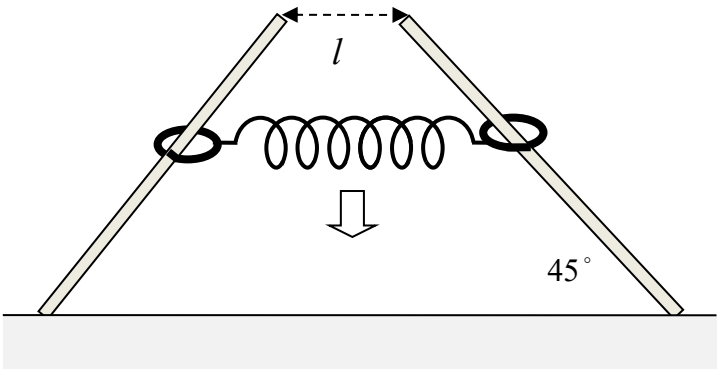
普物期末考

考卷領取 Dec 21(Thursday) 11:30-12:00 A213

$1\ \text{atm} = 1.01 \times 10^5 \text{Pa}$，$R = 8.31\ \text{J/mol·K}$。氦氣的莫耳定容比熱：$c_V = \frac{3}{2}R$。

1. 考慮如圖之兩根不變型鋼條，固定於桌面之上，與水平的夾角固定為$45°$，兩鋼條在同一鉛直平面上。在兩鋼條上各套一個相同鐵環，兩鐵環質量和為m。兩鐵環中間繫以一條水平彈簧（彈力常數為k，質量可以忽略），兩鋼條頂端處的距離正好是彈簧的自然長度l。兩鐵環由鋼條的頂端處，自靜止狀態放手，使鐵環下滑。假設鐵環與鋼條間的摩擦可以忽略。鐵環下滑後，會在某處向上反彈，問反彈處距離頂點的垂直高度差是多少？(10)答案可以m, k, g表示。(20)

   提示：下滑的垂直高度差洽為彈簧的伸長量的一半。

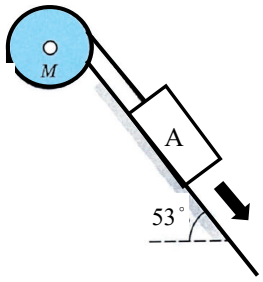


解答：因為左右對稱，所以可以認定兩鐵環在下滑過程會是等高的，將下滑的高度設為$-y$，彈簧的伸長量即為$2y$。以能量來討論較為容易：鐵環系統的重力位能為mgy，彈簧的彈力位能為$\frac{1}{2}k(2y)^2 = 2ky^2$。總位能即：$U = 2ky^2 - mgy$。起始處的總位能為零，動能為零，故總能量為零，因此反彈點即在位能為零$U = 0$處：$y = \frac{mg}{2k}$。這個位置就是我們提到的折返點，許多同學找到彈簧彈力與重力抵消的平衡點作答，這是不一樣的。在平衡點鐵環的受力為零，但因為還有向下速度，還會持續下墜，直到折返點為止，而折返點需以能量討論才比較清楚。

2. 一個方塊，繫於水平放置的彈簧上，彈簧另一端固定。此方塊在水平無摩擦的平面上作簡諧運動，已知振幅為10 cm，周期為1.25 s。以平衡點的位置設為原點：$x = 0$。問在此簡諧運動中，從$x = -5.0$ cm移動到$x = 5.0$ cm，最短需要時間多少 s？(20)

解答：位移$x = 5.0$ cm處的相角為$\pm\cos^{-1}\left(\frac{5}{10}\right) = \pm 60°$，位移$x = -5.0$ cm處的相角為$180° \pm \cos^{-1}\left(\frac{5}{10}\right) = 180° \pm 60° = 240° \text{or} 120°$。從位移$x = -5.0$ cm移動到位移$x = 5.0$ cm，最短時間事發生在相角由$240°$增加到$-60°$即$300°$。相角差為$60°$，需時$T \times \frac{60}{360} = 0.21\text{s}$。

3. 有一方塊 A，質量為$m_A = 4.0$ kg，可以沿無磨擦的斜面下滑，斜面的斜角為$53°$，$\sin 53° \sim \frac{4}{5}$。A 連接一無質量的繩索，繞過一固定但可旋轉的滑輪，滑輪質量$M = 4.0$ kg，半徑$R = 0.5$ m，為一圓柱體，轉動慣量為$I = \frac{1}{2}MR^2$。自靜止狀態鬆手，方塊 A 會向下滑動。繩與滑輪間無滑動，因此$a = R\alpha$。重力加速度$g \sim 10\ \text{m/s}^2$。計算滑輪的角加速度α。(20)



解答：繩子的長度沒有改變，$a = R\alpha$。設繩的張力為T_1，方塊的移動，與滑輪的轉動分別可以寫下一運動方程式：

$$m_A g \sin 53° - T_1 = m_A a$$

$$T_1 R = I\alpha = I\frac{a}{R}$$

注意第二式的力矩中的力，不只是方塊重力沿斜面方向分量$m_A g \sin 53°$，而是繩的張力T_1，如第一式所顯示，兩者並不相等。

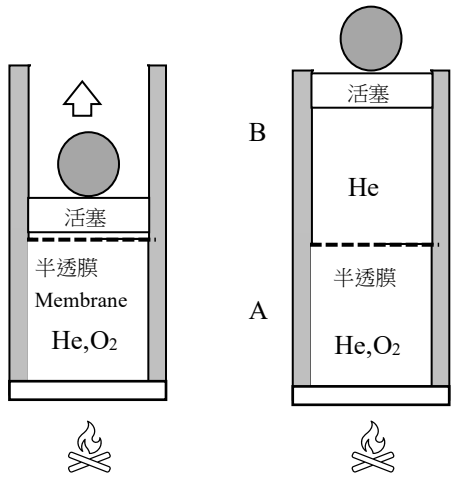
代入數字，可以得到：

$$32 - T_1 = 4a$$

$$T_1 0.5 = 1a$$

可以解得加速度：a~5.3 m/s^2。$\alpha = \frac{a}{R} = 10.6\ /s^2$。

4. 考慮一個長方體容器，以一固定的半透膜（圖中虛線）分割為 A 室及 B 室，B 室中有一可上下移動的活塞。起始時，活塞在半透膜上方幾乎與之重合。A 室內含可視為理想氣體的氦氣 He 與氧氣O_2各1.0 mol，半透膜只能讓氦氣通過，氧氣無法通過。已知活塞上的壓力保持固定為P_0，因為氧氣無法透過半透膜，因此對活塞上的壓力沒有貢獻。設$V_A = V_0$，此時 A 室內溫度是多少？以已知的P_0, V_0及常數R表示。(10)



現在於 A 室下方慢慢加熱，使活塞向上移動，過程中一直維持熱平衡，直到活塞下方 B 室的體積與 A 室相等為止，過程活塞保持定壓。此時 B 室中氦氣溫度是多少？A 室中氧氣溫度是多少？ (15) 以已知的P_0, V_0及常數R表示。

提示：因為氦氣可以透過半透膜，所以對氦氣來說，A，B 兩室其實是聯通。

解答：理想氣體滿足狀態方程式：$T = \frac{PV}{nR}$。

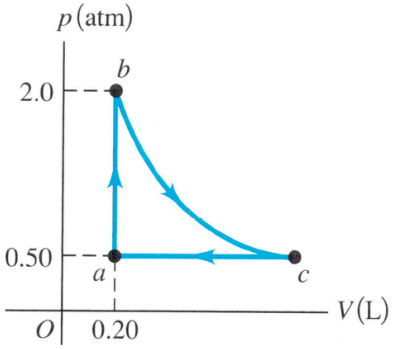
因為氧氣無法透過半透膜，因此對活塞上的壓力沒有貢獻，因此P_0完全是氦氣壓力，加熱前， A 室內 1 莫耳氦氣壓力為P_0，$T_A = \frac{P_0 V_0}{nR} = \frac{P_0 V_0}{R}$。

加熱後，氦氣壓力一直維持在P_0，氦氣可以自由通過膜，因此兩室的氦氣可以合起來看待，且溫度相等，因此體積為$2V_0$，溫度為：$T_{\mathrm{He}} = \frac{P_0 2V_0}{R}$。而氧氣與與氦氣在A室內達到熱平衡因此溫度相等：$T_{\mathrm{O_2}} = T_{\mathrm{He}} = \frac{2P_0V_0}{R}$。

5. 考慮0.002莫耳的氦氣的熱過程，在PV圖中的b與c態為等溫，$V_a = 2.0 \times 10^{-4}\ \mathrm{m}^3, P_a = 0.5\ \mathrm{atm}$，$P_b = 2.0\ \mathrm{atm}$。

   A. 問狀態a，c的溫度分別是多少K？(5)

   B. 在定壓過程$c \to a$中，氣體放出了多少J的熱量？內能的變化是多少J？活塞對氣體作是多少J？(15)



解答：

A. $T_a = \frac{P_a V_a}{nR} = \frac{0.5\times1.01\times10^5\times2\times10^{-4}}{0.002\times8.31} = 608\mathrm{K}$，$T_c = T_b = \frac{P_b}{P_a}T_a = 2432\mathrm{K}$。

B. 在定壓過程$c \to a$中，$Q = nc_P\Delta T = 0.002 \times \frac{5}{2}R \times (608 - 2433) = -76\ \mathrm{J}$放熱。

$\Delta E_{\mathrm{int}} = nc_V\Delta T = 0.002 \times \frac{3}{2}R \times (608 - 2433) = -44\ \mathrm{J}$。$W = Q - \Delta E_{\mathrm{int}} = -32\ \mathrm{J}$，活塞對氣體作功+32 J。