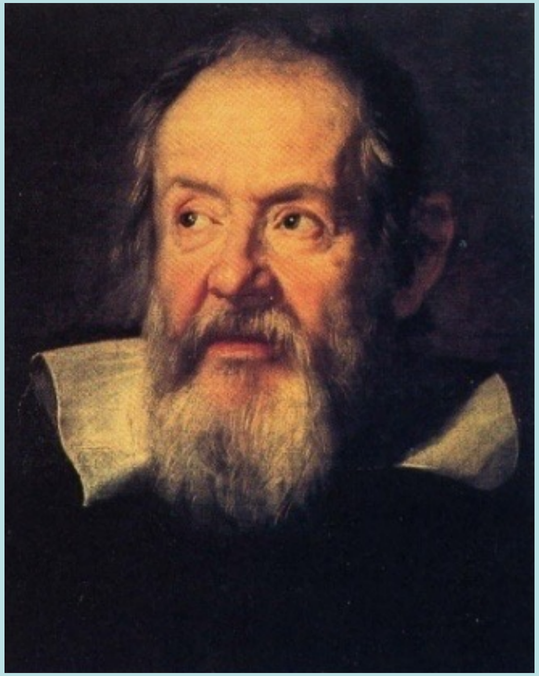
運動的物理

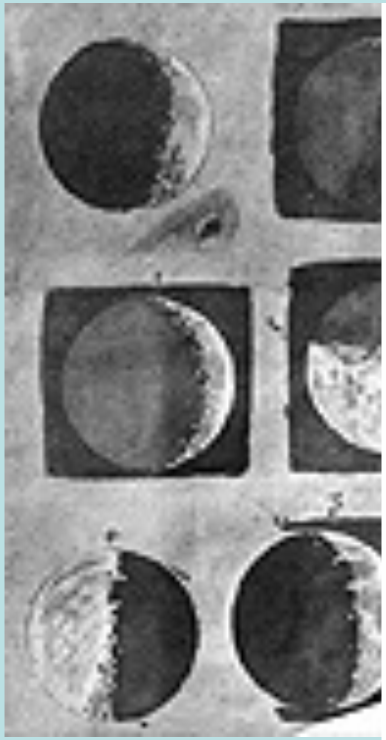
Galileo Galilei (1564-1642)

科學是描述自然現象的！

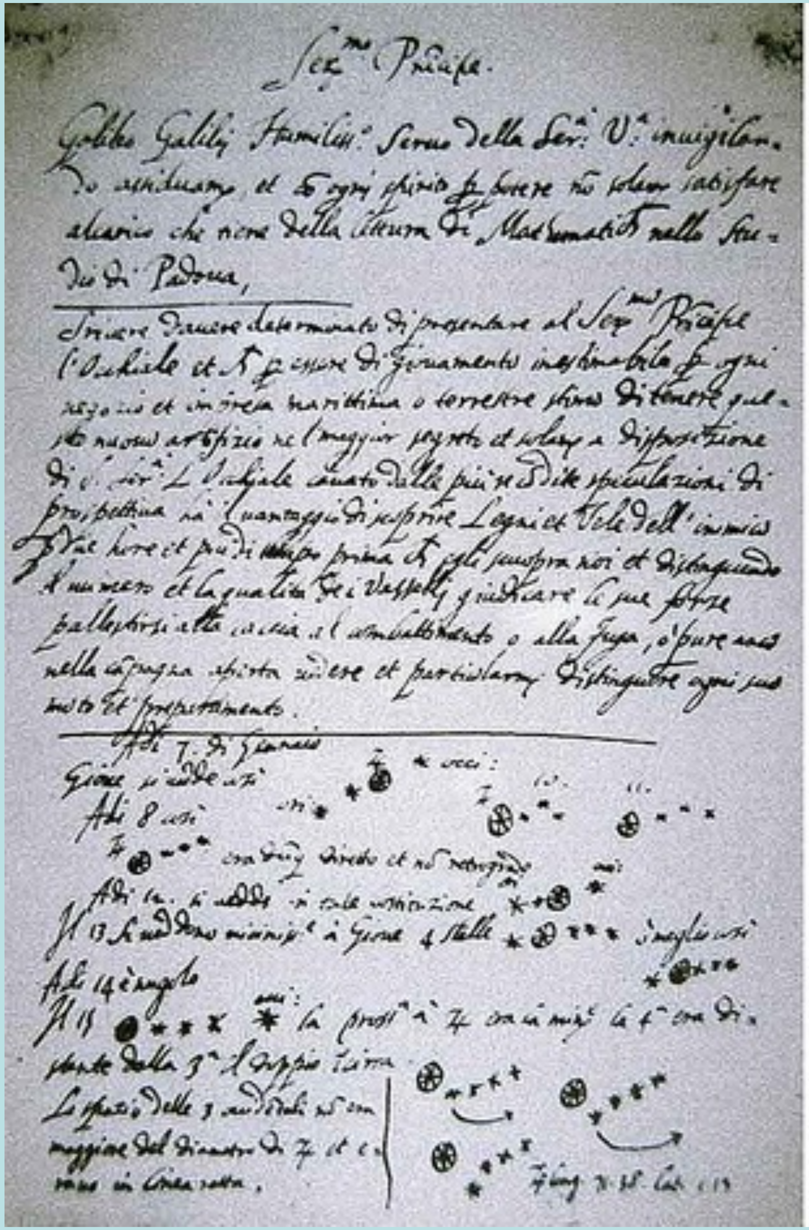
觀察現象是科學最基本的方法



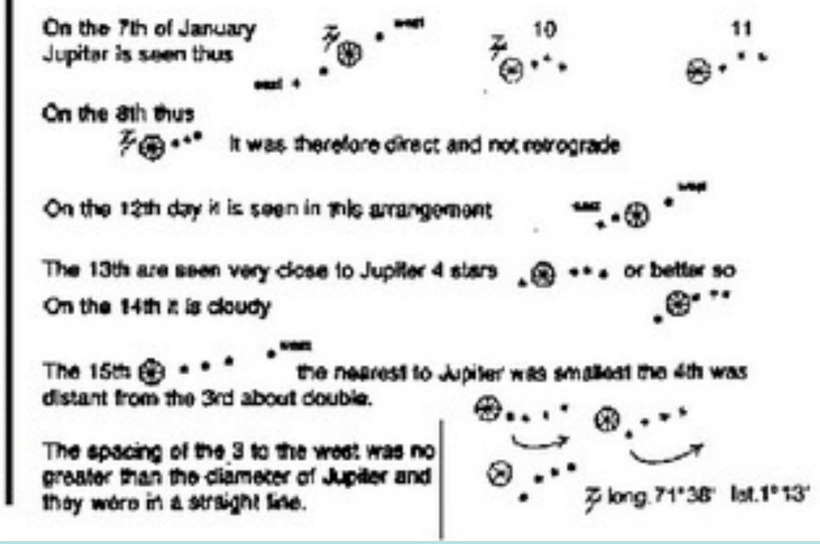
Galileo Galilei (1564-1642)



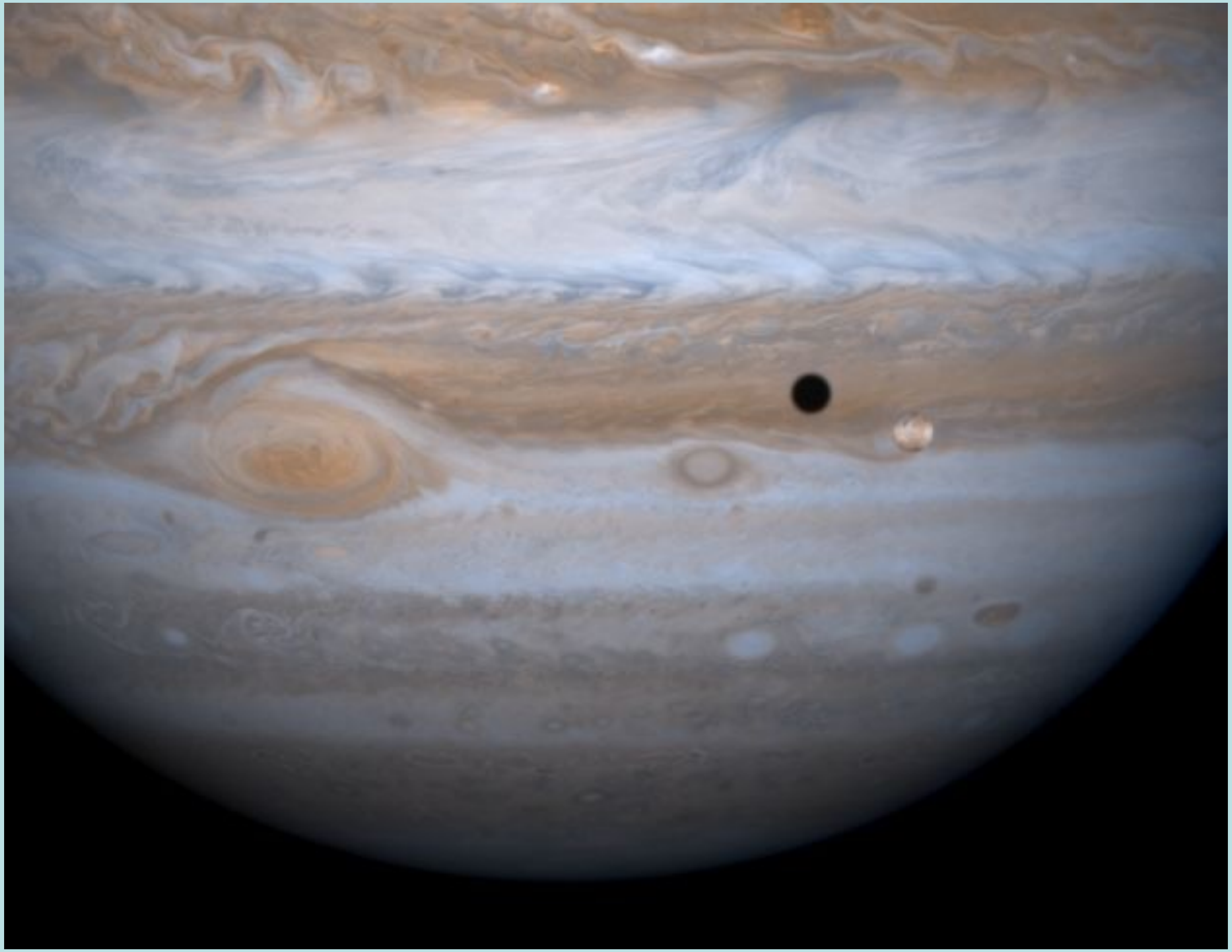
GALILEO DESCRIBES HIS DISCOVERIES
TO THE CHURCH



Most Serene Prince.
Galileo Galilei most humbly prostrates himself before Your Highness, watching carefully, and with all spirit of willingness, not only to satisfy what concerns the reading of mathematics in the study of Padua, but to write of having decided to present to Your Highness a telescope that will be a great help in maritime and land enterprises. I assure you I shall keep this new invention a great secret and show it only to Your Highness. The telescope was made for the most accurate study of distances. This telescope has the advantage of discovering the ships of the enemy two hours before they can be seen with the natural vision and to distinguish the number and quality of the ships and to judge their strength and be ready to chase them, to fight them, or to flee from them; or, in the open country to see all details and to distinguish every movement and preparation."

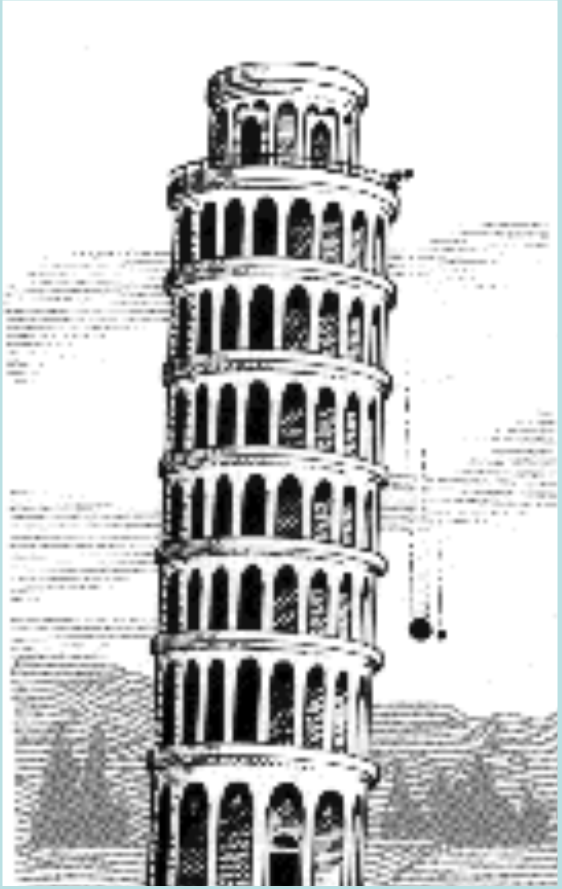


It was on this page that Galileo first noted an observation of the moons of Jupiter. This observation upset the notion that all celestial bodies must revolve around the Earth. 並非所有星體都要繞著地球轉。 Galileo published a full description in *Sidereus Nuncius* in March 1610。



上圖是木星最內側的伽利略衛星，埃歐(Io) 位於氣體行星巨人的前方。 埃歐左方的黑點則是它自己的影子。這張將真實色彩做強化對比的影像，是兩年前無人太空船卡西尼(Cassini)號2002年經過木星時拍的，它將於 2004 年飛抵 土星。

伽利略更進一步主張：所有的知識都要通過實驗來檢驗！

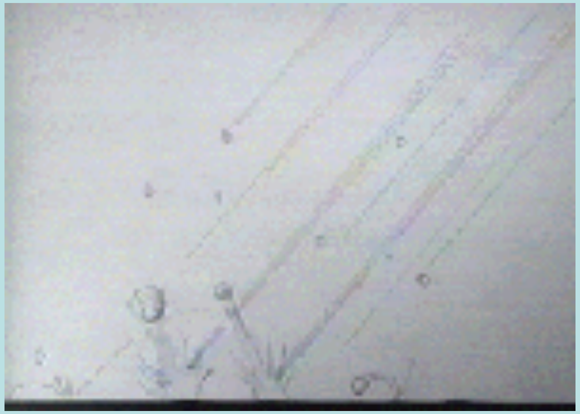


哲學通過辯論來檢驗！

著名的比薩斜塔實驗，檢驗自由落體運動，就是最好的例子。

雅里斯多德由日常經驗及直覺主張物體的運動由物體的本質決定。

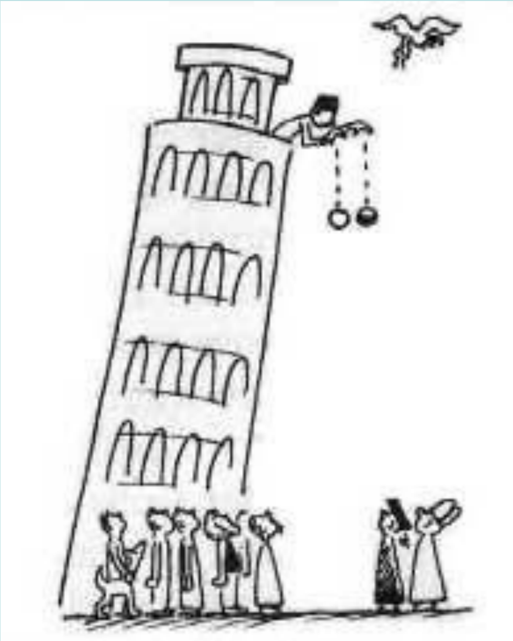
越重的東西下落得越快。

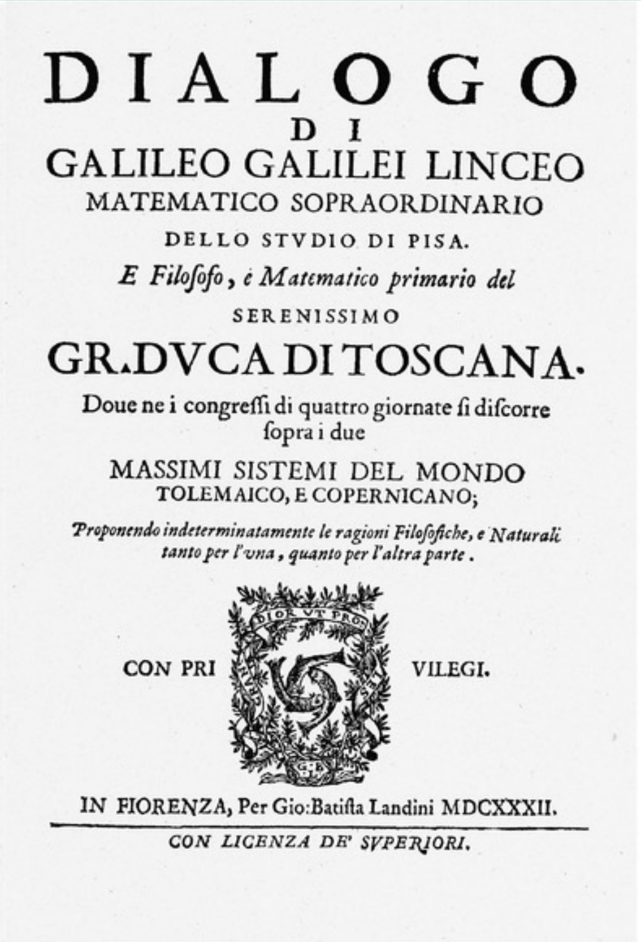


可是冰雹落下時無分大小。

並不會大冰雹先落，小冰雹後落。

As for Galileo's interest in disproving Aristotle's Theory about falling objects, years later he said that he had first thought about this during a hailstorm, when he notice that both large and small hailstones hit the ground at the same time. If Aristotle were right, this could only happen if the larger stones dropped from a higher point in the clouds -- but at virtually the same time -- or that the lighter ones started falling earlier than the heavier ones -- neither of which seemed very probable to Galileo. Instead, the simplest explanation was simply that heavy or light, all hailstones fell simultaneously with the same speed.



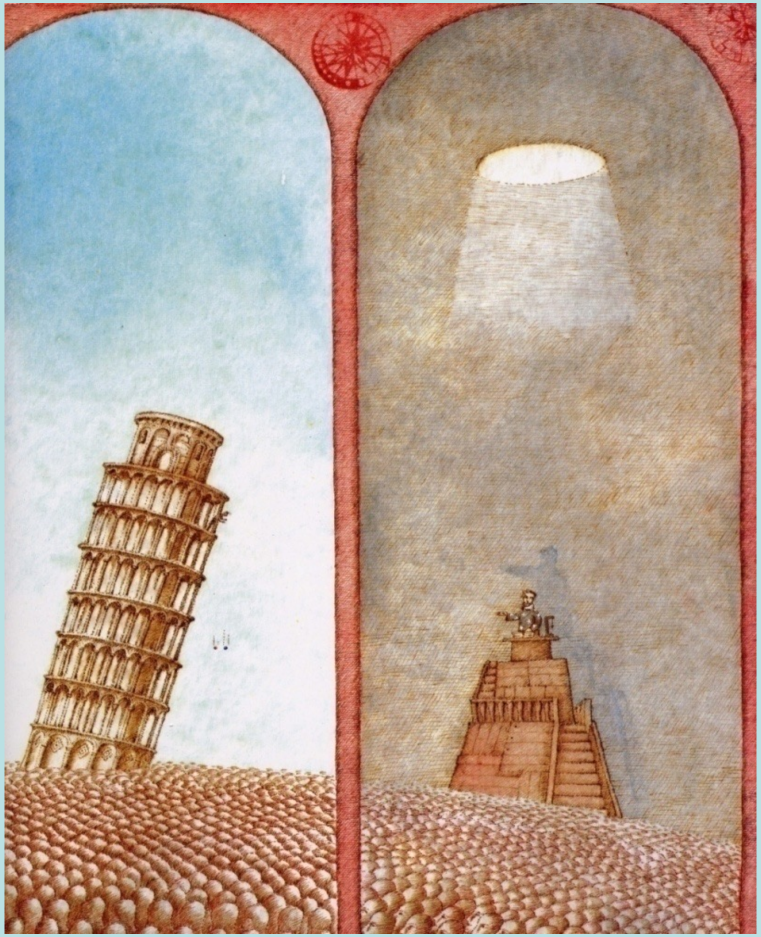

DIALOGO
DI
GALILEO GALILEI LINCEO
MATEMATICO SOPRAORDINARIO
DELLO STVDIO DI PISA.
E Filosofo, è Matematico primario del
SERENISSIMO
GR.DVCA DI TOSCANA.
Doue ne i congressi di quattro giornate si discorre
sopra i due
MASSIMI SISTEMI DEL MONDO
TOLEMAICO, E COPERNICANO;
Proponendo indeterminatamente le ragioni Filosofiche, e Naturali tanto per l'vna, quanto per l'altra parte.

CON PRI VILEGI.

IN FIORENZA, Per Gio:Batista Landini MDCXXXII.

CON LICENZA DE' SVPERIORI.

如果沒有空氣，所有物體，無論輕重落地時間相同

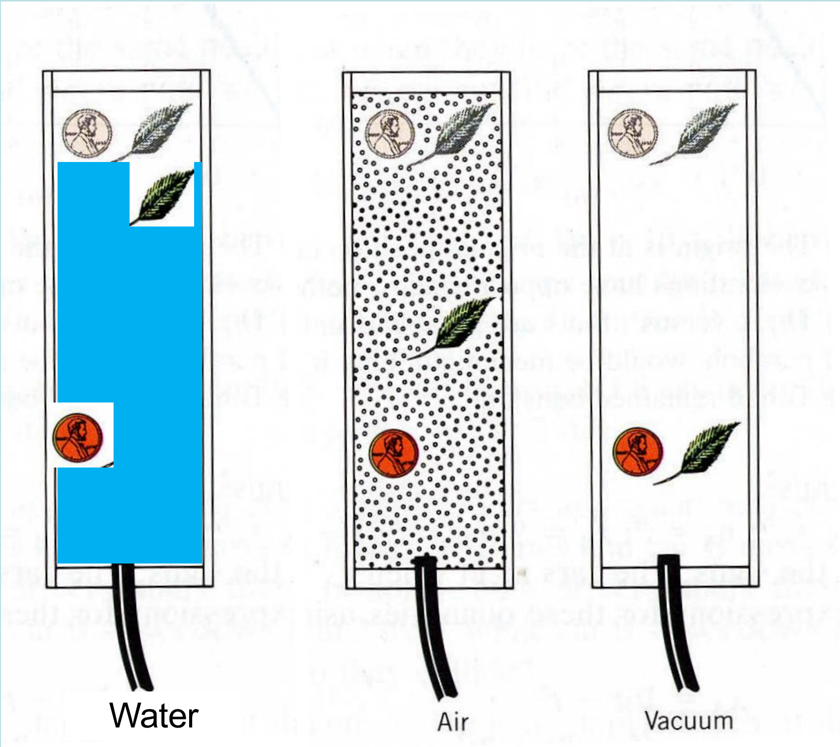


Whether or not Galileo ever performed his famous experiment on the leaning tower hardly seems to matter -- a similar experiment-demonstration had already been published by Benedetti Giambattista in 1553, and the test had also been made and published by the Flemish engineer Simon Stevin in 1586.

"the most beautiful thought experiment ever devised."

如果沒有空氣，所有物體，無論輕重落地時間相同

但伽利略並無法製造出無空氣的環境來作觀察



他作了一個理論的想像實驗：

若介質極度稠密，重的物體不受影響，但輕的物體將幾乎不會下落！

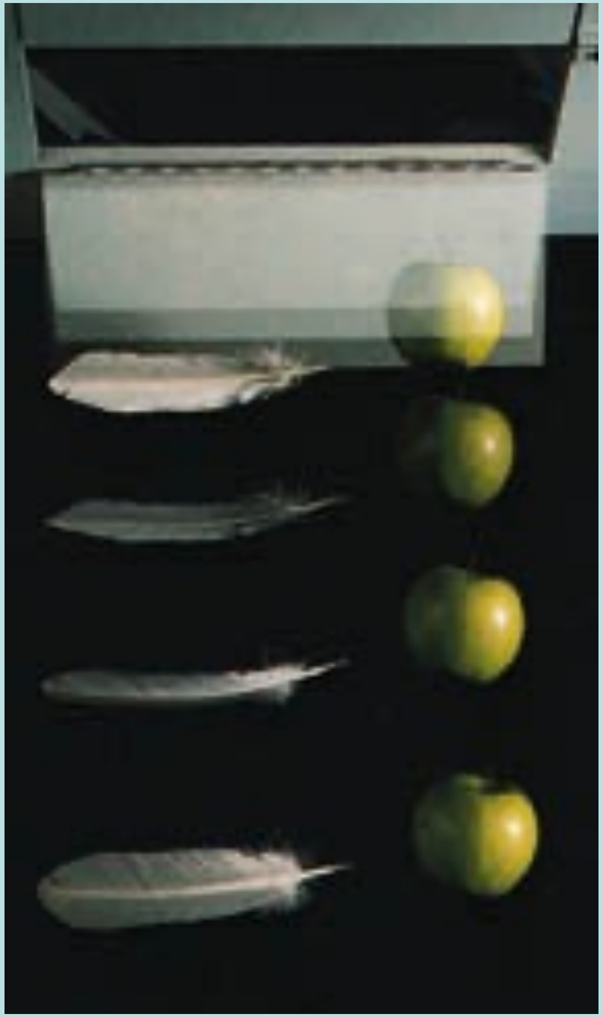
將介質阻力逐漸變小，物體的行為會往相反方向演進，

輕的物體開始下落，與重的物體的差距越來越小。

在沒有介質阻力下，所有物體運動的差距消失，將以同樣的方法下落

沒有介質阻力下，所有物體將以同樣的方法下落。

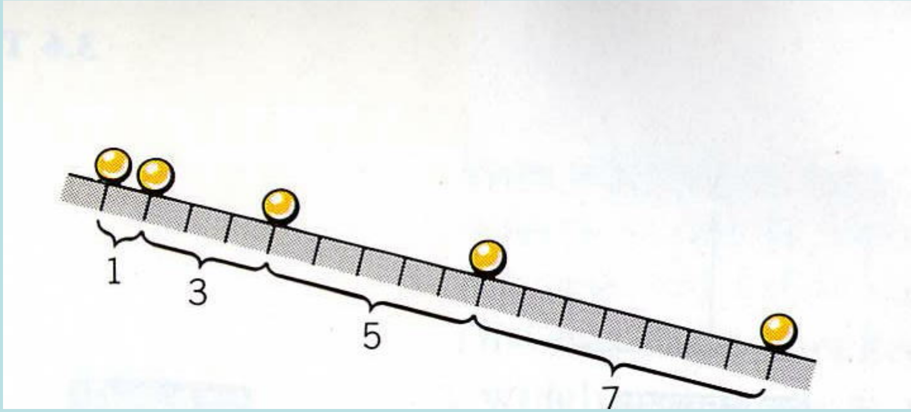
地表上物體的下落運動是普遍的，因此非常特別。

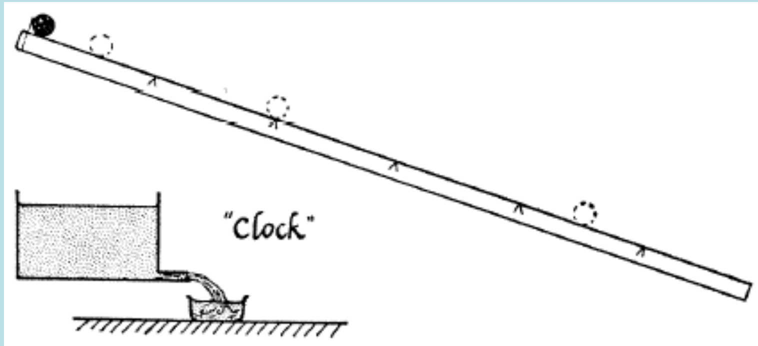


地表上物體的下落運動是普遍的，因此非常特別。

觀察這個特別的現象就很重要！

測量物體下落的距離與時間的關係！





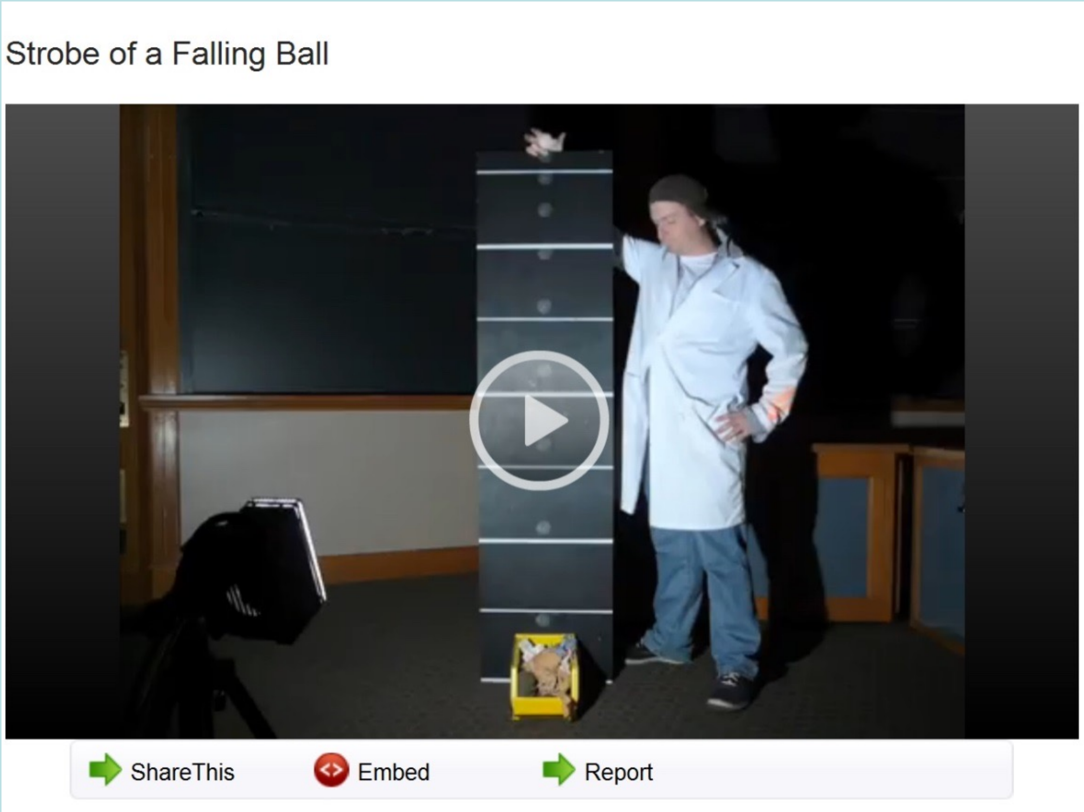
伽利略透過實驗觀察，發現物體下落的距離與時間的平方成正比。

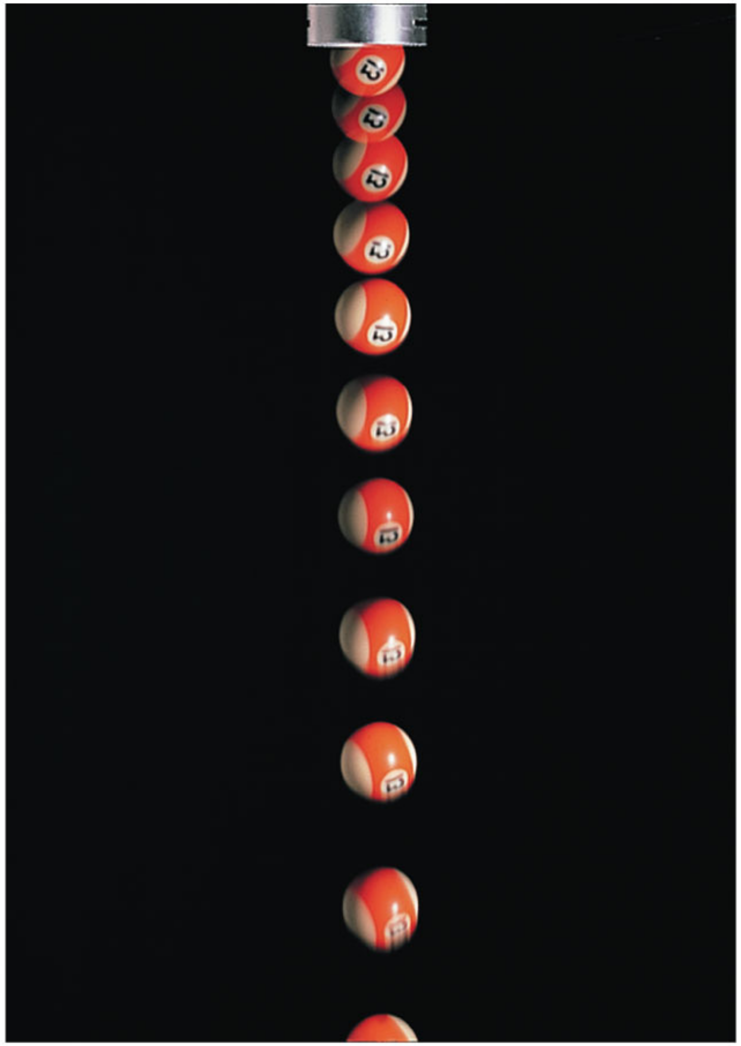
伽利略聲稱，這表示物體下落的加速度是定值！

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2$$

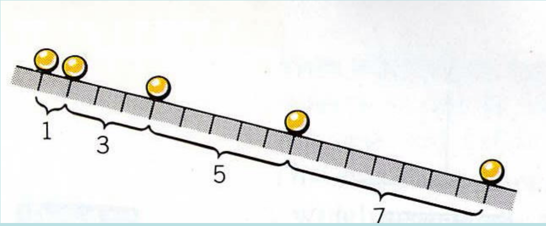
對物體運動的研究應該由速度轉移到加速度！

運動速度越來越快！

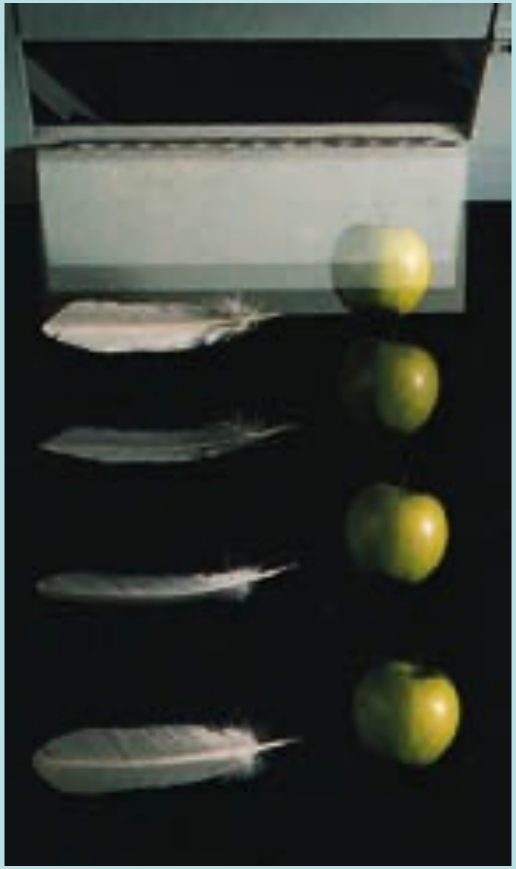


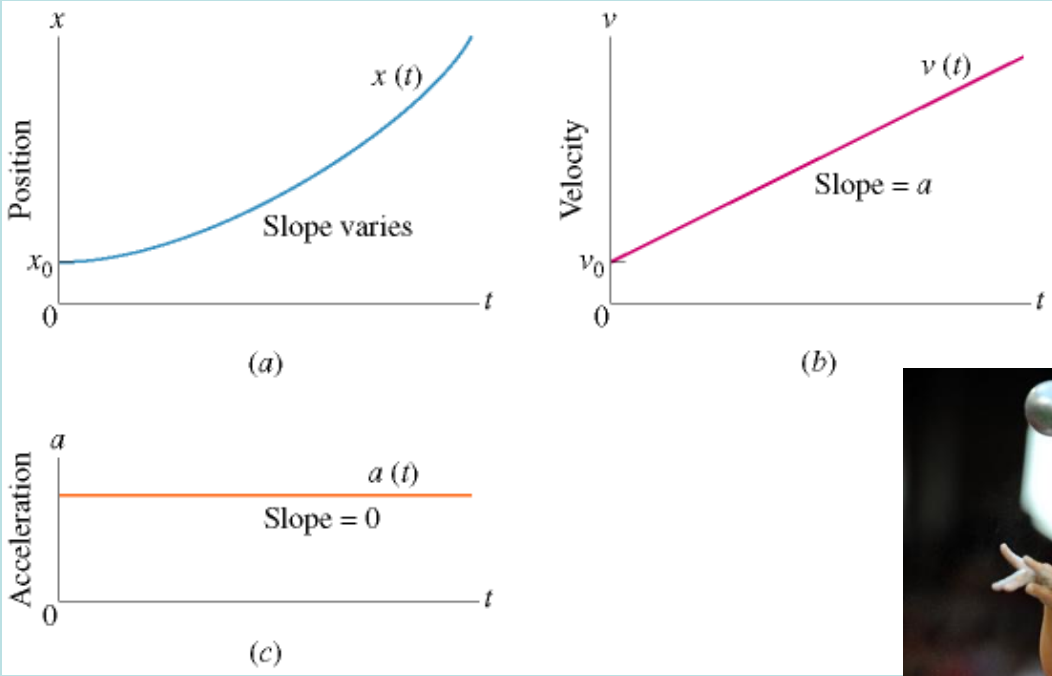


落體距離及速度與時間的關係



$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2$$



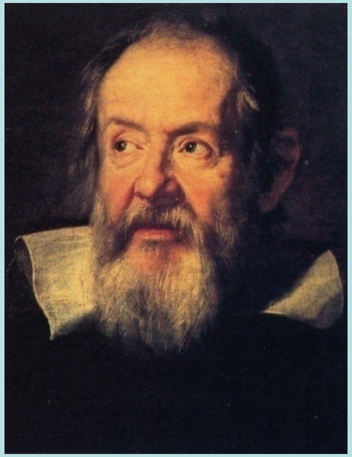


自由落體是等加速度運動！

地表物體運動都是等加速度運動！

對於運動研究來說，**加速度**比速度重要！

對物體運動研究的焦點必須由速度轉移到加速度！



一門廣博精深的新科學已經誕生，我的工作只是一個開端，其他更聰明的心靈將可以利用其中的方法與手段，來探索新科學以致最遙遠的角落

物理定律是以數學描述的，因此是抽象的（mathematical and abstract）

要了解宇宙就得了解上帝的語言，而上帝的語言是數學

古典物理定律全部由數學寫成

Maxwell's equations

I. $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0}$

II. $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$

III. $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$

IV. $c^2 \nabla \times \boldsymbol{B} = \dfrac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0} + \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$

Conservation of charge

$$\nabla \cdot \boldsymbol{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Force law

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

Law of motion

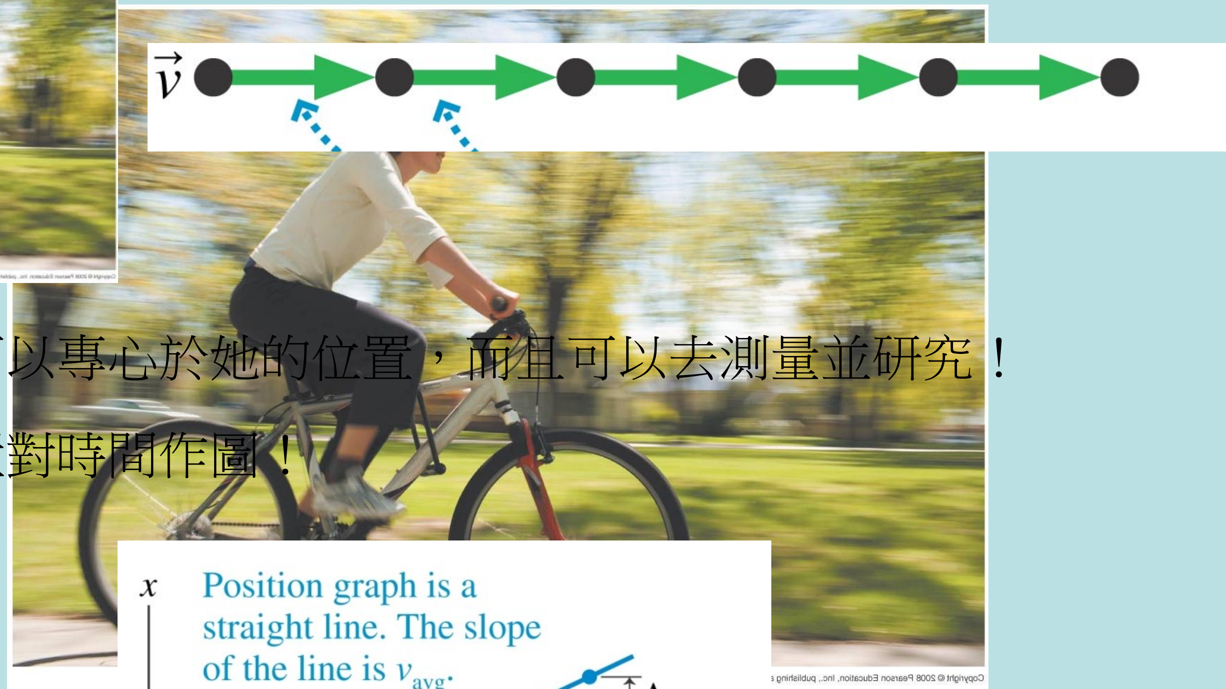
$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{F}, \quad \text{where}$$

Gravitation

$$\boldsymbol{F} = -G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}\,\boldsymbol{e}_r$$

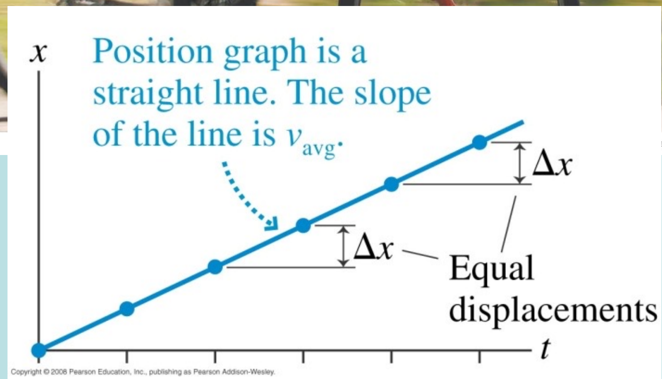
牛頓力學是植基於粒子模型:

一個物體的運動可以簡化為將一個沒有大小的點！

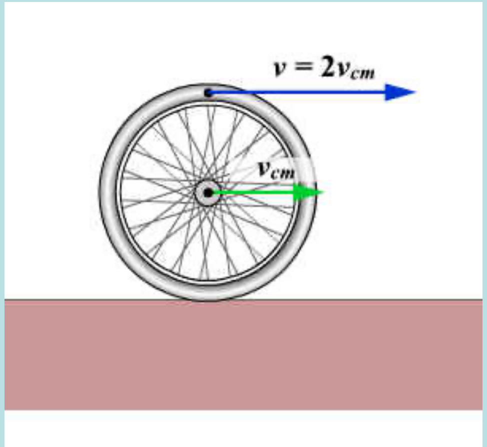


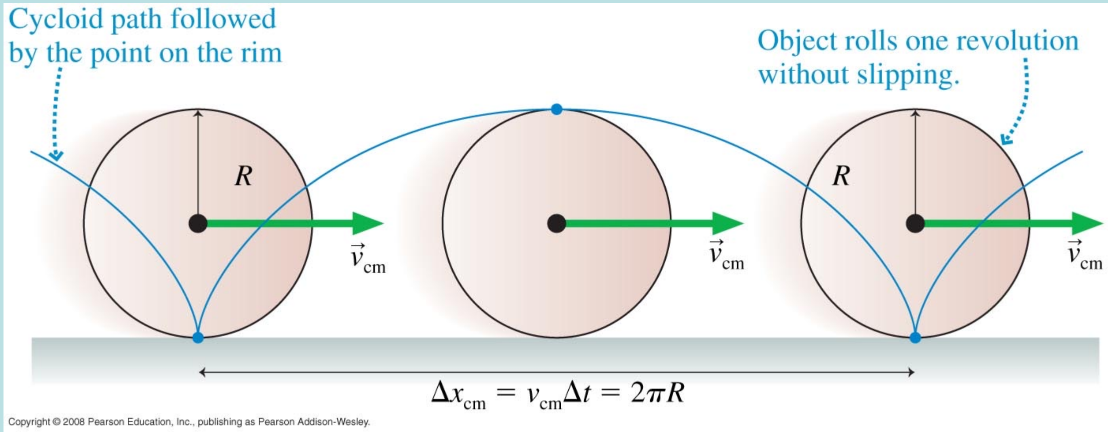
如此我們可以專心於她的位置，而且可以去測量並研究！

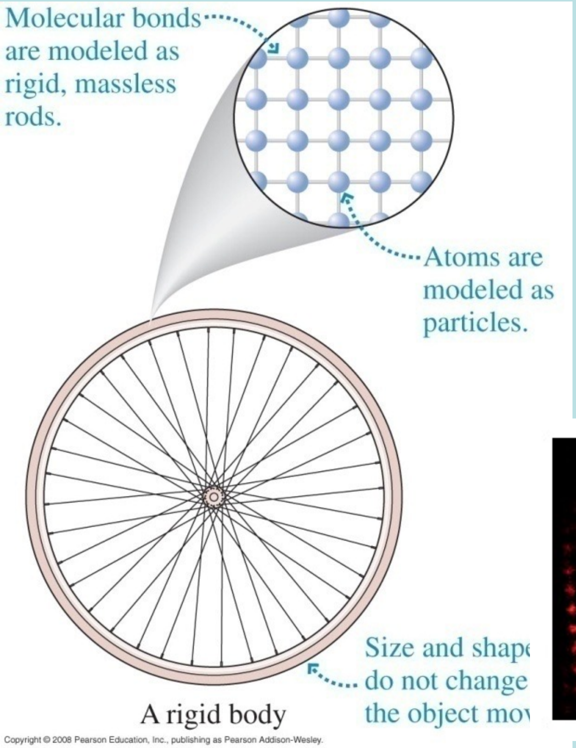
例如以位置對時間作圖！

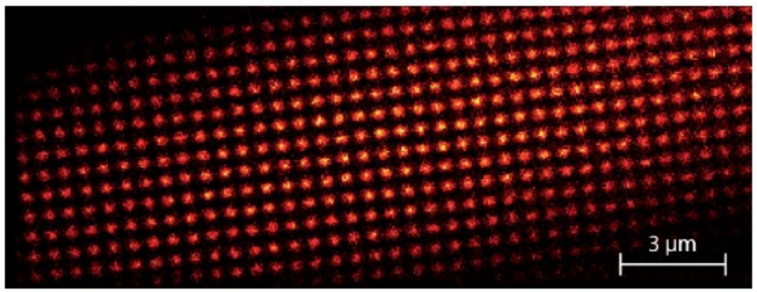


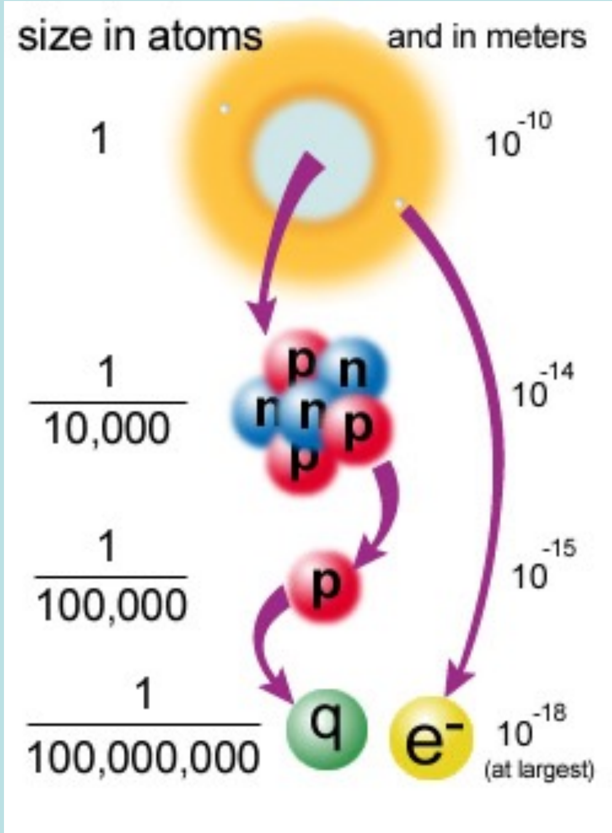
而可以慢慢加回去、一件一件有系統地加以考慮：





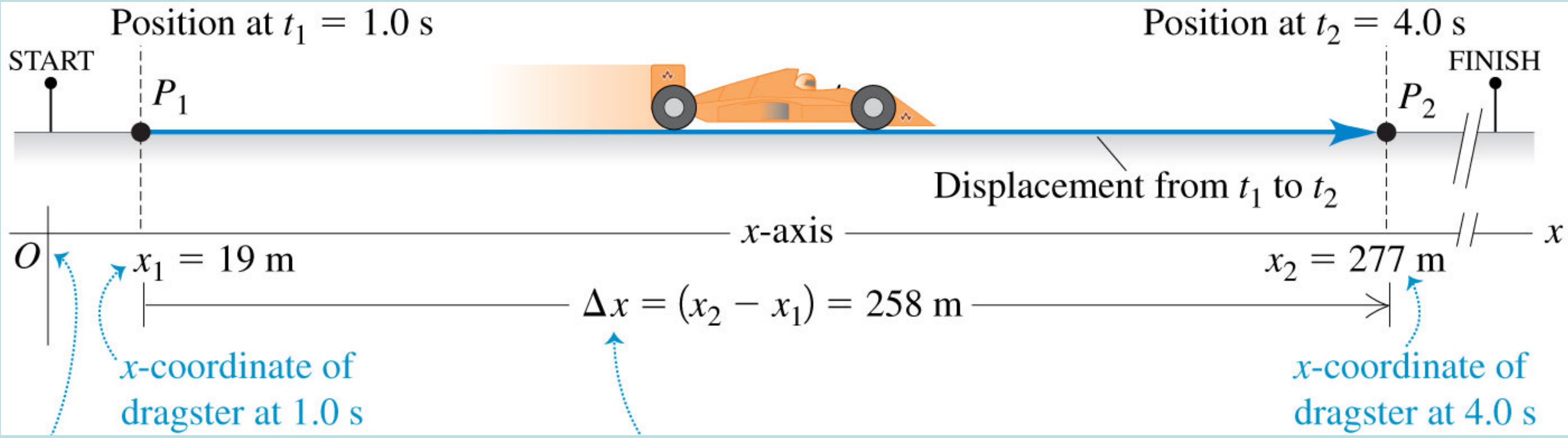






這個極度簡化的粒子模型竟然比我們原來預期的更真實！

畢竟，所有物質都是由沒有大小的粒子所構成：基本粒子！

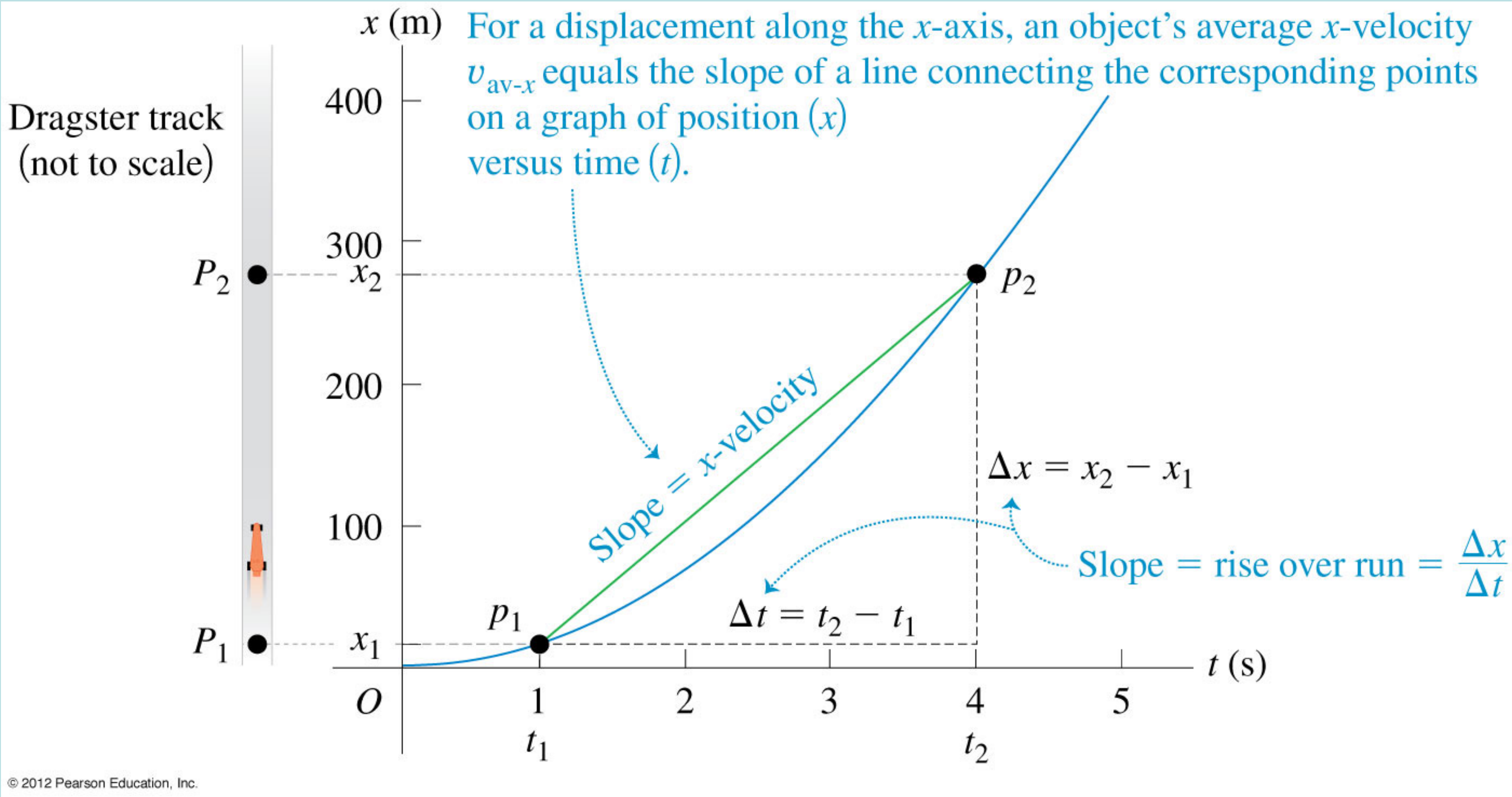


運動的粒子在每一特定時間t對應一特定位置x：

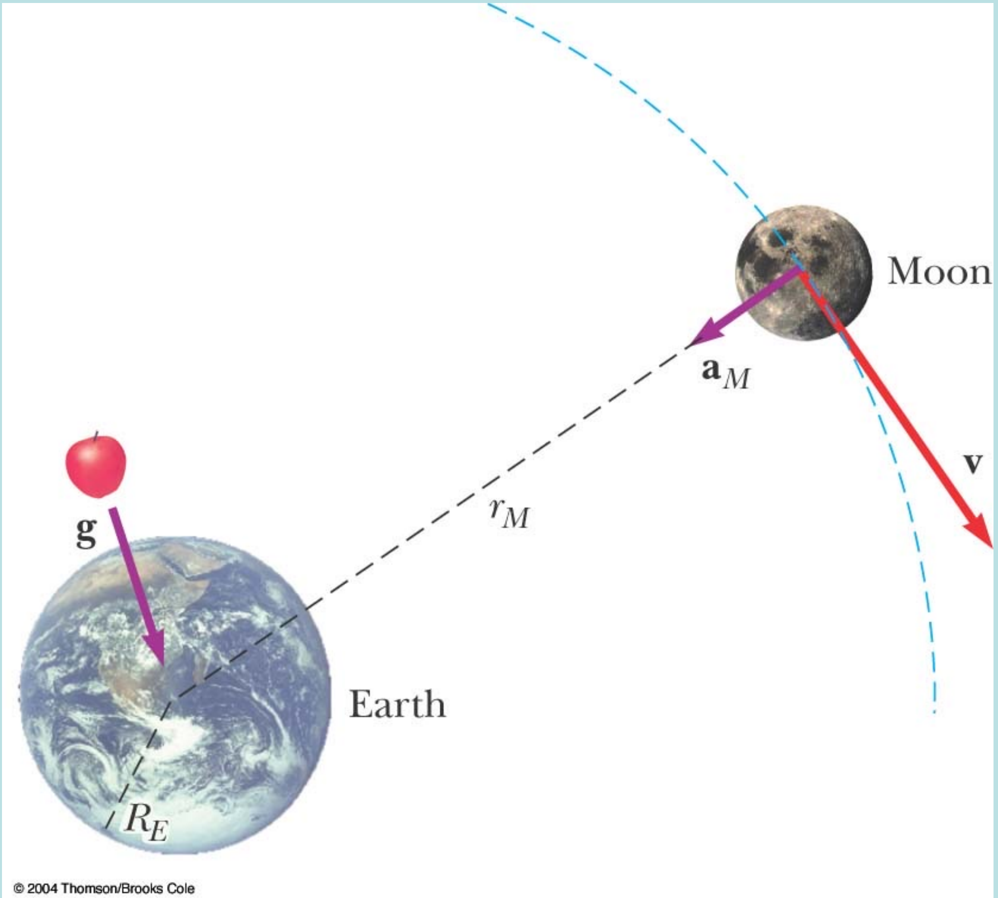
位置是時間的函數！

$x(t)$ 這個單變數函數是力學研究的對象與目標

$x(t)$ 位置：這個單變數函數可以用圖形表示：



在時間Δt內的位移：$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$



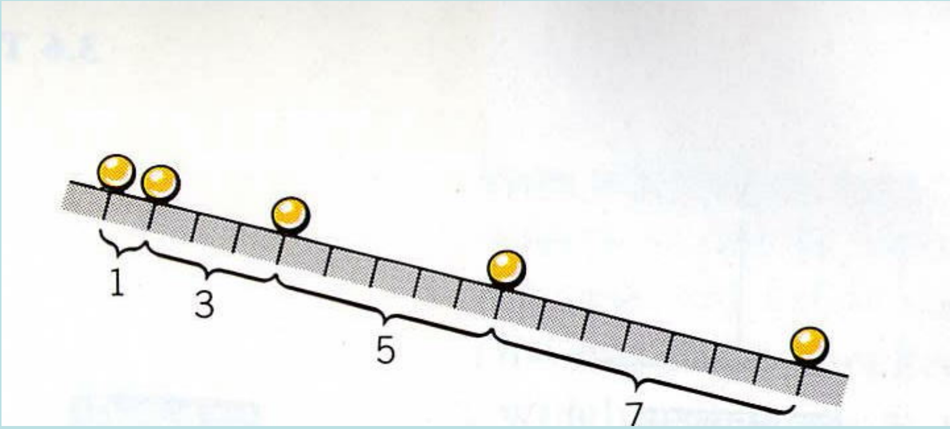
何謂加速度 acceleration？

速度$v(t)$是位置$x(t)$的變化率！

加速度$a(t)$是速度$v(t)$的變化率！

速度是位置的變化率！

$$變化率 = 單位時間的變化 = \frac{一段時間內的變化（位移）}{這段時間}$$



$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

但在時間Δt內，速度可能在變化。以上計算得到的是Δt內的平均速度。

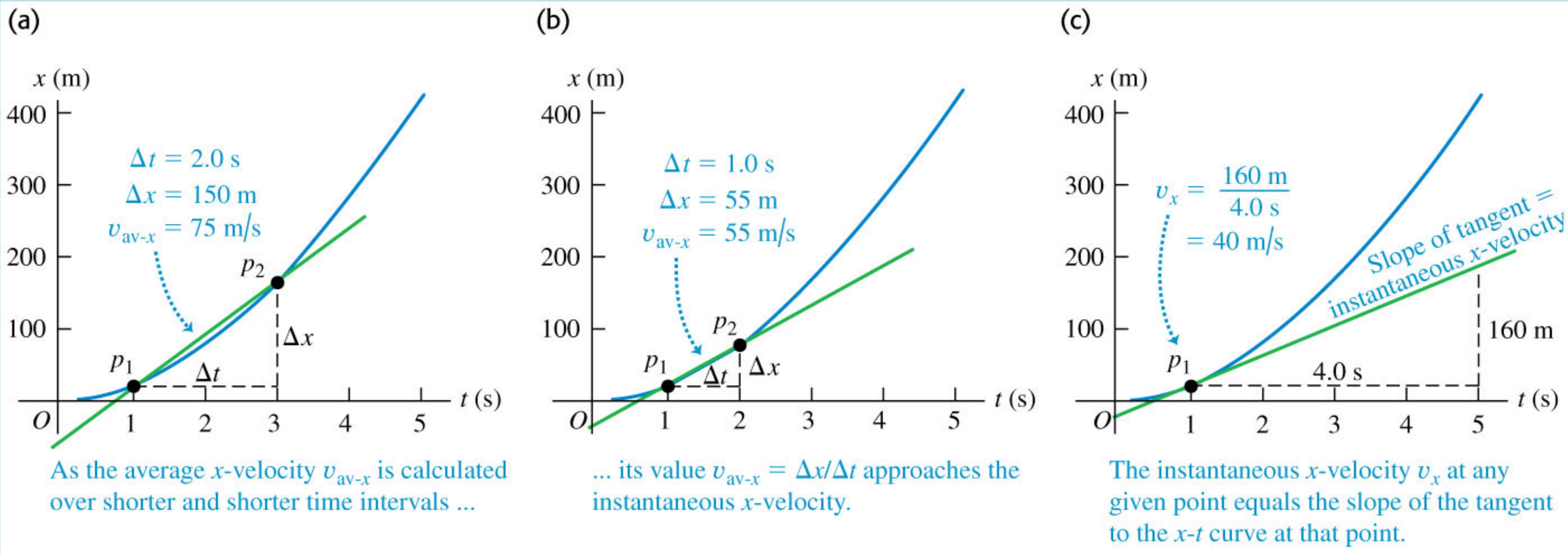
為了得到一瞬間的瞬時速度，我們必須要求Δt 是無限小！ $\Delta t \to 0$

$$\Delta t \to 0 \;\Rightarrow \Delta x \to 0$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0}{0} = ?$$

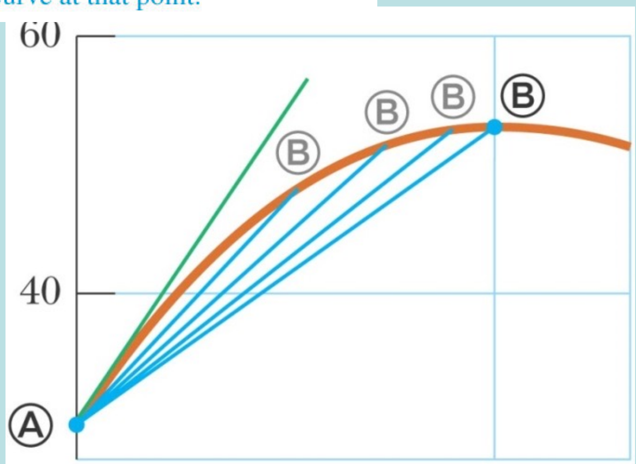
這看來是一個無意義的數學式！

但如果我們用函數作圖來看：



在Δt尚未趨零前，$\frac{\Delta x}{\Delta t}$是運動前後點之間的連線的斜率。

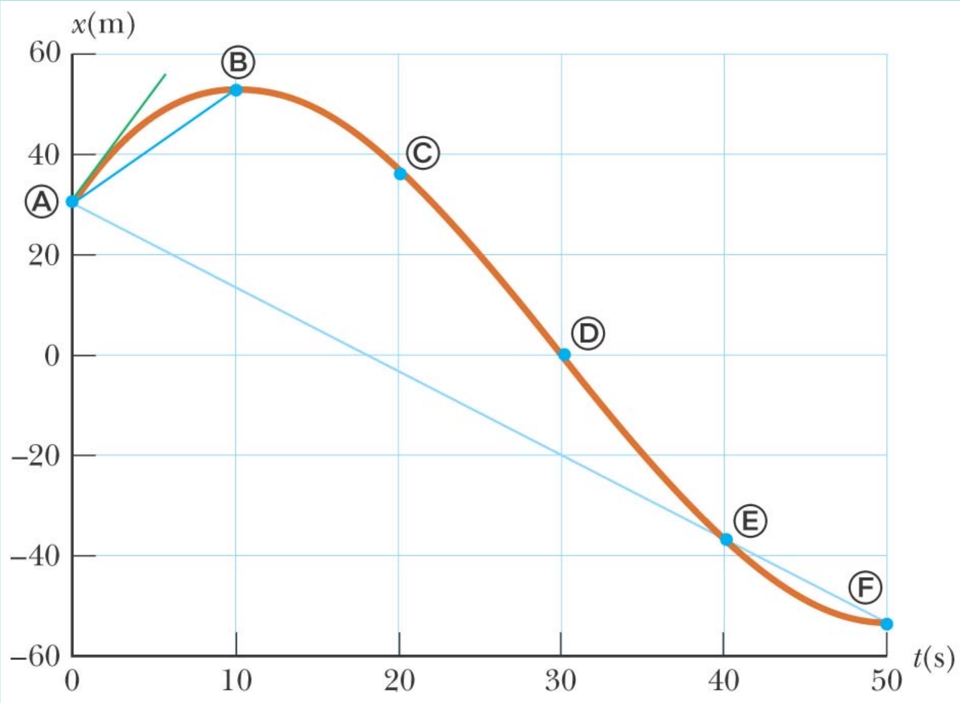
而當 $\Delta t \to 0$ ，前後點之間的連線就趨近於該點的切線！

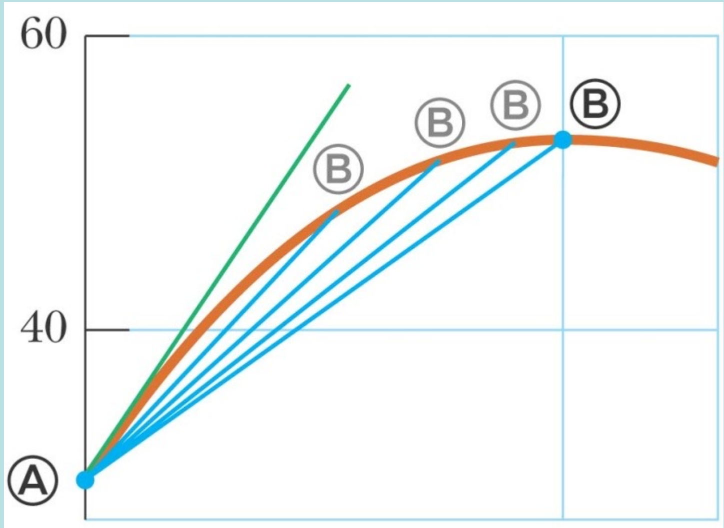


$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0}{0} = \text{切線斜率}$$

這個式子是有意義的！

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} \frac{0}{0} = \text{切線斜率}$$





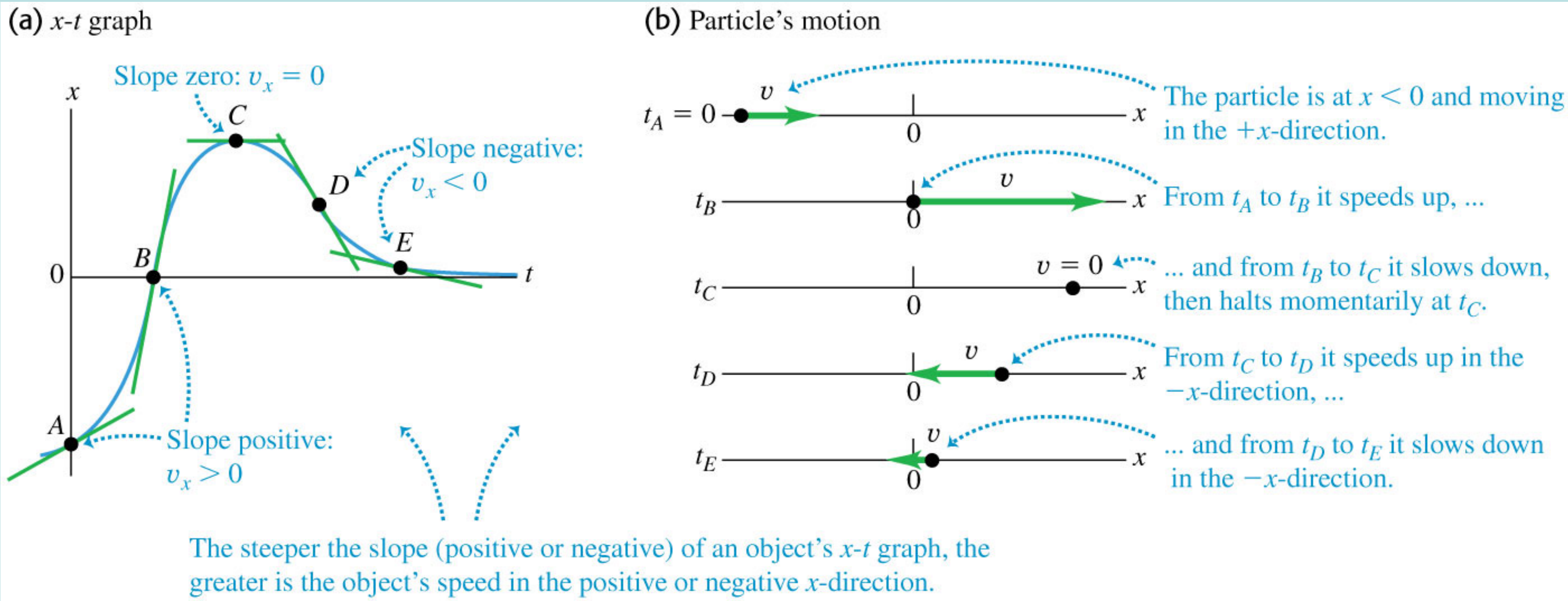
定義： $瞬間變化率 = \lim_{時間趨近於0} \frac{變化}{時間}$

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \equiv \frac{dx}{dt} \equiv \dot{x}$$ 稱為導數 Derivative

任一特定時間都有一速度，速度也是時間的函數：

$$v(t) = \frac{dx}{dt}(t)$$

因此，這是由一個函數得到另一個函數的運算。稱為微分Differentiation。



以微分計算自由落體運動的速度

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2$$

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

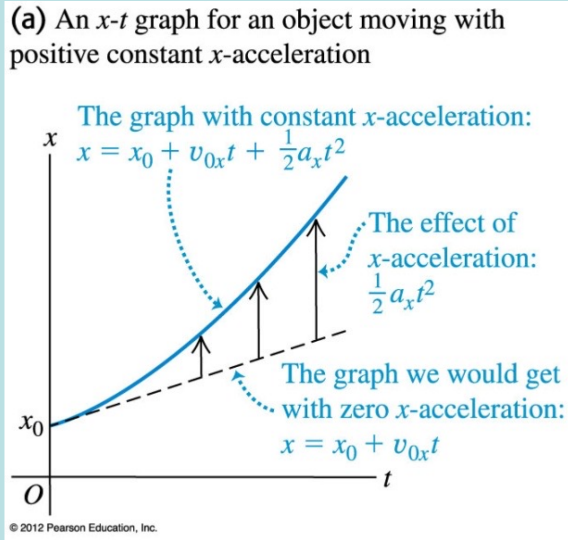
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{1}{2} \frac{g(t+\Delta t)^2 - gt^2}{\Delta t} \right]$$

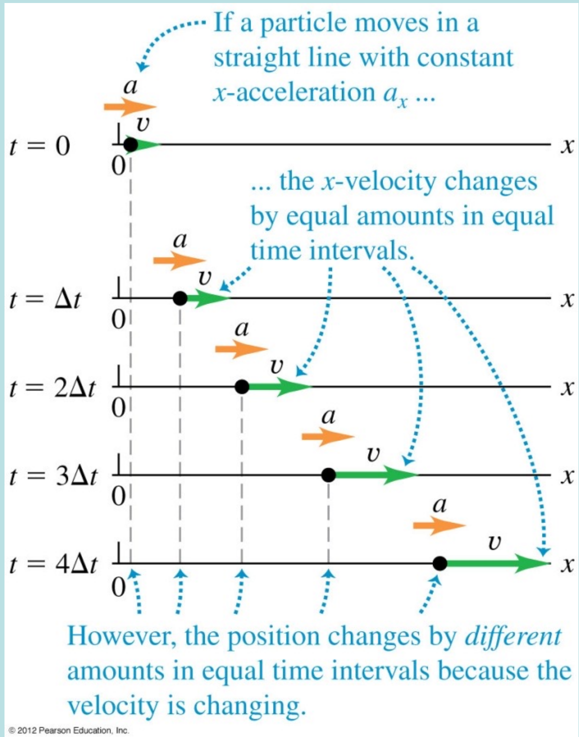
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{g}{2} \frac{(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2) - t^2}{\Delta t} \right]$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{g}{2} \frac{2t\Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} \right] = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{g}{2} (2t + \Delta t) \right] = gt$$

的確分子分母都是零，但Δt抵消後，卻是有限值。

$v = gt$ 速度也是時間的函數。



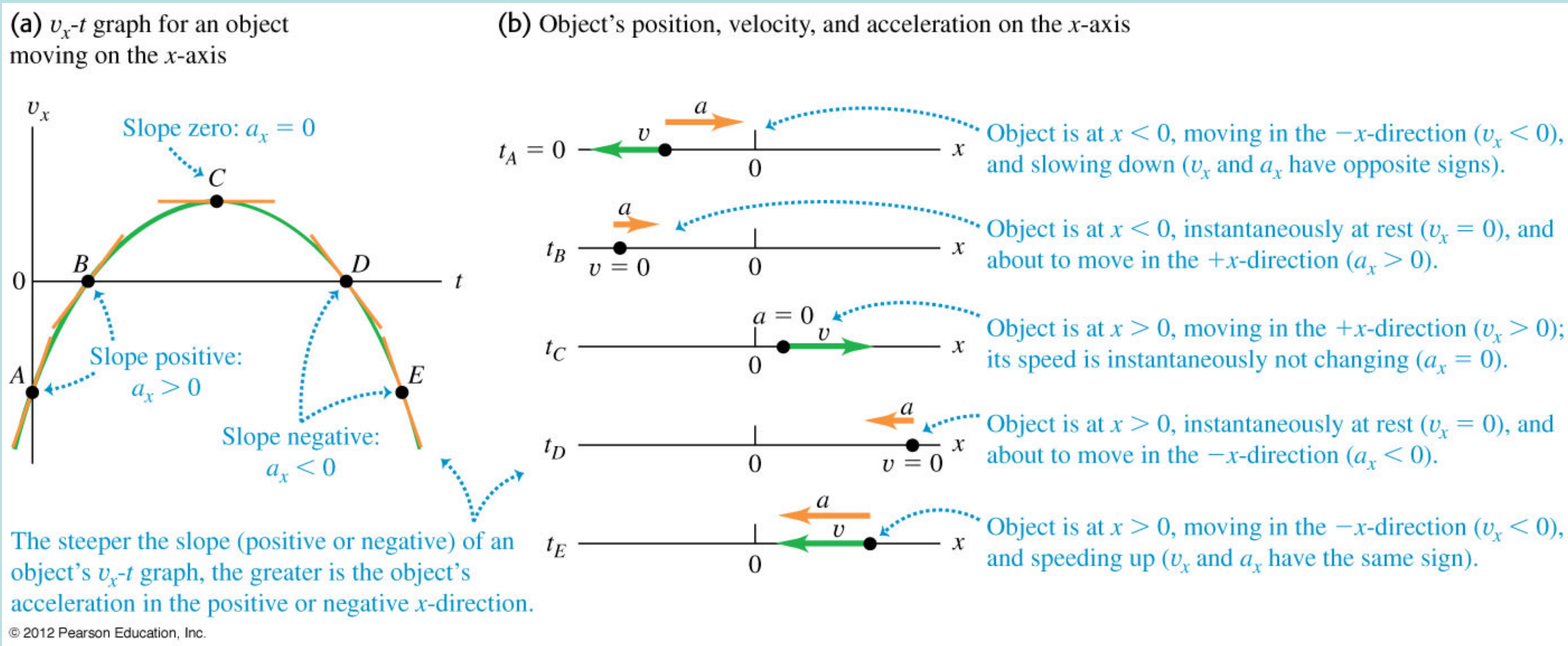


任一特定時間都有一速度，速度也是一個時間函數：$v(t)$

加速度是速度的瞬時變化率，因此是位置的二次導數。

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} \equiv \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) \equiv \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$$

加速度函數是速度函數對時間的微分，是位置函數的二次微分。



以微分計算自由落體運動的加速度。

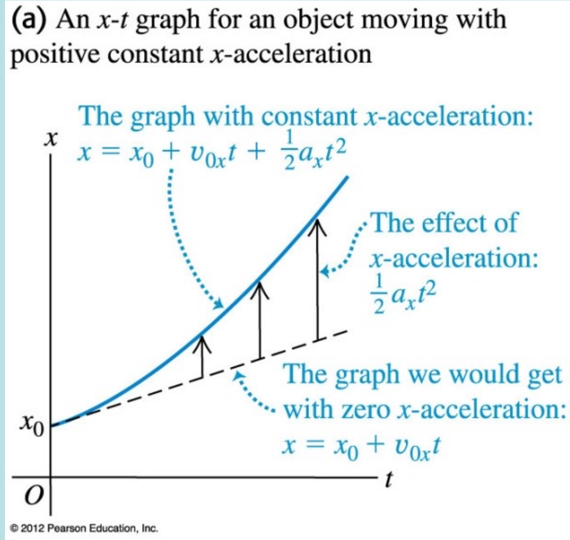
$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \qquad v(t) = gt$$

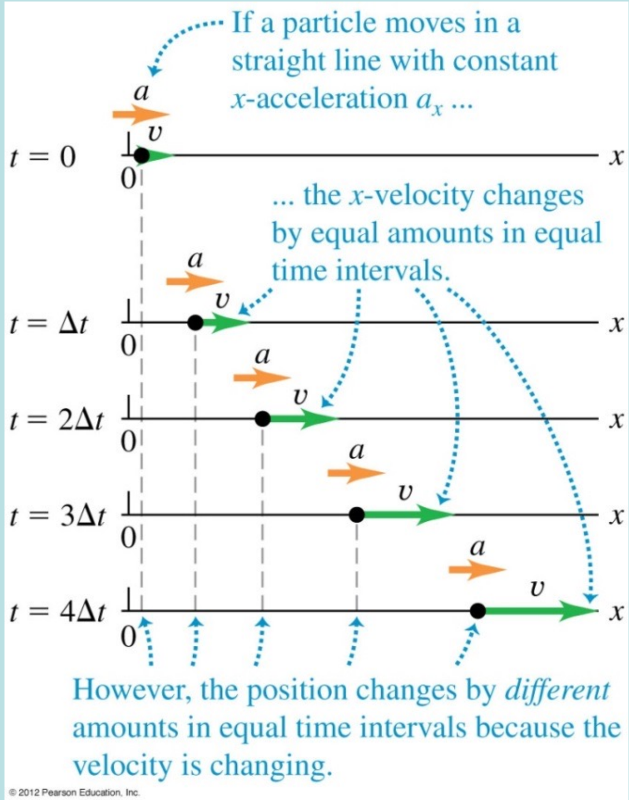
$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{g(t+\Delta t) - gt}{\Delta t}\right] = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{g\Delta t}{\Delta t}\right] = g$$

$$a = g$$

位移與時間平方成正比的運動，其加速度是一個常數。



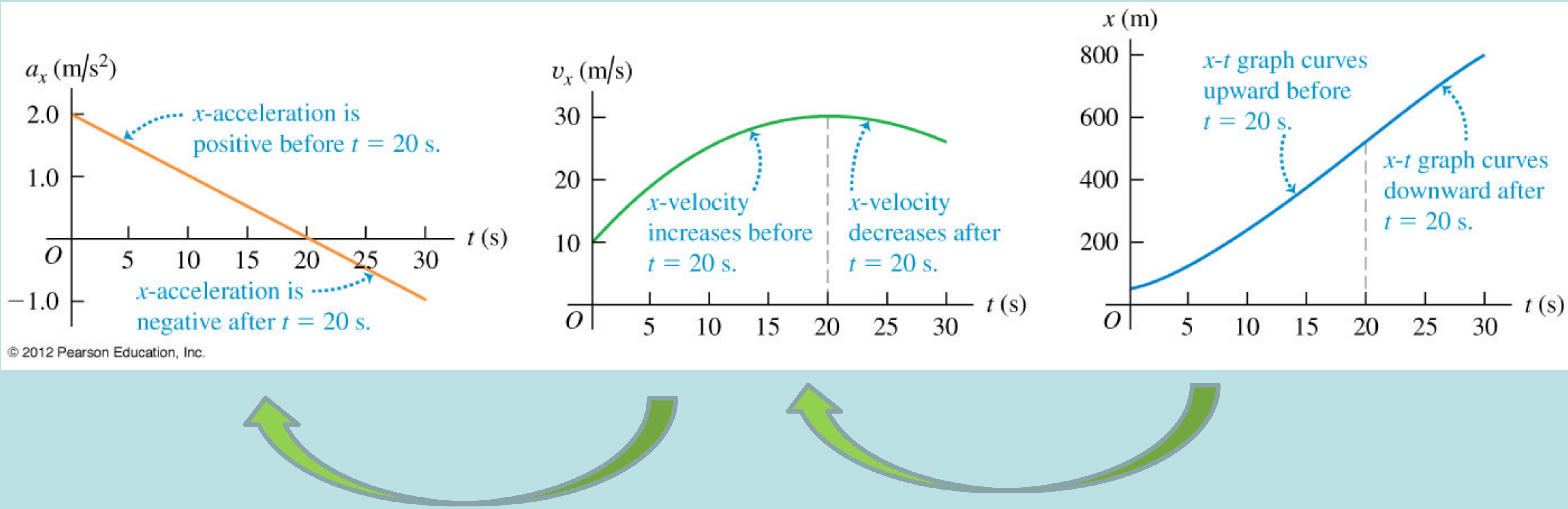


$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

速度是位置對時間的微分

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$$

加速度是速度對時間的微分，位置的二次微分



接下來介紹數學的一般函數$f(x)$的微積分：

函數f對應剛剛的x，變數x對應剛剛的t。

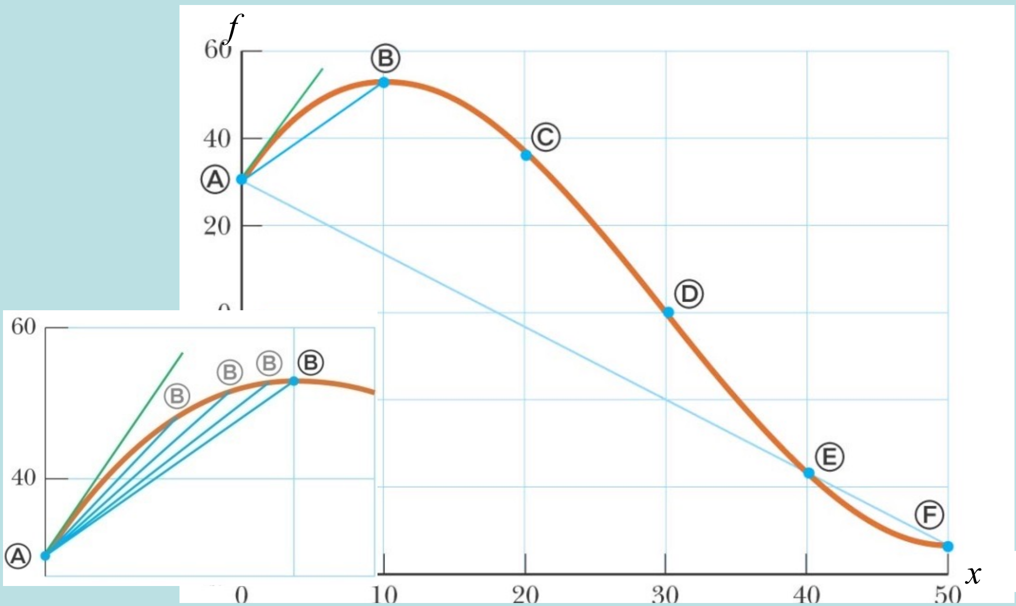
以上的運算對任一變數x的單變數函數都可以定義

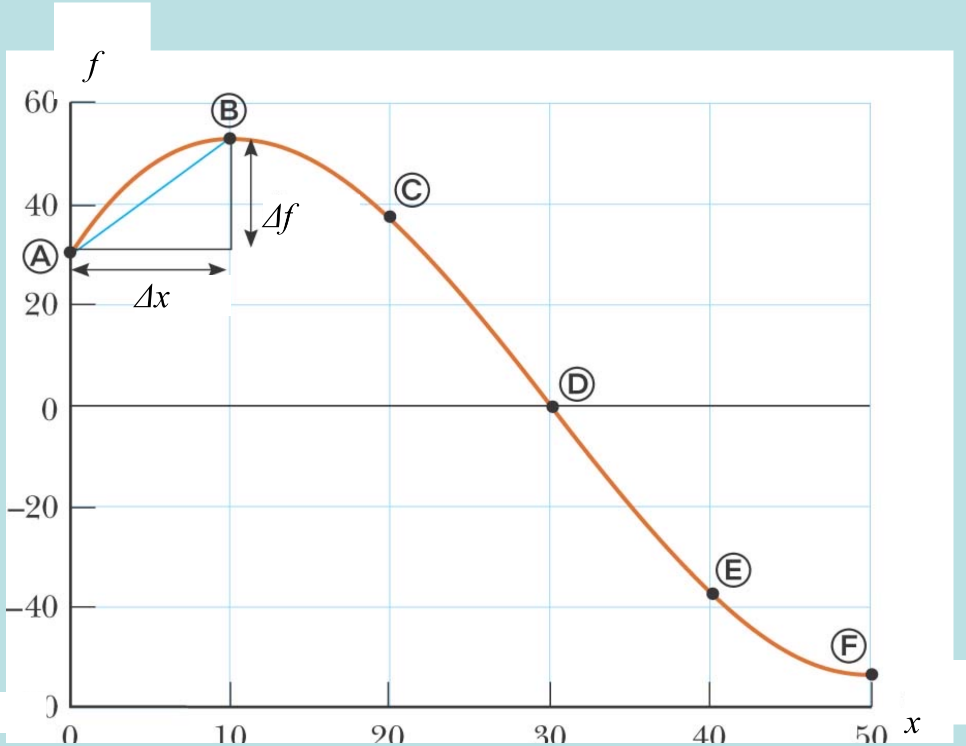
$$\frac{df}{dx}(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

而且在所有 x 都可以定義：

所得為一函數，稱為導函數。

導函數的值即在 x 處的切線斜率。





$$\frac{df}{dx}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

以上的數學運算稱為微分 Differentiation

微分是由一個函數得到另一個函數的運算

有這兩種符號：

$$f \to \frac{df}{dx} \qquad f \to f'$$

高次微分

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \equiv \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)}{\Delta x} = \frac{df'}{dx}(x) = f'' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{d^n f}{dx^n} \equiv \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right)$$

$f(x) = c$ $\Delta f = 0$ $\frac{df}{dx} = 0$

常數的微分為零

線性組合

$\Delta(f + g) = \Delta f + \Delta g$

$(f + g)' = f' + g'$

$\Delta(cf) = c\Delta f$

$(cf)' = cf'$

多項式的微分

$$f(x) = x^n$$

$$f' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$(x+\Delta x)^n = x^n + nx^{n-1} \cdot \Delta x + O(\Delta x^2)$$

$$f' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{nx^{n-1} \cdot \Delta x + O(\Delta x^2)}{\Delta x} = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

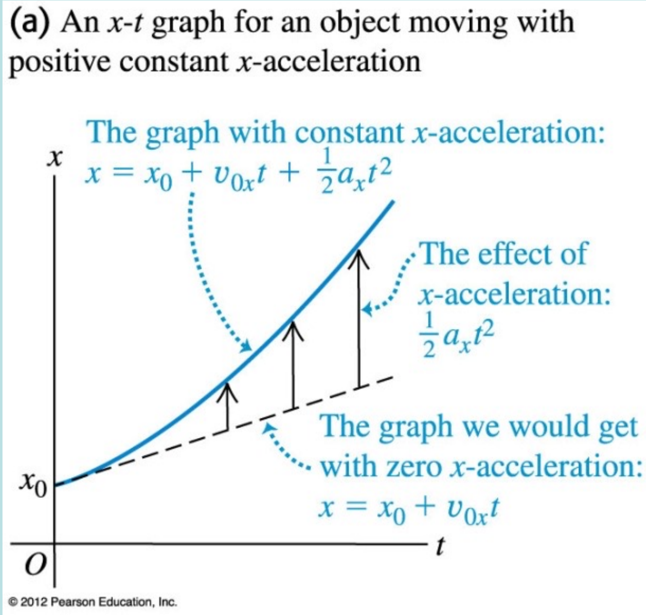
$$(cf)' = cf'$$

以公式快速計算自由落體的速度及加速度。

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0\right) = -\frac{1}{2}g\cdot\frac{d}{dt}(t^2) + v_0\frac{d}{dt}(t) + \frac{d}{dt}(x_0) = gt + v_0$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(gt + v_0) = g\frac{d}{dt}(t) + \frac{d}{dt}(v_0) = g$$

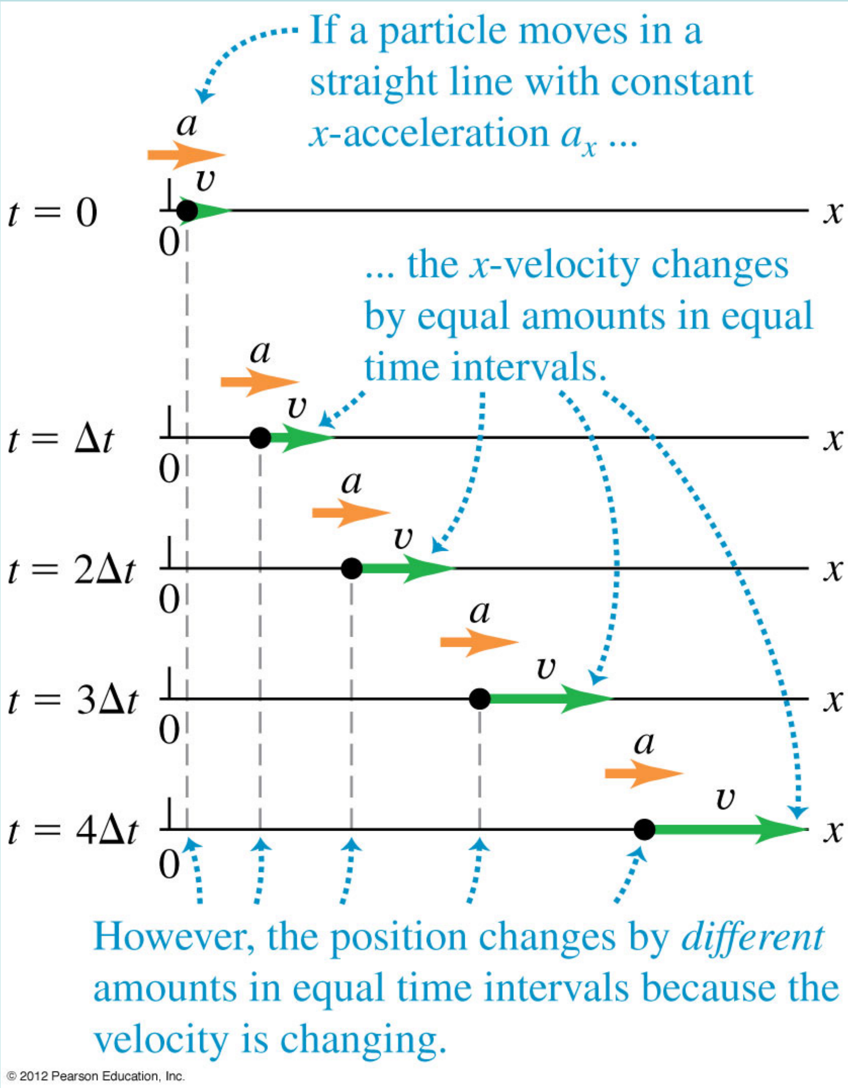


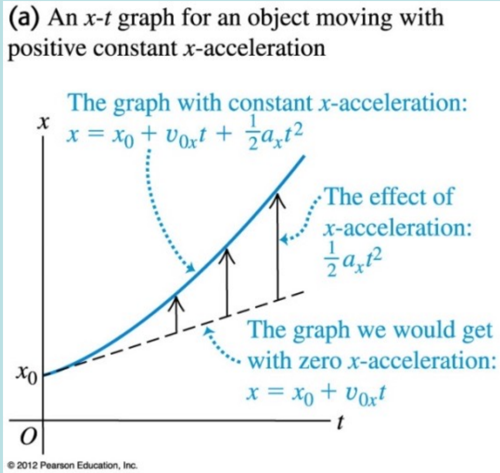
加速度是一個常數！

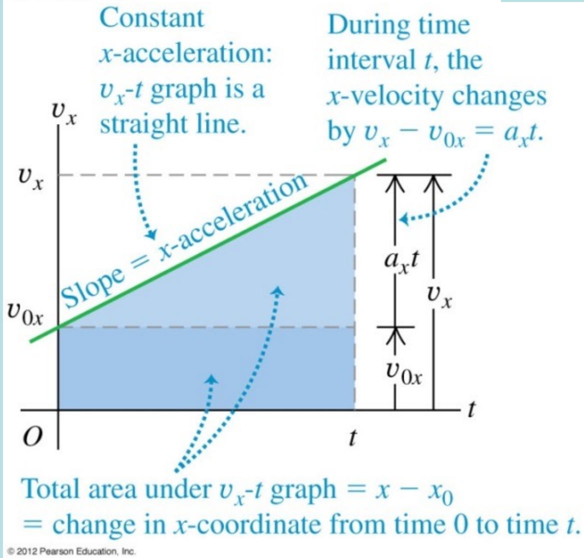
這是一個等加速度運動！

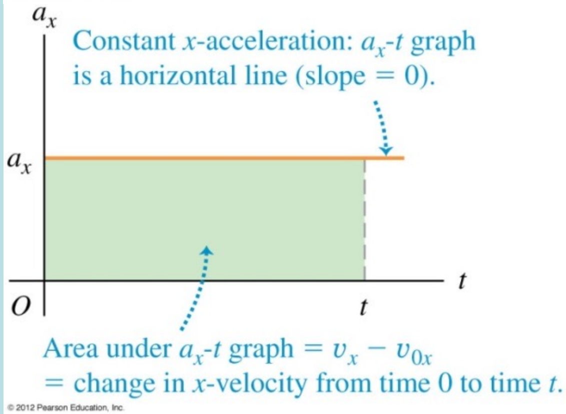
等加速度運動

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0$$

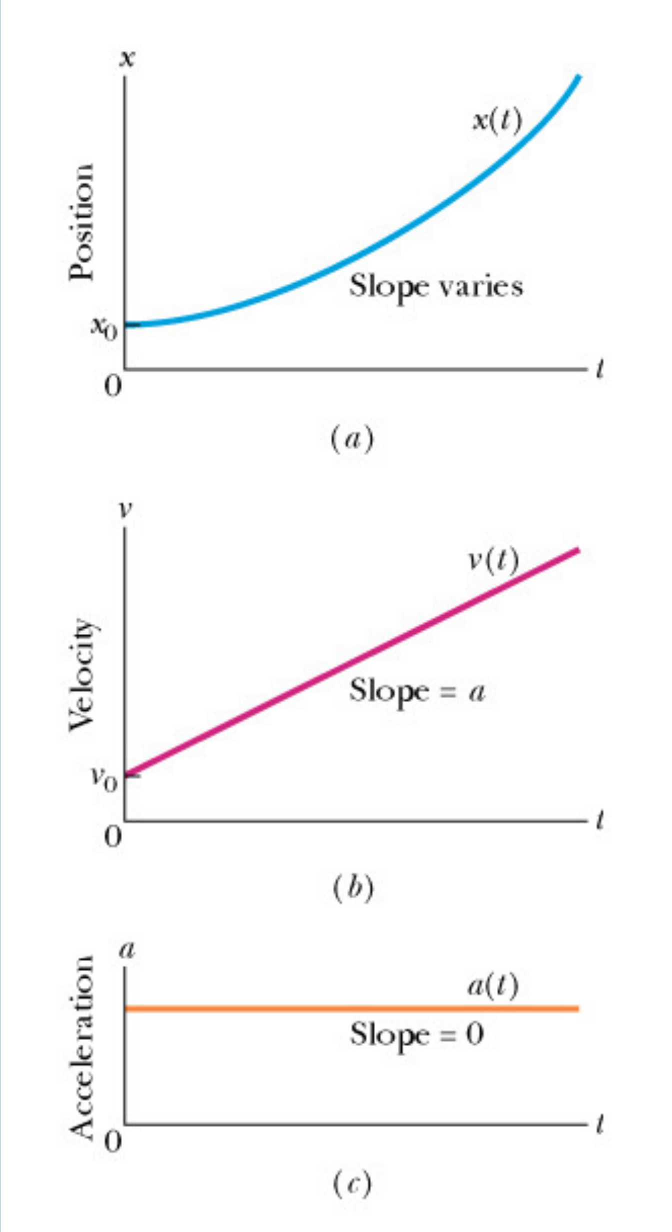








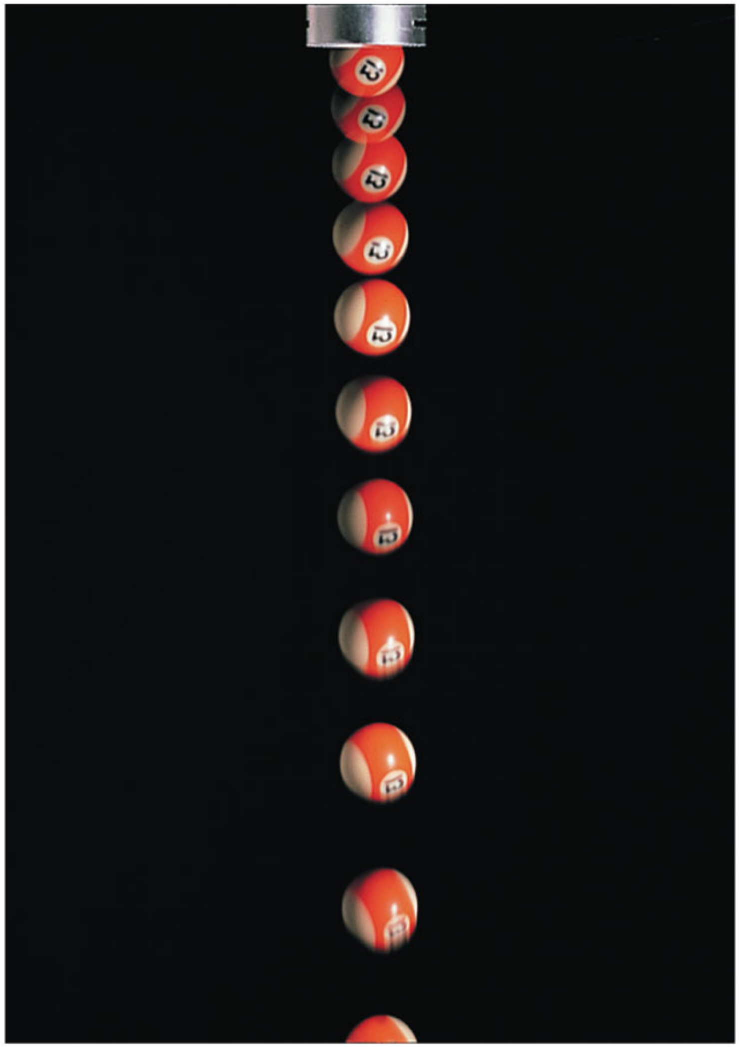
等加速度運動



$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0$$

$$v = \frac{dx}{dt} = gt + v_0$$

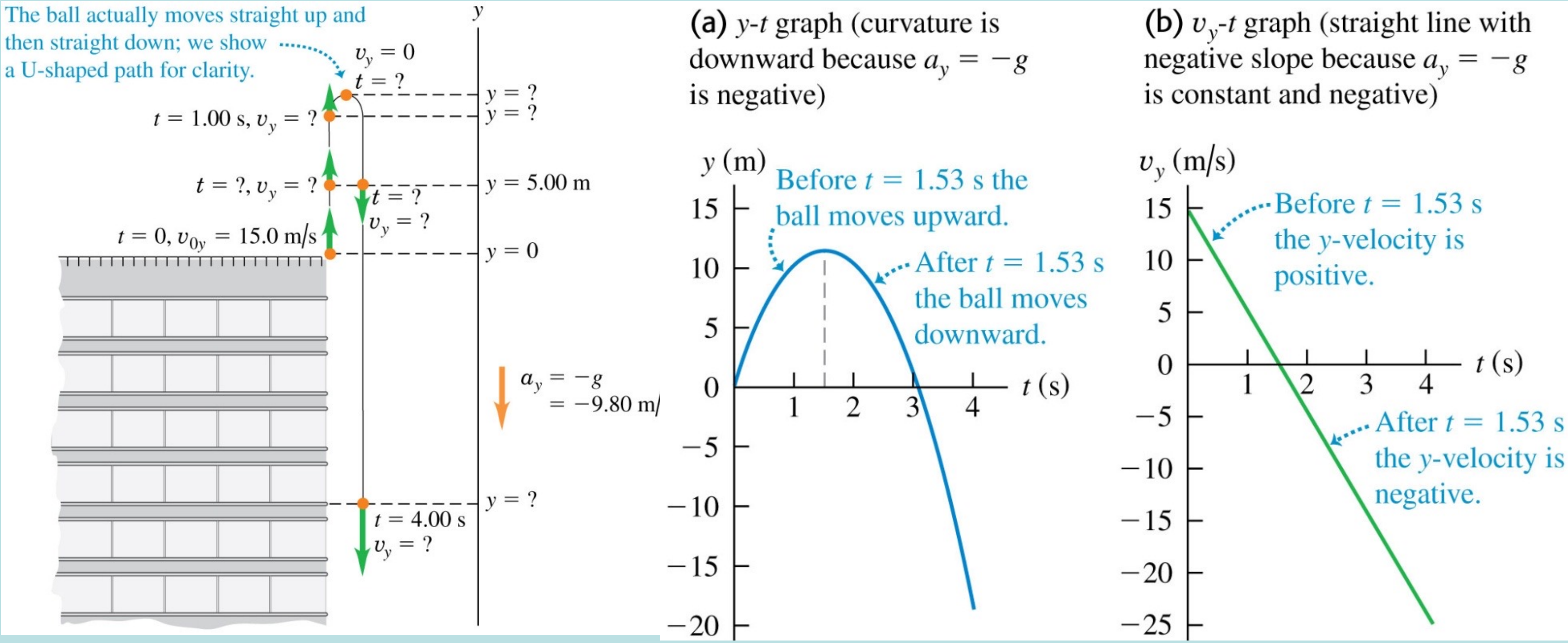
$$a = \frac{dv}{dt} = g$$



自由落體

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0$$

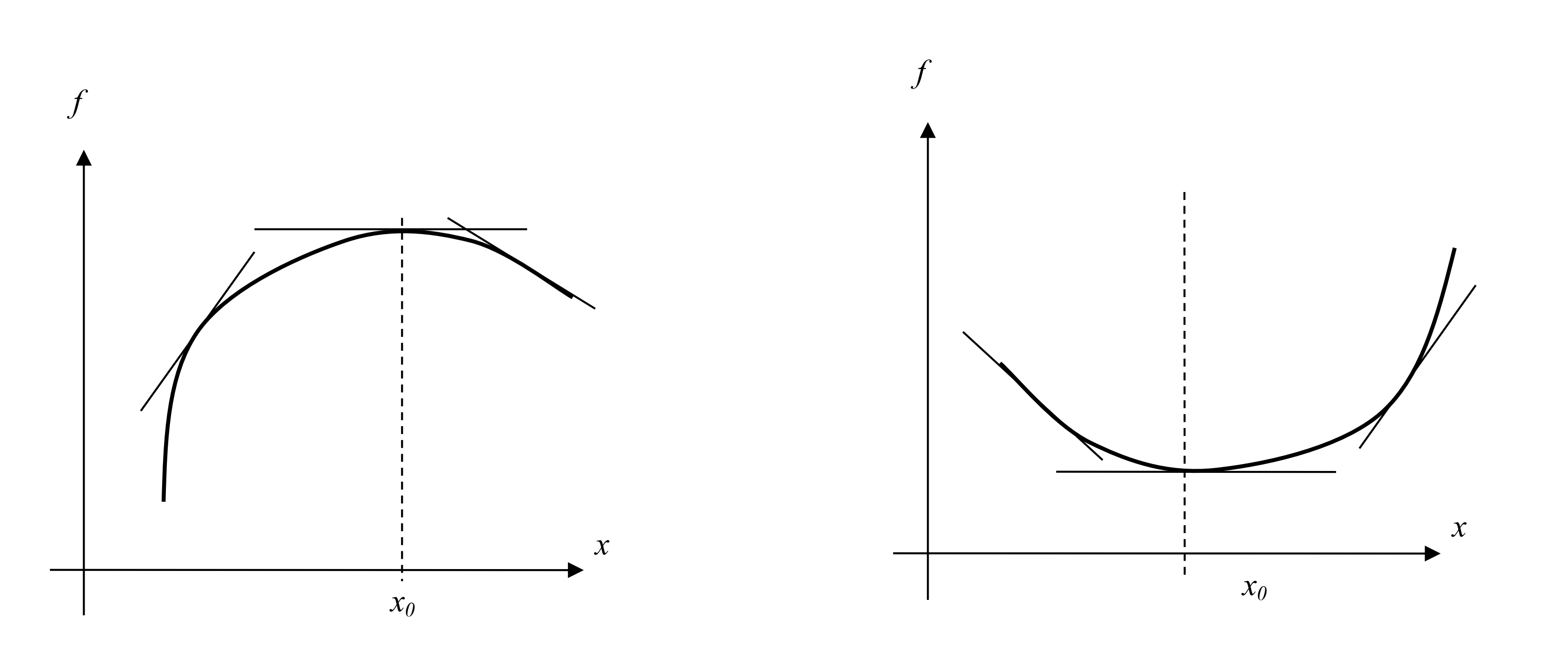
垂直拋體



$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0$$

導函數可以求極值

在極值處切線斜率為零



$$\frac{df}{dx}(x_0) = 0$$

微分的幾個有用公式：

倒函數的微分： $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{g}\right) == -\dfrac{g'}{g^2}$

乘積律 $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(fg)}{\Delta x}$$

$$\Delta(fg) = f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x) = (f+\Delta f)\cdot(g+\Delta g) - fg$$
$$= f\cdot\Delta g + \Delta f\cdot g + \Delta f\cdot\Delta g \approx f\cdot\Delta g + \Delta f\cdot g$$

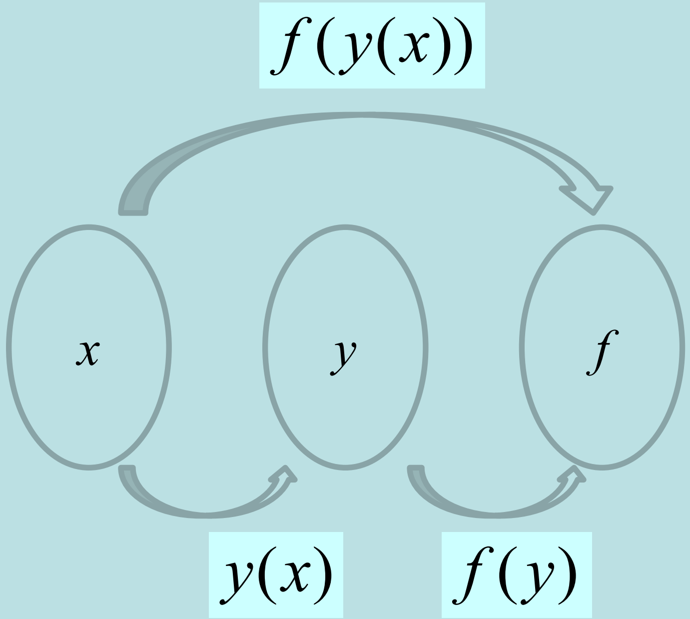
$$\Delta(fg) \approx f\cdot\Delta g + \Delta f\cdot g$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(fg)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}\cdot g + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}\cdot f = f'g + fg'$$

連鎖律（合成函數的微分）

$$\frac{d}{dx}f(y(x))=\frac{df}{dy}(y)\times\frac{dy}{dx}=f'(y)\cdot y'(x)$$

函數對 y（視為變數）微分，乘上 y 對 x 微分



$$\frac{d}{dx}f(y(x))=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(y(x+\Delta x))-f(y(x))}{\Delta x}=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(y+\Delta y))-f(y)}{\Delta y}\times\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}=$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(y+\Delta y)-f(y)}{\Delta y}\times\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}$$

$$=\frac{df}{dy}(y)\times\frac{dy}{dx}=f'(y)\cdot y'(x)$$

例子：

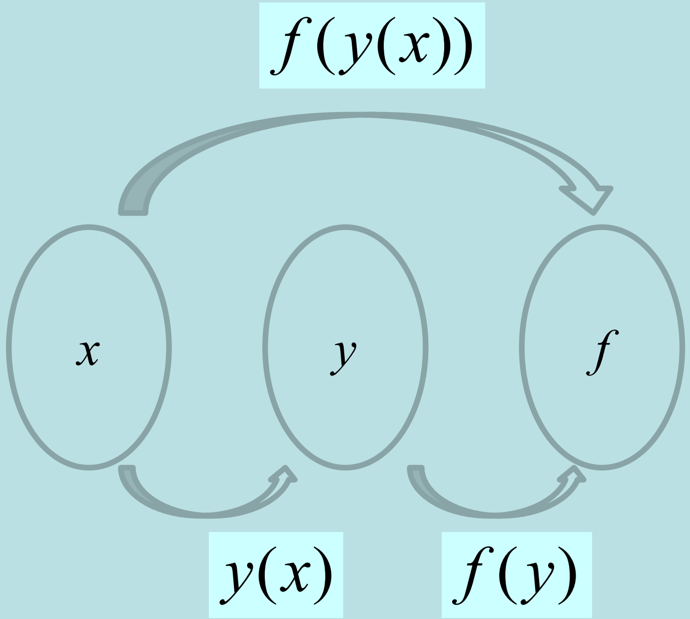
$$f(y(x))=(1+ax^2)^n$$

$$y(x)=1+ax^2 \qquad f(y)=y^n$$

例子：

$$f(y(x)) = (1+ax^2)^n$$

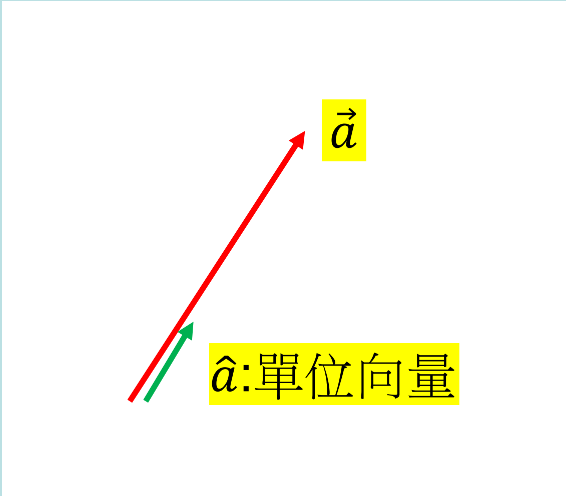
$$y(x) = 1+ax^2 \qquad f(y) = y^n$$



$$f' = \frac{df(y)}{dy} \times \frac{dy}{dx} = ny^{n-1} \times 2ax = n(1+ax^2)^{n-1} \cdot 2ax$$

Motion in 2-3 Dimensions

3D 向量 Vector

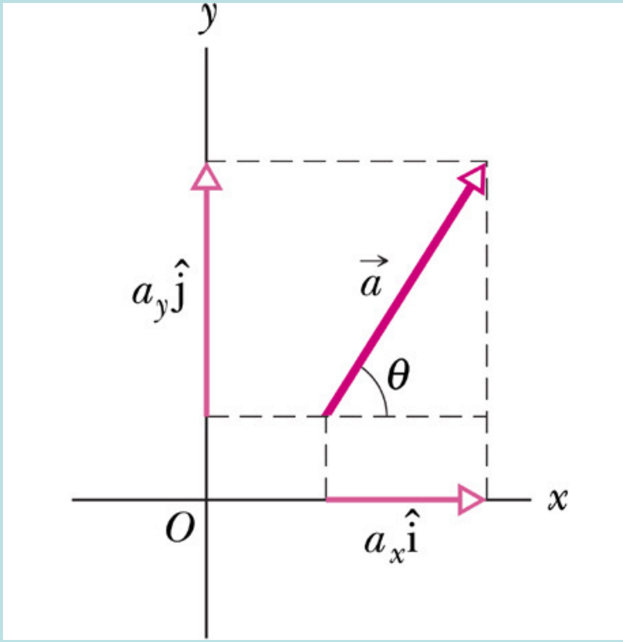


圖示法

二三度空間中許多物理量是向量！

向量包含兩個要素：大小及方向！

$$\vec{a} = a \cdot \hat{a}$$

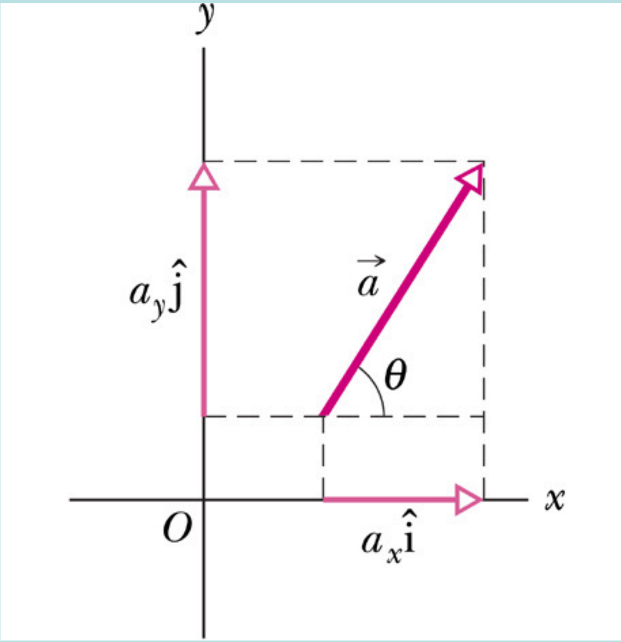


向量可以用它的分量表示！

把一向量投影在選取的座標軸上即是它的分量！

$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} = (a_x, a_y)$$

分量法



分量法與圖示法式等價的。

$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} = (a_x, a_y)$$

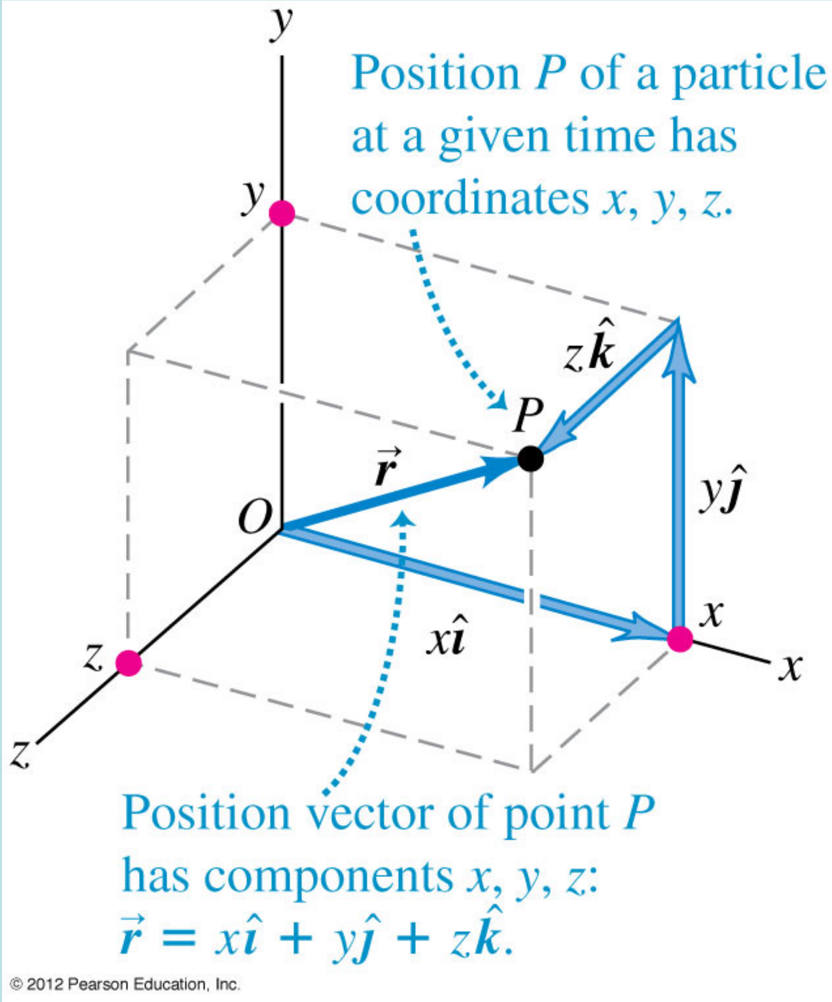
由分量可以得到向量的大小

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

由分量可以得到向量的方向：

$$\cos\theta = \frac{a_x}{a}$$

分量的值與座標軸的選取有關！



位置是一個向量 $\vec{r} = (x, y, z) = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} r_i \hat{e}_i$$

$\hat{e}_i \quad i = 1,2,3$ 為座標軸。

運動中的位置向量會隨時間變化 $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

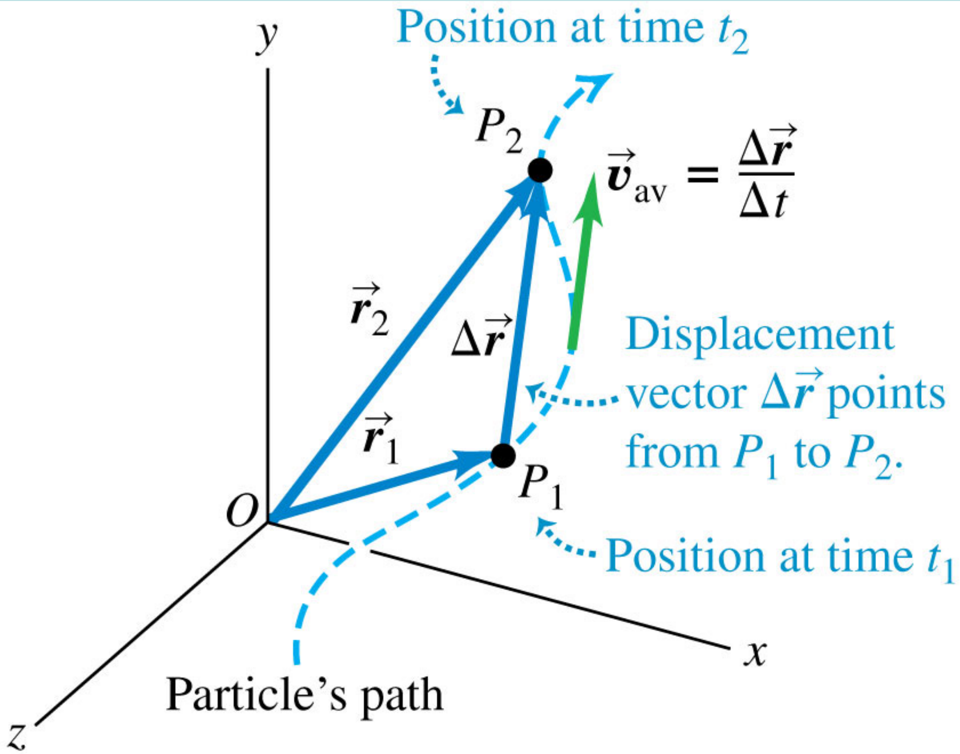
位置的變化：位移$\Delta\vec{r}$也是一個向量。

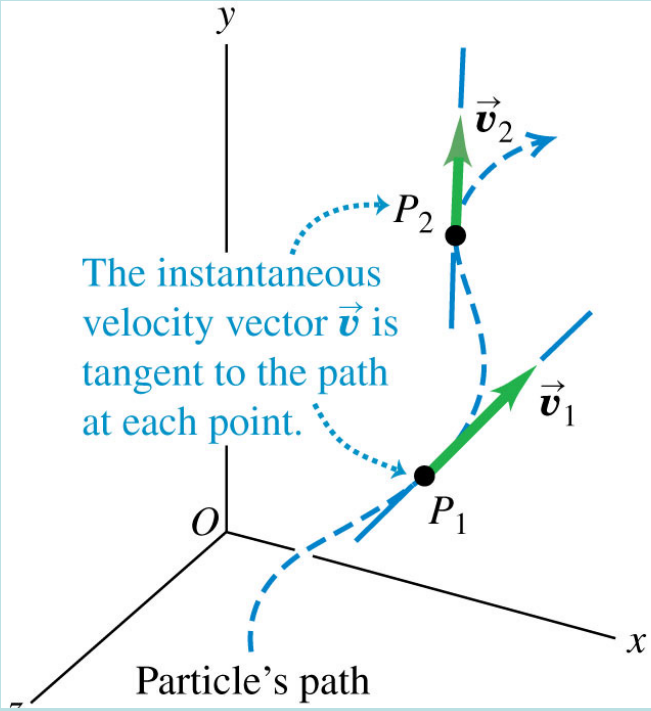
其分量就是位置向量各分量的差！變化的投影即是投影的差。

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (\Delta x, \Delta y, \Delta z) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

平均速度向量，就是位置向量的平均變化率，或說單位時間的位移向量。

$$\vec{v}_{\text{ave}} \equiv \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$



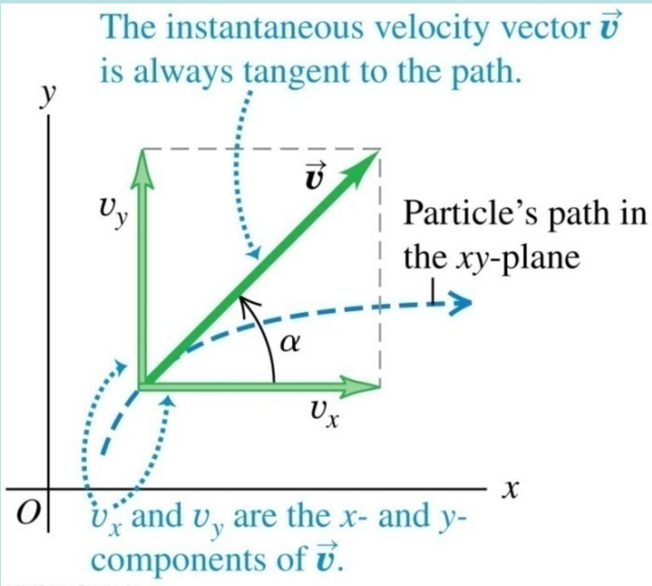


瞬時速度向量Vector，就是位置向量的瞬時變化率。

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t} \right) = \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} \right)$$

$$= \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = (v_x, v_y, v_z)$$



$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt}$$

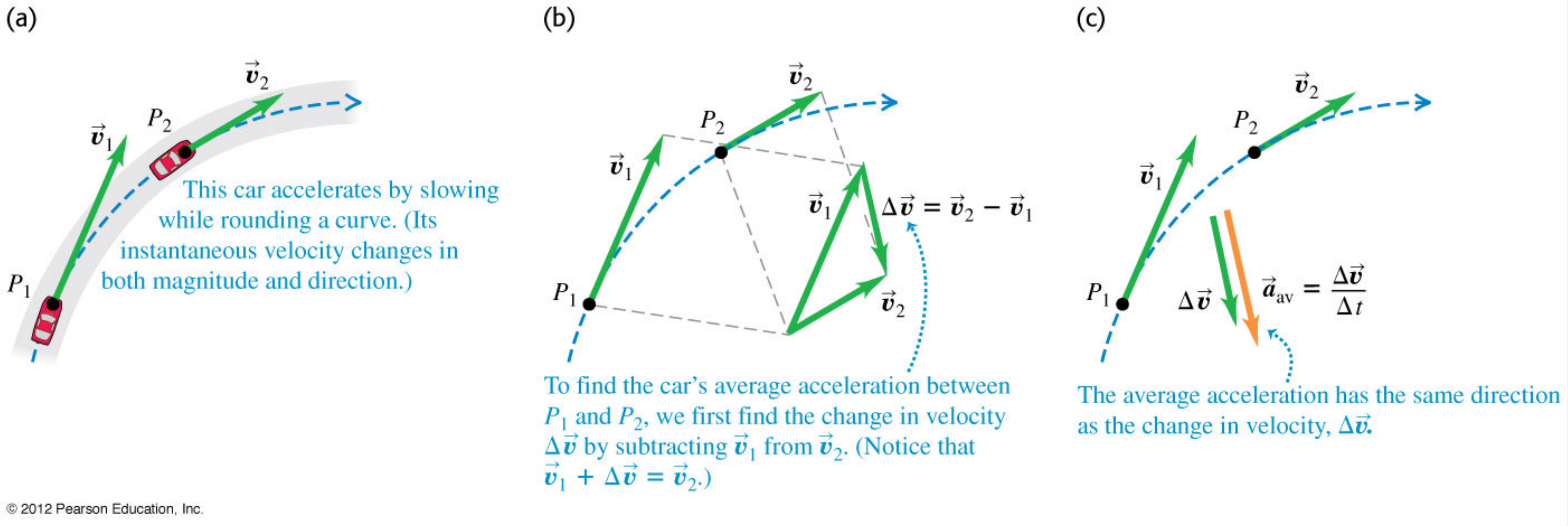
如此定義的速度向量：$\vec{v}$

方向$\hat{v}$是沿著運動的切線方向，

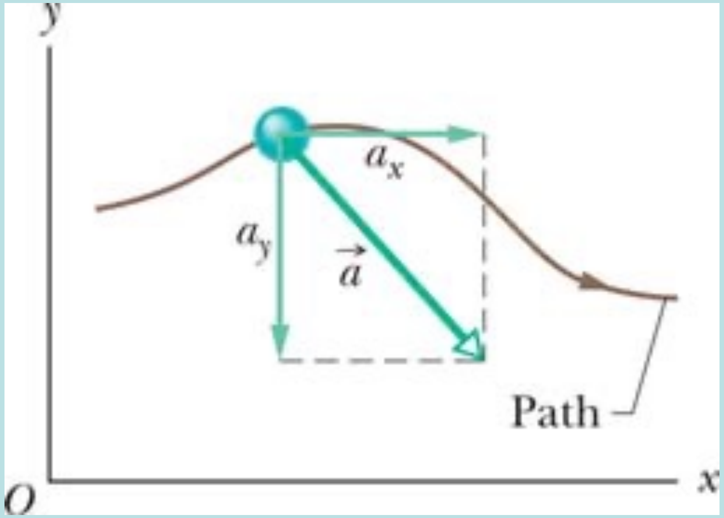
大小v是移動的速率。

加速度向量（以圖形討論）

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

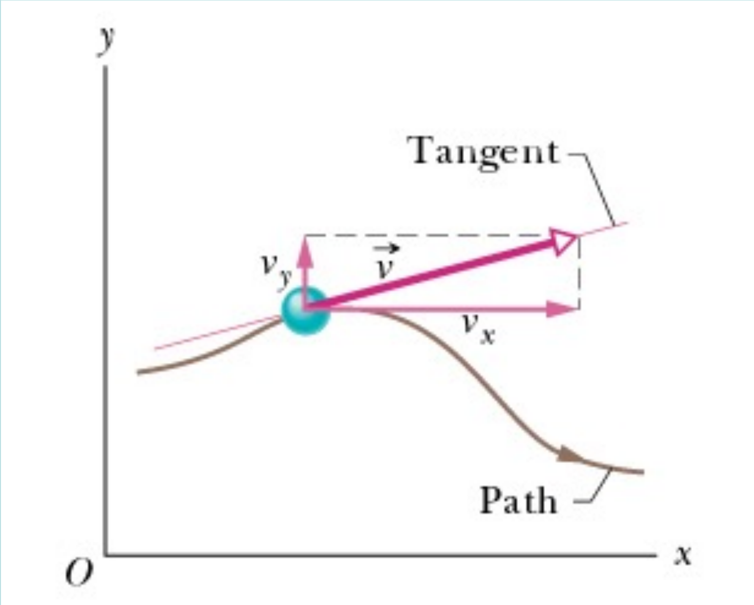


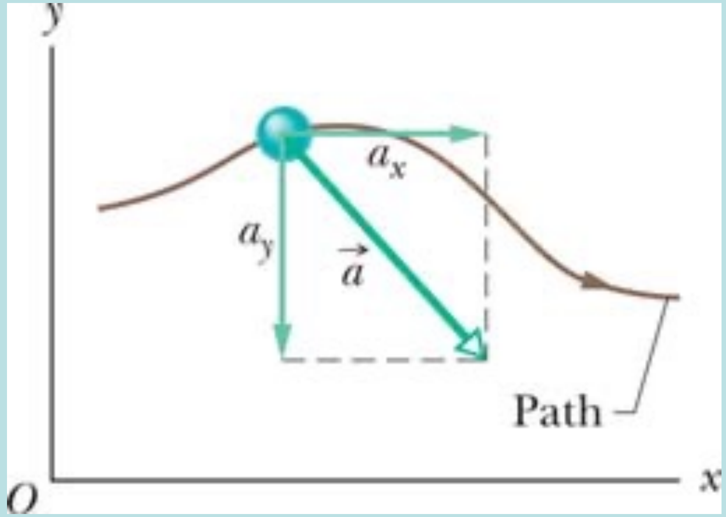
加速度向量一樣可以以分量計算：



$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta v_x}{\Delta t}, \frac{\Delta v_y}{\Delta t}, \frac{\Delta v_z}{\Delta t} \right) = \left(\frac{d^2 x}{dt^2}, \frac{d^2 y}{dt^2}, \frac{d^2 z}{dt^2} \right)$$

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2} \qquad a_y = \frac{d^2 y}{dt^2} \qquad a_z = \frac{d^2 z}{dt^2}$$





$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt}$$

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} \qquad a_z = \frac{d^2z}{dt^2}$$

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} r_i \hat{e}_i$$

$\hat{e}_i \quad i = 1,2,3$ 為座標軸。

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{3} r_i \hat{e}_i = \sum_{i=1}^{3} \frac{d}{dt}(r_i \hat{e}_i) = \sum_{i=1}^{3} \frac{dr_i}{dt}\hat{e}_i$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \sum_{i=1}^{3} \frac{d^2 r_i}{dt^2}\hat{e}_i$$

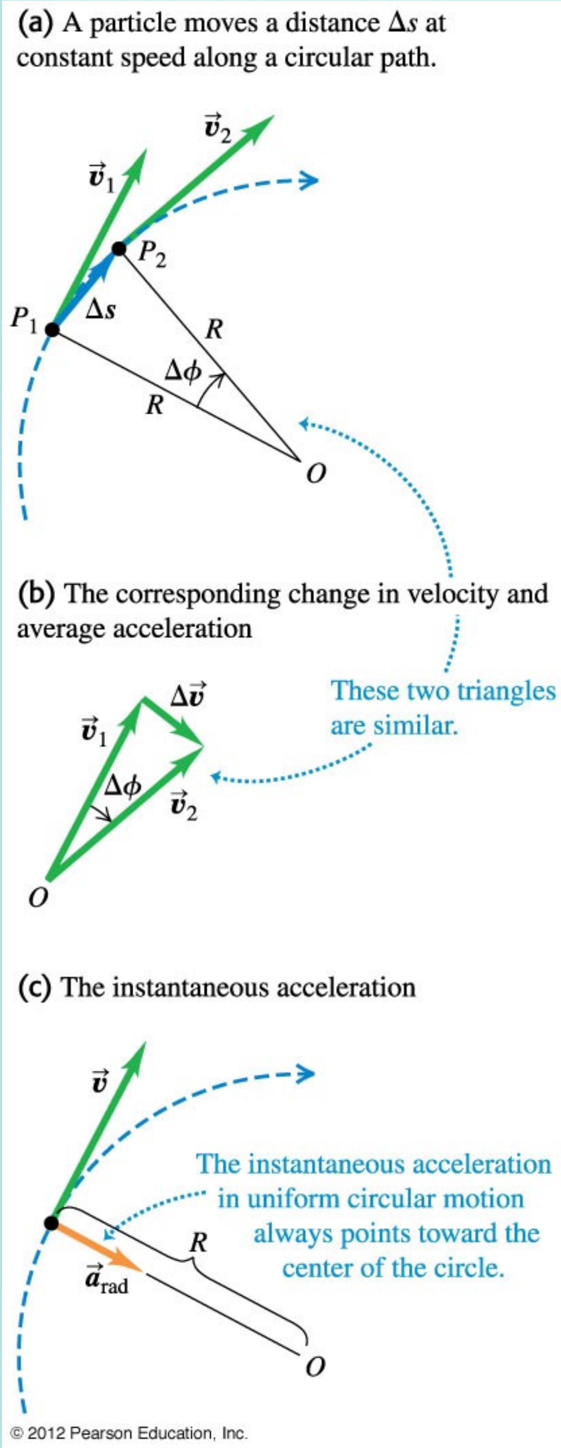
$\hat{e}_i$為座標軸與時間無關。

3.4 • **CALC** The position of a squirrel running in a park is given by $\vec{r} = [(0.280 \text{ m/s})t + (0.0360 \text{ m/s}^2)t^2]\hat{\imath} + (0.0190 \text{ m/s}^3)t^3\hat{\jmath}$. (a) What are $v_x(t)$ and $v_y(t)$, the x- and y-components of the velocity of the squirrel, as functions of time? (b) At $t = 5.00$ s, how far is the squirrel from its initial position? (c) At $t = 5.00$ s, what are the magnitude and direction of the squirrel's velocity?

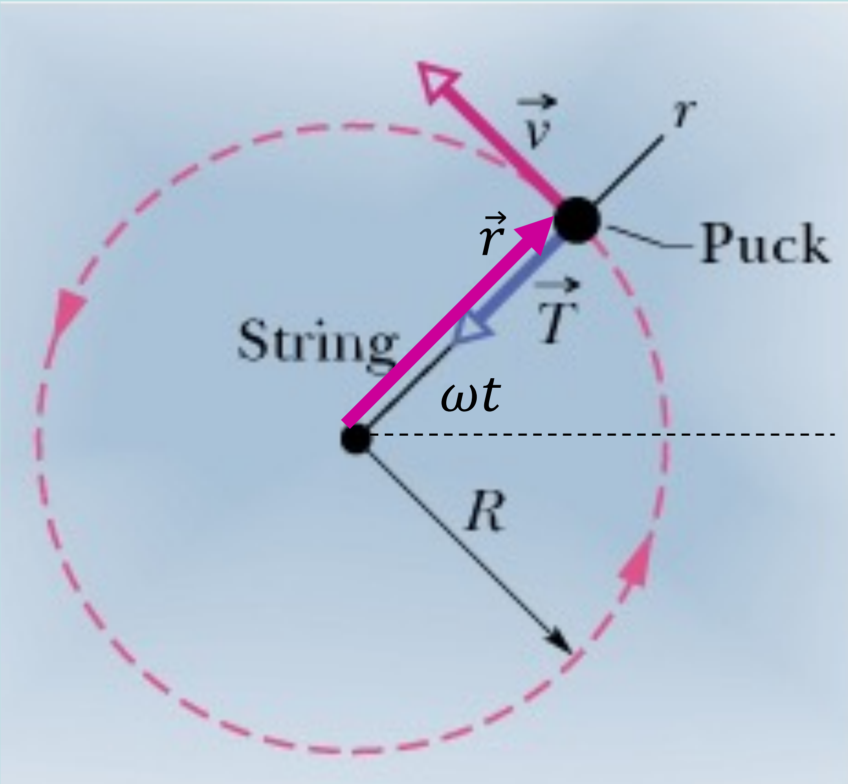
3.44 •• **CALC** The position of a dragonfly that is flying parallel to the ground is given as a function of time by $\vec{r} = [2.90 \text{ m} + (0.0900 \text{ m/s}^2)t^2]\hat{\imath} - (0.0150 \text{ m/s}^3)t^3\hat{\jmath}$. (a) At what value of t does the velocity vector of the insect make an angle of 30.0° clockwise from the +x-axis? (b) At the time calculated in part (a), what are the magnitude and direction of the acceleration vector of the insect?

等速圓周運動的加速度

以圖形法來計算：



以等速圓周運動的位置向量$\vec{r}$的分量，直接計算向心加速度向量$\vec{a}$ ：



等速圓周運動夾角是等速增加！

設ω為角度增加的速度，稱角速度。

$\theta = \omega t$

$\vec{r} = (r\cos\omega t\,, r\sin\omega t) = r\cdot\hat{r}$

$\hat{r} = (\cos\omega t\,, \sin\omega t)$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = r\frac{d}{dt}(\cos\omega t\,, \sin\omega t)$$

$$= r\left(\frac{d}{dt}\cos\omega t\,, \frac{d}{dt}\sin\omega t\right)$$

需要三角函數的微分！

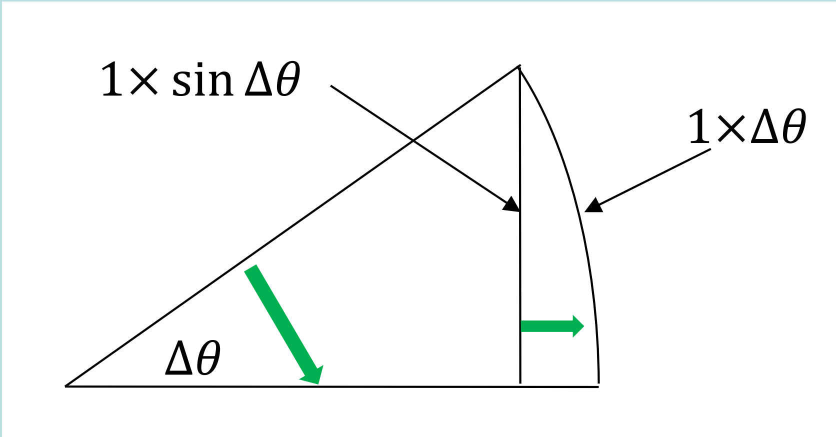
三角函數的微分

$$\frac{d}{d\theta}(\sin\theta) = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\sin(\theta+\Delta\theta)-\sin\theta}{\Delta\theta} = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\sin\theta\cos\Delta\theta+\sin\Delta\theta\cos\theta-\sin\theta}{\Delta\theta}$$

$\Delta\theta \to 0$ $\cos\Delta\theta \to 1$ 第一項與第三項似乎可以抵消：

$$= \cos\theta \cdot \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}$$

為了研究$\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}$，取一半徑為1，弧角為$\Delta\theta$的圓弧：



$\Delta\theta \to 0$ $\sin\Delta\theta \to \Delta\theta$

角度很小時，正弦函數趨近於以徑度為單位的弧角大小。

$$\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta} \to 1$$

$$\frac{d}{d\theta}(\sin\theta) = \cos\theta$$

以上推導用了$\cos\Delta\theta \to 1$，但必須進一步研究$\cos\Delta\theta$如何趨近1：

$$\cos\Delta\theta \to \sqrt{1-(\sin\Delta\theta)^2} = [1-(\sin\Delta\theta)^2]^{1/2} \to 1+?$$

若$\cos\Delta\theta$ 與1的差，是一次項$\propto \Delta\theta$ ，除以趨近於零的$\Delta\theta$後，還是會有貢獻。

可以利用二項式定理來計算：

$$(1+a)^n \sim (1+a)\cdot(1+a)+\cdots(1+a) = 1+na+O(a^2)$$

當 $a \ll 1$ 時，高階項可以忽略！

$$(1+a)^n \sim 1+na$$ 二項式定理

可以證明此式即使n不是自然數也對，任意b都對。

當 $a \ll 1$ 時，

$$(1+a)^b \sim 1+ab$$

$$\cos\Delta\theta \to \sqrt{1-(\sin\Delta\theta)^2} = [1-(\sin\Delta\theta)^2]^{1/2} \to 1-\frac{1}{2}(\sin\Delta\theta)^2 \to 1-\frac{1}{2}\Delta\theta^2$$

角度很小時，餘弦函數趨近於1+弧角大小的平方，沒有一次項。

三角函數對小角度的泰勒展開：

$$\cos \Delta\theta = 1 - \frac{1}{2}\Delta\theta^{2} + \frac{1}{4!}\Delta\theta^{4} + \cdots$$

$$\sin \Delta\theta = \Delta\theta - \frac{1}{3!}\Delta\theta^{3} + \frac{1}{5!}\Delta\theta^{5} + \cdots$$

$$\frac{d}{d\theta}(\sin\theta) = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\sin(\theta+\Delta\theta)-\sin\theta}{\Delta\theta}$$

$$= \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\sin\theta\cos\Delta\theta+\sin\Delta\theta\cos\theta-\sin\theta}{\Delta\theta}$$

$$\to \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\sin\theta\left[1-\frac{1}{2}\Delta\theta^2\right]+\Delta\theta\cdot\cos\theta-\sin\theta}{\Delta\theta}$$

$$= \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{-\sin\theta\cdot\frac{1}{2}\Delta\theta^2+\Delta\theta\cdot\cos\theta}{\Delta\theta} = \cos\theta$$

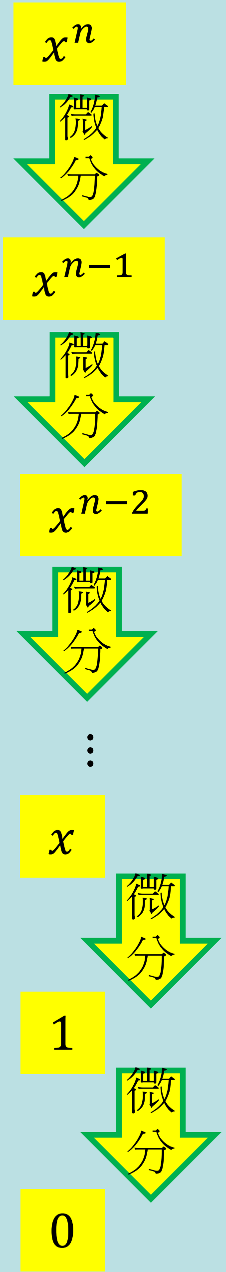
$$\cos\Delta\theta \to 1-\frac{1}{2}\Delta\theta^2$$

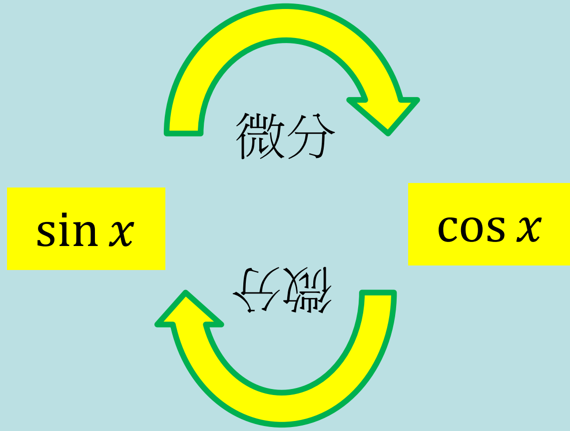
正弦函數的微分是餘弦函數

$$\frac{d}{d\theta}(\sin\theta) = \cos\theta$$

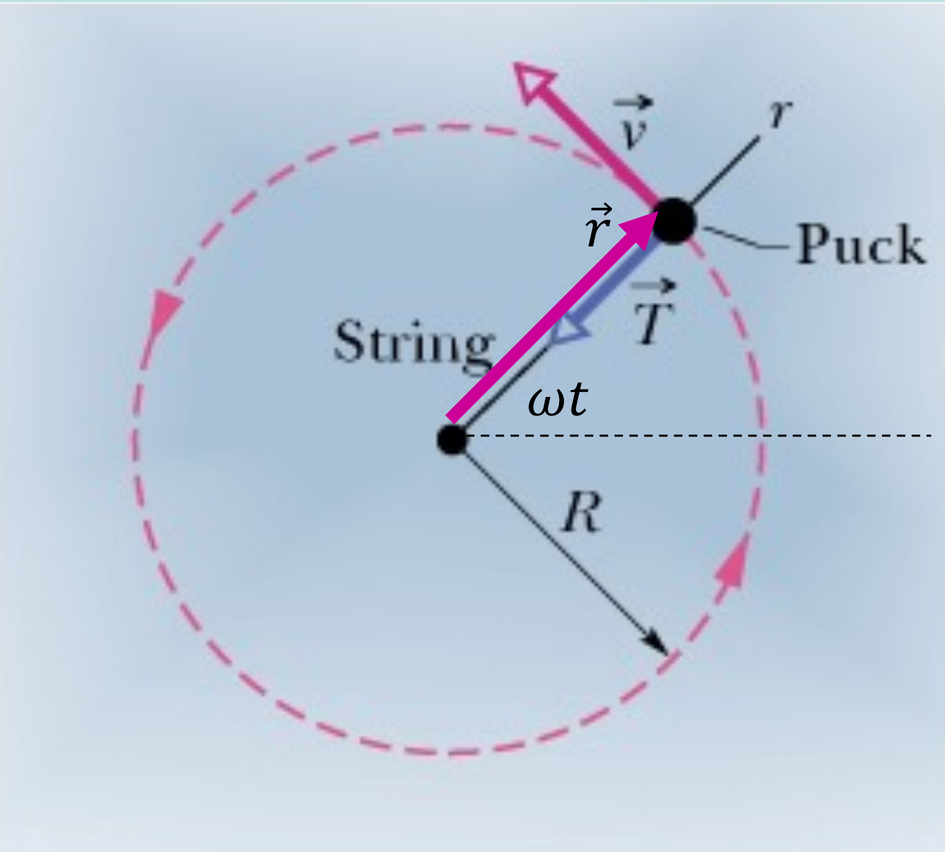
餘弦函數的微分是負的正弦函數

$$\frac{d}{d\theta}(\cos\theta) = -\sin\theta$$


x^n
微分
x^{n-1}
微分
x^{n-2}
微分
⋮
x
微分
1
微分
0


微分
$\sin x$
$\cos x$
微分

等速圓周運動的加速度



$$\vec{r} = (r\cos\omega t\,, r\sin\omega t) = r\cdot\hat{r}$$

$$\hat{r} = (\cos\omega t\,, \sin\omega t)$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

$\theta = \omega t$ 連鎖率

$$= r\frac{d}{dt}(\cos\omega t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\cos\theta}{\Delta\theta}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta\cos\theta}{\Delta\theta}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = r\frac{d(\cos\theta)}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

$$= -r\sin\theta\frac{d}{dt}(\omega t) = -r\omega\sin\omega t$$

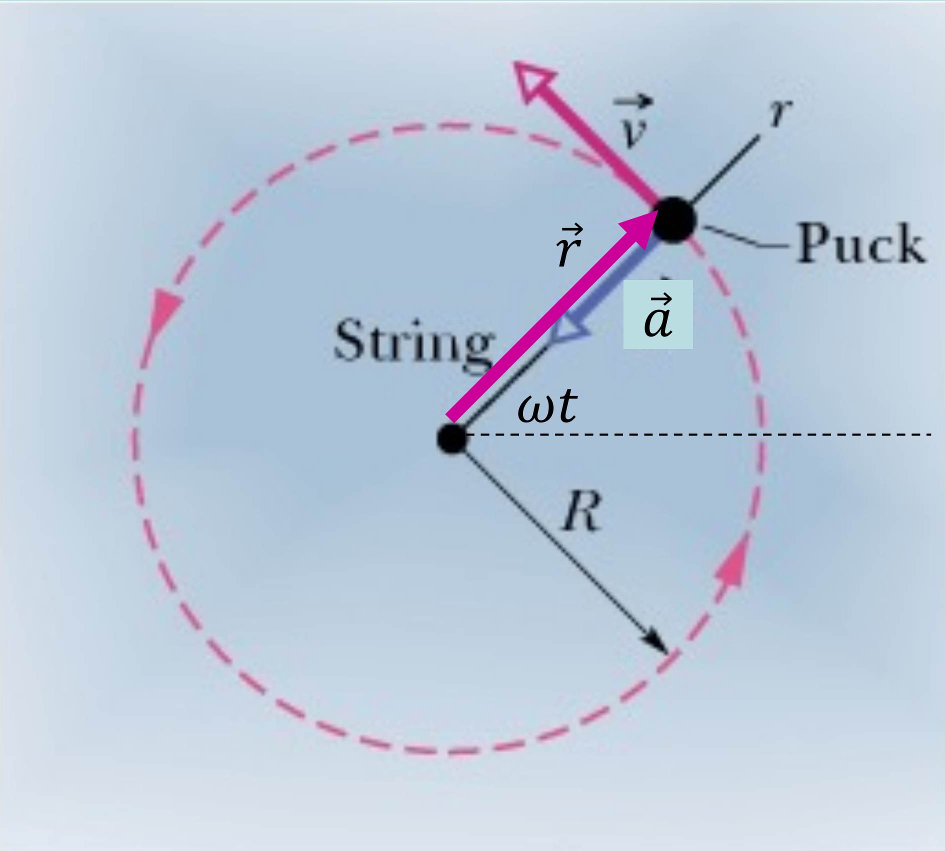
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$$

$$= (-r\omega\sin\omega t\,, r\omega\cos\omega t)$$

$$= r\omega(-\sin\omega t\,, \cos\omega t) = r\omega\hat{v}$$

$$v = r\omega \qquad \hat{r}\cdot\hat{v} = 0$$

等速圓周運動的加速度



$$\vec{v} = (-r\omega \sin \omega t\,, r\omega \cos \omega t)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(-r\omega \frac{d}{dt}(\sin \omega t), r\omega \frac{d}{dt}\cos \omega t\right)$$

$$= \left(-r\frac{d\sin\theta}{d\theta}\cdot\frac{d}{dt}(\omega t), r\frac{d\cos\theta}{d\theta}\cdot\frac{d}{dt}(\omega t)\right)$$

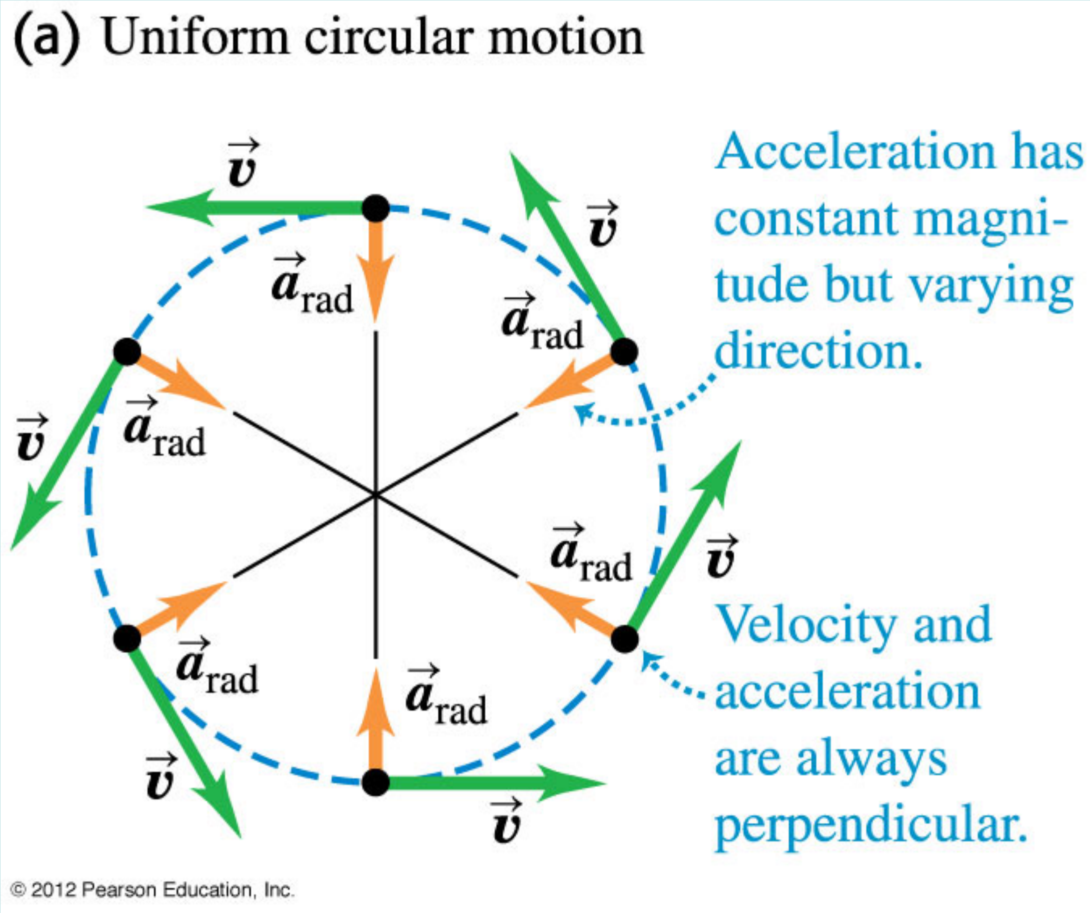
$$= (-r\omega^2 \cos \omega t\,, -r\omega^2 \sin \omega t)$$

$$\vec{a} = -r\omega^2(\cos \omega t\,, \sin \omega t) = -r\omega^2\hat{r}$$

$$\hat{r} = (\cos \omega t\,, \sin \omega t)$$

向心加速度指向圓心

向心加速度大小： $a = r\omega^2 = \dfrac{v^2}{r}$



$$a = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}$$

1. 考慮一雲霄飛車，列車由高處下滑，進入一段螺旋型的軌道。在此段，軌道繞水平軸旋轉，因速度很快，旋轉可以近似視為等速，每一圈旋轉時間為$1.0\ \mathrm{s}$，同時軌道水平前進$8.0\ \mathrm{m}$。螺旋軌道的最低點就接近地面，最高點的高度為$6.0/\pi\ \mathrm{m}$。與軌道相比車廂極小，可視為一質點。重力加速度：$g{\sim}10\ \mathrm{m/s^2}$。

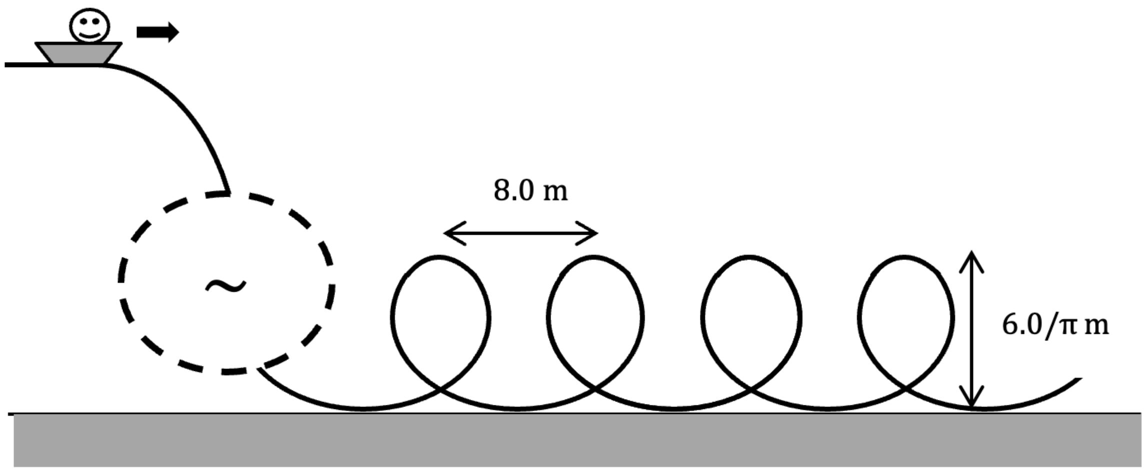
   A. 當某乘客的車廂到達螺旋軌道的一頂點時，她的項鍊突然斷裂，於是墜子與項鍊分離。計算墜子離開後，多久會落到地面。假設墜子落地前，並沒有其他撞擊。

   提示：拋體運動，水平與垂直方向運動是互相獨立。

   B. 承上題，計算項鍊突然斷裂時車廂的速率大小。

   提示：先算平行旋轉軸、及垂直旋轉軸的速度分量。

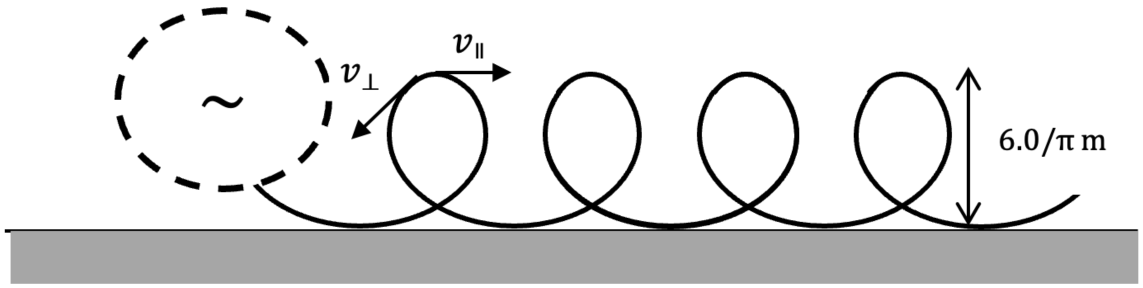
   C. 承上題，計算墜子落地處，與該頂點（也就是墜子脫離項鍊處）之間的水平距離。



解答

A. 當一個乘客的列車車廂到達螺旋軌道的一個最高點時，速度沿水平方向，因此墜子在鉛質方向等於一初速為零的自由落體，落地時間等於：$t=\sqrt{\frac{2h}{g}}=0.62\ \mathrm{s}$。

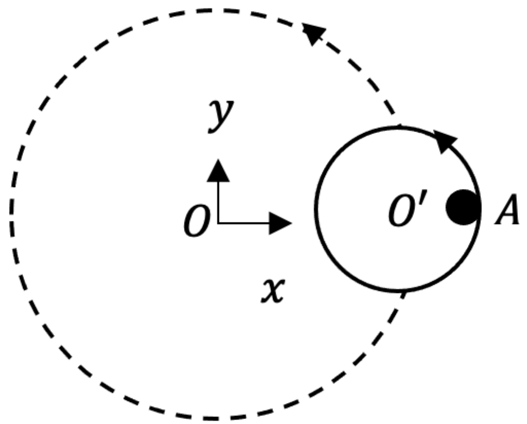
B. 沿旋轉軸的速度分量，$v_{\parallel}=\frac{8.0}{1.0}=8.0\ \mathrm{m/s}$。垂直旋轉軸的速度分量：$v_{\perp}=\frac{2\pi\cdot 3/\pi}{1.0}=\frac{2\pi\cdot R}{1.0}=6.0\ \mathrm{m/s}$。因此速率為$v=10.0\ \mathrm{m/s}$



C. 投影在水平平面上，此墜子作等速運動。其初速度即沿軌道方向，速率為$v=10.0\ \mathrm{m/s}$，墜子落地處，與該最高點之間的水平距離等於：$vt=6.2\ \mathrm{m}$。

向量是可以疊加的，所以位移、速度、加速度都可以疊加！

考慮有某一個旋轉咖啡杯設施，由上方往下看如下圖。咖啡杯圓心O'與設施中心O的距離為$\overline{OO'} = a$，O'繞O保持作等速圓周運動（圖上虛線圓），角速度為ω。從地面上觀察，咖啡杯本身又繞自己的圓心O'保持作等速圓周運動，角速度為4ω。設兩個旋轉都是逆時鐘方向。咖啡杯的水平切面（圖上實線圓）可以圓近似，假設杯壁很薄可以忽略，乘客A（下圖中黑點）及座椅的位置可以近似看成貼在杯壁上的一個點。杯的半徑為$\overline{O'A} = 0.25a$。



為方便討論，假設啟動過程發生在$t < 0$，可以忽略。在$t = 0$時，乘客與咖啡杯已經進入上述的雙重圓周運動了。同時設$t = 0$時，O, O'與乘客A恰位於一直線上，如圖所示。此直線設為x軸，另一垂直於x軸的水平方向設為y軸，以O為原點。在$t > 0$以後，乘客相對於座椅保持靜止狀態。

A. 在過程中，乘客會受到水平方向的力。假設座椅的坐墊很平滑，對乘客的摩擦力可以忽略，乘客也沒繫安全帶。則此水平方向的力大致是來自座椅靠背的正向力N與靠背與乘客間的靜摩擦力f_s，使乘客相對座椅保持靜止的狀態。計算在時間$t > 0$時，靠背的正向力N與靠背的靜摩擦力f_s的量值。假設靠背的靜摩擦係數$\mu_s = 0.8$，將$\mu_s N$及 f_s兩力對時間t作圖，說明在$t > 0$，乘客都不會滑動。(10)

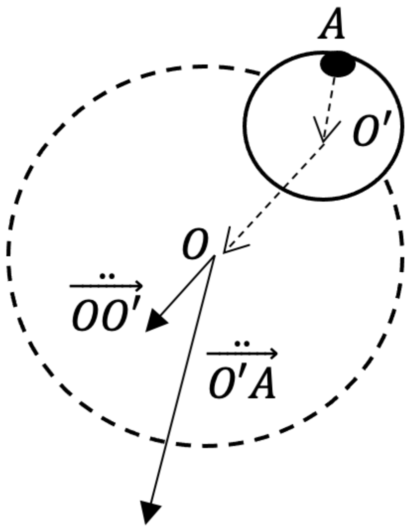
B. 若樂園公司考慮更換靠背的材質，靠背的摩擦力是考慮的關鍵性質。靠背的靜摩擦係數μ_s，必須大於一個臨界值μ_{sc}，才能使得乘客在$t > 0$時，即使沒繫安全帶，也不會發生滑動。計算μ_{sc}。(10)

提示：當μ_s逐漸下降時，考慮$\mu_s N$及f_s分別對時間t的作圖，或$\mu_s N - f_s$對時間t的作

C. 在$t = \pi/4\omega$時，乘客的珍珠耳環突然鬆脫，假設此時耳環距地高度為h，落地前耳環沒有發生其他撞擊，且可以忽略阻力。結束後乘客想去尋找鬆脫飛離的耳環，問珍珠落地位置的x, y座標會是多少。乘客與鬆脫前耳環的位置近似可以看成同一個位於杯壁上的點。(10)

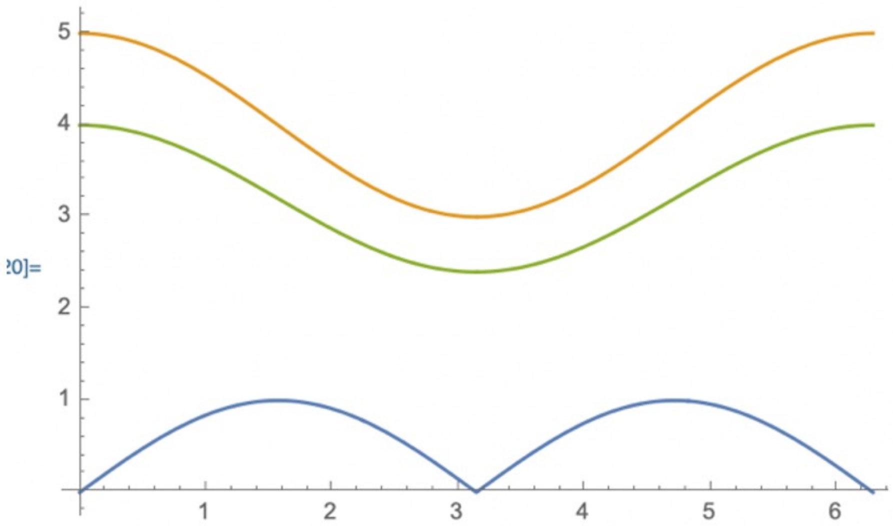
A. 乘客的位置向量可以寫成：$\vec{r} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A}$，他的加速度向量：$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{\overrightarrow{OO'}} + \ddot{\overrightarrow{O'A}}$，$\ddot{\overrightarrow{OO'}}$與$\ddot{\overrightarrow{O'A}}$恰為兩個等速圓周運動的向心加速度。在時間$t$時，$\ddot{\overrightarrow{OO'}}$的大小為$a\omega^2$，與$x$軸夾角為$\omega t + \pi$，$\ddot{\overrightarrow{O'A}}$的大小為$0.25a(4\omega)^2 = 4a\omega^2$，與$x$軸夾角為$4\omega t + \pi$。因此$\ddot{\overrightarrow{OO'}}$與$\ddot{\overrightarrow{O'A}}$的夾角為$3\omega t$。$\ddot{\overrightarrow{O'A}}$的方向垂直於靠背，也就是正向力的方向。因此可先將$\ddot{\overrightarrow{OO'}}$投影到垂直$\ddot{\overrightarrow{O'A}}$的方向：$a\omega^2 \sin 3\omega t$，這即是靠背的靜摩擦力，大小為$f_s = |a$[illegible]$|$。$\ddot{\overrightarrow{OO'}}$投影到平行於$\ddot{\overrightarrow{O'A}}$的方向，再加上$\ddot{\overrightarrow{O'A}}$，即是正向力：$N = a\omega^2 \cos 3\omega t + 4a\omega^2$。所受總力的大小即為：

$a\omega^2\sqrt{17 + 8\cos 3\omega t}$

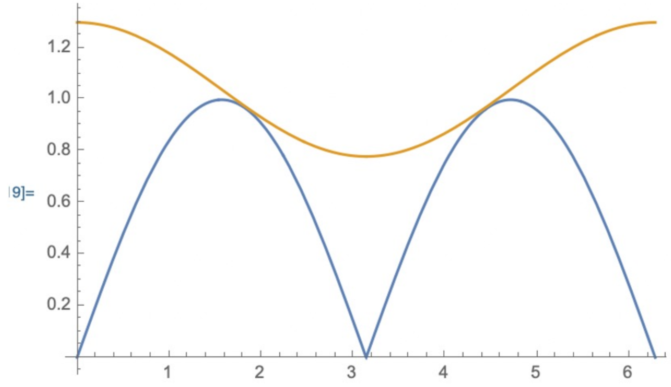


將所需靜摩擦力$f_s = |a\omega^2 \sin 3\omega t|$、靠背的正向力$N = a\omega^2 \cos 3\omega t + 4a\omega^2$以及$\mu_s N$，對時間$t$作圖：很明顯地，在整個過程，$f_s < \mu_s N$，因此即使沒繫安全帶，乘客也不會有滑動發生。

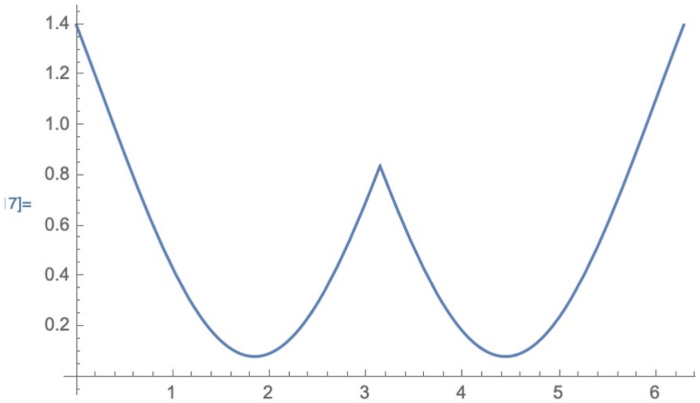
Screenshot



B. 由上圖可知，當μ_s很大時，$f_s < \mu_s N$。若將μ_s慢慢降低，直到$\mu_s N$的曲線與f_s的曲線在某一點上相切後，乘客會開始在過程中的一個階段，感覺$f_s > \mu_s N$，因此會有滑動。這個兩曲線相切時的μ_s，就是臨界值μ_{sc}。注意圖形是對稱的，所以我們只要針對$\sin 3\omega t > 0$的部分來討論即可。

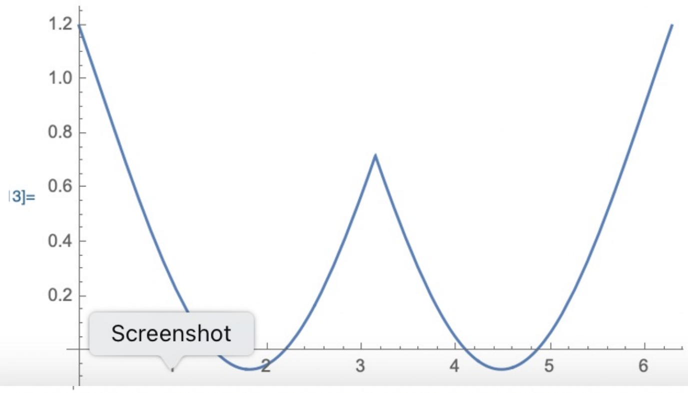


也可以考慮$\mu_s N - f_s$對時間t的作圖，當μ_s很大時，$\mu_s N - f_s$恆正。



若將μ_s慢慢降低，$\mu_s N - f_s$的最小值，會慢慢下降，直到觸及橫軸與之相切，這時$\mu_s N - f_s = 0$及$\frac{df_s}{dt} - \mu_s \frac{dN}{dt} = 0$，兩個條件同時成立。這時對應的$\mu_s$，就是臨界值$\mu_{sc}$。

如果μ_s繼續降低，$\mu_s N - f_s$的最小值就會穿過橫軸，那麼就有一個範圍的時間，在其中$\mu_s N < f_s$，乘客就會滑動。



因此，$\mu_s = \mu_{sc}$時，記兩曲線相切處時間為t_1，兩曲線的切線斜率相等：

$$\frac{df_s}{dt}(t_1) = \mu_s \frac{dN}{dt}(t_1)$$

而且在同一時間，曲線函數值也相等：

$$f_s(t_1) = \mu_s N(t_1)$$

代入$f_s = a\omega^2 \sin 3\omega t$及$N = a\omega^2 \cos 3\omega t + 4a\omega^2$，第一個條件得到：

$$\cos 3\omega t_1 = -\mu_s \sin 3\omega t_1$$

$$\cot 3\omega t_1 = -\mu_s$$

因此$\sin 3\omega t_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\mu_s^2}}$，$\cos 3\omega t_1 = -\frac{\mu_s}{\sqrt{1+\mu_s^2}}$代入第二個條件得到：

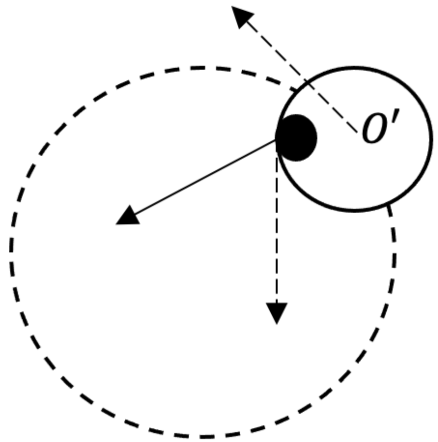
$$\frac{1}{\sqrt{1+\mu_s^2}} = -\frac{\mu_s^2}{\sqrt{1+\mu_s^2}} + 4\mu_s$$

$$\mu_{sc} = \frac{1}{\sqrt{15}} \sim 0.25$$

C. 在$t=\pi/4\omega$時，杯的圓心轉了$\pi/4$，杯對自己的圓心轉了π，因此乘客的位置在

$\vec{r}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'A}=\left(\frac{a}{\sqrt{2}}-\frac{a}{4},\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$，

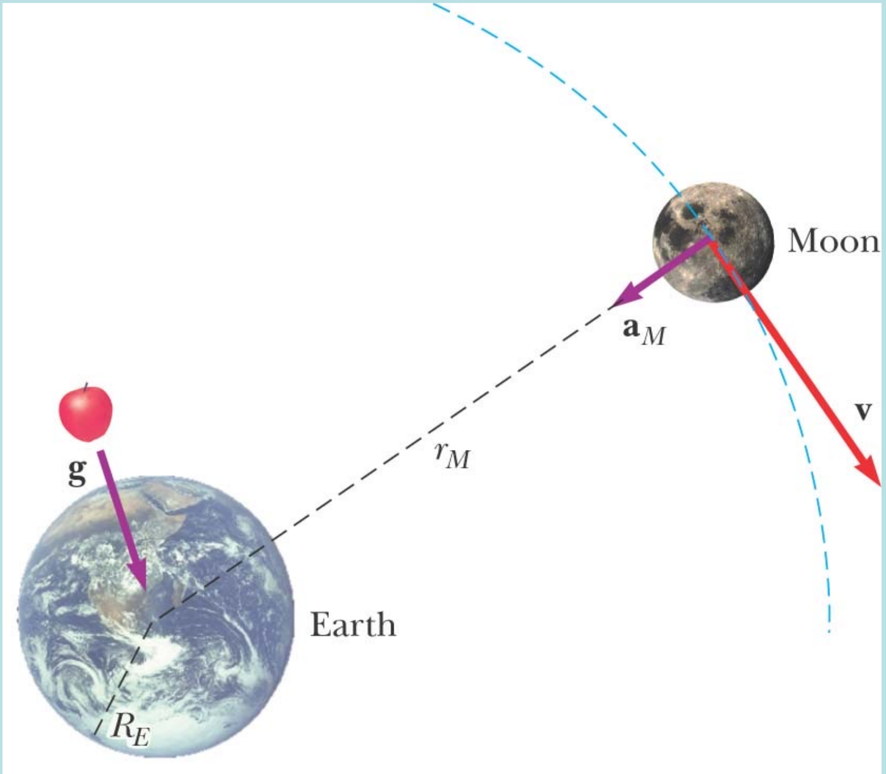
珍珠脫離後的初速則為：

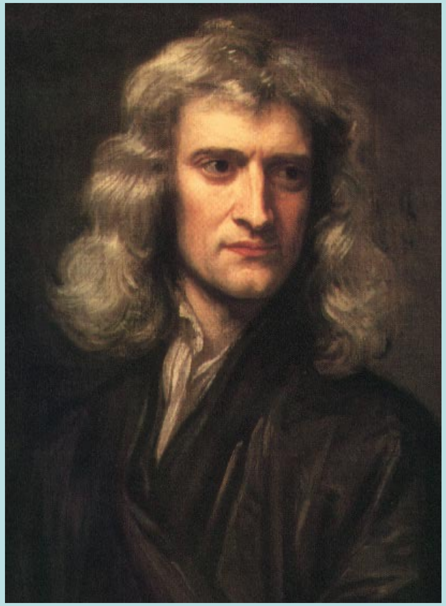


$$\vec{v}_0=a\omega(0,-1)+a\omega\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=a\omega\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)$$

珍珠落地前所需時間為：$\sqrt{\frac{2h}{g}}$，落地前位移為$\Delta\vec{r}=a\omega\sqrt{\frac{2h}{g}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)$。

因此珍珠落地位置向量為：$\left(\frac{a}{\sqrt{2}}-\frac{a}{4}-a\omega\sqrt{\frac{h}{g}},\frac{a}{\sqrt{2}}+a\omega\sqrt{\frac{h}{g}}(1-\sqrt{2})\right)$





Isaac Newton

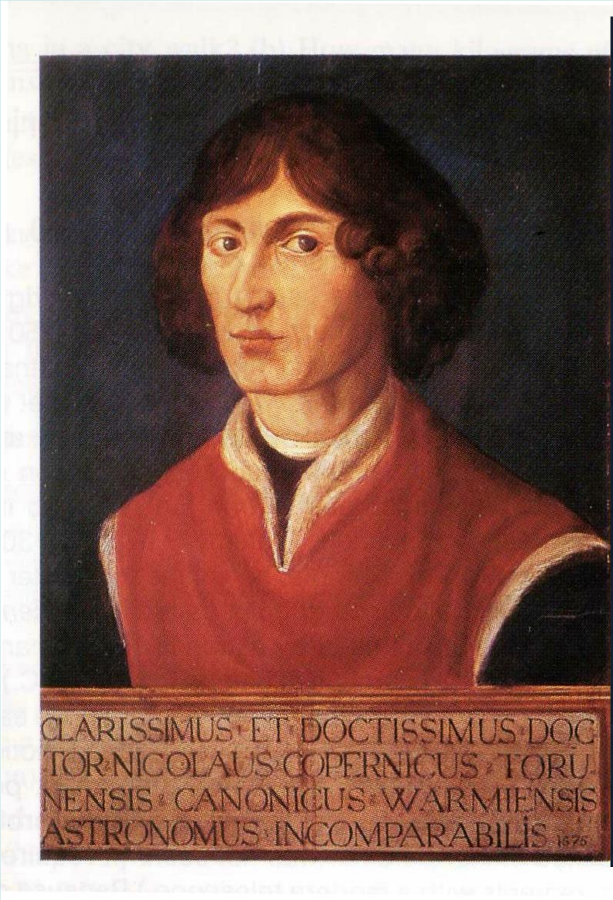
(1642-1727)

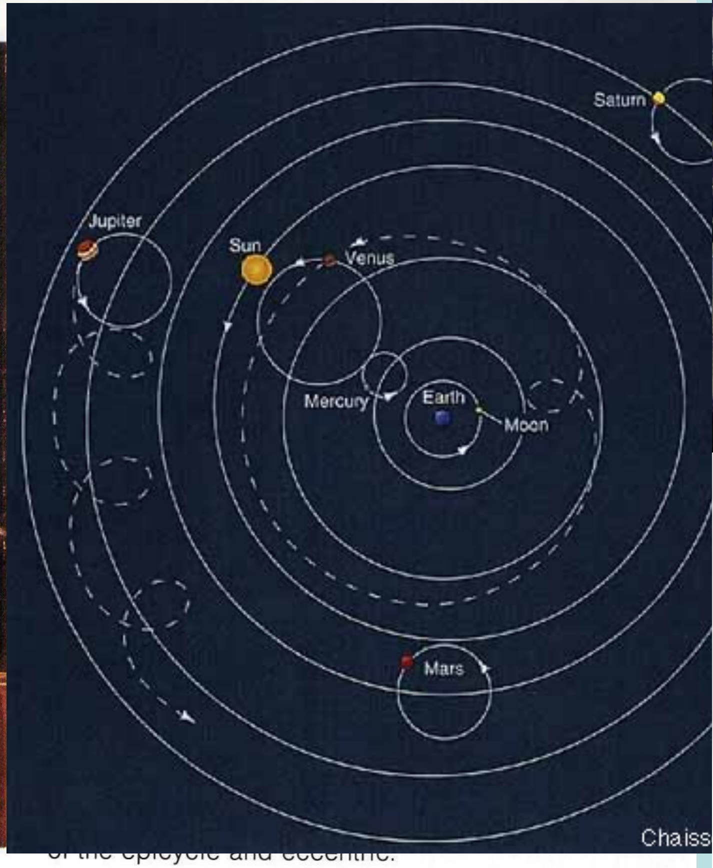
Is. Newton

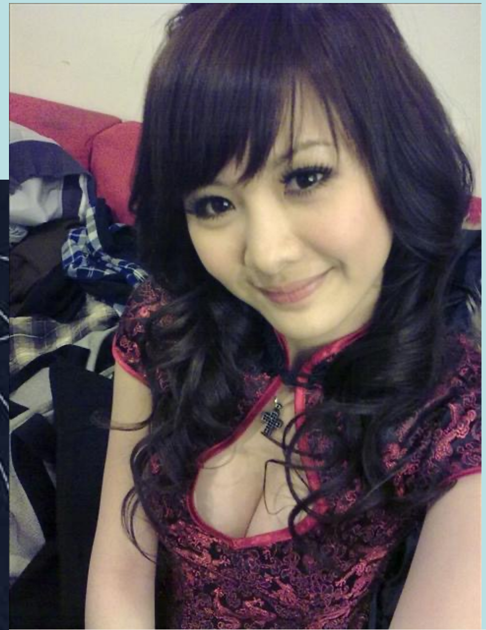
月球的運動也是等加速度運動（以大小而言）！

加速度的方向也是指向地球！

Copernicus 哥白尼 (1473-1543)





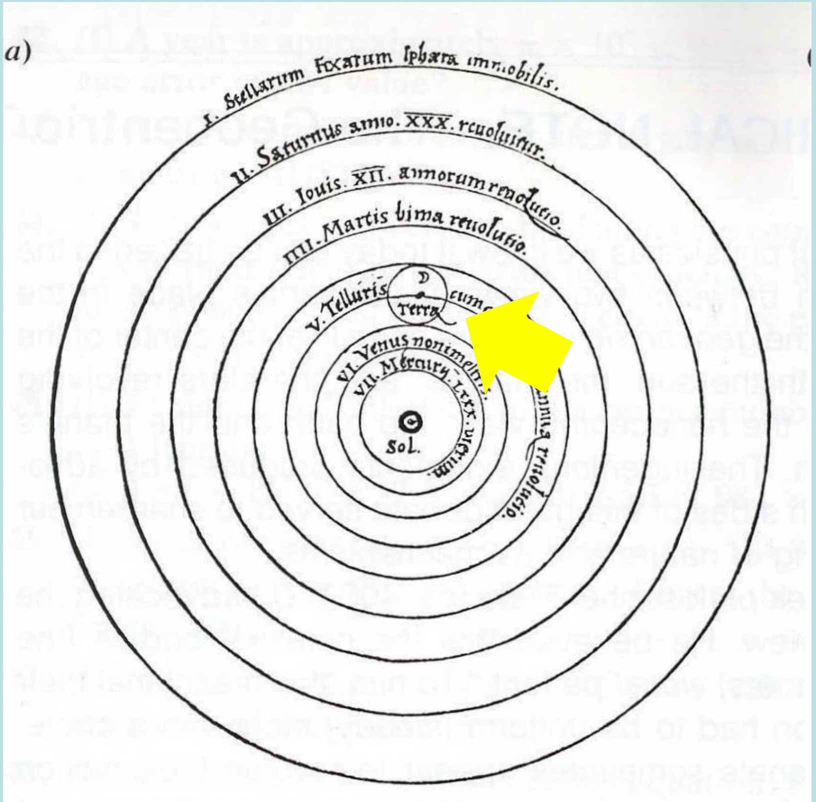


哥白尼批評托勒密的系統“....” not pleasing to the mind

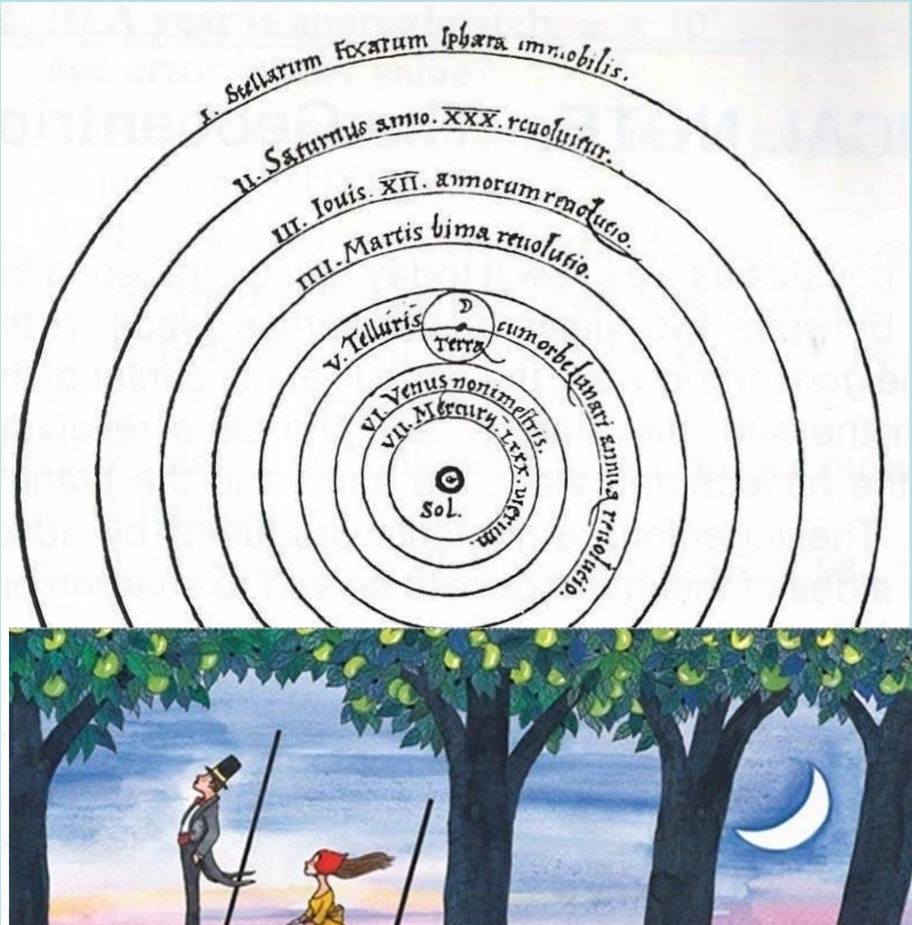
他寧願忍受當時還無法解釋的地球移動，卻堅持心靈的快樂！

原來科學不只是忠於現象，科學還必須賞心悅目！

科學必須簡化現象為單純的定律！簡單使人快樂！



哥白尼的圖像也有一個不是非常精美之處！



月球是離地極近，繞地球轉的天體。

為什麼它不像地球表面上的物體會落回地面？

月球為什麼一直飄在空中！

或許這本來就是如此！沒甚麼值得大驚小怪的！

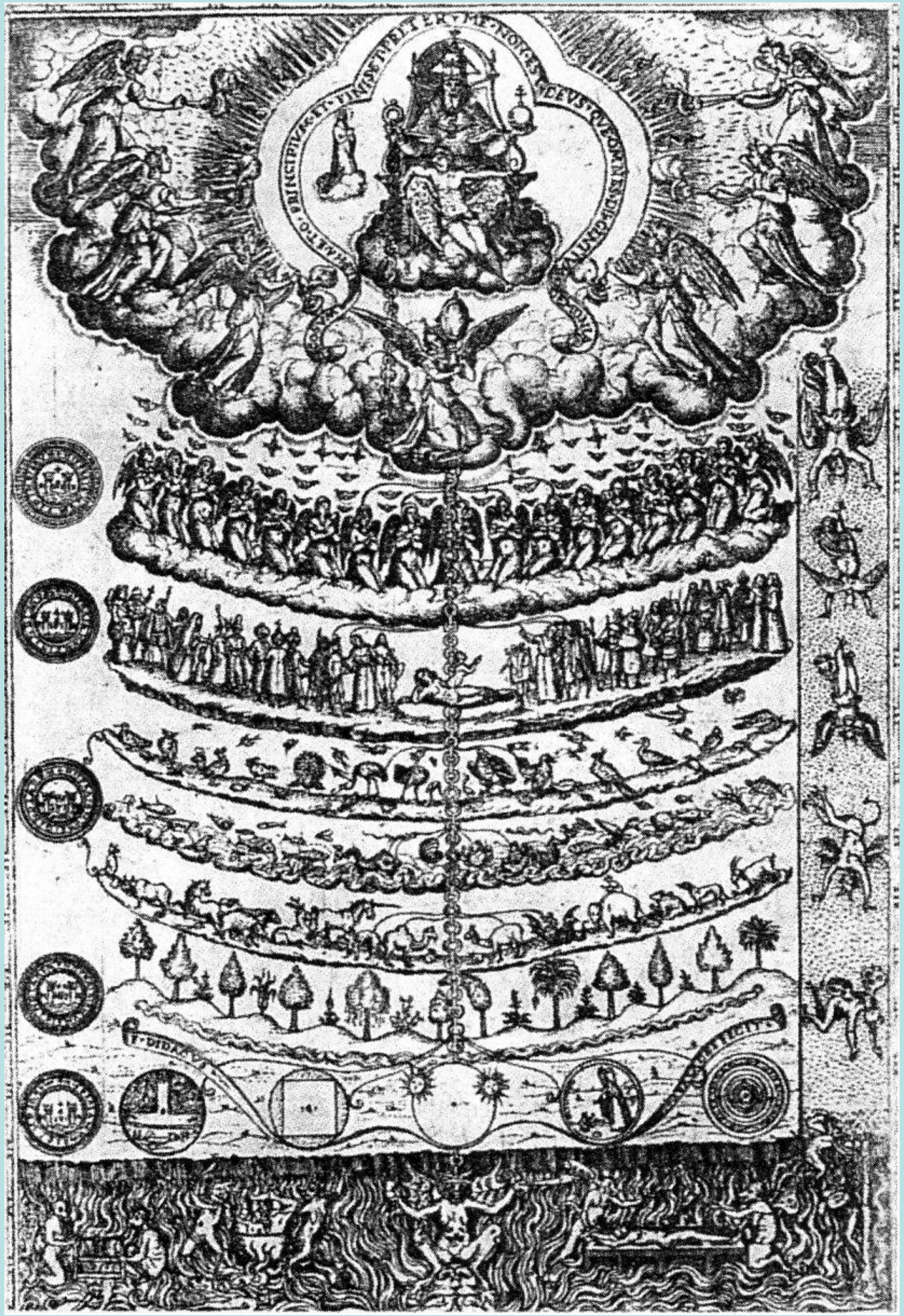
月球是神聖的天上的天體，

當然與塵世中世俗的物體，本質不同，遵守不同的法律，作不同的運動。

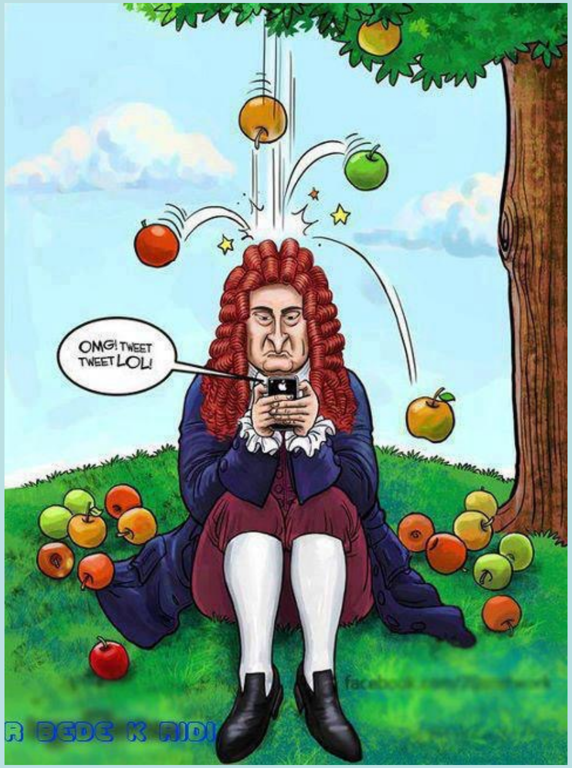
一個恆常運動，一個會落下。

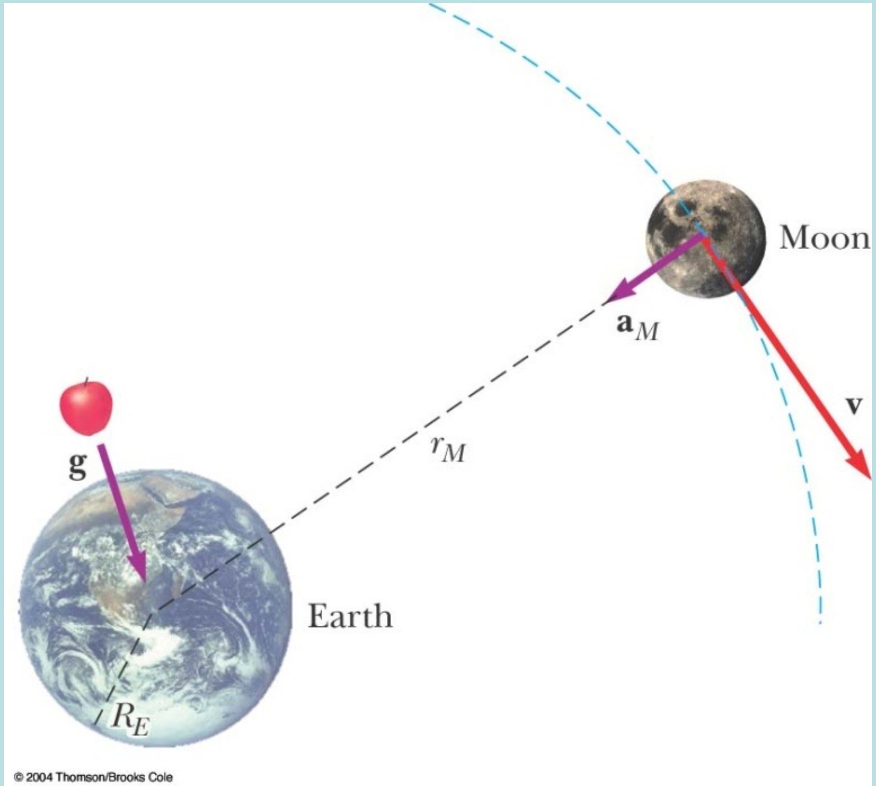
如同貴族與平民，本質不同，遵守不同的法律。

Spanische Edelleute.



自然與社會都有階級





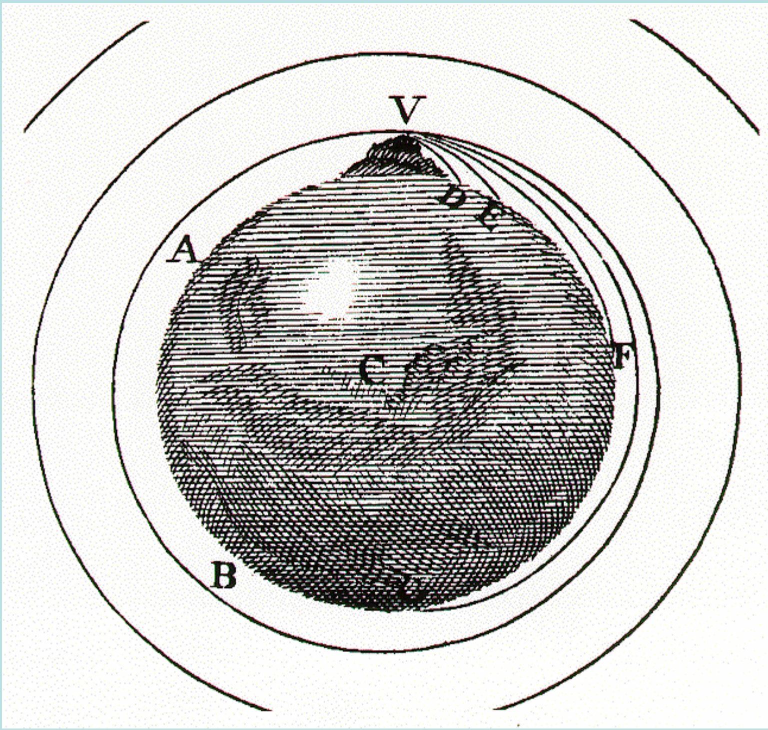
天上的月球與地上的物體，運動速度大小與方向雖然完全不同，

但運動的加速度卻都指向地心！

伽利略主張對物體運動的研究應該由速度轉移到加速度！

如果以加速度來研究，月球與蘋果的運動在本質上是一樣的。

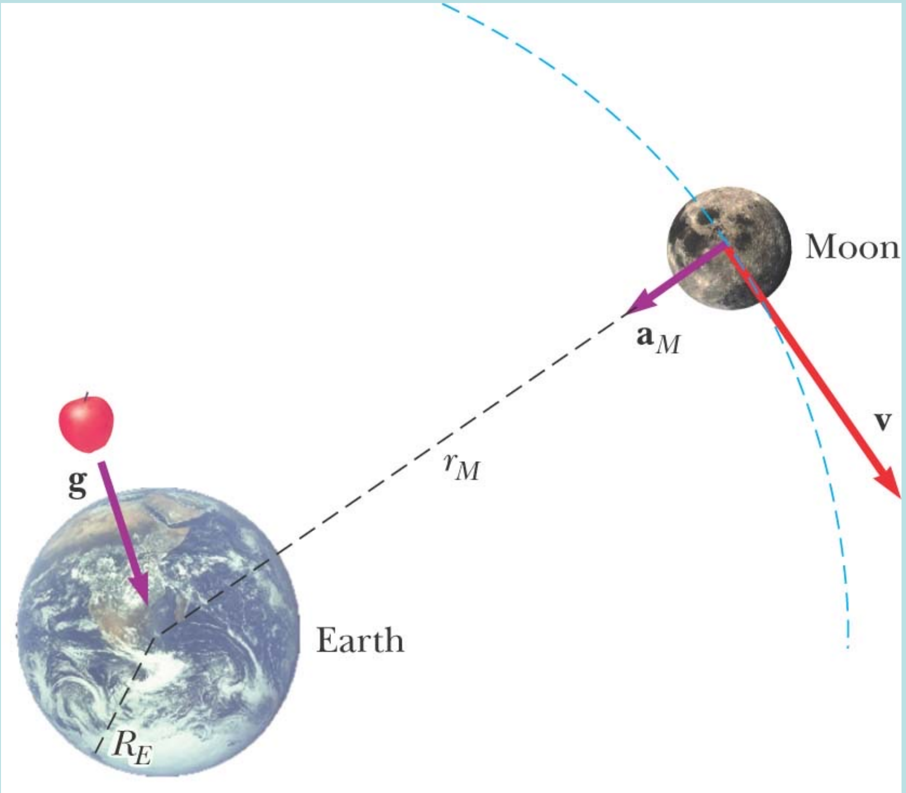
＝

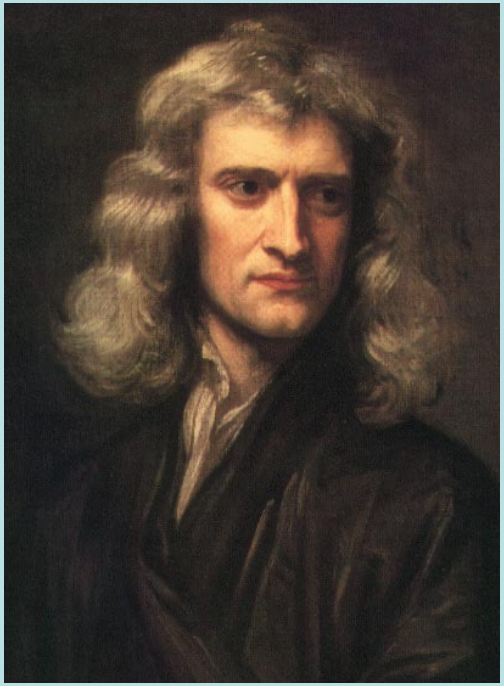


塵世的物體可以成為神聖的天體！

天體與地面物體本質上是平等的！

天體與蘋果服從同樣的物理定律





Isaac Newton

(1642-1727)

物理定律是普遍的 (universal)

無論貴賤，法律一體適用！

Nature is exceedingly simple and comfortable to herself.

Whatever reasoning holds for greater motions, should hold for lesser ones as well!

Newton “Conclusio”