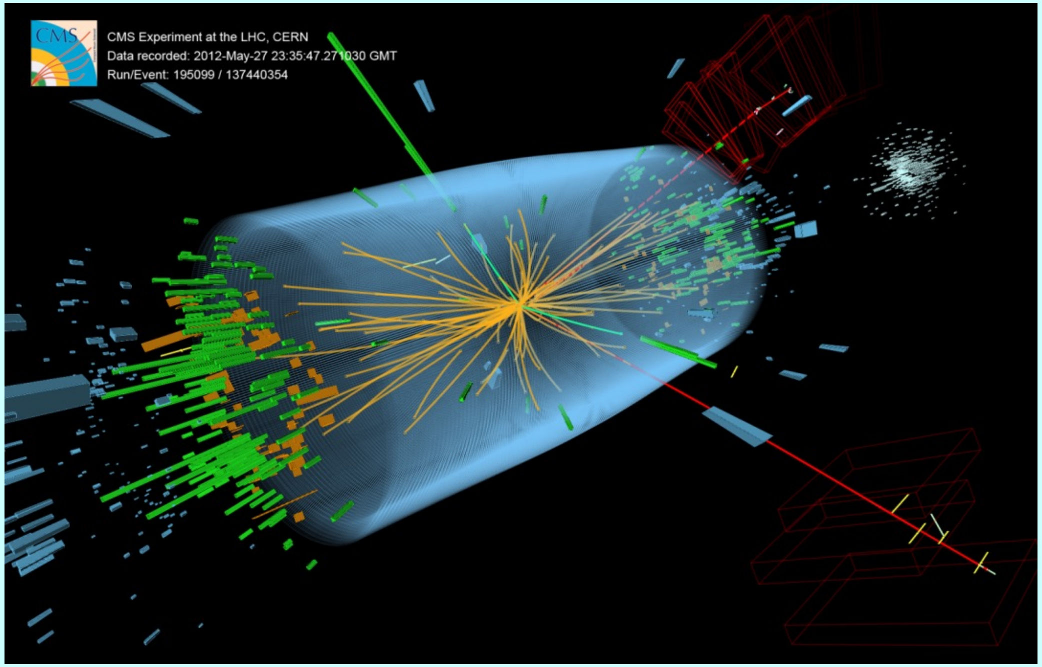
能量可以轉換為質量，產生新的粒子！

Colliders are New Particle factories.

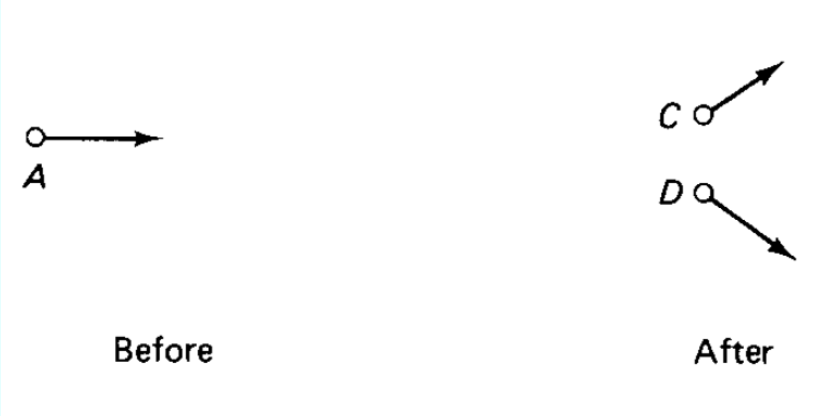
能量與動量是在實驗中對基本粒子的標準測量！

$$(p^0, p^1, p^2, p^3) = \left(\frac{E}{c}, p^x, p^y, p^z\right)$$





$A \longrightarrow C + D$　2 body Decay 二體衰變為例：



Energy is conserved:　$E_A = E_C + E_D$

Momentum is conserved:　$\vec{p}_A = \vec{p}_C + \vec{p}_D$

每一個基本粒子的動量與能量都必須滿足on-shell條件　$\dfrac{E^2}{c^2} - |\vec{p}|^2 = m^2c^2$

$E = c\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2c^2}$　因此能量可以以動量大小$|\vec{p}|$表示。

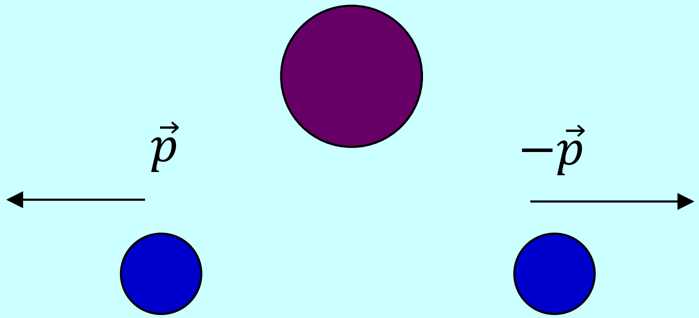
解題訣竅：寫下各個粒子的動量大小$|\vec{p}|$，用上動量守恆。

將各個粒子的能量以其動量大小$|\vec{p}|$表示。用上能量守恆。

運用以上幾個關係，就可解出產物粒子的動量與能量。

產物相同時的二體衰變 $A \to B + B$，

選擇A靜止座標系：



由動量守恆知道產物粒子動量大小$|\vec{p}|$相同，因此能量E_f相等！

$$\vec{p}_{i\ \mathrm{total}} = \vec{p}_{f\ \mathrm{total}} = 0$$

由能量守恆可以得出產物粒子的能量E_f：

$$2E_f = Mc^2 \qquad E_f = \frac{1}{2}Mc^2$$

對單一粒子： $$\frac{E^2}{c^2} - |\vec{p}|^2 = m^2c^2$$

$$|\vec{p}|^2 = \frac{M^2c^2}{4} - m^2c^2$$

產物粒子的能量與動量大小都是固定的值，可以計算出來！

$M > 2m$ 衰變產物的總質量必須小於衰變粒子的質量!

題號： 57　　　　國立臺灣大學 111 學年度碩士班招生考試試題
科目： 近代物理學(A)
節次： 7

1. [20 points] Consider the electron radiation process

$$e(p) \to e(p') + \gamma(q)$$

where p, p' and q are their 4-momenta and all these particles are on shell.

(a) [10] Use appropriate equations to explain why this process cannot happen *in vacuum*.

(b) [10] Use appropriate equations to explain why this process can possibly happen *in a detector* (*e.g.*, the Cerenkov radiation). Specify under what condition does that happen.

產物不同時的二體衰變 $A \to B + C$

A pion at rest decays into a muon plus a neutrino (Fig. 3.5). Question: What is the speed of the muon? Speed is usually inconvenient to use.

What is the momentum of the muon?

$$\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$$

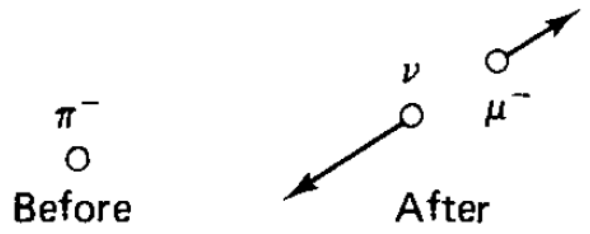


Figure 3.5 Decay of the charged pion (Example 3.3).

Solution. Conservation of energy requires $E_\pi = E_\mu + E_\nu$. Conservation of momentum gives $\mathbf{p}_\pi = \mathbf{p}_\mu + \mathbf{p}_\nu$; but $\mathbf{p}_\pi = 0$, so $\mathbf{p}_\mu = -\mathbf{p}_\nu$. Thus the muon and the neutrino fly off back-to-back, with equal and opposite momenta.

$$\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$$

選擇π的靜止座標系，這就是$\mu + \nu$的質心COM坐標系：

由動量守恆，可得μ, ν的三維動量大小相等，方向相反：$|\vec{p}_\nu| = |\vec{p}_\mu|$

由能量守恆可得：$E_\pi = E_\mu + E_\nu$

這些能量都可以用動量大小$|\vec{p}_\mu|$來表示：$E = c\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2c^2}$

$$E_\pi = m_\pi c^2$$

$$E_\mu = c\sqrt{|\vec{p}_\mu|^2 + m_\mu^2 c^2}$$

$$E_\nu = c|\vec{p}_\nu| = c|\vec{p}_\mu|$$

能量守恆：$m_\pi c^2 = c\sqrt{|\vec{p}_\mu|^2 + m_\mu^2 c^2} + c|\vec{p}_\mu|$

$$(m_\pi c - |\vec{p}_\mu|)^2 = |\vec{p}_\mu|^2 + m_\mu^2 c^2$$

$$m_\pi^2 c^2 - 2m_\pi c|\vec{p}_\mu| = m_\mu^2 c^2$$

動量大小$|\vec{p}_\mu|$就可以解出：

$$|\vec{p}_\mu| = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} c$$

能量也可以解出：

$$E_\mu = c\sqrt{|\vec{p}_\mu|^2 + m_\mu^2 c^2} = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi} c^2$$

Suggestion 3. Use four-vector notation, and exploit the invariant dot product.

$$p^2 = \frac{E^2}{c^2} - |\vec{p}|^2 = m^2c^2$$

And Remember that for any real particles:

$$p_\pi = p_\mu + p_\nu, \quad \text{or} \quad p_\nu = p_\pi - p_\mu$$

Taking the scalar product of each side with itself, we obtain

$$p_\nu^2 = p_\pi^2 + p_\mu^2 - 2p_\pi \cdot p_\mu$$

$$0 = m_\pi^2c^2 + p_\mu^2c^2 + \frac{2E_\pi E_\mu}{c^2} - 2\vec{p}_\pi \cdot \vec{p}_\mu$$

Condition for any frame

But

In COM

$$p_\nu^2 = 0; \qquad p_\pi^2 = m_\pi^2c^2, \qquad p_\mu^2 = m_\mu^2c^2; \quad \text{and} \quad p_\pi \cdot p_\mu = \frac{E_\pi}{c}\frac{E_\mu}{c} = m_\pi E_\mu$$

Therefore
$$0 = m_\pi^2c^2 + m_\mu^2c^2 - 2m_\pi E_\mu$$

from which E_μ follows immediately. By the same token

$$p_\mu = p_\pi - p_\nu$$

Squaring yields

$$m_\mu^2c^2 = m_\pi^2c^2 - 2m_\pi E_\nu$$

But $E_\nu = |\mathbf{p}_\nu|c = |\mathbf{p}_\mu|c$, so

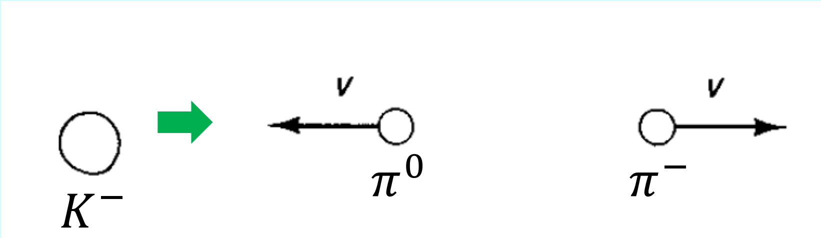
$$2m_\pi|\mathbf{p}_\mu| = (m_\pi^2 - m_\mu^2)c$$

2. A K^+ meson at rest can decay into pions through the channel: $K^+ \to \pi^+ + \pi^0$. Following the decay, the π^+ meson will further decay into a μ^+ meson and a neutrino. Let rest masses of K^+、π^+、π^0 and μ^+ meson be m_K、m_{π^+}、m_{π^0} and m_{μ^+}, and ignore the rest mass of the neutrino. Denote $\gamma_{\pi^+} = 1/\sqrt{1-(v_{\pi^+}/c)^2}$ and $\gamma^*_{\mu^+} = 1/\sqrt{1-(v_{\mu^+}/c)^2}$, where v_{π^+} is the speed of π^+ in the rest frame of K^+ and where v_{μ^+} is the speed of μ^+ in the rest frame of π^+. Answer the following questions (express your answers in terms of m_K、m_{π^+}、m_{π^0}、m_{μ^+}、γ_{π^+} and $\gamma^*_{\mu^+}$):

(a) (7%) Find the energy of π^+ in the rest frame of K^+.

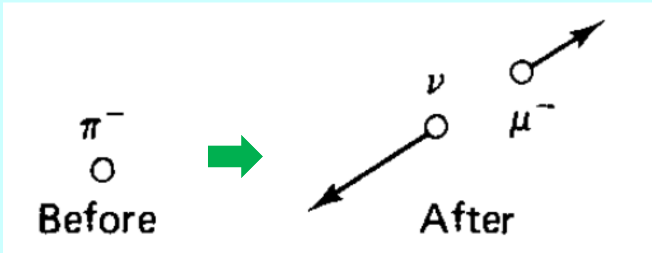
(b) (3%) Find the energy of μ^+ in the rest frame of π^+.

(c) (10%) Find the maximum and minimum energies of μ^+ in the rest frame of K^+



設π^-與π^0質量接近

ν^0質量為零。



台灣聯合大學系統 111 學年度碩士班招生考試試題

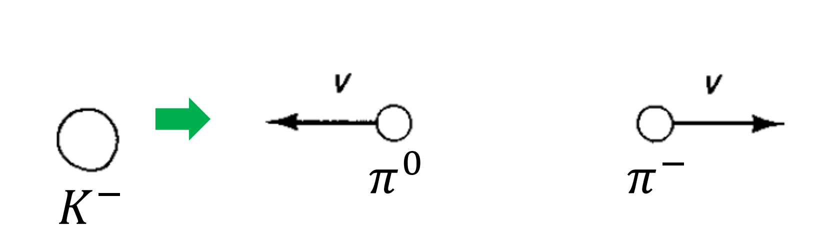
ignore the rest mass of the neutrino. Denote $\gamma_{\pi^+} = 1/\sqrt{1-(v_{\pi^+}/c)^2}$ and $\gamma^*_{\mu^+} = 1/\sqrt{1-(v_{\mu^+}/c)^2}$, where v_{π^+} is the speed of π^+ in the rest frame of K^+ and where v_{μ^+} is the speed of μ^+ in the rest frame of π^+. Answer the following questions (express your answers in terms of m_K、m_{π^+}、m_{π^0}、m_{μ^+}、γ_{π^+} and $\gamma^*_{\mu^+}$):

(a) (7%) Find the energy of π^+ in the rest frame of K^+.

(b) (3%) Find the energy of μ^+ in the rest frame of π^+.

(c) (10%) Find the maximum and minimum energies of μ^+ in the rest frame of K^+

設π^-與π^0質量接近　K^-衰變就是第一種產物質量相同的情況



$$E_\pi = \frac{1}{2} M_K c^2$$

由此式還可以算出π的動量與速度：

$$E_\pi = \frac{1}{2} M_K c^2 = \frac{m_\pi c^2}{\sqrt{1-\frac{v_\pi^2}{c^2}}}$$

$$\frac{1}{2} M_K c^2 = \frac{c}{2}\sqrt{|\vec{p}|^2 + m_\pi^2 c^2}$$

$$|\vec{p}|^2 = \frac{M_K^2 c^2}{4} - m_\pi^2 c^2$$

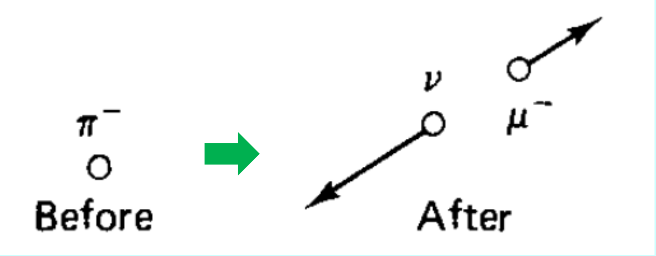
$$\gamma_\pi = \frac{M_K}{2 m_\pi}$$

$$v_\pi = c\sqrt{1-\frac{4 m_\pi^2}{M_K^2}}$$

(b) (3%) Find the energy of μ^+ in the rest frame of π^+.

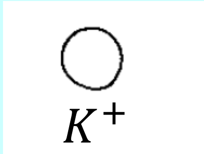
ν^0質量為零。

在π的靜止座標，就是第二種，產物一質量為零的情況：



$$E_\mu = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi} c^2$$

(c) (10%) Find the maximum and minimum energies of μ^+ in the rest frame of K^+

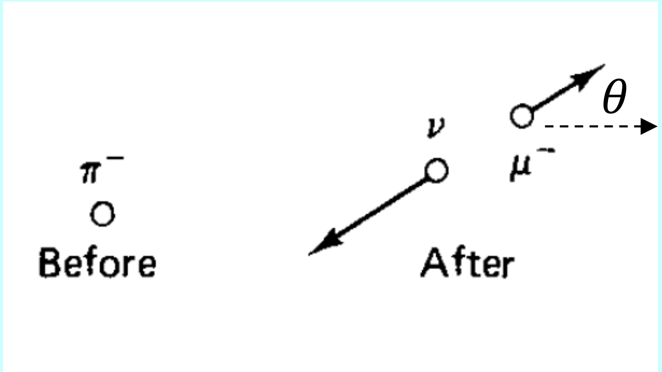


$-v_\pi$

$$p'_x = \gamma\left(p_x - \frac{v}{c^2}\cdot E\right)$$

$$E' = \gamma(E - v\cdot p_x)$$

$$p'_{y,z} = p_{y,z}$$



$$v_\pi = c\sqrt{1-\frac{4m_\pi^2}{M_K^2}}$$

K的靜止座標相對於π的靜止座標，是以速度$-v_\pi$移動。

$$\gamma_\pi = \frac{M_K}{2m_\pi}$$

K的靜止座標內μ的能量，利用羅倫茲變換就等於：

$$|\vec{p}_\mu| = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi}c$$

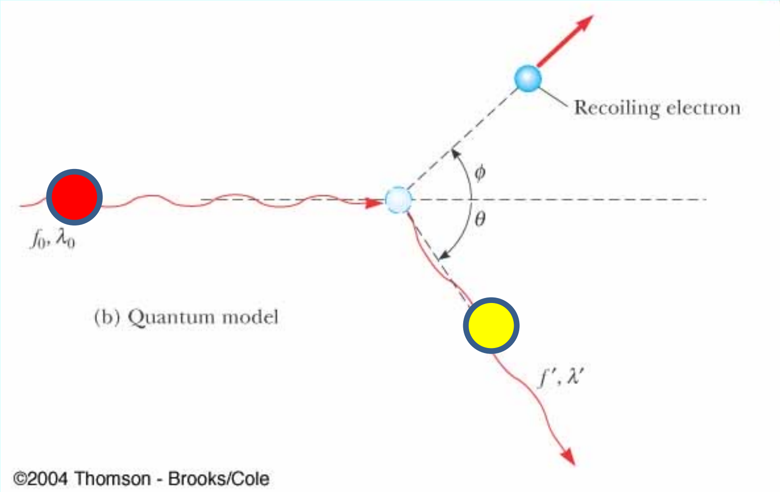
$$E' = \gamma(E - v\cdot p_x) = \gamma_\pi\left(E_\mu + v_\pi|\vec{p}_\mu|\cos\theta\right)$$

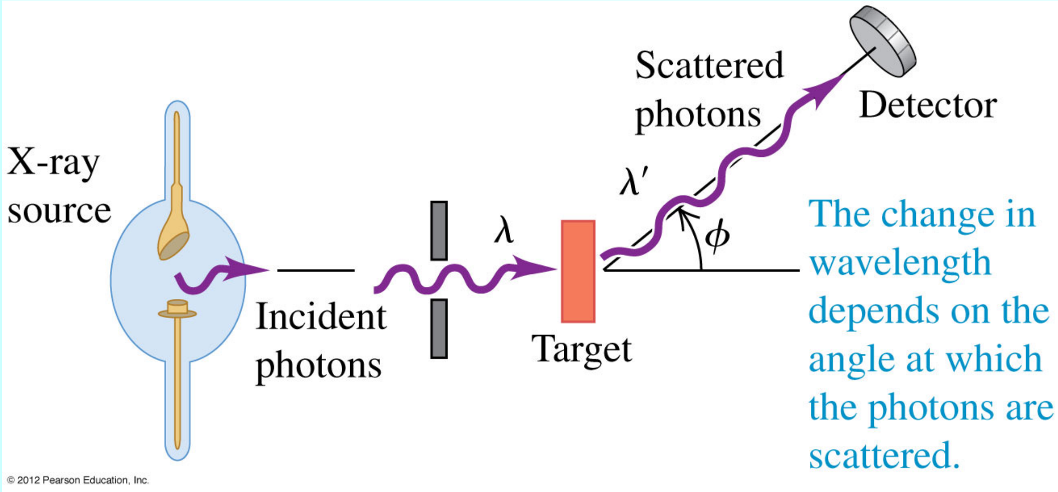
$$E_\mu = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi}c^2$$

二體衰變能量與動量都固定，因此此式只有角度可變！

最大值與最小值就在 $\cos\theta = \pm 1$。

康普頓效應 Compton Scattering



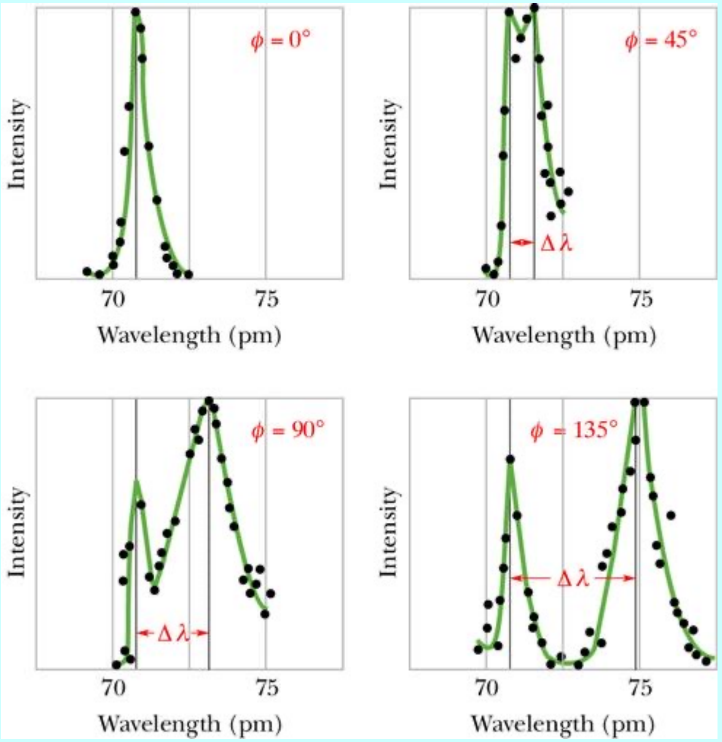


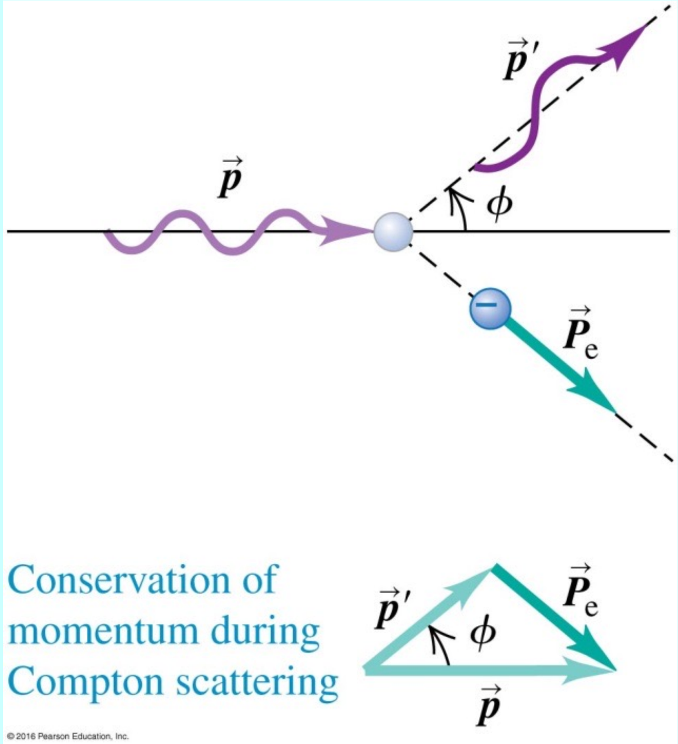
光子，與電子碰撞後，光子動量會改變。因此波長會改變。

這是典型的相對論性二體彈性碰撞。

動量的改變與散射角ϕ有關，

因此波長的變化也與ϕ有關。





$\lambda' - \lambda = \dfrac{h}{mc}(1 - \cos\phi)$ 見課本推導。

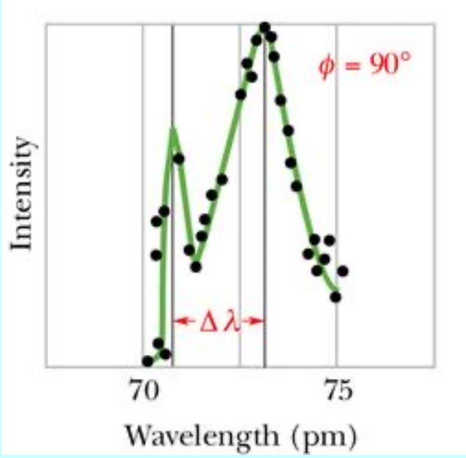
解題訣竅：寫下各個粒子的動量大小$|\vec{p}|$，用上動量守恆。

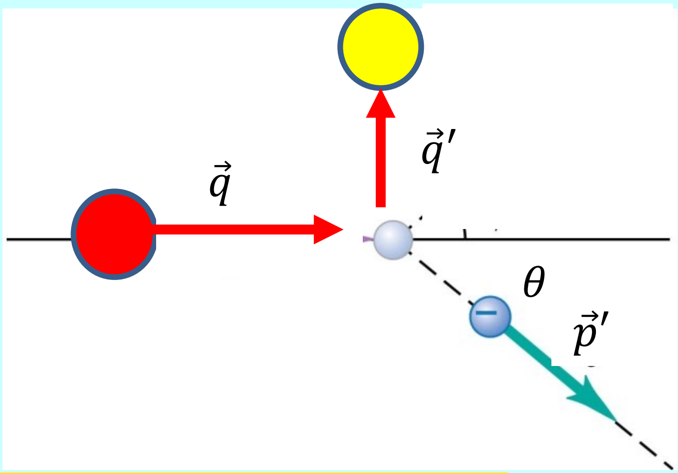
將各個粒子的能量以其動量大小$|\vec{p}|$表示。用上能量守恆。

$$\gamma^0(\vec{q}) + e^-(\vec{p}) \to \gamma^0(\vec{q}') + e^-(\vec{p}')$$

以散射角$\phi = 90°$為例：

6. A 100-keV photon collides with an electron at rest. It is scattered through 90°. What is its energy after the collision? What is the kinetic energy in eV of the electron after the collision, and what is the direction of its recoil?





$$\gamma^0(\vec{q}) + e^-(\vec{p}) \to \gamma^0(\vec{q}') + e^-(\vec{p}')$$

解題訣竅：寫下各個粒子的動量大小，用上動量守恆： $\vec{p}' = |\vec{q}|\hat{\imath} - |\vec{q}'|\hat{\jmath}$

$$|\vec{p}'|^2 = |\vec{q}|^2 + |\vec{q}'|^2$$

兩光子動量正好是散射電子動量的分量！

將各個粒子的能量以其動量大小表示。用上能量守恆。

因為光子質量為零，因此：

$$E_\gamma = |\vec{q}|c = h\nu \qquad E'_\gamma = |\vec{q}'|c = h\nu'$$

$$E_\gamma + m_e c^2 = E'_\gamma + c\sqrt{|\vec{q}|^2 + |\vec{q}'|^2 + m_e^2 c^2}$$

$$|\vec{q}| - |\vec{q}'| + m_e c = \sqrt{|\vec{q}|^2 + |\vec{q}'|^2 + m_e^2 c^2}$$

$$|\vec{q}'| = \frac{m_e c}{|\vec{q}| + m_e c}|\vec{q}| \qquad \nu' = \frac{m_e c^2}{h\nu + m_e c^2}\nu$$