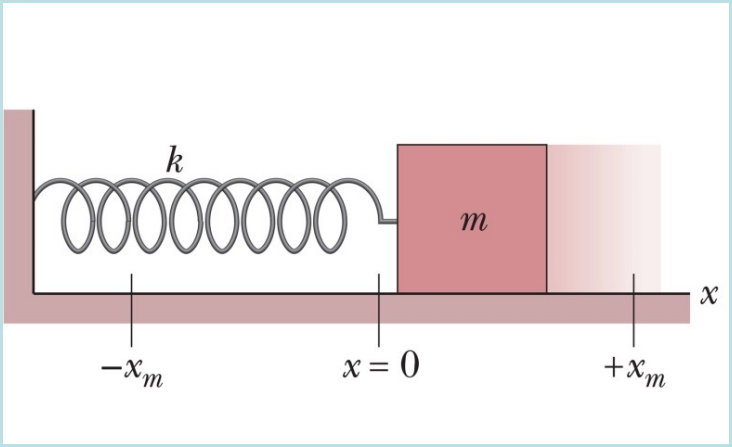
簡諧運動的運動方程式



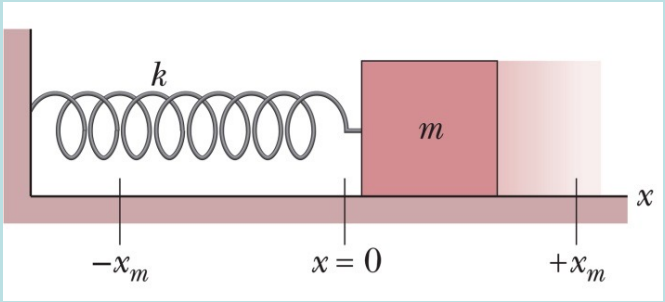
$$F = -kx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x = -\omega^2 x$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

一個簡諧運動，只由一個特徵常數 ω（角頻率）決定！

簡諧運動的運動方程式求解



$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

位置函數的兩次微分與自己成正比：多項式不符合。

三角函數就具有這樣的性質！（因為式中的負號，指數函數反而不行）

$$\frac{d(\cos \omega t)}{dt} = -\omega \sin \omega t$$

$$\omega \frac{d(\sin \omega t)}{dt} = -\omega^2 \cos \omega t$$

$$\frac{d^2(\cos \omega t)}{dt^2} = -\omega^2 \cos \omega t$$

$$\frac{d^2(\sin \omega t)}{dt^2} = -\omega^2 \sin \omega t$$

找到兩個解

定理

如果已找到兩個函數$x_1(t), x_2(t)$　　都滿足方程式：　$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$

那麼任一線性組合 linear combination $ax_1(t) + bx_2(t)$ 也滿足該方程式！

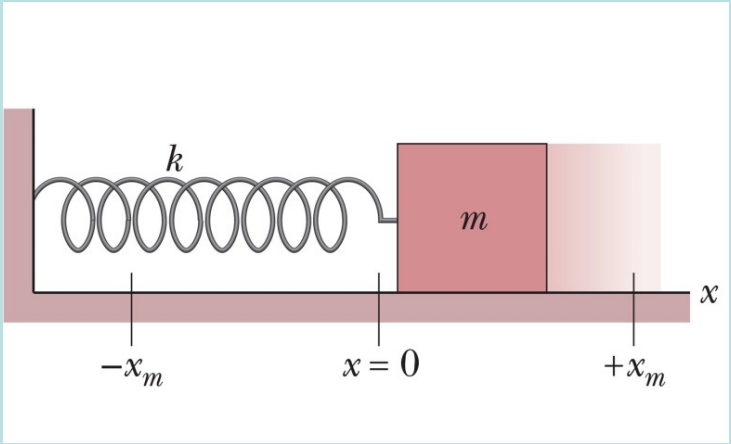
a $\frac{d^2x_1}{dt^2} + \omega^2 x_1 = 0$ + b $\frac{d^2x_2}{dt^2} + \omega^2 x_2 = 0$

$$\frac{d^2(ax_1 + bx_2)}{dt^2} + \omega^2(ax_1 + bx_2) = 0$$

得證

簡諧運動的解

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$



正弦函數與餘弦函數的兩次微分都和負的自己成正比！

因此很容易就找到兩個解 $x_1 = \sin \omega t$ $x_2 = \cos \omega t$

那麼任一線性組合 $x = a \cos \omega t + b \sin \omega t$ 也是解！

我們得到無限多個解！

微分方程式的解需要讓自己挪出足夠的空間，才能滿足起始條件。

$$x = a\cos\omega t + b\sin\omega t$$

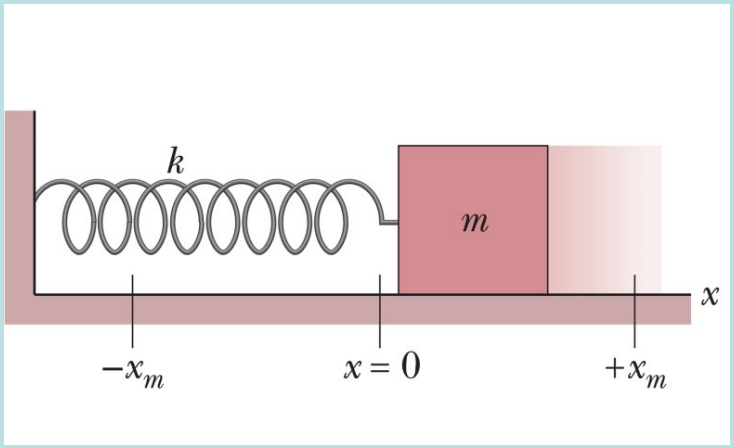
$$v = -\omega a\sin\omega t + \omega b\cos\omega t$$

a, b由起始條件決定

$$x(0) = a = x_0$$

$$v(0) = \omega b = v_0$$

$$b = \frac{v_0}{\omega}$$



$$x = x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$$

這個函數同時滿足運動方程式以及兩個起始條件，因此是唯一的解！

不用再找了！

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$ 這個式子較適合運動方程式求解。

較容易明瞭其物理意義的表示式是：

$$x = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

這兩個數學式是一樣的，因為：

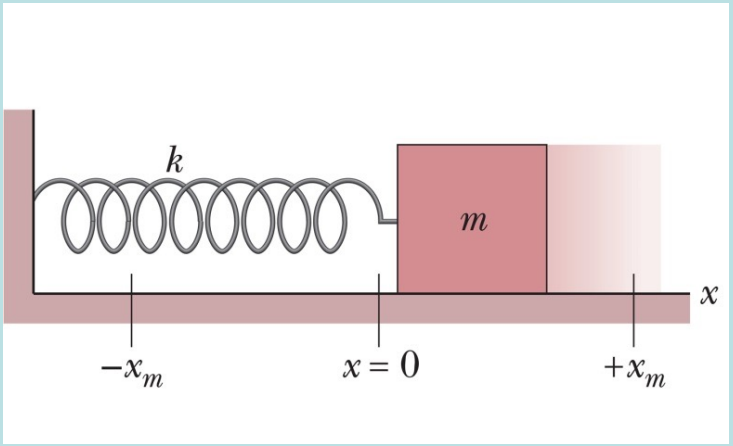
$$x = x_m \cos(\omega t + \phi) = x_m \cos \phi \cos \omega t - x_m \sin \phi \sin \omega t$$

兩組常數之間的關係：

$$x_0 = x_m \cos \phi \, , \frac{v_0}{\omega} = -x_m \sin \phi$$

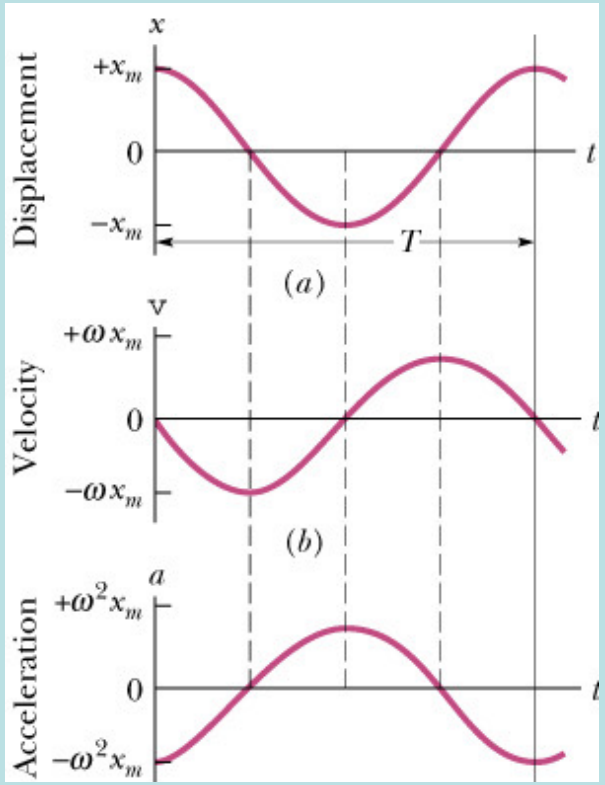
$$x_m = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$

$$\tan \phi = -\frac{v_0}{\omega x_0}$$



$$x = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi)$$



x_m 及 ϕ 兩個常數是由起始條件決定：

對個別的運動，所取的值不同。

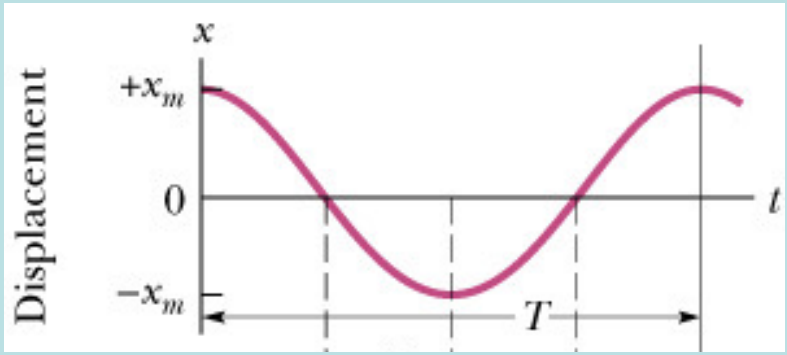
$$x_m = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$

ω是由簡諧振盪子的性質決定：

同一個彈簧組，只有一個值。

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$x = x_m \cos(\omega t + \phi)$ 三角函數是一個週期函數。 ω 決定了振盪的週期 T。



$x(t) = x(t+T)$ $\rightarrow \cos(\omega t + \phi) = \cos(\omega t + \omega T + \phi)$

三角函數一個週期後，角度增加2π。 $\omega T = 2\pi$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ω稱為角頻率 Angular Frequency。

簡諧運動的週期 T 等於

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

頻率Frequency: $f = 1/T$ 每秒進行了幾個周期。單位 s^{-1} = Hz。

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

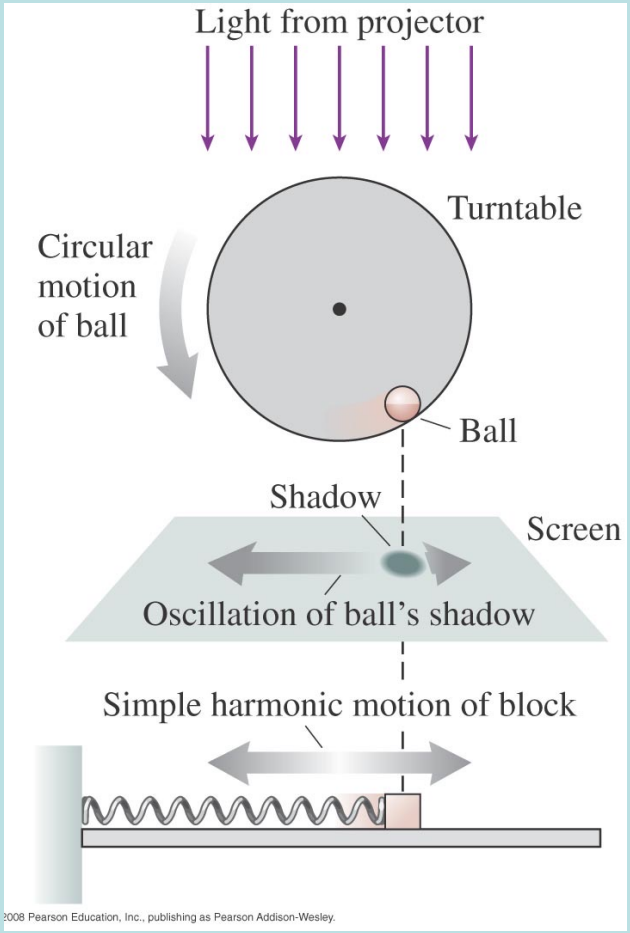
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

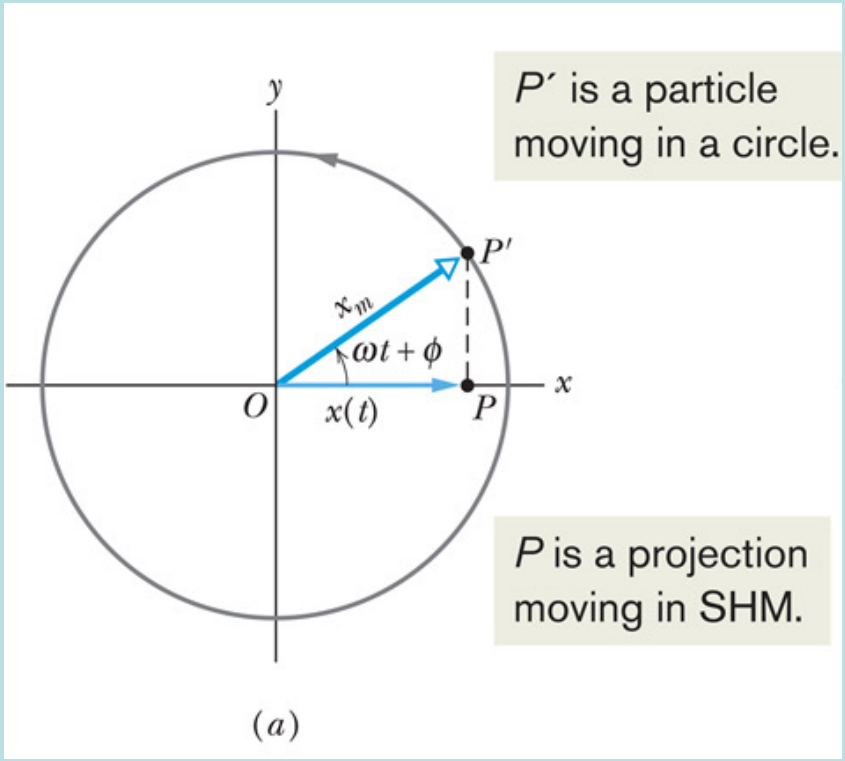
$$x = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

正好是一個半徑為x_m的等速圓周運動的水平分量。

此等速圓周運動的速度與加速度的水平分量也好與簡諧運動相等。

一個等速圓周運動位置的水平投影就等於一個簡諧運動。





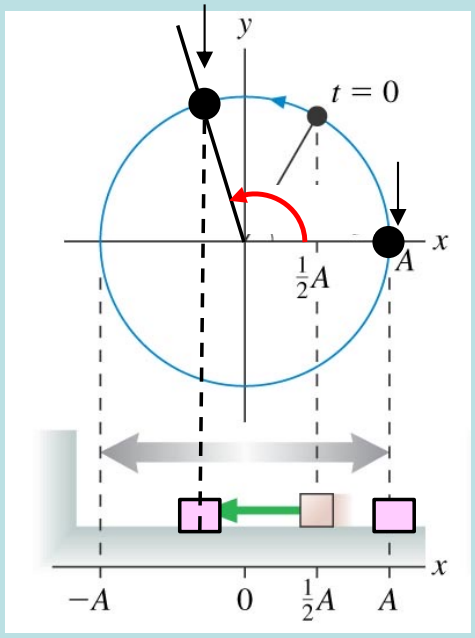
假想圓是一個很好的工具，但不是真的有一個圓！

14.66 ••• An object is undergoing SHM with period 0.300 s and amplitude 6.00 cm. At $t = 0$ the object is instantaneously at rest at $x = 6.00$ cm. Calculate the time it takes the object to go from $x = 6.00$ cm to $x = -1.50$ cm.

SET UP: $x = A$ at $t = 0$, so $\phi = 0$. $A = 6.00$ cm. $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{0.300\text{ s}} = 20.9$ rad/s, so $x(t) = (6.00\text{ cm})\cos)([20.9\text{ rad/s}]t)$.

EXECUTE: $t = 0$ at $x = 6.00$ cm. $x = -1.50$ cm when $-1.50\text{ cm} = (6.00\text{ cm})\cos((20.9\text{ rad/s})t)$.

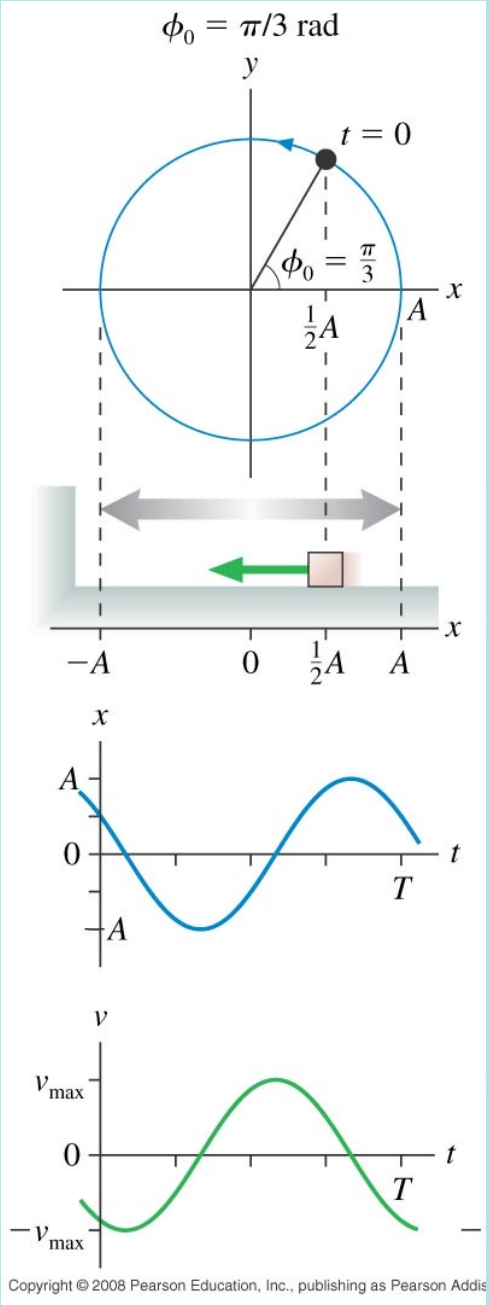
$$t = \left(\frac{1}{20.9\text{ rad/s}}\right)\cos^{-1}\left(-\frac{1.5}{6.0}\right) = 0.0872\text{ s}.$$ It takes 0.0872 s.



相角差等於：$\Delta\phi = \frac{\pi}{2} + \cos^{-1}\frac{1.5}{6.0}$

or $\cos^{-1}\left(-\frac{1.5}{6.0}\right)$

需要時間：$\frac{\Delta\phi}{\omega}$



Copyright © 2008 Pearson Education, Inc., publishing as Pearson Addis

$$x = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

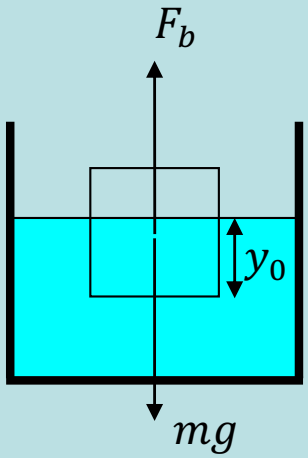
相角是等速增加：$\omega t + \phi$

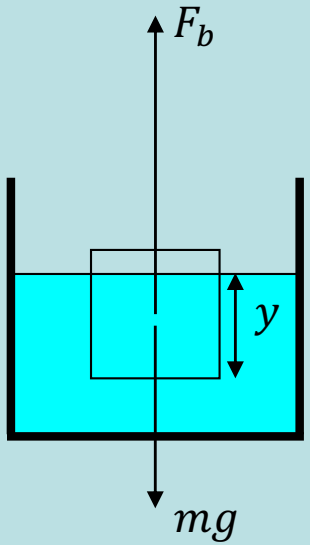
起始相角就是相常數 ϕ

相常數由起始位置與起始速度的比值決定：

$$\tan\phi = -\frac{b}{a} = -\frac{v_0}{\omega x_0}$$

動畫 Simulation





$$\rho A y_0 g = mg$$

$$F = -\rho A y g + mg = -\rho A g (y - y_0)$$

$$F = -\rho A g \cdot \Delta y = -k \cdot \Delta y$$

$$k = \rho A g$$

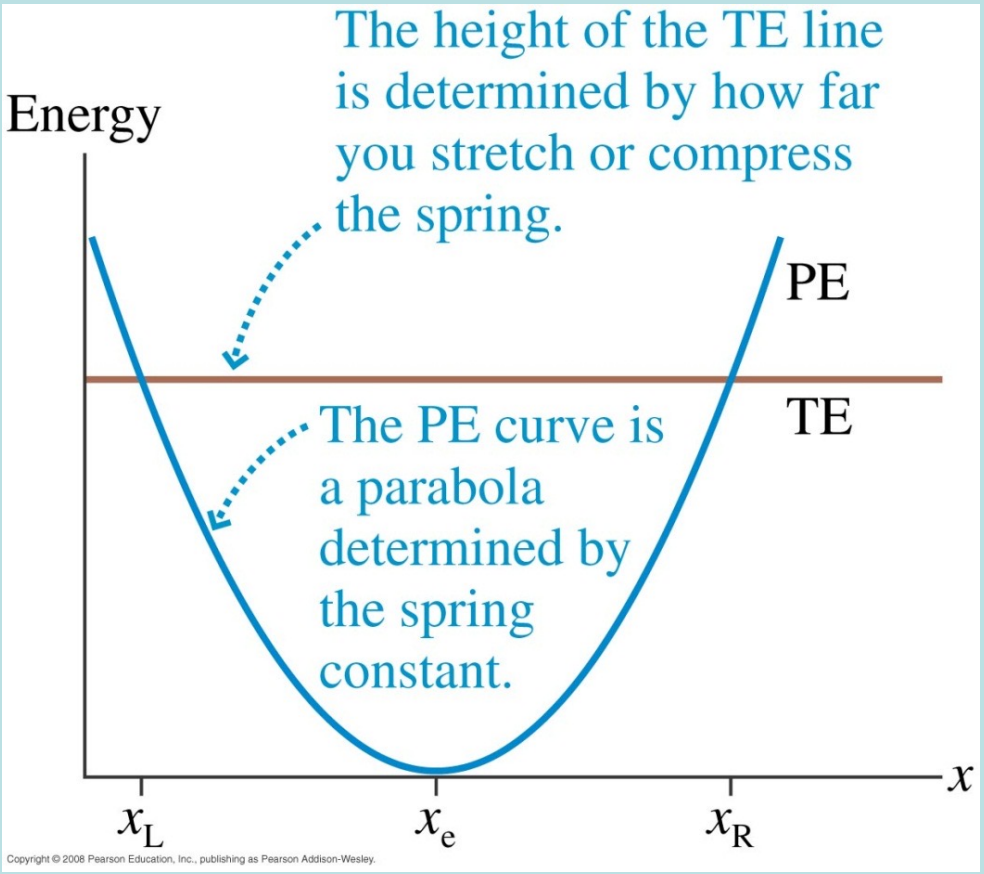
力與距平衡點的位移成正比，即簡諧運動！

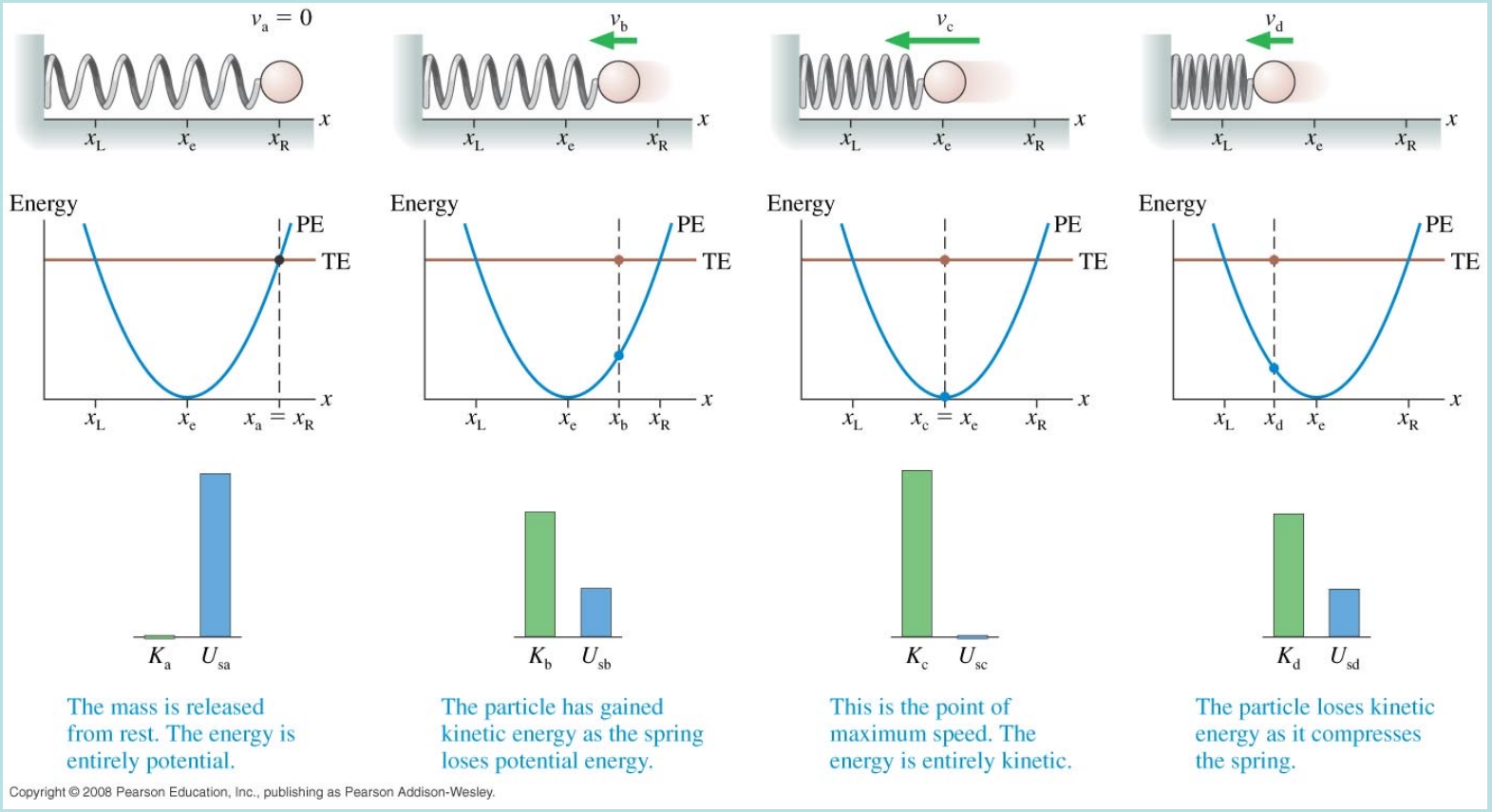
對彈簧的討論結果就可以直接適用。

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\rho A g}}$$

$$y = y_0 + y_m \cos\left(\sqrt{\frac{\rho A g}{m}}\, t\right)$$

$$U(x) = \frac{1}{2}k(x - x_e)^2$$





Copyright © 2008 Pearson Education, Inc., publishing as Pearson Addison-Wesley.

運動過程中任意位置 y 的動能 $K = \frac{1}{2}mv^2$ 即是水平線與位能線的差：

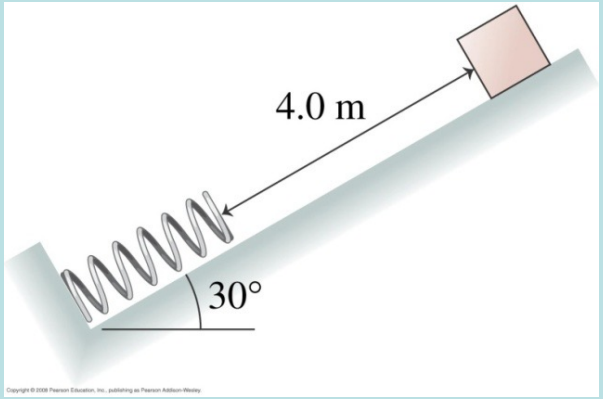
$$K = \frac{1}{2}mv^2 = E - U(x) = E - \frac{1}{2}k(x - x_e)^2$$

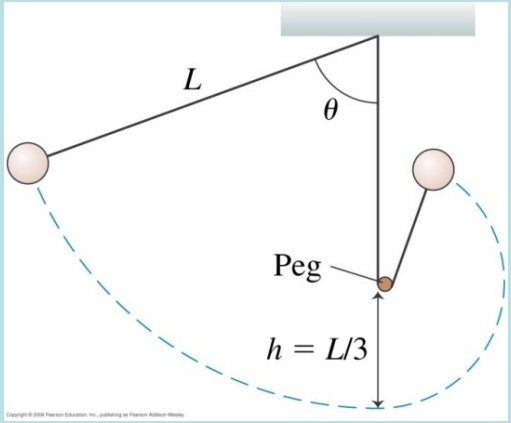
因此速度與位置的關係可以立刻得到。

簡諧運動兩端都有turning point，因此運動就被拘限在一個範圍內。

運動方程式給出運動物理量（位置，速度）與時間的關係！

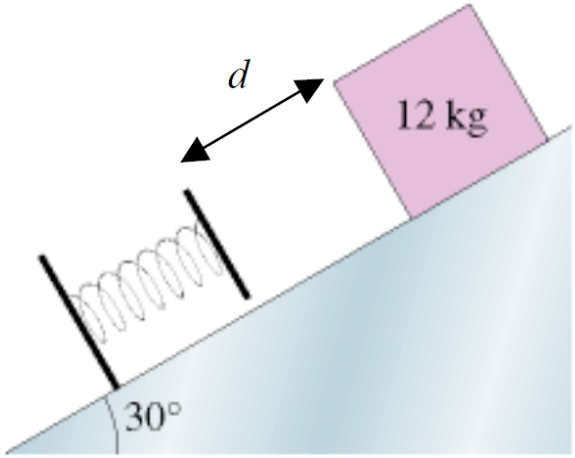
守恆律則排除時間，得出運動物理量彼此之間的關係！





例如可問球到達某角度時的繩張力。

2. 一質量為 12 kg 的方塊，沿一 30°角的斜面自靜止狀態滑下，滑行距離 d 之後接觸一個彈簧，此彈簧的彈力係數 k 為 2000 N/m。



接觸彈簧後，此方塊繼續向前下滑行距離 $x = 0.27$ m 後才停止。請問距離 d 是多少 m？(10)

2. 停止時，重力位能的減少應該等於彈力位能：

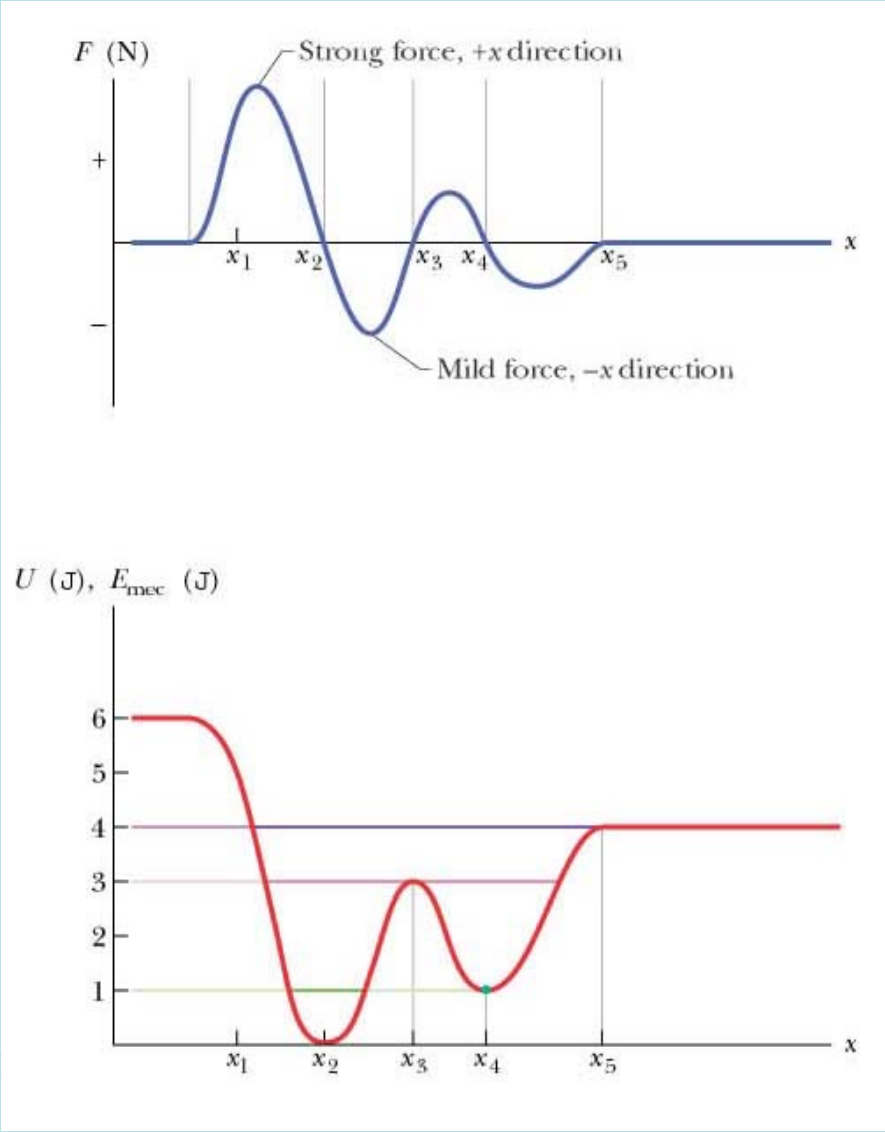
$$12 \times g \times (0.27 + d) / 2 = 2000 \times 0.27^2 / 2$$

$$d = 0.97 \text{ m}$$

由位能求力

$$U(x) = -\int_{c}^{x} dx'\, F(x')$$

位能函數是力的積分的負號

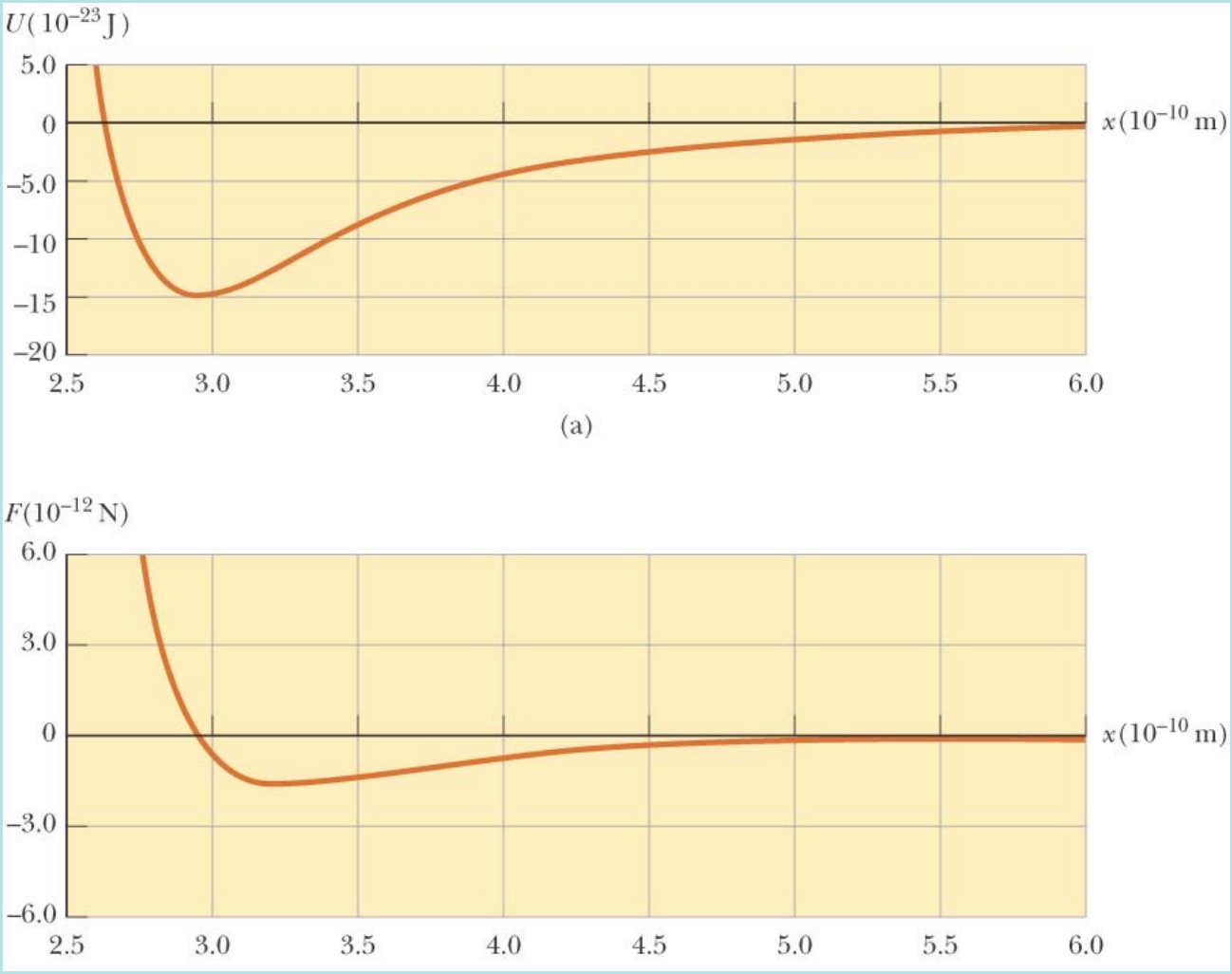


$$F = -\frac{dU}{dx}$$

力是位能函數的微分的負號。

力是位能函數曲線切線斜率的負號。

原子力



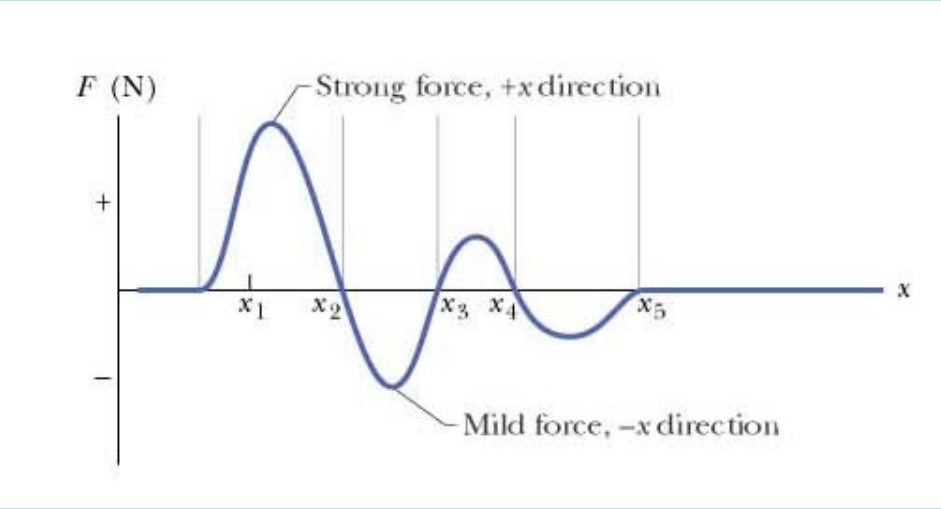
$$U(x) = 4\varepsilon\left[\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x}\right)^{6}\right]$$

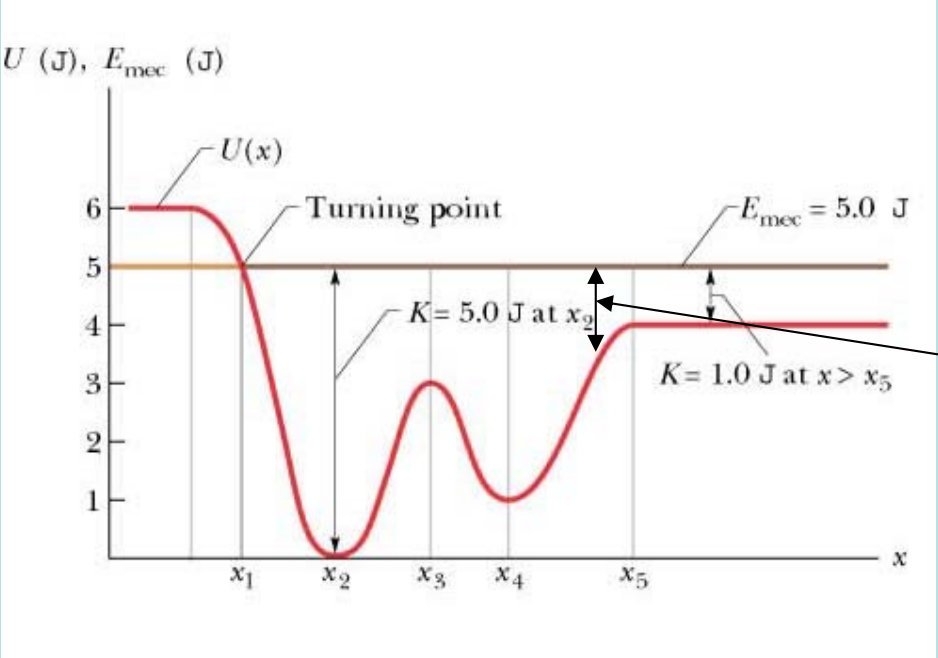
$\sigma = 0.263\ \mathrm{nm}$

$\varepsilon = 1.51\times10^{-22}\ \mathrm{J}$

$$F(x) = 4\frac{\varepsilon}{\sigma}\left[12\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{13} - 6\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{7}\right]$$

有了位能函數，由起始的總能量即可求出在任一位置的速率！





$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x) = E_0$$

動能就是兩線的間隔

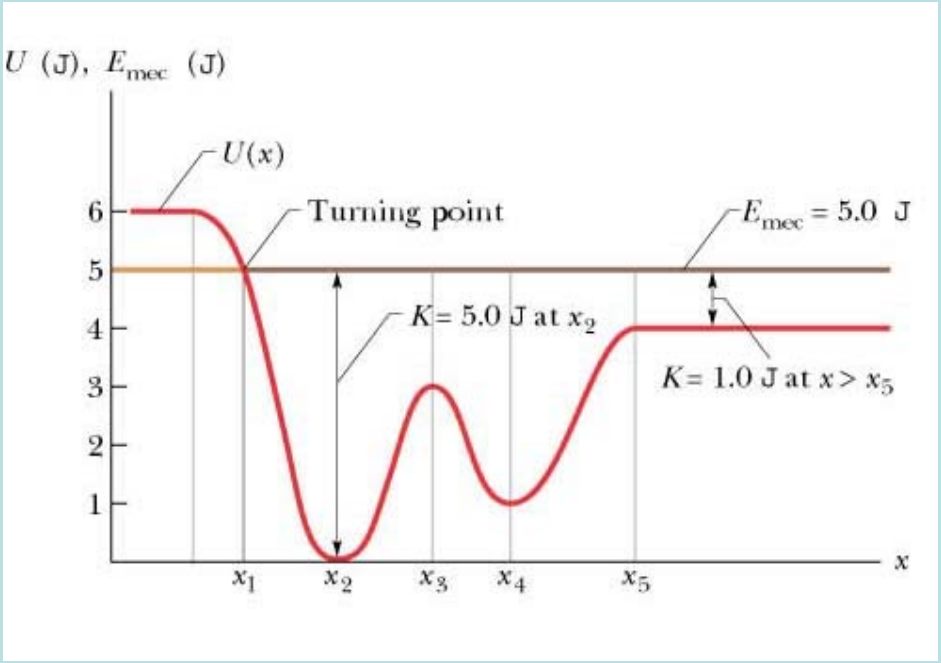
$$v = \sqrt{\frac{2[E_0 - U(x)]}{m}}$$

折返點 Turning point

$$v = \sqrt{\frac{2[E_0 - U(x)]}{m}}$$

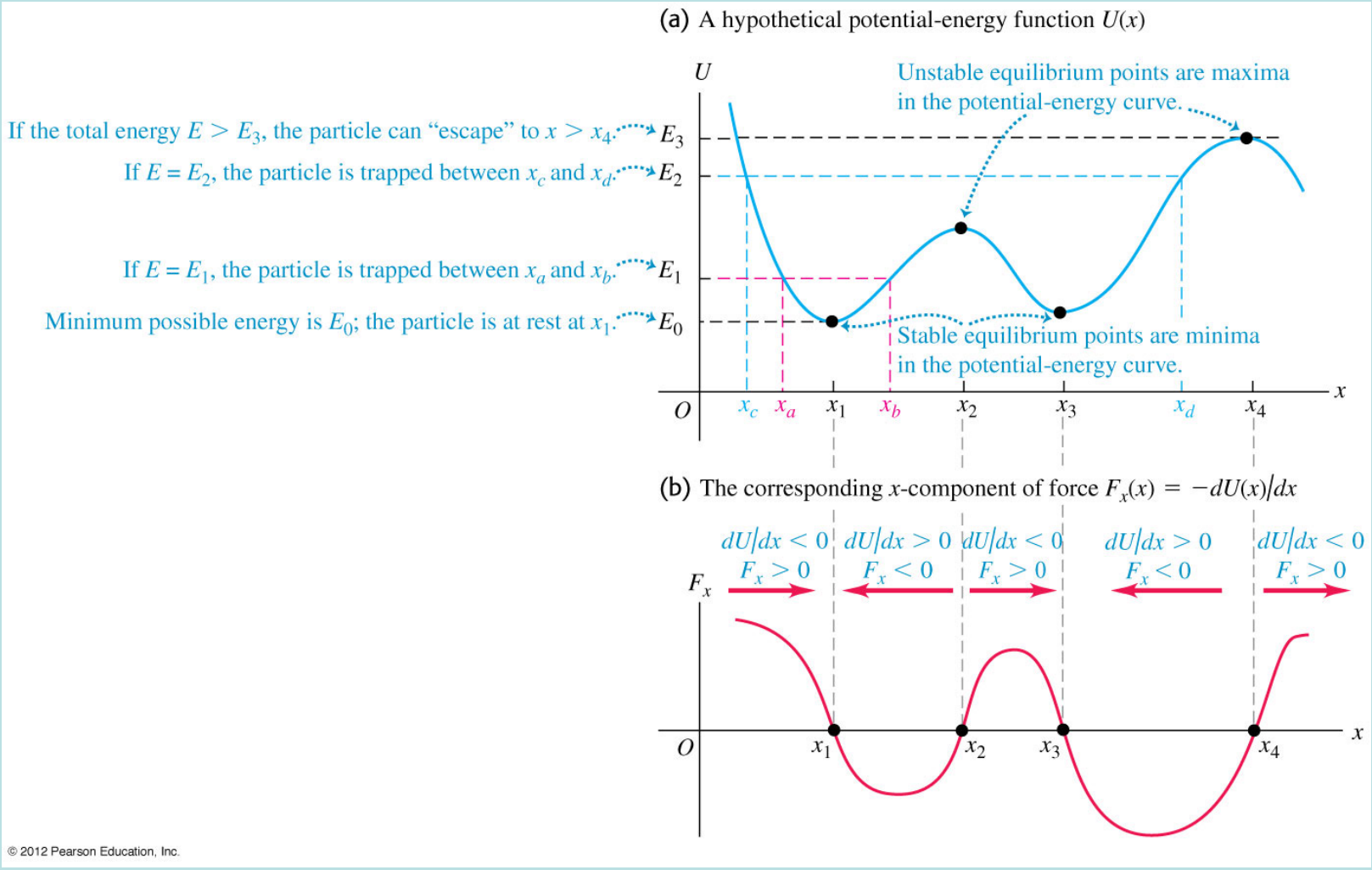
粒子無法進入 $U > E_0$

$U = E_0$ 折返點



平衡點 Equilibrium Point $F(x_0) = -\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x_0} = 0$

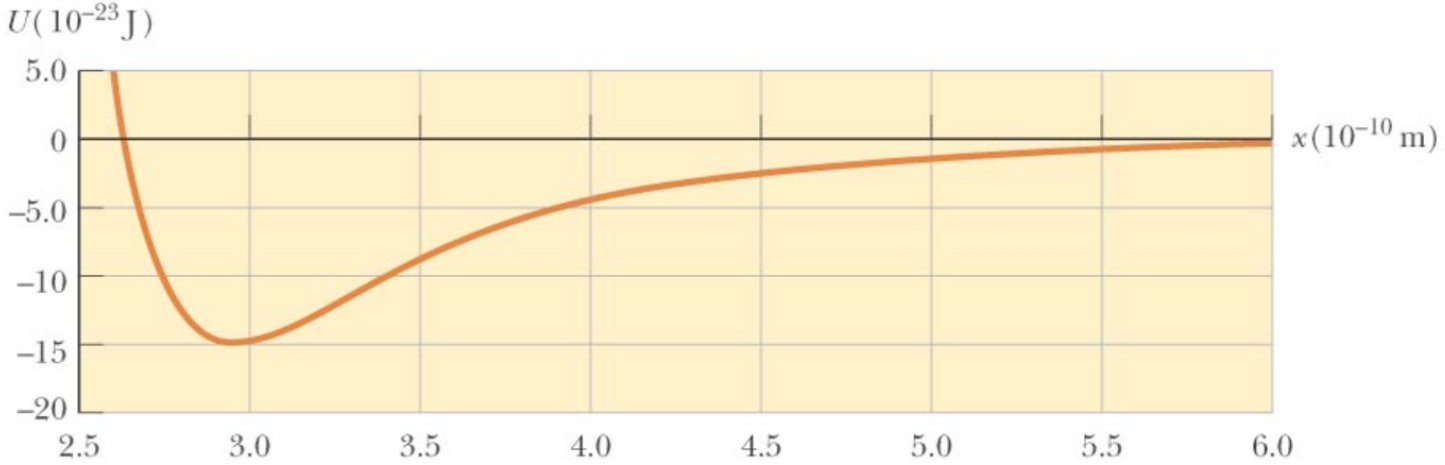
束縛態的運動範圍一定有一個平衡點



1. 未構成鍵結的電中性原子彼此之間也會有一個原子力，已知此力的大小只跟兩原子之間的距離 x 有關。此力的位能可以以如下的 Lennard-Jones Potential 來近似：

$$U(x) = 4\varepsilon\left[\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x}\right)^{6}\right]$$

其中 ε,σ 是正常數。考慮某一對原子，此兩常數為：$\sigma = 2.63\times10^{-10}\,\text{m}$，$\varepsilon = 1.51\times10^{-22}\,\text{J}$。



A. 將兩個原子一起放在 x 軸上，為討論方便起見，其中一個固定在原點。它對另一個原子的作用力，有一平衡點，問在此平衡點處兩者的距離 x_0 為多少 m？ (8)

B. 將此原子從距離為 2.5×10^{-10} m 處自靜止釋放，當它到達距離 4.5×10^{-10} m 時，動能是多少 J？(7)

C. 若重新將此原子從距離為 2.75×10^{-10}m 處自靜止釋放，兩個原子的最大距離會是多少 m？(5)

1. 在平衡點處，力為零：$F=-\frac{dU}{dx}=4\varepsilon\left[12\left(\frac{\sigma^{12}}{x^{13}}\right)-6\left(\frac{\sigma^{6}}{x^{7}}\right)\right]$，力為零：

$\left[12\left(\frac{\sigma^{12}}{x^{13}}\right)-6\left(\frac{\sigma^{6}}{x^{7}}\right)\right]=0$，$x_0^6=2\sigma^6$，$x_0=\sqrt[6]{2}\sigma=2.95\times10^{-10}\,\mathrm{m}$。

在距離為 2.5×10^{-10} m 處，位能及總機械能（動能為零）為

$U=E=4\varepsilon\left[\left(\frac{2.63}{2.5}\right)^{12}-\left(\frac{2.63}{2.5}\right)^{6}\right]=2.91\times10^{-22}\,\mathrm{J}$，到達距離 4.5×10^{-10} m 時，位能是$U=4\varepsilon\left[\left(\frac{2.63}{4.5}\right)^{12}-\left(\frac{2.63}{4.5}\right)^{6}\right]=-0.23\times10^{-22}\,\mathrm{J}$，兩者的差即是動能：

$K=E-U=3.14\times10^{-22}\,\mathrm{J}$。

這點是一個 turning point，另一個 turning point 在位能與其相等處，設其位置為 $x\times10^{-10}\,\mathrm{m}$。

$U=4\varepsilon\left[\left(\frac{2.63}{x}\right)^{12}-\left(\frac{2.63}{x}\right)^{6}\right]=4\varepsilon\left[\left(\frac{2.63}{2.75}\right)^{12}-\left(\frac{2.63}{2.75}\right)^{6}\right]$

$\left(\frac{2.63}{x}\right)^{12}-\left(\frac{2.63}{x}\right)^{6}=-0.180$，$\left(\frac{2.63}{x}\right)^{6}=\frac{1-\sqrt{1-0.72}}{2}=0.23$，$x=3.35$。故其位置為 $3.35\times10^{-10}\,\mathrm{m}$。

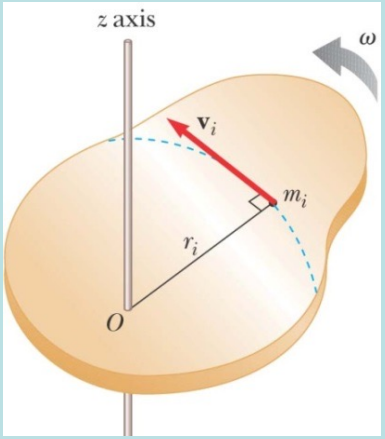
剛體內粒子只有旋轉，而沒有距離的改變Δr！

剛體內所有的粒子都是一起旋轉，有同一個角位移θ。

一個剛體的旋轉狀態可以用一個時間函數來表示：旋轉角：$\theta(t)$

它的作用如同一維運動的座標一般，但θ不是位置座標，

對剛體中的一個粒子來說位置是 s。s 才是真正的運動座標。



注意不同處的粒子 r 不同，但 θ 都一樣

$s_i = r_i\theta$　　$v_{it} = r_i\omega$　　$a_{it} = r_i\alpha$

了解此一維運動就了解整個剛體所有粒子的運動了！

$\theta(t)$ ⟷ $x(t)$

Angular speed $\omega = d\theta/dt$	Linear speed $v = dx/dt$
Angular acceleration $\alpha = d\omega/dt$	Linear acceleration $a = dv/dt$

轉動與一維運動似乎有一對一對應

τ ⟷ F

$\tau = I\alpha$ ⟷ $F = ma$

一維的角運動由對應的牛頓第二定律控制

Useful Equations in Rotational and Linear Motion

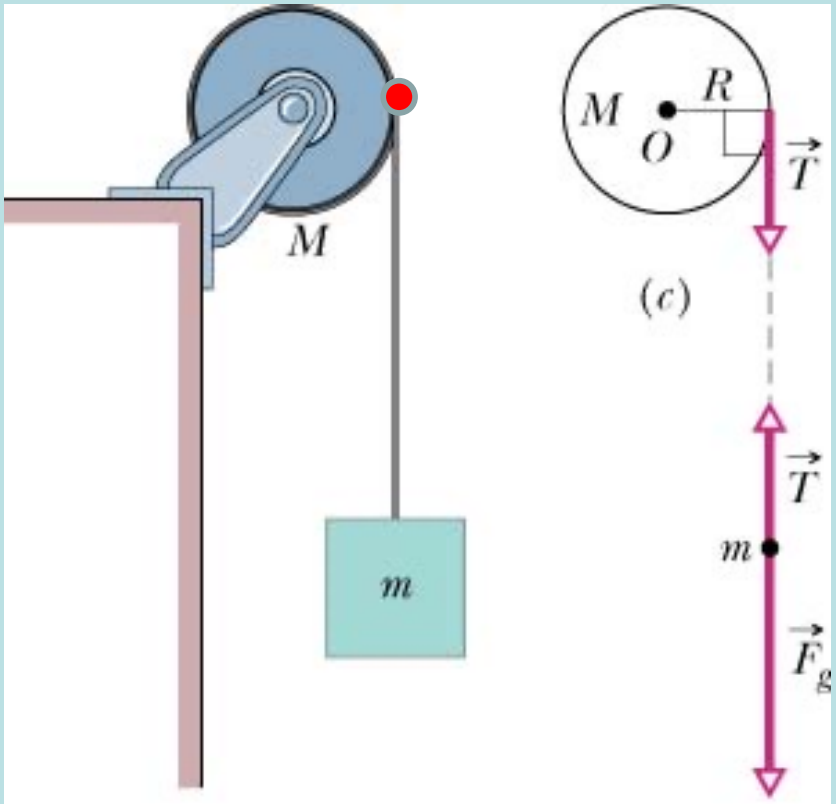
Rotational Motion About a Fixed Axis	Linear Motion
Angular speed $\omega = d\theta/dt$	Linear speed $v = dx/dt$
Angular acceleration $\alpha = d\omega/dt$	Linear acceleration $a = dv/dt$
Net torque $\Sigma\tau = I\alpha$	Net force $\Sigma F = ma$
If α = constant $\begin{cases} \omega_f = \omega_i + \alpha_t \\ \theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i) \end{cases}$	If a = constant $\begin{cases} v_f = v_i + at \\ x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2}at^2 \\ v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i) \end{cases}$
Work $W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau\, d\theta$	Work $W = \int_{x_i}^{x_f} F_x\, dx$
Rotational kinetic energy $K_R = \frac{1}{2}I\omega^2$	Kinetic energy $K = \frac{1}{2}mv^2$
Power $\mathcal{P} = \tau\omega$	Power $\mathcal{P} = Fv$
Angular momentum $L = I\omega$	Linear momentum $p = mv$
Net torque $\Sigma\tau = dL/dt$	Net force $\Sigma F = dp/dt$

繞固定軸的剛體旋轉與一維平移運動有一對一的對應

旋轉角稱為廣義座標 $\theta(t)$ ⟷ $x(t)$

每一個粒子的平移有一個牛頓第二定律。

每一個剛體的旋轉也有一個牛頓第二定律。



$$TR = I\alpha$$

$$mg - T = ma$$

$$a = R\alpha = \frac{TR^2}{I}$$

$$mg - T = \frac{mR^2}{I}T$$

$$T = \frac{mg}{1 + \frac{mR^2}{I}}$$

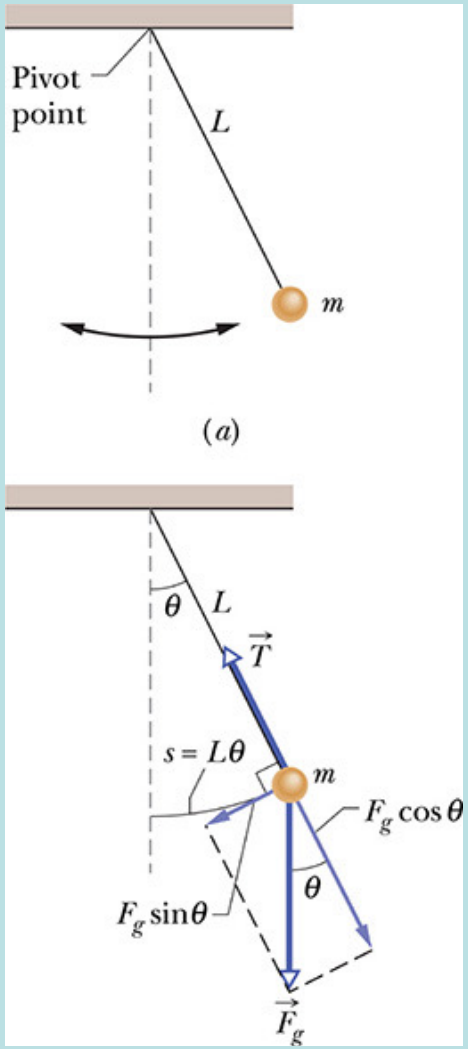
$$a = \frac{g}{1 + \frac{I}{mR^2}}$$

$$\alpha = \frac{a}{R}$$

$$\omega = \alpha t$$

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2$$

有了旋轉的牛頓第二定律，就可以寫下廣義座標θ的運動方程式：



$$\tau = I\alpha$$

$$mgL\sin\theta = mL^2\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

小角度近似： $\sin\theta \sim \theta$

$$L^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = gL\theta$$

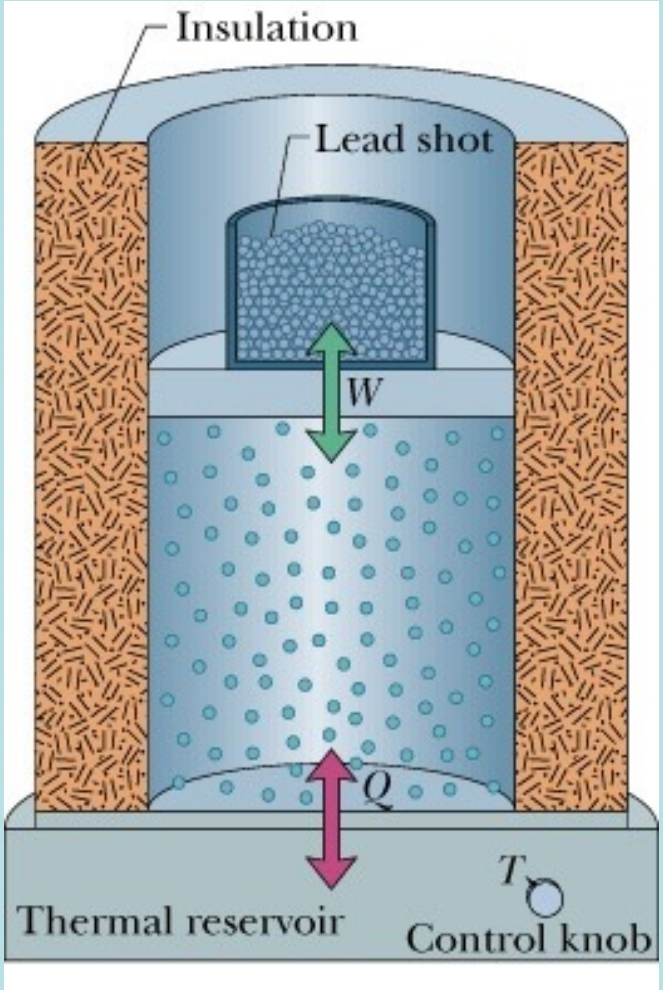
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{g}{L}\theta \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

單擺運動與簡諧運動滿足一模一樣的運動方程式：因此，解完全相同。

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

簡諧運動的週期 T 等於

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$



引擎 Engine

氣體可與外界同時有熱交互作用及力學交互作用。

可同時交換熱量並作功

定溫熱庫 Thermal Reservoir，使熱量交換在定溫下進行！

氣體需要兩個物理量來描述標定它的狀態。

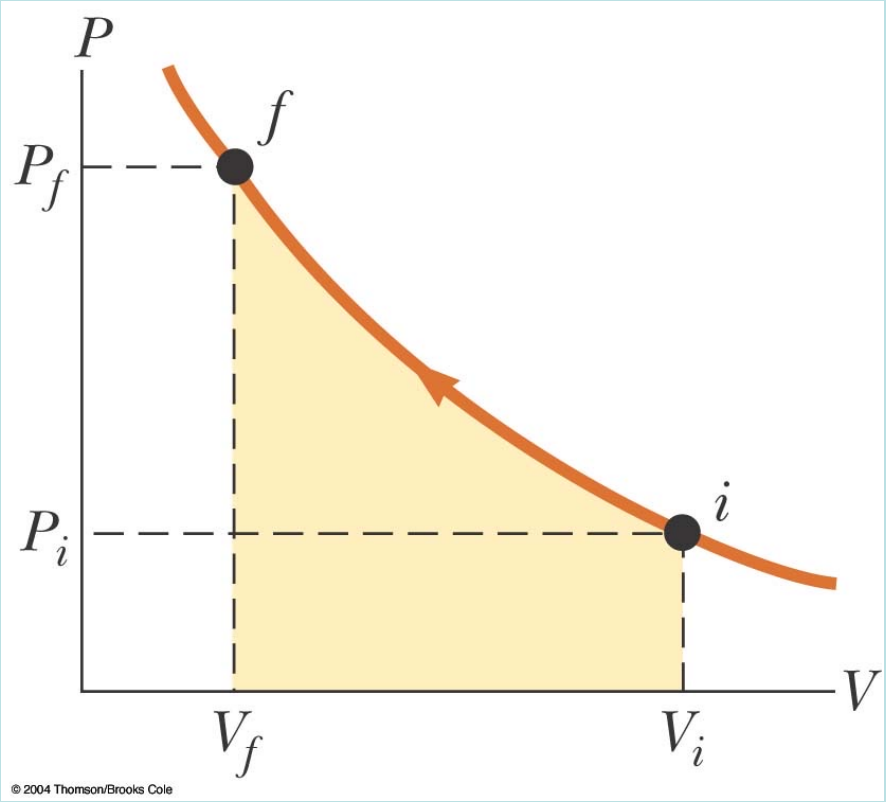
氣體有兩個熱座標

若選擇壓力 P 和體積 V 作為熱座標：

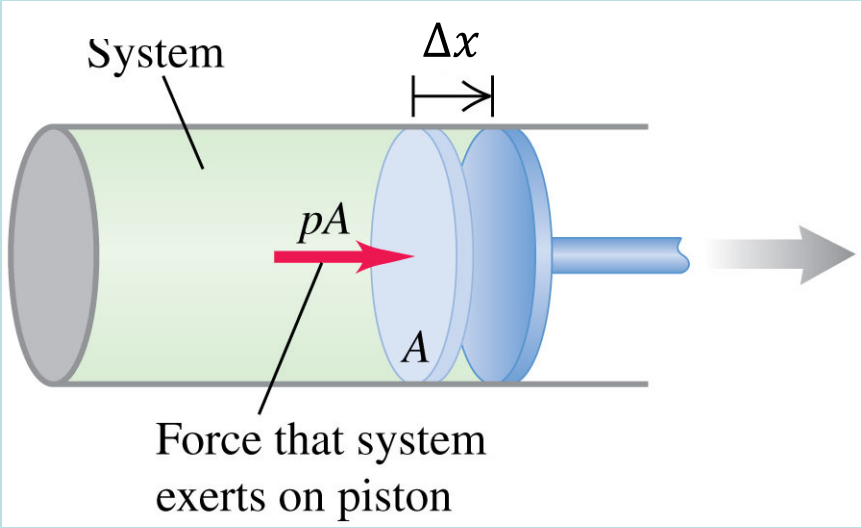
一個 PV 圖上的點代表一個狀態。

一個過程對應一條路徑。

右圖即為理想氣體的定溫過程。



在 PV 圖上計算氣體對外所作的功W：

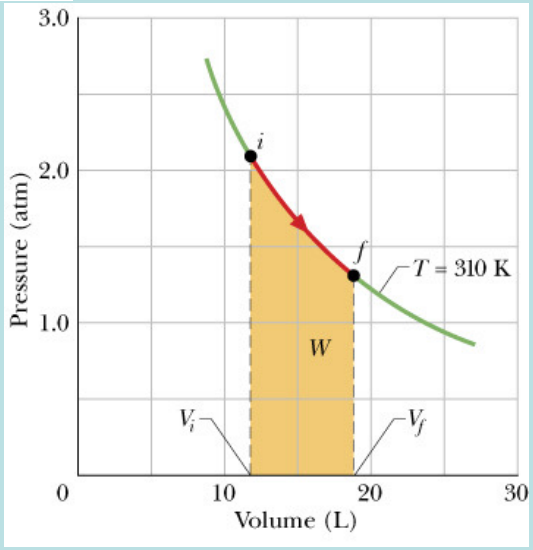


在無限小過程，氣體對外所作的功：

$$W = P\Delta V = PA\Delta x = P\Delta V$$

有限的過程是無限多段、無限小過程的和：

$$W = \int_{V_i}^{V_f} P(V)\cdot dV \quad \Delta V \xrightarrow[\substack{\Delta V\to 0\\ N\to\infty}]{\lim} \int_{V_i}^{V_f} P(V)\cdot dV$$



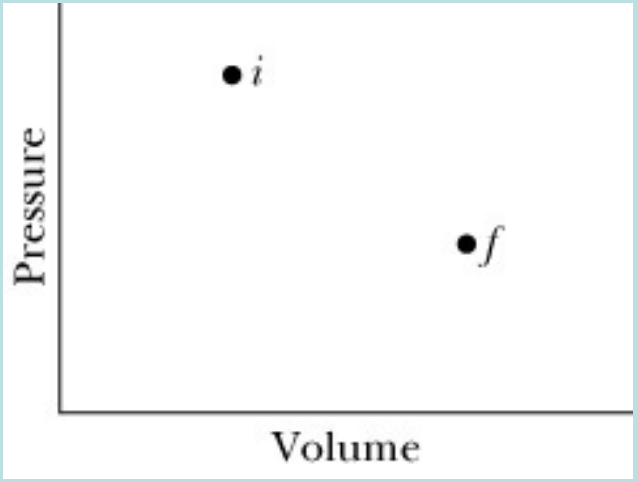
氣體所作的功即為壓力函數對體積的積分！

一個過程所作的功即該過程所對應的路徑下所包圍的面積。

氣體的熱力學第零定律

兩個熱座標決定狀態，一個狀態只有一個溫度

T 溫度 ⟵ 狀態 ⟷ 熱座標 (P,V)



每一個點有一個溫度

兩個熱座標的組合(P,V)對應一溫度。 $(P,V) \rightarrow T$

溫度 T 是壓力與體積的函數。

$T = f(P,V)$ 狀態方程式 Equation of State

溫度函數控制了氣體與其他系統的熱平衡關係！

狀態方程式　Equation of State

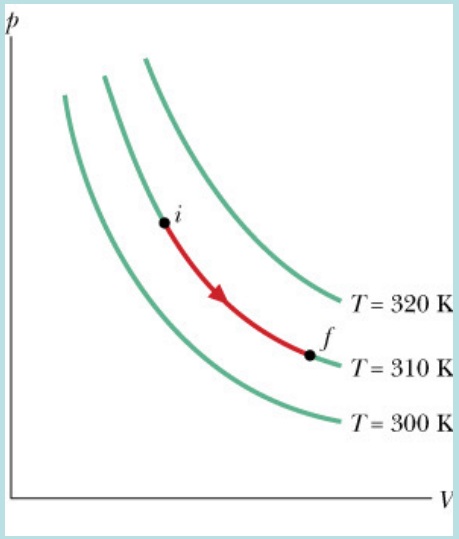
$$T = f(P, V)$$

$PV = nRT$　　理想氣體

$$\left(P + \frac{an^2}{V}\right)(V - nb) = nRT$$　　Van der Waals 氣體

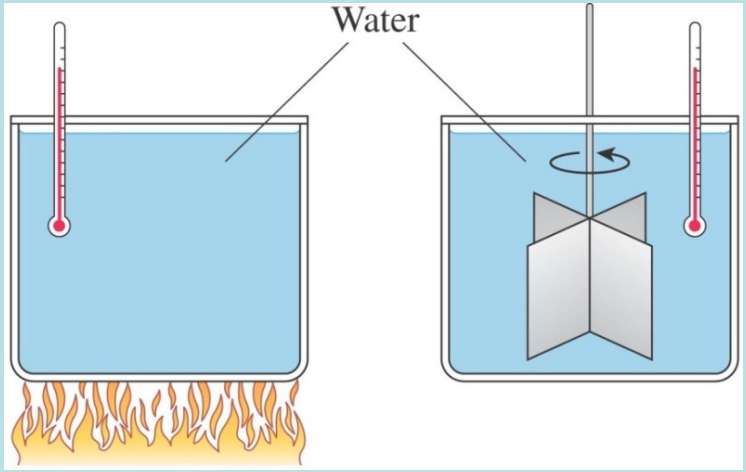
定溫狀態

L, T



定溫的狀態形成一條一條的等溫線！

固體的熱力學第一定律



$$Q = \Delta E_{\text{int}}$$

在熱過程中，系統進行熱量交換，熱量的進出造成內能的變化。

T 溫度 ⟷ E_{int} 內能

每一個狀態只有一個內能！內能是溫度的函數。

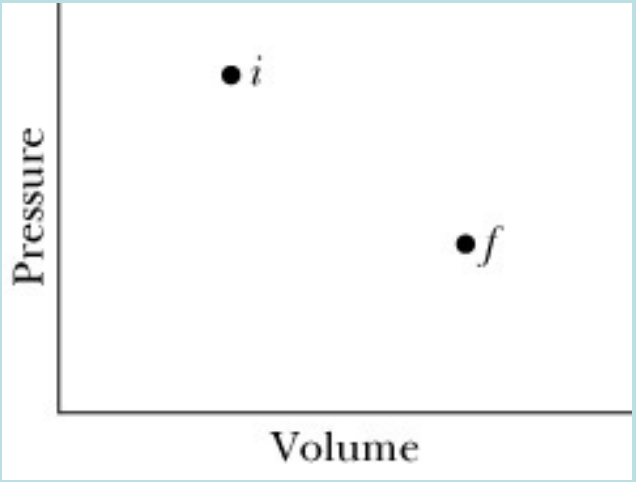
狀態 → L, T 　$E_{\text{int}}(T)$

因此在熱過程中，熱量交換會造成溫度的變化。

氣體的熱力學第一定律

兩個熱座標決定狀態，一個狀態只有一個內能

E_{int} 內能 ⟵ 每一個狀態有一個內能 ⟷ 狀態 ⟷ 熱座標 (P,V)



每一個點有一個內能

$(P,V) \rightarrow E_{\text{int}}$ 兩個熱座標的組合(P,V)對應一內能。

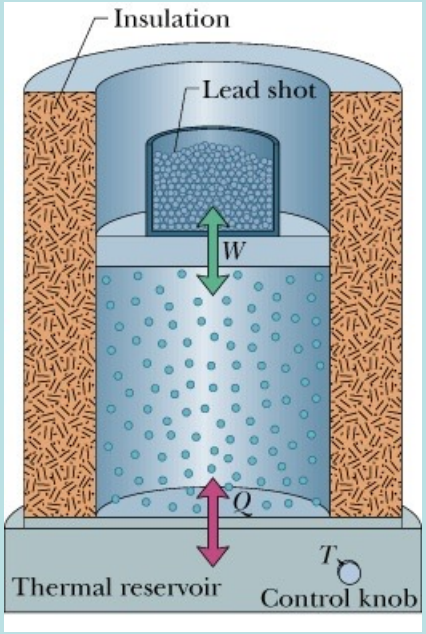
內能為壓力與體積的一個函數。 $E_{\text{int}} = g(P,V)$

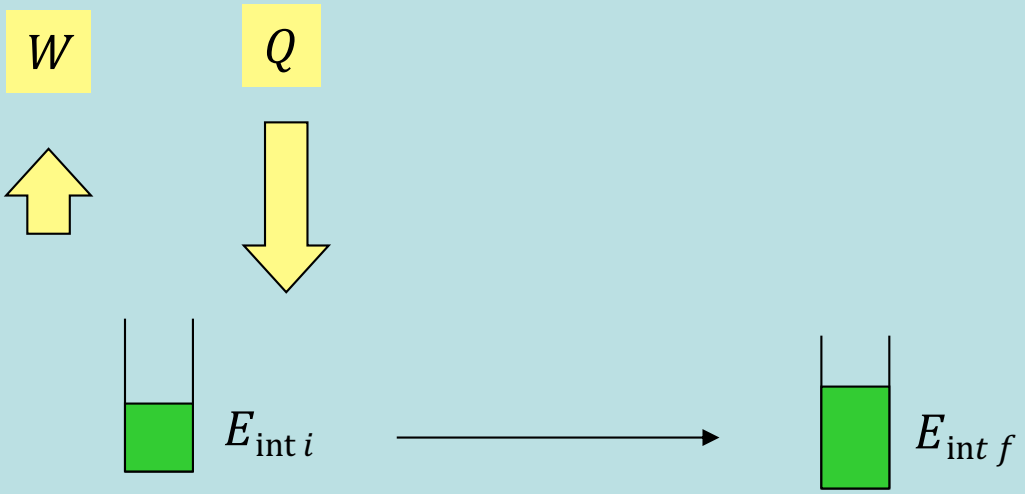
內能函數控制了氣體在達到熱平衡的過程中的熱量交換！

氣體與固體不同： $Q = \Delta E_{\text{int}}$

熱與功都會造成內能的變化！

熱與功本質相同，兩者可以加總！





$\Delta E_{\text{int}} = Q - W$ 氣體的熱力學第一定律

在熱過程中，系統進行的熱量交換，及所作的功，造成內能的變化。

吸熱後如果有作等值的功，內能不會變，溫度就可能不變。

W可以表示為PdV，此式可以以微分形式表示為：

$$dE_{\text{int}} = đQ - PdV$$

注意$đQ$如同$đW = PdV$，並不是一個狀態物理量函數的差，只是微小熱量交換！

對於理想氣體：

熱力學第零定律

$$T = f(P,V)$$

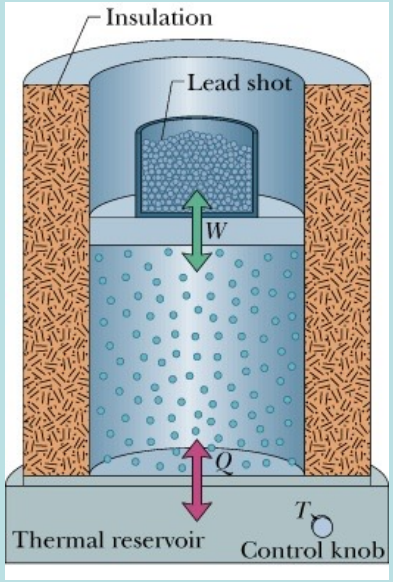
$$T = \frac{PV}{nR}$$

熱力學第一定律

$$E_{\text{int}} = g(P,V)$$

$$E_{\text{int}} = nc_V T$$

得到此兩函數，即能預測理想氣體與外界的熱平衡關係以及熱過程的熱量交換 Q



測量得到定容比熱c_V是一個常數，與溫度無關。

Type of Gas	Gas	C_V (J/mol · K)
Monatomic	He	12.47
	Ar	12.47
Diatomic	H_2	20.42
	N_2	20.76
	O_2	20.85
	CO	20.85
Polyatomic	CO_2	28.46
	SO_2	31.39
	H_2S	25.95

© 2012 Pearson Education, Inc.

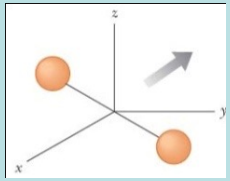
R~8.31 J/mol · K

單原子分子組成的理想氣體

$$c_V = \frac{3}{2}R$$

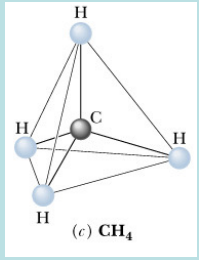
雙原子分子組成的理想氣體

$$c_V = \frac{5}{2}R$$



多原子分子組成的理想氣體

$$c_V = 3R$$



預測一：計算定壓過程的吸放熱，得出定壓比熱。

在定壓下，熱等於焓差。

$$Q = \Delta H = \Delta(E_{\text{int}} + PV) = \Delta(nc_V T + nRT) = n(c_V + R)\Delta T$$

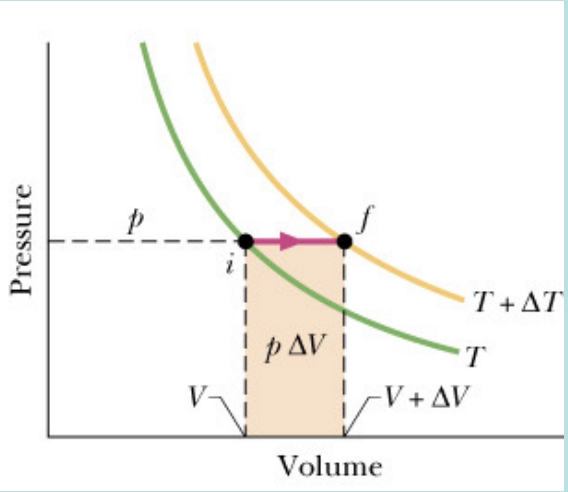
或：

$$Q = \Delta E_{\text{int}} + P\Delta V = nc_V \Delta T + \Delta(PV) = nc_V \Delta T + \Delta(nRT) = n(c_V + R)\Delta T$$

根據定義

$$Q = nc_P \Delta T$$

因此 $c_P = c_V + R$



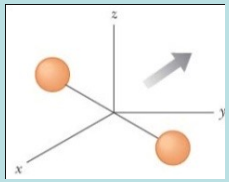
$$c_P = c_V + R$$

單原子分子組成的理想氣體

$$c_V = \frac{3}{2}R \qquad c_P = \frac{5}{2}R$$

雙原子分子組成的理想氣體

$$c_V = \frac{5}{2}R \qquad c_P = \frac{7}{2}R$$



多原子分子組成的理想氣體

$$c_V = 3R \qquad c_P = 4R$$

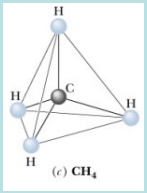


Table 19.1 Molar Heat Capacities of Gases at Low Pressure

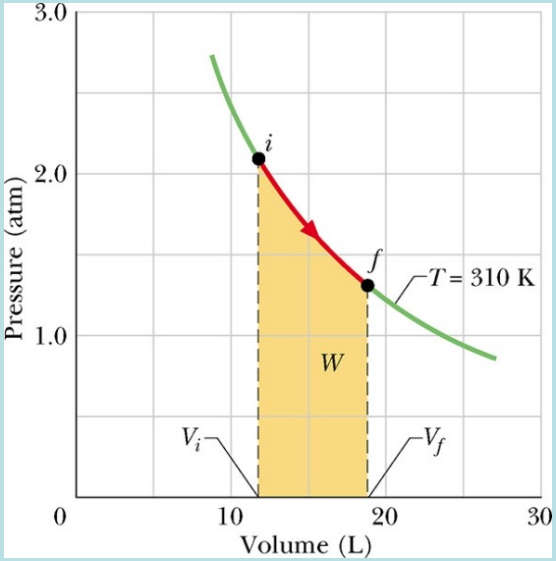
Type of Gas	Gas	C_V (J/mol · K)	C_p (J/mol · K)	$C_p - C_V$ (J/mol · K)	$\gamma = C_p/C_V$
Monatomic	He	12.47	20.78	8.31	1.67
	Ar	12.47	20.78	8.31	1.67
Diatomic	H_2	20.42	28.74	8.32	1.41
	N_2	20.76	29.07	8.31	1.40
	O_2	20.85	29.17	8.31	1.40
	CO	20.85	29.16	8.31	1.40
Polyatomic	CO_2	28.46	36.94	8.48	1.30
	SO_2	31.39	40.37	8.98	1.29
	H_2S	25.95	34.60	8.65	1.33

© 2012 Pearson Education, Inc.

預測二：定溫過程的吸放熱

T 是常數　$PV = nRT =$ 常數

$\Delta E_{\text{int}} = nc_V \Delta T = 0$　內能不變



$$Q = W = \int_{V_i}^{V_f} P(V) \cdot dV = \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V} dV = nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{1}{V} dV$$

$$= nRT \,(\ln V)\Big|_{V_i}^{V_f} = nRT\left(\ln V_f - \ln V_i\right) = nRT \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

$$Q = nRT \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

和固體液體非常不同，氣體溫度不變時亦可吸熱而不相變，

所吸收熱量轉化為對外界做功。

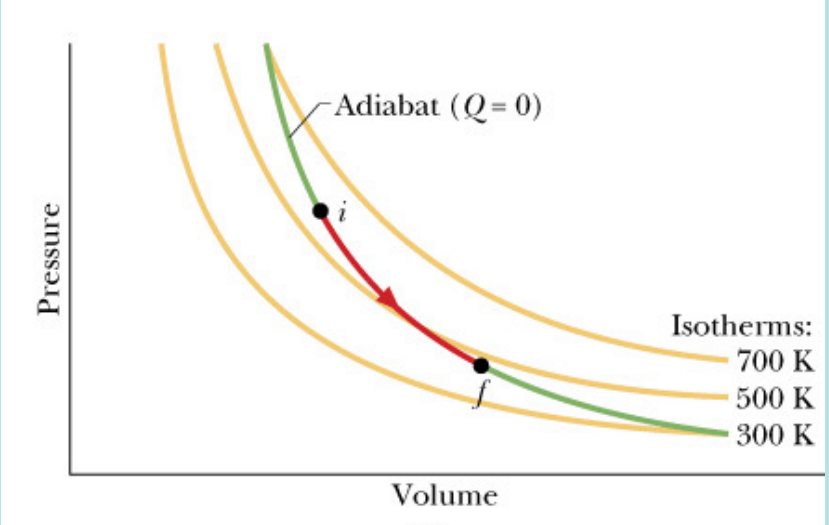
絕熱曲線

在絕熱過程中：

PV^{γ}是一個常數

$P \sim V^{-\gamma}$

$\gamma > 1$



當體積增加時，壓力的下降 $P \sim V^{-\gamma}$ 要比定溫過程 $P \sim V^{-1}$ 要來得快！

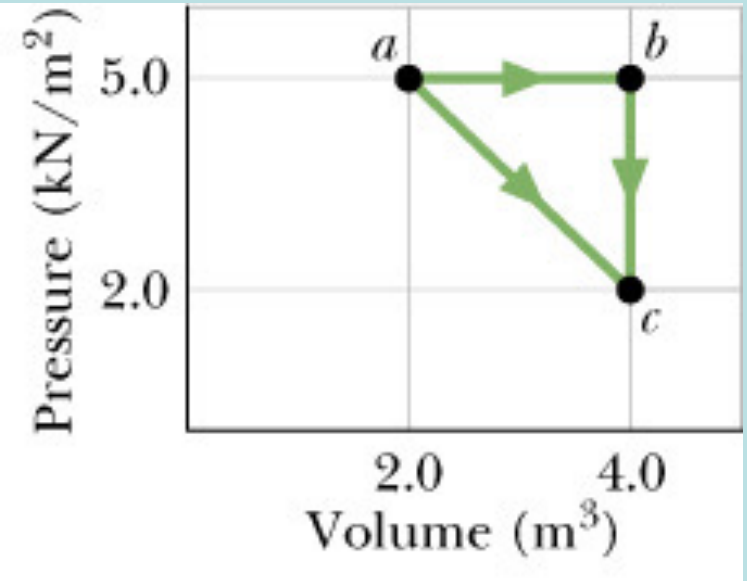
絕熱膨脹時，溫度下降，(膨脹對外作功，故內能下降)。

絕熱壓縮，溫度上升。

$$P_f V_f \cdot V_f^{\gamma-1} = P_i V_i \cdot V_i^{\gamma-1}$$

$$T_f V_f^{\gamma-1} = T_i V_i^{\gamma-1}$$

一莫耳理想氣體：雙原子分子組成



計算Q_{ab}, Q_{bc}。

由各個狀態的壓力與體積即可算出其溫度 $T = \frac{PV}{nR}$

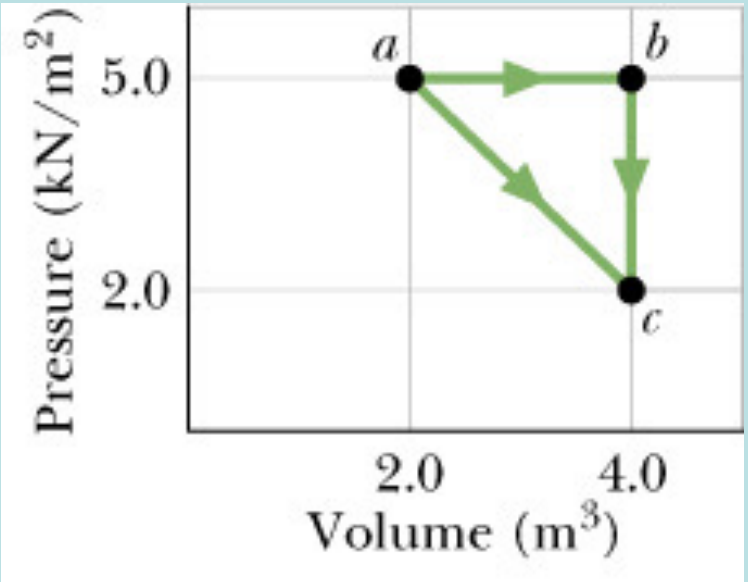
$$T_a = \frac{5000\times 2}{R} = 1203\mathrm{K} \qquad T_c = \frac{2000\times 4}{R} = 962\mathrm{K} \qquad T_b = \frac{5000\times 4}{R} = 2406\mathrm{K}$$

$a \to b$是定壓：

$$Q_{\mathrm{ab}} = nc_P\Delta T = \frac{7}{2}nR\Delta T \sim 35\mathrm{KJ}$$

$b \to c$是定容：

$$Q_{\mathrm{bc}} = nc_V\Delta T = \frac{5}{2}nR\Delta T \sim -30\mathrm{KJ}$$



計算Q_{ab}。

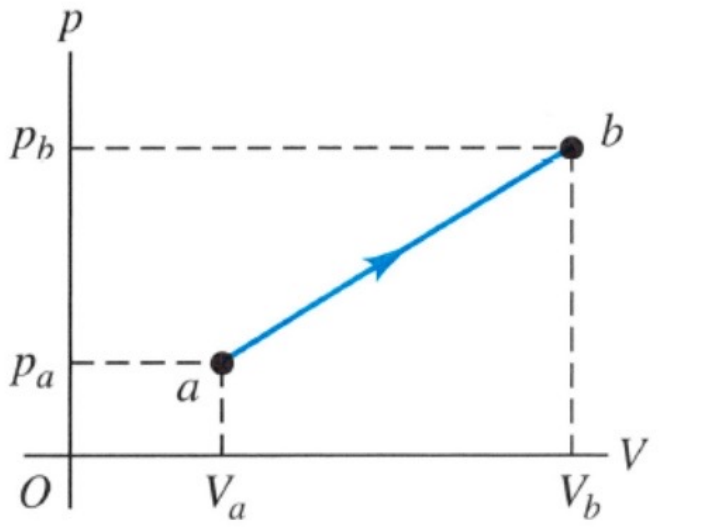
由各個狀態的壓力與體積即可算出其溫度 $T = \frac{PV}{nR}$

$$T_a = \frac{5000\times2}{R} = 1203\text{K} \qquad T_c = \frac{2000\times4}{R} = 962\text{K}$$

由溫度即可算出內能！ $E_{\text{int}} = nc_V T = \frac{5}{2}nRT$ $\Delta E_{\text{int},ac} = \frac{5}{2}nR\Delta T \approx 5000\text{J}$

$$Q = \Delta E + W = 5000 + \frac{5000+2000}{2}\times2 = 12000\text{J}$$

5. 考慮一缸 4.0 莫耳的氮氣。由狀態 a 膨脹至狀態 b，過程在 PV 圖上是一條直線，如圖所示。已知 $P_a = 1.00\times10^5\,\text{Pa}$，$V_a = 0.10\text{m}^3$，$P_b = 1.50\times10^5\,\text{Pa}$，$V_b = 0.15\text{m}^3$。

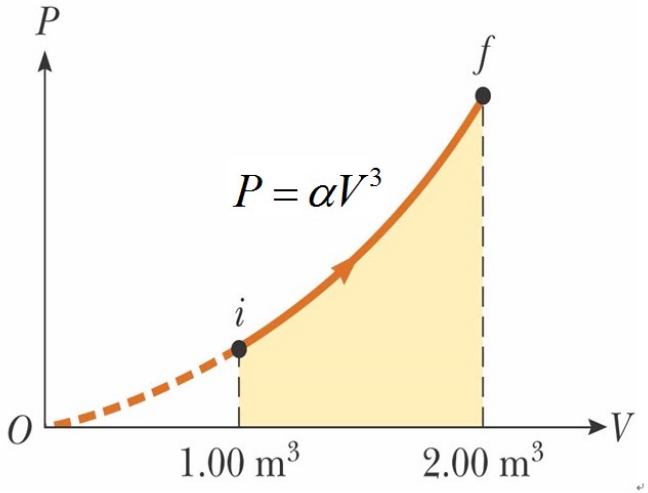


A. 計算此氣體前後的溫度 T_a, T_b 分別是多少 K。(10)

B. 在這個過程中，氣體對外所作的功是多少 J？(10)

C. 在這個過程中，氣體的內能變化是多少 J？吸熱（或放熱）是多少 J？(5)

3. 考慮一缸一莫耳的氦氣，從原來體積 1.00m^3，擴張為原來體積的兩倍，在此過程中壓力與體積維持以下的關係：$P=\alpha V^3$，其中 $\alpha=1010\ \text{Pa/m}^9$。



A. 問起始態以及末態的氦氣溫度各是多少？在此過程中內能增加多少？(8)

B. 在此過程中，外界對氣體做功多少？(7)

C. 在此過程中，氣體吸熱或放熱多少？(5)

解答：

A. $P_i=\alpha V_i^3=1.01\times10^3\,\text{Pa}$，$T_i=\dfrac{P_iV_i}{nR}=121.5\,\text{K}$。$T_f=16T_i=1944\text{K}$。$\Delta E=\dfrac{3}{2}R\Delta T=22.7\text{kJ}$。

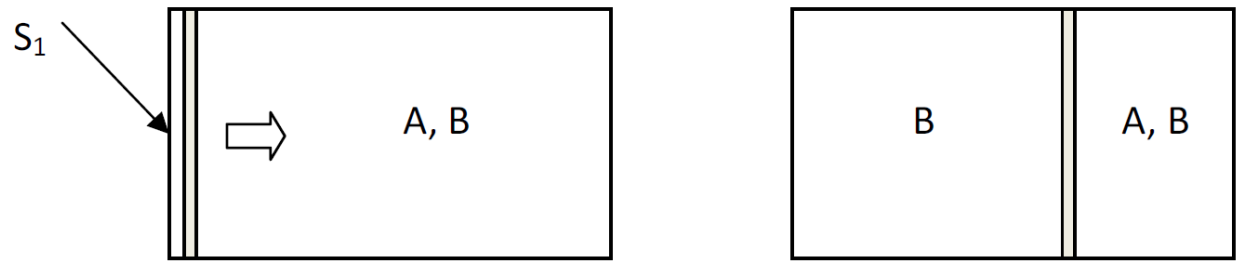
B. $W=\int P\,dV=\int \alpha V^3\,dV=\dfrac{\alpha}{4}V^4\,|_{1.00}^{2.00}=3.79\text{kJ}$。

C. $Q=\Delta E+W=22.7+3.79=26.5\text{kJ}$。

2. （熱學）考慮一長方體容器，容器中有 A,B 兩種由單原子分子組成的理想氣體，容器體積為 10.0 *l*。在左方垂直的長方形器壁 S_1 右邊有一相同形狀大小的半透膜，膜與器壁 S_1 之間的體積可以忽略。此膜能讓 B 氣體分子自由通過，但完全不能讓 A 氣體分子通過。已知 B 氣體的莫耳數為 1 mol，溫度為 27°C，A 氣體的莫耳數未知。

由此狀態開始，施力使半透膜緩慢向右移動（過程緩慢到每一瞬間都可視為一平衡態），直到膜左右兩邊的體積比為 2:1，此時測得半透膜上來自右氣室內氣體的壓力增加為原來的四倍。假設過程中膜不變形，與上下前後的器壁密合如同一個活塞。在過程中熱量可以進出容器。 $R = 8.31\ \text{J/mol}\cdot\text{K}$ ，$1\ \text{atm} = 1.01\times10^5\ \text{Pa}\ (\text{N/m}^2)$。

提示：因為半透膜能讓 B 氣體分子自由通過， B 氣體對半透膜的壓力很小，假設可以忽略。



A. 此時（右圖）A 氣體的溫度是多少 K？(4)

B. 此時左方器壁 S_1 上的壓力為多少 Pa？(4)

C. 在這過程中，B 氣體分子的總動能增加多少 J？(4)

解答：

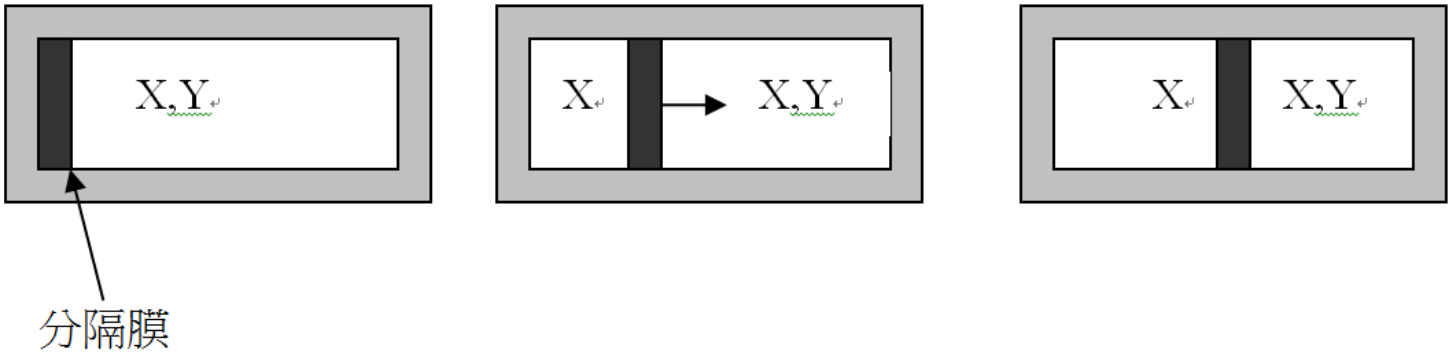
A. 在過程中 A 氣體體積變化：$\frac{V_f}{V_i}=\frac{1}{3}$，壓力變化 $\frac{P_f}{P_i}=\frac{4}{1}$，溫度的前後比為：

$\frac{T_f}{T_i}=\frac{P_fV_f}{P_iV_i}=\frac{4}{3}$，$T_f=300\cdot\frac{4}{3}=400\text{K}$。

B. 因為 B 氣體在膜右方與 A 氣體處於熱平衡，因此所有 B 氣體也隨之增加至 400K。$P_B=\frac{nRT}{V}=\frac{1\cdot 8.31\cdot 400}{10\times 10^{-3}}=3.32\times 10^5\,\text{Pa}$。

C. $\Delta E_{\text{int}}=\frac{3}{2}nR\Delta T=\frac{3}{2}\cdot 1\cdot 8.31\cdot 100=1246.5\,\text{J}$。

4. 考慮一個容器，周圍完全隔熱，裏面充滿 X 氣體及 Y 氣體各一莫耳，兩者都是單原子分子所構成。容器內總壓力為 2.0 atm，溫度為 27°C，（X 與 Y 氣體的分壓各是 1.0 atm）。在容器內有一可左右活動的分隔過濾半透膜，此膜 X 氣體可以自由通過，Y 氣體則完全不能通過。此膜一開始位於左方器壁上，然後實驗者施力將它慢慢向右移動，在此過程中，膜將 Y 氣體壓迫至容器右方，如圖所示，X 氣體則不受影響。最後施力使該膜固定於容器的中央，使左右兩室的體積皆為整個容器的 1/2，此時半透膜上來自右室的壓力是 2.5 atm（提示:這表示 Y 氣體的壓力是 2.5 atm，因為 X 氣體不會感覺膜的存在）。假設此過程發生夠慢，Y 氣體與 X 氣體一直處於**熱平衡狀態**。本題中所有氣體皆可視為理想氣體。



A. Y 氣體的末溫度是多少 K？半透膜右方及左方的 X 氣體的末溫度各是多少 K？ (10)

B. 氣體的總內能（X 氣體加 Y 氣體）變化是多少？實驗者對膜施力所作的功是多少？(10)

提示：注意各個氣體的莫耳數。

解答：根據熱力學第零定律，在左室中達成熱平衡的氣體溫度相等，而分隔膜對 X 氣體無影響，因此左右兩室的 X 氣體溫度與壓力皆相等。

A. 對 Y 氣體來說：$\frac{T_f}{P_f V_f} = \frac{T_i}{P_i V_i}$，$\frac{T_f}{2.5 \times 0.5V} = \frac{300}{1.0 \times V}$，因此 $T_f = 375\text{K}$。右方 X 氣體與 Y 氣體處於熱平衡，故溫度也是 375K，右方 X 氣體與左方 X 氣體液處於熱平衡，故溫度也是 375K。注意此時 X 的壓力已經改變，而不再是原來的 1.0atm。

B. $\Delta E_{\text{int}} = nc_V(T_f - T_i) = 2\frac{3}{2}R \cdot 75 = 1.87\text{kJ}$。因為隔熱：實驗者對膜施力所作的功等於內能變化1.87kJ。