相對論的動量：

$$p_x = \frac{mu_x}{\sqrt{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}} = \gamma m u_x$$

$u \ll c$ 時, $\gamma \to 1$, 因此 $p_x \to mu_x$ 接近牛頓的定義

相對論的能量：

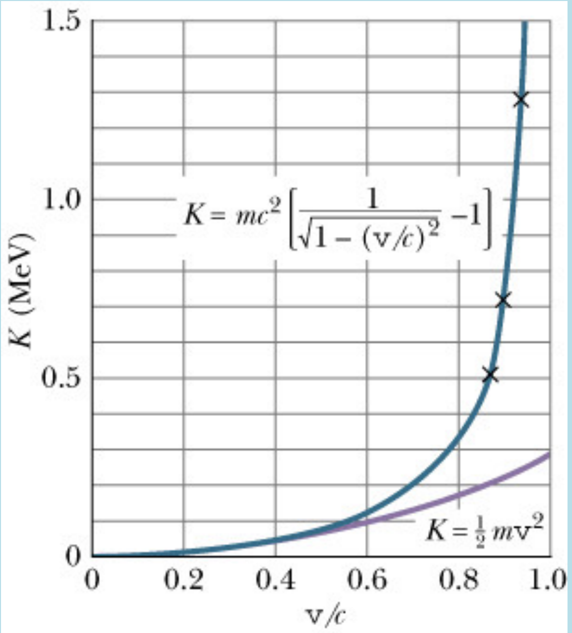
$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}} = \gamma mc^2$$

當 $u \ll c$

靜止能量 動能

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}} = mc^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \sim mc^2\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{u^2}{c^2}\right] = mc^2 + \frac{m}{2}u^2$$

動能的牛頓定義 $\frac{1}{2}mv^2$ 是不正確的！



相對論修改了能量的形式，

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

如此定義的動能才滿足動能守恆定律

（牛頓定義下的動能 $\frac{1}{2}mv^2$在高速時即不守恆）

但在速度遠小於光速時，相對論的動能會趨近牛頓力學中的動能$\frac{1}{2}mv^2$ 。

當速度等於光速$v = c$時，物體的能量是無限大，因此我們無法將物體的速度加大超過光速。

當物體靜止時，它的質量對應一個不為零的能量 $E = mc^2$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad \Rightarrow \quad E = mc^2$$

靜止的物體因為其質量，能量亦不為零

這個公式暗示了能量與質量可以彼此互相轉換。

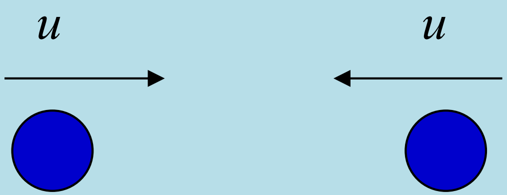
$$E = mc^2 + K$$

質量的減少可能變為動能的增加！

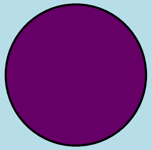
質量是能量的一種形式，能量守恆蘊含質量可以轉換為其他形式的能量，

其他形式的能量亦可轉換為質量，質量不再守恆。Mass is not conserved.

完全非彈性碰撞的質量就不守恆！



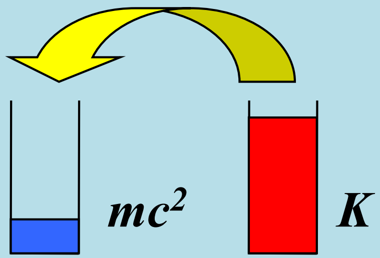
$$p^0_{i\ \text{total}} = \frac{2mc}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

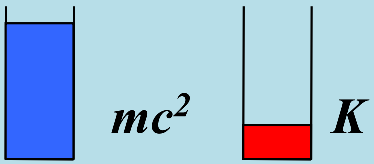


$$p^0_{f\ \text{total}} = \frac{E}{c} = Mc$$

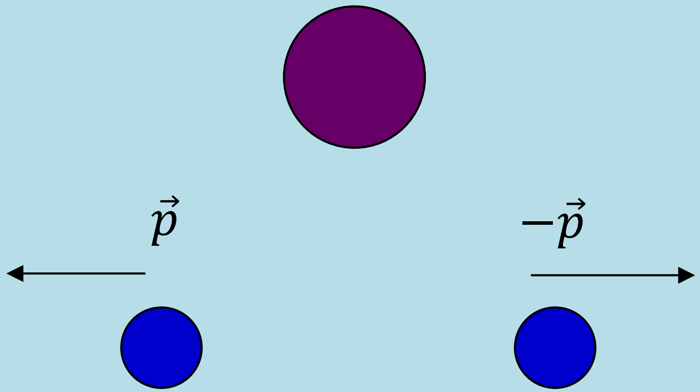
$$M = \frac{2m}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}} \neq 2m$$

質量不守恆，入射粒子的動能轉換成質量。





產物相同時的二體衰變 $A \rightarrow B + B$，選擇A靜止座標系，這就是$B + B$的質心坐標系。



$$\vec{p}_{i\ \mathrm{total}} = \vec{p}_{f\ \mathrm{total}} = 0$$

$$p^0_{\mathrm{I\ total}} = Mc$$

$$p^0_{f\mathrm{total}} = 2\frac{E_f}{c} = \frac{2mc}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

由能量守恆可以得出產物粒子的能量

$$2E_f = Mc^2$$

產物粒子的能量與動量大小都是固定的值，可以計算出來！

$$E_f = \frac{1}{2}Mc^2$$

$$\frac{E^2}{c^2} - |\vec{p}|^2 = m^2c^2$$

$$|\vec{p}|^2 = \frac{M^2c^2}{4} - m^2c^2$$

$$M = \frac{2m}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

$M > 2m$ 衰變產物的總質量必須小於衰變粒子的質量!

4 momentum p^μ的長度p^2是甚麼呢？

$$p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) = \left(\frac{E}{c}, p^x, p^y, p^z\right)$$

$$p^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - p_x^2 = \left(\frac{mc}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}\right)^2 - \left(\frac{mu}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}\right)^2 = \frac{m(c^2-u^2)}{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2} = m^2c^2$$

$$p^2 = m^2\left[\left(\frac{cdt}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2\right] = m^2c^2$$

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2$$

$$p^2 = p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - |\vec{p}|^2 = m^2c^2$$

$$p^2 = m^2c^2$$

質量是一個粒子四維動量的長度，是一個羅倫茲不變量。

因此質量是粒子的最重要的特徵！

Mass is the invaraint of 4-momentum as 4-vector.

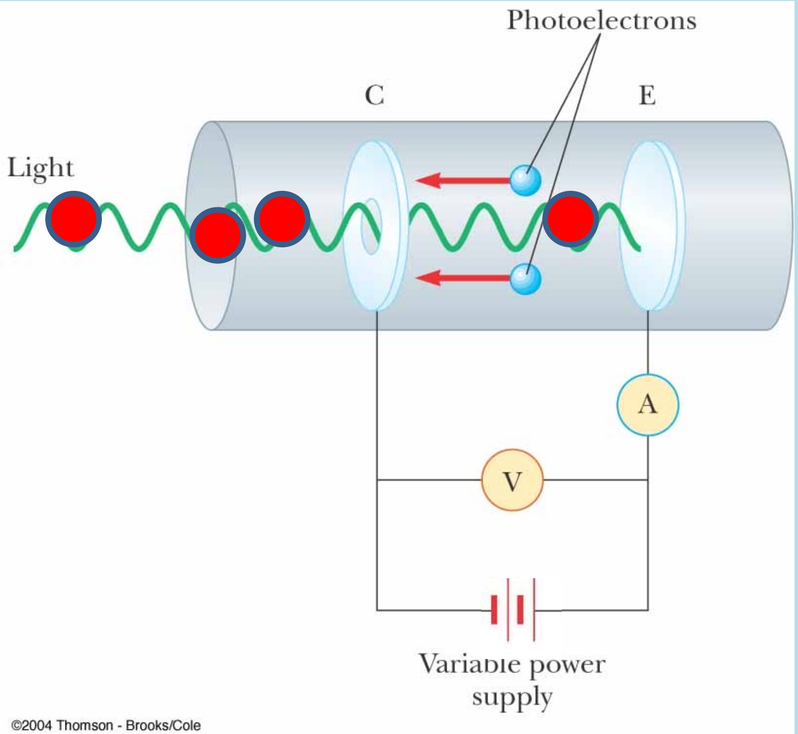
每一個基本粒子的 4 momentum都必須滿足以下的 on-shell條件

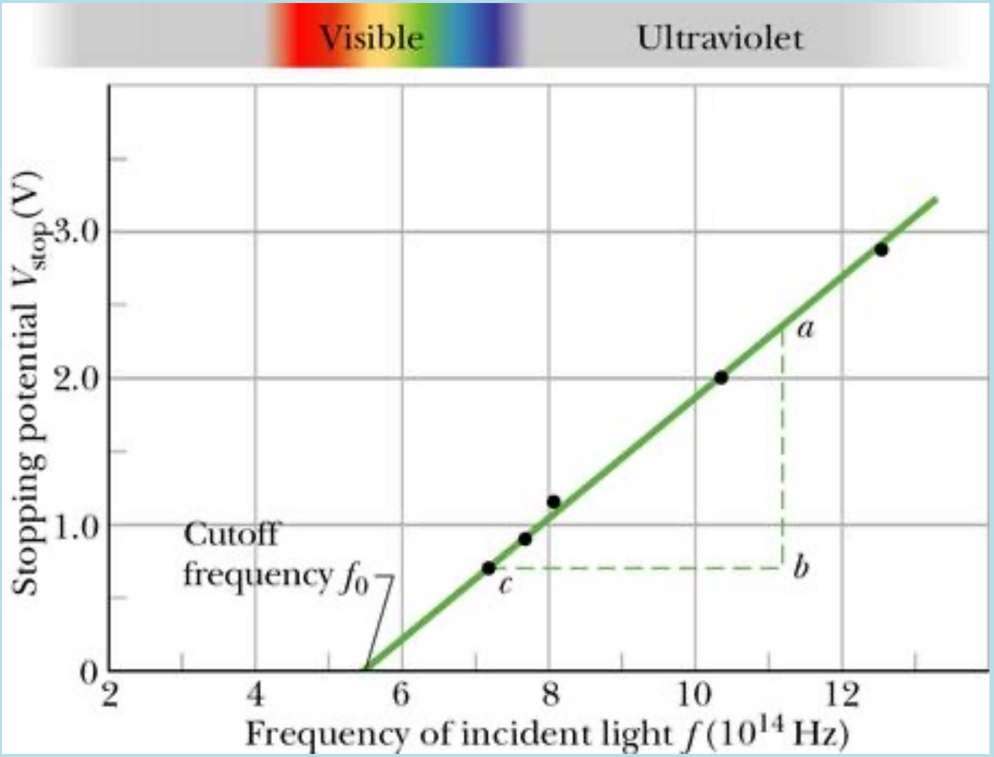
$$p^2 = \frac{E^2}{c^2} - |\vec{p}|^2 = m^2c^2 \qquad E = c\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2c^2}$$

能量與3維動量大小並非獨立的變數。

動量越大，能量就越大。The larger the 3-momentum, the larger the energy.

將截止電壓 V_{stop} 對光的頻率作圖，呈線性關係！ eV_{stop} 即是一個光電子的最大動能。





$$eV_{\text{stop}} = E_e = hf - W$$

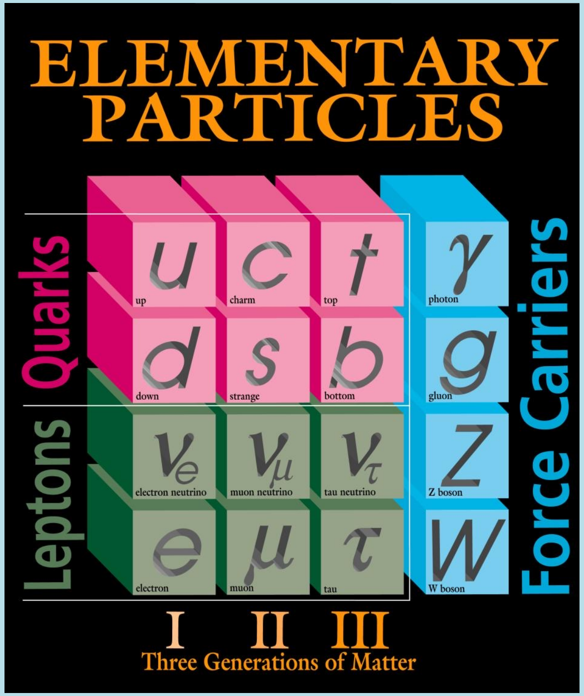
光交給電子的能量是一個固定不可分割的值，稱為光量子 $E = hf$

W是光電子離開電極所需克服的最小位能：Work Function。 $W = hf_0$

一個光量子的能量由頻率決定，因此光量子能量低於W即無法打出電子。

直線的斜率即是 Planck常數h。這是最容易測蒲朗克常數的辦法。

光子 **Photon** γ



$$E = hf$$

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

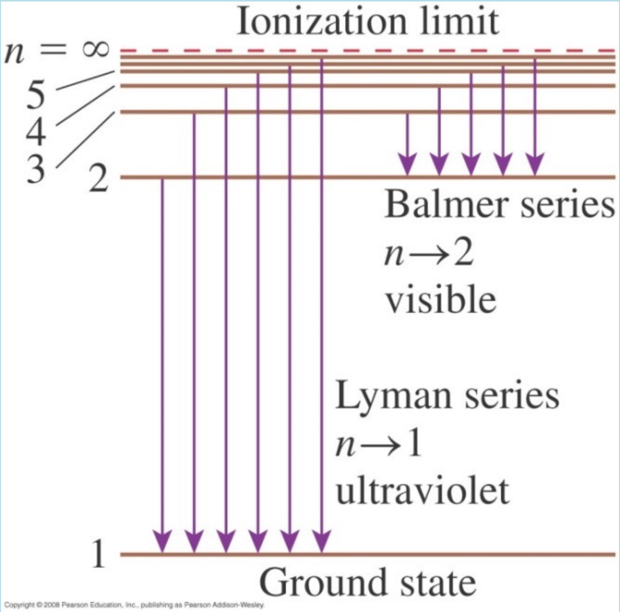
$$h = 6.626\times10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s} = 4.136\times10^{-15}\ \mathrm{eV\cdot s}$$

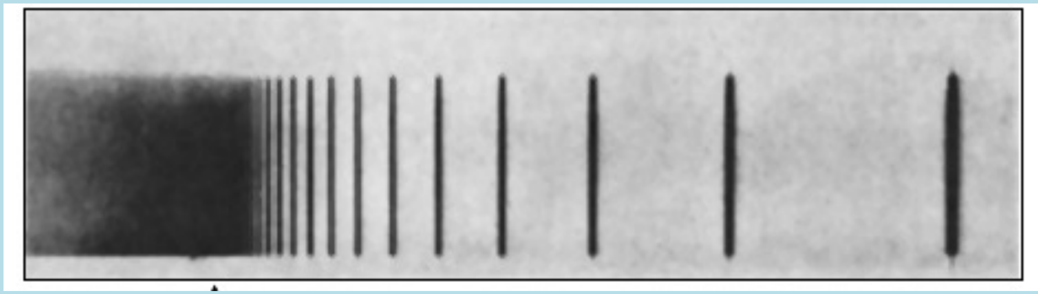
波爾原子模型的基本假設

原子中電子的狀態是一系列分離的穩定態 Staionary States。

穩定態的能量E_n，以一個自然數n標定， n稱為量子數！

$$E_n \propto -\frac{1}{n^2}$$

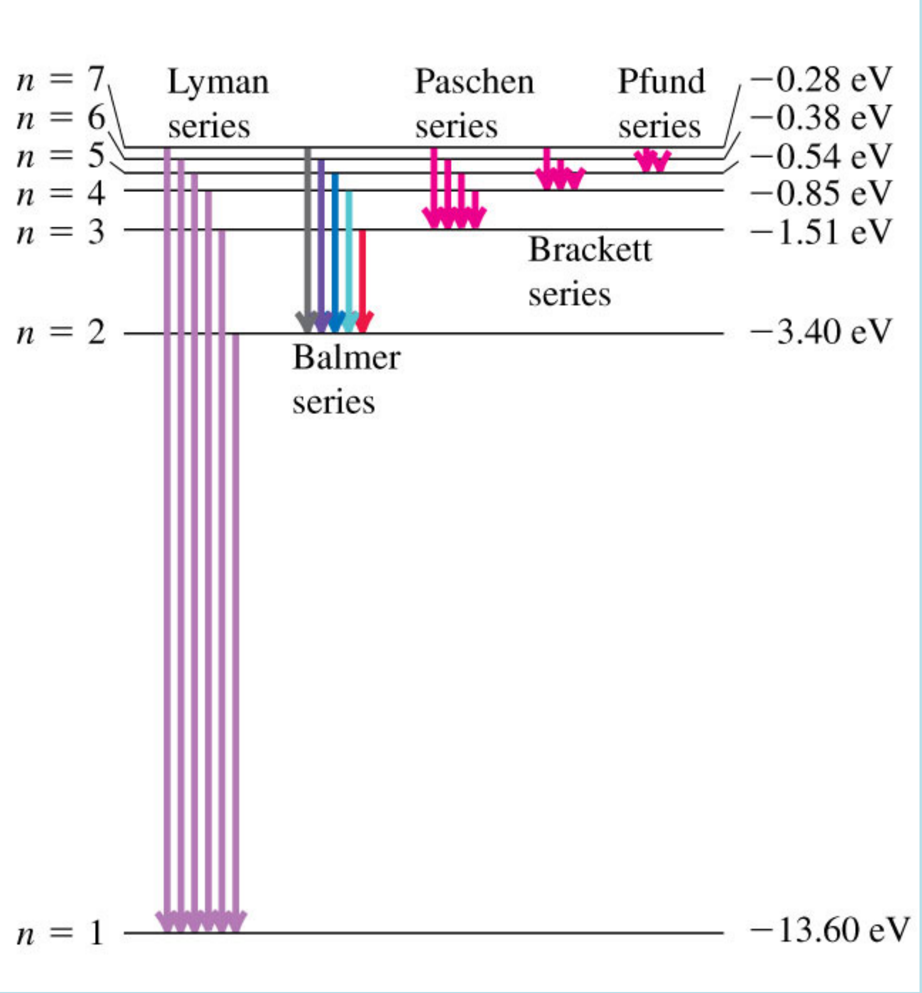




電子在能態間躍遷，同時放出或吸收一個光子，光子的能量即能態的能量差：

因為穩定態是離散分布，所以發出的光子頻率不是連續的：

$$hf \sim \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$



由光譜波長，$\frac{1}{\lambda}=\frac{R_H}{m^2}-\frac{R_H}{n^2}$

即可得出能態的能量：

$$hf=\Delta E=hcR_H\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)$$
$$=(-13.6\text{eV})\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right)$$

n,m分別標定跳躍前後的穩定態，

波爾得到了能階的具體公式：

$$E_n=(-13.6\text{eV})\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

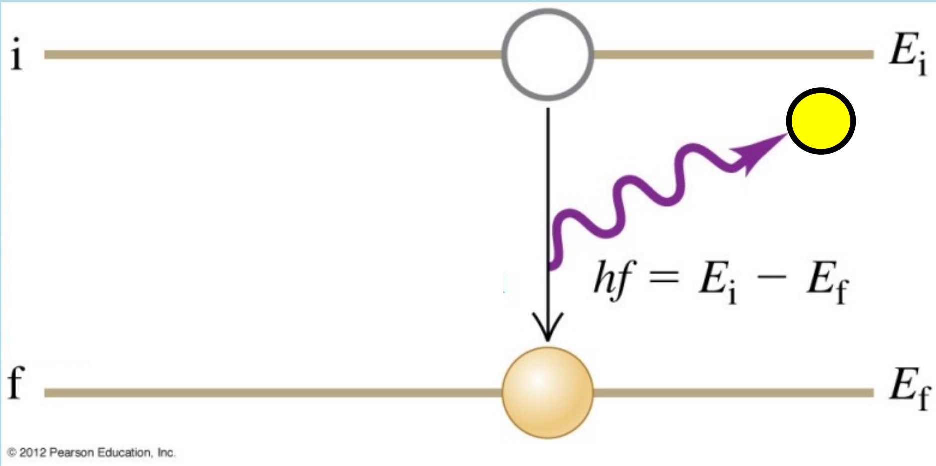
存在一能量最低、穩定的能態，$n=1$，稱基態。其餘的態稱激發態。

處於基態的電子，沒有更低的能態了，因此完全無法再放出光子。

這是古典物理不會出現的，也是原子之所以會穩定的原因！

光是在電子從一個能量狀態直接跳到另一個態的時候發出！

能態不是連續分布，因此稱為跳。量子躍遷！ Quantum Jump。



$$E_i \propto -\frac{R_H}{n^2}$$

$$hf \propto \frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$E_f \propto -\frac{R_H}{m^2}$$

在原子中，電子的狀態是分立而不連續的 (Discrete)，

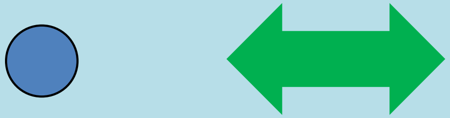
躍遷前後狀態間能量差以一個光子的形式釋放。

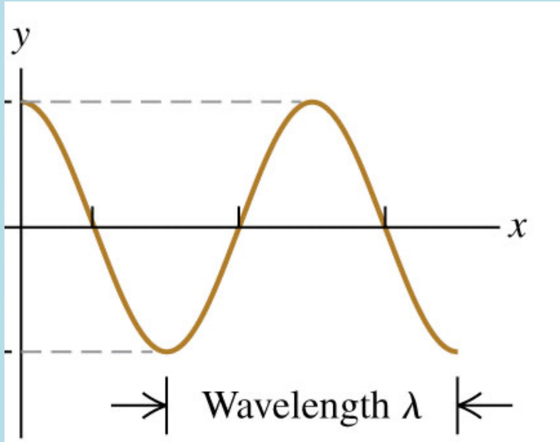
光子是不能分割的！因此，躍遷的時候不經過中間連續的變化！

找尋波方程式時可以用的線索：

德布羅意的猜想：一個不受力、動量固定的自由粒子對應於波長固定的正弦波。

牛頓第一運動定律！





波函數

粒子與波的翻譯表

$$\Psi = A[\cos(kx - \omega t)]$$

$$\frac{p^2}{2m} = E$$

$$E = hf$$

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

$$E = \hbar\omega$$

$$p = \hbar k$$

$$\frac{\hbar^2}{2m}k^2 = \hbar\omega$$

尋找一個波方程式可以得到這個關係。

現在把同樣辦法用在電子波：

對電子波而言，色散關係如下：

對於自由電子，已知： $\dfrac{p^2}{2m} = E$

$$\frac{p^2}{2m} = E \xrightarrow[p = \hbar k]{E = \hbar\omega} \frac{\hbar^2}{2m}k^2 = \hbar\omega$$

如果模仿前述的波方程式，在色散關係乘一個自由電子波函數： $\Psi = Ae^{i(kx-\omega t)}$

$$\frac{\hbar^2}{2m}k^2\Psi = \hbar\omega\Psi$$

已知，對這一個波函數取時空微分就分別得到k, ω：

$$\frac{\partial^n\Psi}{\partial x^n} = (ik)^n \cdot \Psi$$

$$\frac{\partial^n\Psi}{\partial t^n} = (-i\omega)^n \cdot \Psi$$

由色散關係，自然猜出可以得出此關係的波方程式如下：

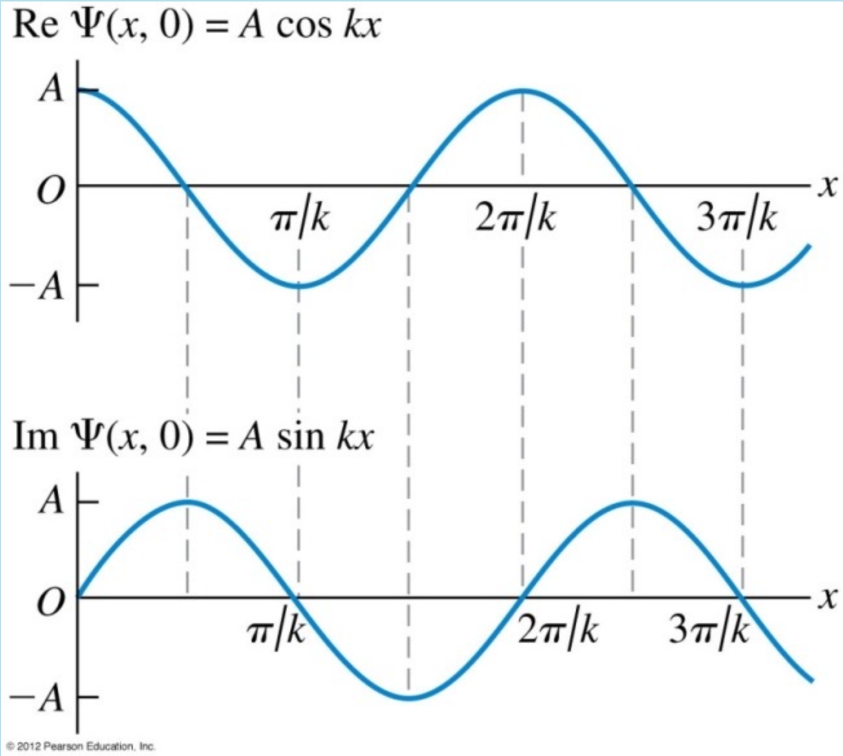
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

Schrodinger Wave Equation

自由電子波複數的波函數：

$$\Psi = Ae^{i(kx-\omega t)} = A[\cos(kx-\omega t) + i\sin(kx-\omega t)]$$

$$\frac{\hbar^2}{2m}k^2 = \hbar\omega$$



滿足此Schrodinger Wave Equation

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}=i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

方程式的實數部

方程式的虛數部

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\mathrm{Re}\Psi}{\partial x^2}=-\hbar\frac{\partial\mathrm{Im}\Psi}{\partial t}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\mathrm{Im}\Psi}{\partial x^2}=\hbar\frac{\partial\mathrm{Re}\Psi}{\partial t}$$

現在解的實數部與虛數部是糾纏在一起的！

解的實數部與虛數部不是彼此獨立的！

所以我已經不能要求這個電子波函數是實數了！

假戲真作！弄假成真。

電子波函數真的是複數！它的實數部與虛數部都有意義，且糾纏在一起。

我們又已經知道：ω翻譯為E，k翻譯為p 。

因此，終極翻譯表，直接由粒子圖像翻譯為波函數的運算！

$$\frac{\partial}{\partial x} \leftrightarrow ik$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow -i\omega$$

$$p = \hbar k$$

$$E = \hbar \omega$$

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \leftrightarrow p$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow E$$

動量翻譯為空間微分運算。

能量翻譯為時間微分運算。

$$\frac{p^2}{2m} = E$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

運算得運算於某個東西之上。

這東西自然是波函數Ψ。

Schrodinger Wave Equation

粒子

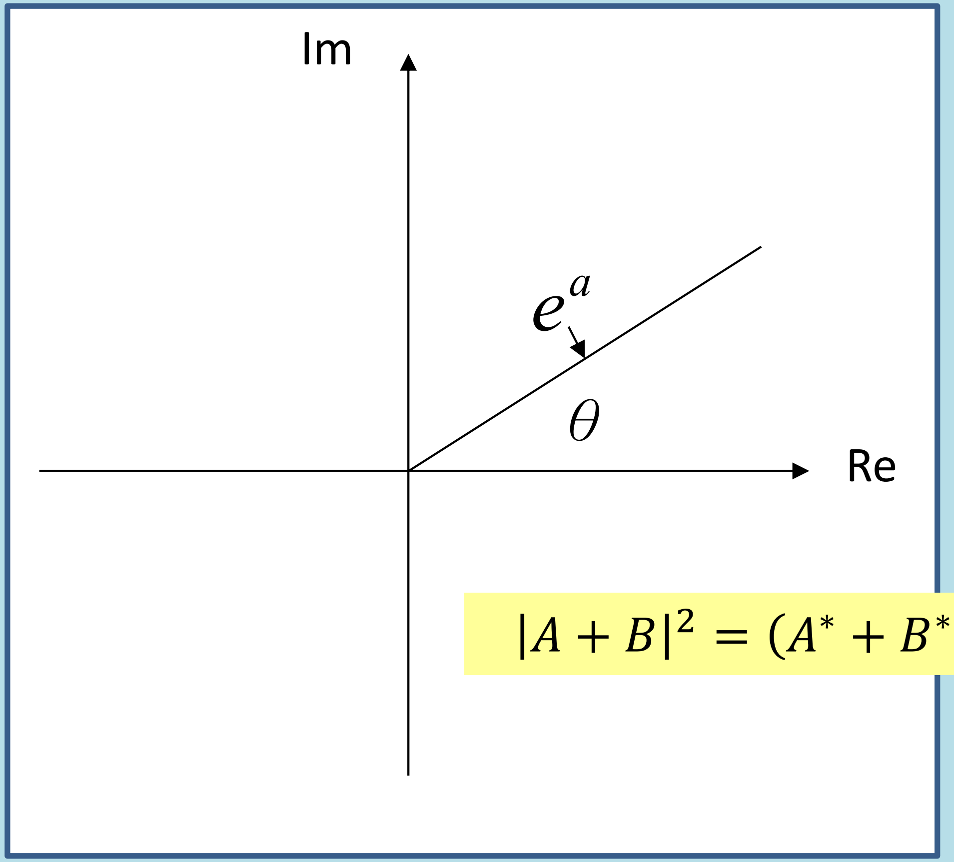
波動

我們可以更進一步定義複數$\alpha = a + i\theta$的指數函數：

$$e^{\alpha} = e^{a+i\theta} = e^{a}e^{i\theta} = e^{a}(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

在複數平面上表示，a 決定絕對值，θ 決定幅角



$$\left|e^{i\theta}\right| = 1$$

$$\left|e^{a+i\theta}\right| = e^{a}$$

$$|mn| = |m| \cdot |n|$$

$$|A+B|^2 = (A^* + B^*)(A+B) = |A|^2 + |B|^2 + A^*B + B^*A$$

$$\frac{d^n}{dx^n}e^{\alpha x} = (\alpha)^n \cdot e^{\alpha x}$$

所以，複數的指數函數，所有的微分都與自己成正比！

波函數的機率解釋

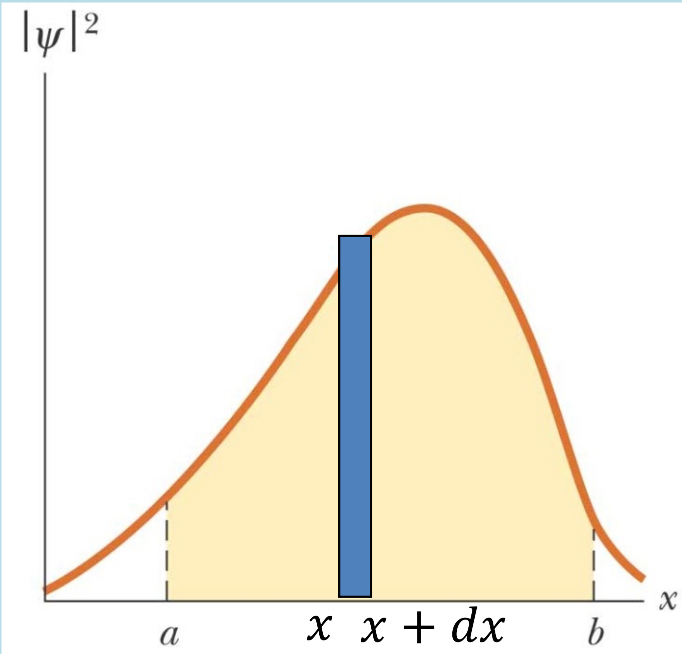
x是連續變數，所以機率大小是以機率密度表示！

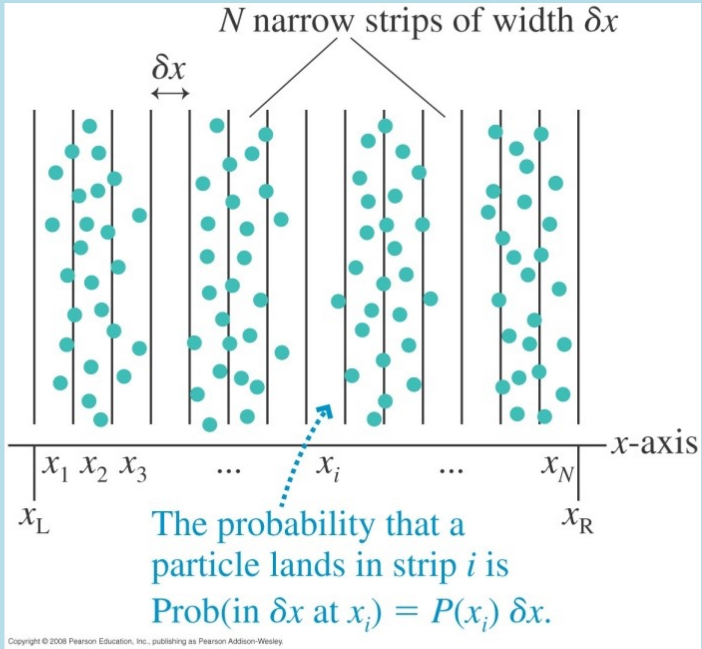
時間為t的瞬間在x與$x+dx$之間發現該粒子的機率，可以寫成：

（意思就是位置在x附近，不準度大約是dx）

$$P(x,t)\cdot dx=|\Psi(x,t)|^2\cdot dx=\Psi^*(x,t)\cdot\Psi(x,t)\cdot dx$$

此瞬間t的波函數絕對值平方$|\Psi(x,t)|^2$就是此瞬間的機率密度$P(x)$。



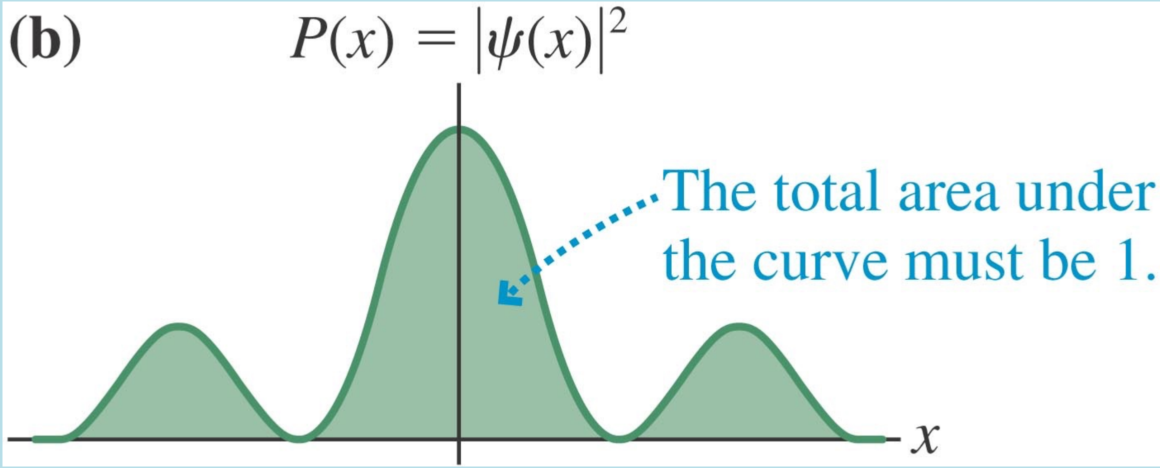


有時會以點的數目來表示機率大小！

$$\int_a^b |\Psi(x,t)|^2\cdot dx$$

將機率密度積分，得到瞬間在a與b之間發現該粒子的機率。

發現該粒子的總機率必需等於 1。



$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,t)|^2 \cdot dx = 1$$

機率密度的總積分必需等於 1。

歸一化條件 Normalization Condition

這個是電子波函數在薛丁格方程式以外必須滿足的額外的條件。

光子或會衰變生成的粒子就不滿足此條件。

但總機率是不是會隨時間變化？

假設某時間時，瞬間波函數可以寫成： $Ae^{-\mu|x|}$

考慮其歸一化條件，並計算機率密度。

Consider a wave packet formed by using the wave function $Ae^{-\alpha|x|}$, where A is a constant to be determined by normalization. Normalize this wave function and find the probabilities of the particle being between 0 and $1/\alpha$, and between $1/\alpha$ and $2/\alpha$.

Strategy This wave function is sketched in Figure 6.1. We will use Equation (6.8) to normalize Ψ. Then we will find the probability by using the limits in the integration of Equation (6.7).

Solution If we insert the wave function into Equation (6.8), we have

$$\int_{-\infty}^{\infty} A^2 e^{-2\alpha|x|}\, dx = 1$$

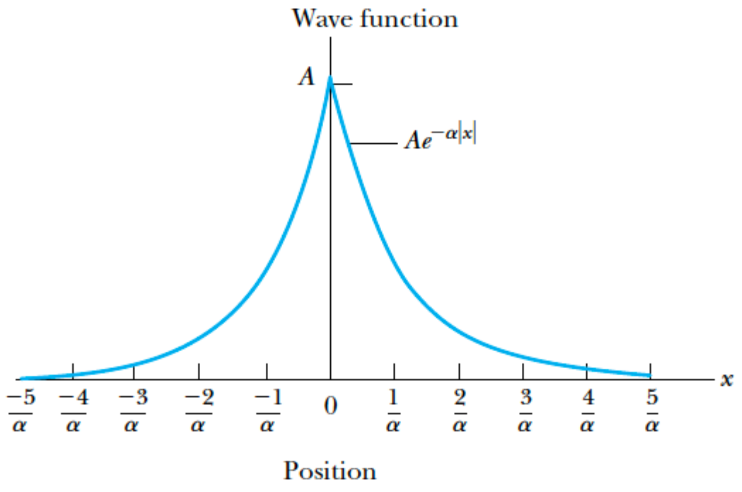


Figure 6.1 The wave function $Ae^{-\alpha|x|}$ is plotted as a function of x. Note that the wave function is symmetric about $x = 0$.

Consider a wave packet formed by using the wave function $Ae^{-\alpha|x|}$, where A is a constant to be determined by normalization. Normalize this wave function and find the probabilities of the particle being between 0 and $1/\alpha$, and between $1/\alpha$ and $2/\alpha$.

Strategy This wave function is sketched in Figure 6.1. We will use Equation (6.8) to normalize Ψ. Then we will find the probability by using the limits in the integration of Equation (6.7).

Solution If we insert the wave function into Equation (6.8), we have

$$\int_{-\infty}^{\infty} A^2 e^{-2\alpha|x|}\, dx = 1$$

Because the wave function is symmetric about $x = 0$, we can integrate from 0 to ∞, multiply by 2, and drop the absolute value signs on $|x|$.

$$2\int_0^{\infty} A^2 e^{-2\alpha x}\, dx = 1 = \frac{2A^2}{-2\alpha} e^{-2\alpha x}\Big|_0^{\infty}$$

$$1 = \frac{-A^2}{\alpha}(0 - 1) = \frac{A^2}{\alpha}$$

The coefficient $A = \sqrt{\alpha}$, and the normalized wave function Ψ is

$$\Psi = \sqrt{\alpha} e^{-\alpha|x|}$$

We use Equation (6.7) to find the probability of the particle being between 0 and $1/\alpha$, where we again drop the absolute signs on $|x|$ because x is positive.

$$P = \int_0^{1/\alpha} \alpha e^{-2\alpha x}\, dx$$

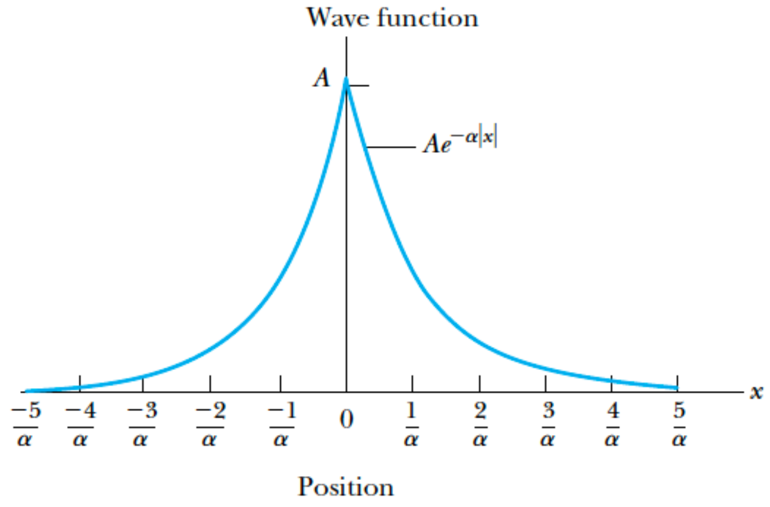


Figure 6.1 The wave function $Ae^{-\alpha|x|}$ is plotted as a function of x. Note that the wave function is symmetric about $x = 0$.

The integration is similar to the previous one.

$$P = \frac{\alpha}{-2\alpha} e^{-2\alpha x}\Big|_0^{1/\alpha} = -\frac{1}{2}(e^{-2} - 1) \approx 0.432$$

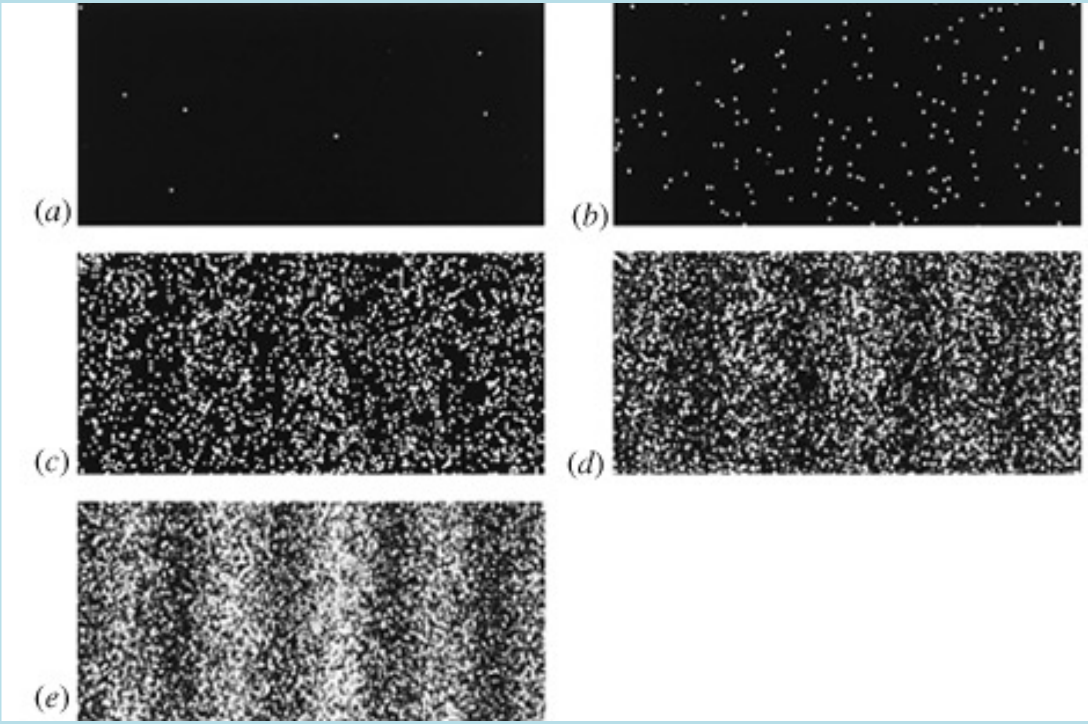
The probability of the particle being between $1/\alpha$ and $2/\alpha$ is

$$P = \int_{1/\alpha}^{2/\alpha} \alpha e^{-2\alpha x}\, dx$$

$$P = \frac{\alpha}{-2\alpha} e^{-2\alpha x}\Big|_{1/\alpha}^{2/\alpha} = -\frac{1}{2}(e^{-4} - e^{-2}) \approx 0.059$$

We conclude that the particle is much more likely to be between 0 and $1/\alpha$ than between $1/\alpha$ and $2/\alpha$. This is to be expected, given the shape of the wave function shown in Figure 6.1.

自由電子波波函數及其機率解釋能計算雙狹縫干涉的粒子分佈嗎？



$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = Ae^{i(kx_1 - \omega t)} + Ae^{i(kx_2 - \omega t)}$$

x_1, x_2 是狹縫1,2距觀測點的距離！

觀測點的機率密度：

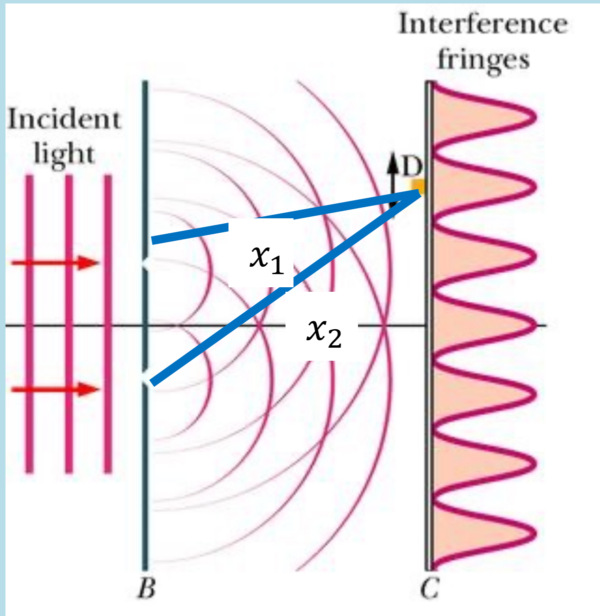
$$|\Psi_1 + \Psi_2|^2 = (\Psi_1^* + \Psi_2^*)(\Psi_1 + \Psi_2) = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + \Psi_2^*\Psi_1 + \Psi_1^*\Psi_2$$

$$= P_1 + P_2 + 2\mathrm{Re}\,\Psi_1^*\Psi_2 = 2|A|^2 + 2\mathrm{Re}\,\Psi_1^*\Psi_2 \qquad \text{2-16}$$

$\mathrm{Re}\,\Psi_1^*\Psi_2$ 就是干涉的結果！

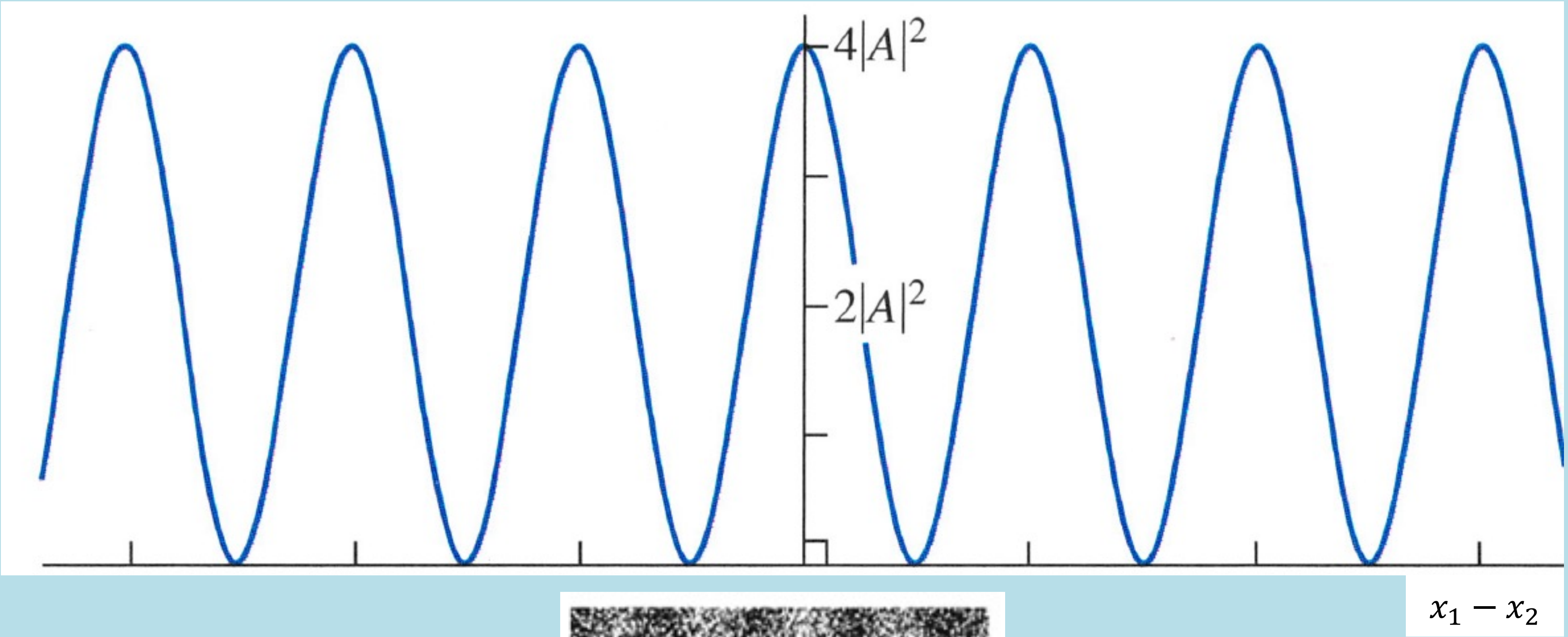
$$\mathrm{Re}\,\Psi_1^*\Psi_2 = \mathrm{Re}\left[A^* e^{-i(kx_1 - \omega t)} \cdot Ae^{i(kx_2 - \omega t)}\right] = |A|^2 \mathrm{Re}\left[e^{-ik(x_1 - x_2)}\right] = |A|^2 \cos k(x_1 - x_2)$$

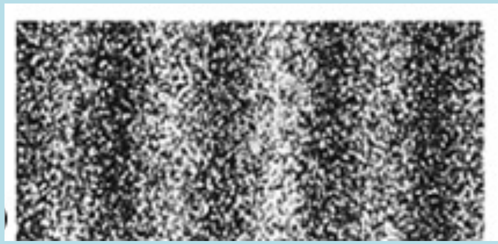
$$|\Psi_1 + \Psi_2|^2 = 2|A|^2[1 + \cos k(x_1 - x_2)]$$



$$|\Psi_1 + \Psi_2|^2 = 2|A|^2[1 + \cos k(x_1 - x_2)] = 4|A|^2\left(\cos\frac{k(x_1 - x_2)}{2}\right)^2$$

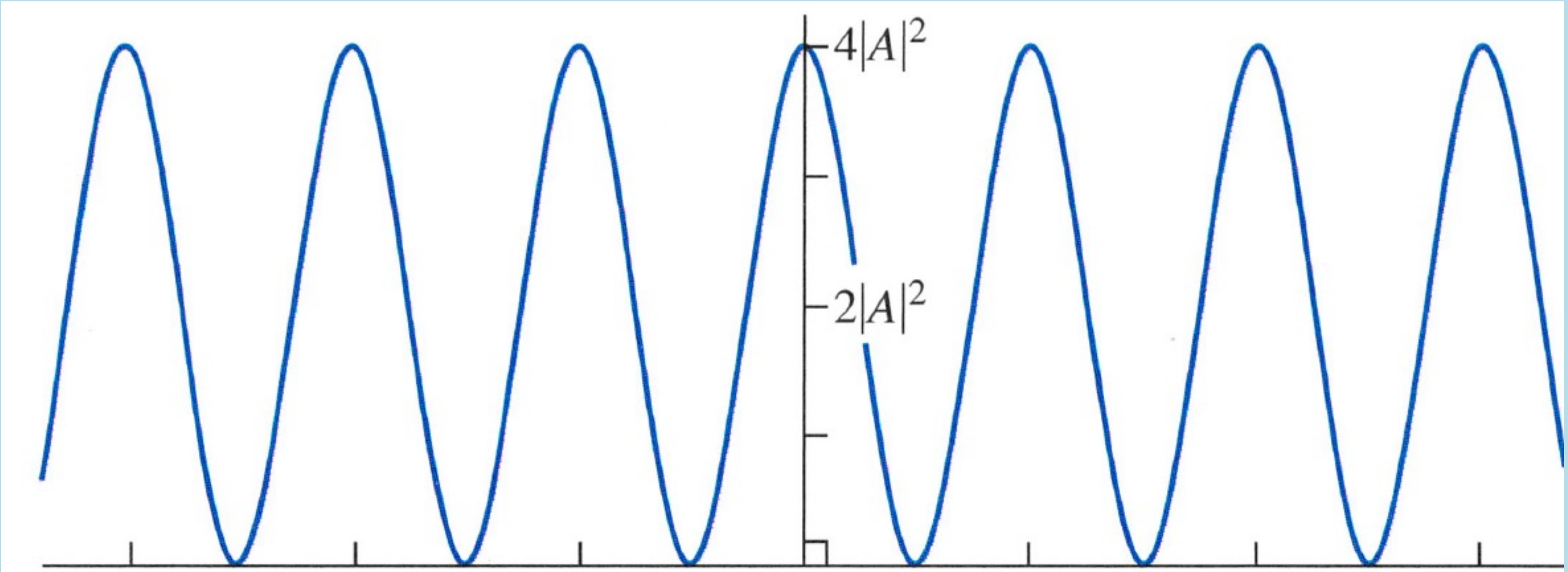
與一般雙狹縫干涉完全一致！





$$|\Psi_1+\Psi_2|^2 = 2|A|^2[1+\cos k(x_1-x_2)] = 4|A|^2\left(\cos\frac{k(x_1-x_2)}{2}\right)^2$$

與一般雙狹縫干涉完全一致！



$x_1 - x_2$