花燈由支架支撐展開，所有可能的量子狀態是由本徵函數為支架展開！

一系列能量的本徵函數u_n滿足：

展開定理：任一狀態ψ可以u_n作展開。展開讓我們聯想到向量以基底展開：

$$\psi(x) = \sum_n [c_n \cdot u_n(x)] \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \sum_{m=1}^{l} a_m \hat{\imath}_m$$

正交定理：本徵函數彼此正交。這很像一組彼此正交的基底！

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot u_m(x)^* \cdot u_n(x) \ = \delta_{mn} \quad \Rightarrow \quad \hat{\imath}_m \cdot \hat{\imath}_n = \delta_{mn}$$

分量c_a可以寫成態函數與本徵函數的空間積分:

$$c_n = \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot u_n(x)^* \cdot \psi(x) \quad \Rightarrow \quad a_m = \vec{a} \cdot \hat{\imath}_m$$

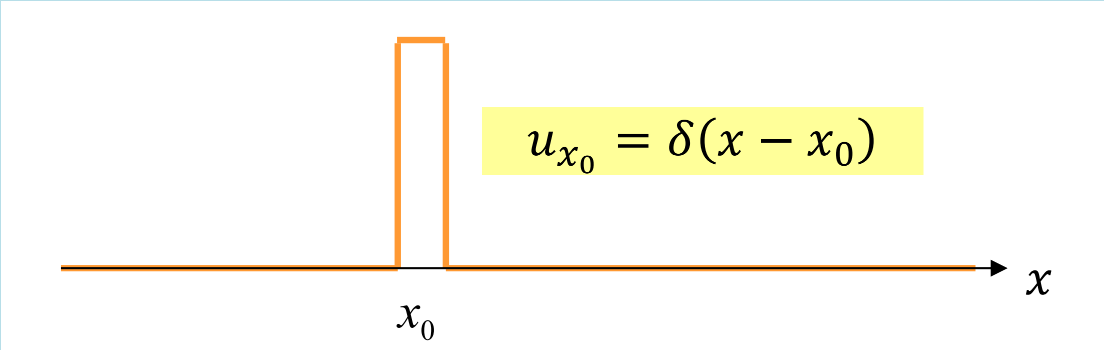
把狀態視為向量，展開與正交定理，就如同向量空間的向量分析一模一樣！

如此，一系列本徵函數u_n似乎形成一組基底。

任一狀態函數可以此基底作展開，疊加係數c_n就如同向量對一組基底的分量。

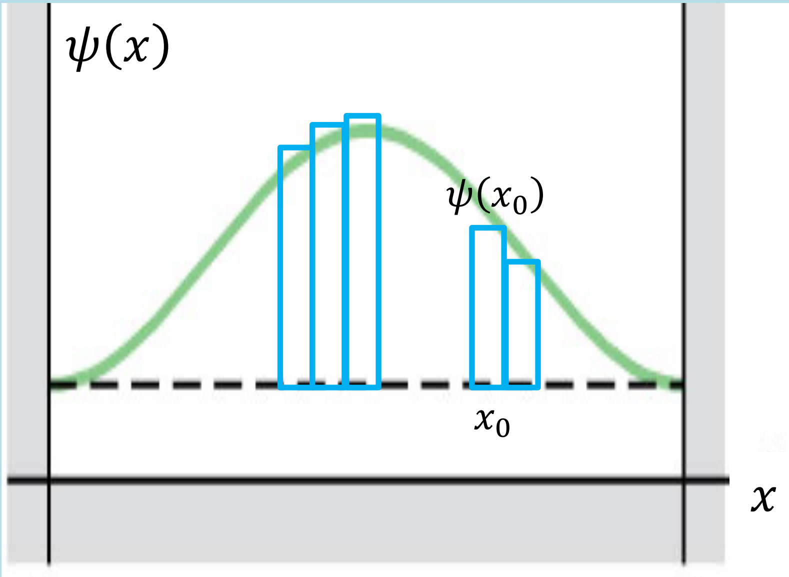
狀態函數的資訊就保留在分量中。

而且狀態函數其實也就是分量。



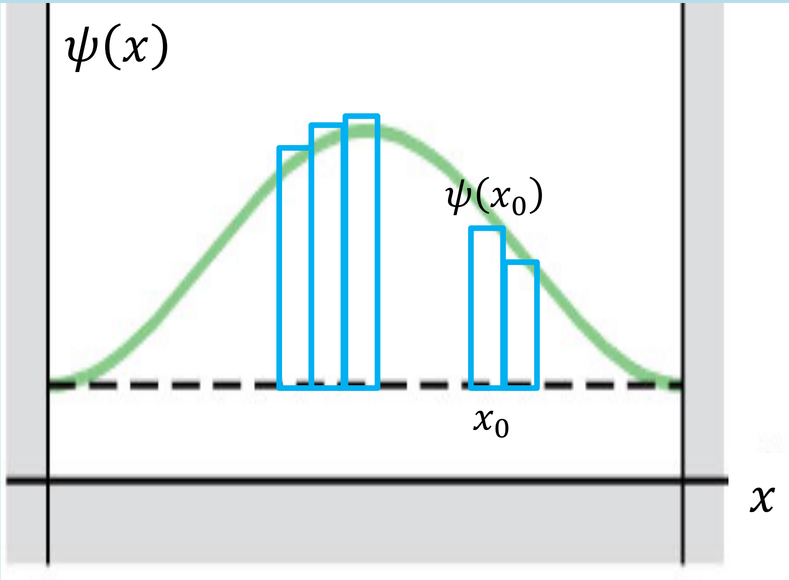
收集位置算子$\hat{x}$，所有本徵值x_0的本徵函數$\delta(x - x_0)$，就組成一組基底

任何函數可以以此基底展開，在此即如下，以$\psi(x_0)$分量一個個$\delta(x - x_0)$疊加！



$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_0\, \psi(x_0)\, \delta(x - x_0)$$

分量　　本徵函數



$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_0\, \psi(x_0)\, \delta(x - x_0)$$

分量　　本徵函數

更精確一點描述：

把位置視為如晶格一樣離散，那一個x_0值對應基底的一個單位向量$\delta(x-x_0)$！

如上圖：波函數的值$\psi(x_0)$其實就是它自己ψ以此基底$\delta(x-x_0)$展開時的分量。

如同抽象的向量以分量值來代表，電子抽象的狀態也以分量、即波函數來代表。

最後，再將位置趨近連續分佈，因此求和都變成積分。

以抽象的狀態ψ來思考電子，與波函數$\psi(x)$是同一件事，但有時方便許多！

展開定理：任一狀態ψ可以u_n作展開。

$$\psi(x) = \sum_n [c_n \cdot u_n(x)] \quad \Rightarrow \quad \vec{\psi} = \sum_{m=1}^{l} c_m \hat{\imath}_m$$

正交定理：本徵函數彼此正交。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot u_m(x)^* \cdot u_n(x) = \delta_{mn} \quad \Rightarrow \quad \hat{\imath}_m \cdot \hat{\imath}_n = \delta_{mn}$$

分量c_a可以寫成態函數與本徵函數的空間積分:

$$c_n = \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot u_n(x)^* \cdot \psi(x) \quad \Rightarrow \quad c_m = \vec{\psi} \cdot \hat{\imath}_m$$

在這對應中，最關鍵的是：我們熟悉的積分，在這向量空間內就是內積：

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot \psi(x)^* \cdot \phi(x) \quad \Rightarrow \quad \vec{\psi} \cdot \vec{\phi}$$

兩個函數乘積的積分滿足線性代數中兩向量的內積的所有性質！

大膽引進一符號$\langle\psi,\phi\rangle$來表達兩個狀態函數ψ,ϕ的內積：

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot \psi(x)^* \cdot \phi(x) \equiv \langle\psi,\phi\rangle$$

這個內積在前換互換後，會變為複數共軛。

$$\langle\psi|\phi\rangle^* = \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot \psi^* \cdot \phi\right)^* \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot \phi^* \cdot \psi = \langle\phi|\psi\rangle$$

可見一個狀態函數ψ與自己的內積一定是實數，

$\langle\psi,\psi\rangle^* = \langle\psi,\psi\rangle$ 對應向量的長度平方。

這個內積可以用來書寫一個狀態函數ψ的歸一化條件：

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot \psi(x)^* \cdot \psi(x) \equiv \langle\psi,\psi\rangle = 1$$

ψ只能是單位向量！

用這一內積符號： $$\int_{-\infty}^{\infty} dx\cdot\psi(x)^*\cdot\phi(x)\equiv\langle\psi,\phi\rangle$$

如此u_n的正交定理可以簡化寫成：

$$\int_0^a dx\cdot u_n^*(x)u_m(x)=\delta_{mn} \quad \longrightarrow \quad \langle u_n,u_m\rangle=\delta_{mn}$$

函數展開的分量可以寫成 ：

$$c_n=\int_0^a dx\cdot u_n^*(x)\psi(x) \quad \longrightarrow \quad c_n=\langle u_n,\psi\rangle$$

u_n就是正交基底。

這是驚人的簡化，省去書寫積分的麻煩。

更重要、它揭露了量子狀態、即狀態函數的數學結構：有內積的向量空間。

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x)$$

$$\int_0^a dx \cdot u_n^*(x)\psi(x) = \int_0^a dx \cdot u_n^*(x)\left[\sum_{m=1}^{\infty}\right.$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} c_m \int_0^a dx \cdot u_n^*(x) u_m(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \quad \ldots \quad {}_n^*(x)\psi(x)$$

用新的符號推導展開係數，過程相同，卻極簡。而且與向量分析完全一致。

$$\langle u_n, \psi\rangle = \left\langle u_n, \sum_{m=1}^{\infty} c_m u_m(x)\right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_m \langle u_n, u_m\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_m \delta_{mn} = c_n$$

$$c_n = \langle u_n, \psi\rangle$$

期望值的書寫也可以用新的內積。

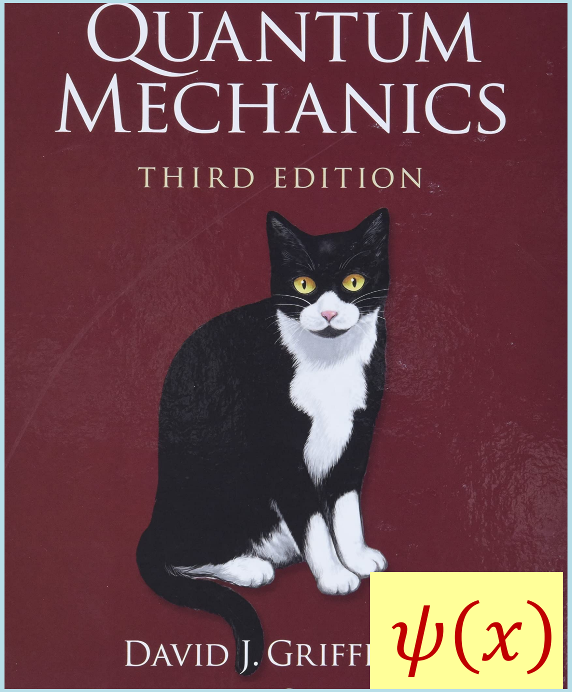
連期望值都可以寫成：

$$\langle A \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot \psi^*(x) \cdot \hat{A}\psi(x) \quad \longrightarrow \quad \langle A \rangle = \langle \psi, \hat{A}\psi \rangle$$

展開定理的證明與計算更簡單：

$$\langle H \rangle = \langle \psi, \widehat{H}\psi \rangle = \left\langle \psi, \widehat{H} \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n \right\rangle = \sum_{m=1}^{\infty} c_n \langle \psi, \widehat{H} u_n \rangle$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n E_n \langle \psi, u_m \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n E_n \langle u_n, \psi \rangle^* = \sum_n E_n c_n c_n^* = \sum_n E_n \cdot |c_n|^2$$



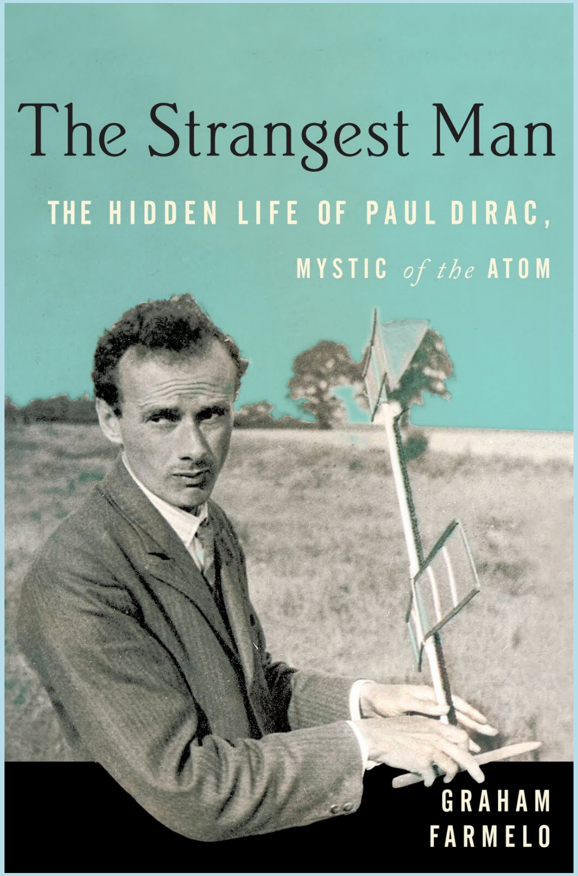
所有可能的量子狀態、即狀態函數組成的數學結構：

有內積的、無限維的向量空間。

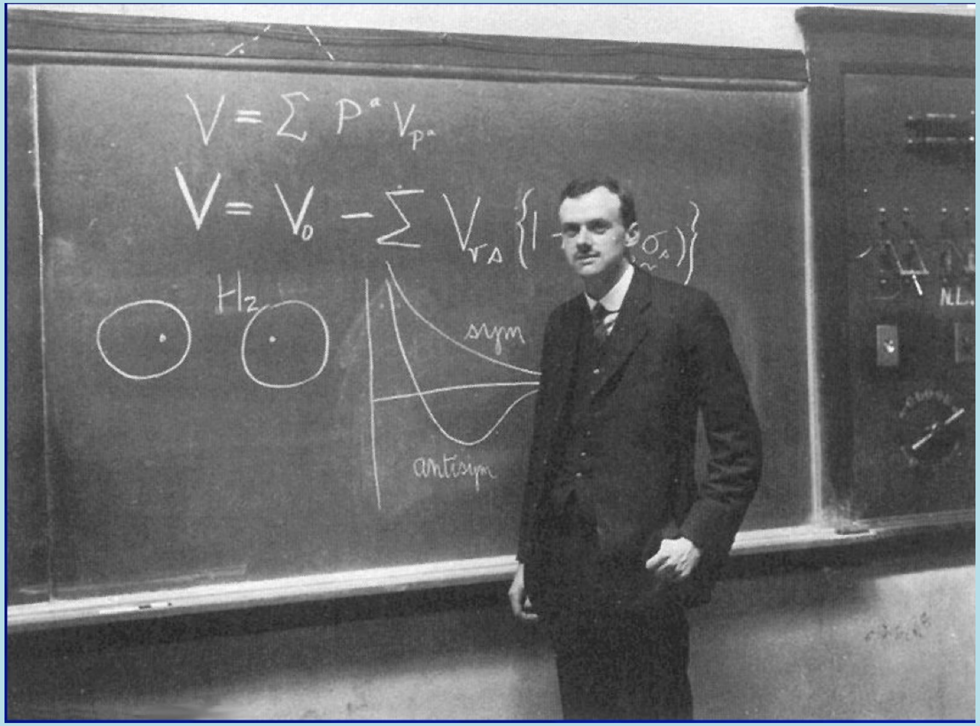
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot \phi(x)^* \cdot \psi(x) \equiv \langle \phi, \psi \rangle$$

狄拉克更進一步發明一系列的符號來使此數學結構更加突顯！

Paul Dirac 1902-1984




Scanned at the American
Institute of Physics


H2
sym
antisym

Dirac find it's possible for 4 by 4 matrices $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$

$$p^\mu p_\mu - m^2c^2 = (\gamma^\kappa p_\kappa + mc)(\gamma^\lambda p_\lambda - mc) = 0$$

Pick the first order factor: $\gamma^\mu p_\mu - mc = 0$

Make the replacement and put in the wave function:

$$p^\mu \to i\partial_\mu$$

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0$$ **(Dirac equation)**

If γ's are 4 by 4 matrices, *Ψ* must be a 4 component column:

$$i\left(\gamma^0 \frac{\partial \psi}{\partial t} + \gamma^i \frac{\partial \psi}{\partial x^i}\right) - m\psi = 0 \qquad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

Note that it consists of 4 Equations.

這個方程式是場方程式，而不是波方程式。

它描述相對論性的電子，預測電子是有自旋的。

This result is too beautiful to be false; it is more important to have beauty in one's equations than to have them fit experiment.

Dirac Notation

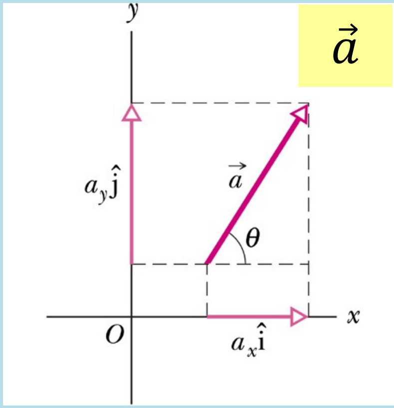
向量分析會以一個向量符號來代表一個向量，而不會直接寫出向量的分量。

我們也應該以一個抽象的符號來代表一個狀態，而無需寫出狀態函數。

狄拉克用來代表狀態的符號，是以內積為設計的核心。

內積是兩個狀態函數相乘的積分，

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot \phi(x)^* \cdot \psi(x) \equiv \langle \phi, \psi \rangle$$



狄拉克建議任意狀態函數$\psi(x)$，都用切開的內積符號的右半部來表示：

$\psi(x) \rightarrow |\psi\rangle$ 稱為Ket。

一般把ψ寫在ket符號內，來表示這是$\psi(x)$所對應的狀態！

接著你可能以為積分式內的$\phi(x)^*$就用同樣的符號$|\phi\rangle$表示，內積寫成$|\psi\rangle \cdot |\phi\rangle$。

但別忘了積分之中，左邊的函數要取複數共軛：左右有別。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot \phi(x)^* \cdot \psi(x) \equiv \langle \phi, | \psi \rangle$$

積分之中，左邊函數要取複數共軛：左右有別，左邊狀態要有不同的符號。

狄拉克建議可以切開的內積符號的左半部表示：

$\phi(x)^*$ ➡ $\langle \phi |$ 稱為Bra，線性代數術語稱為Co-vector或Dual。 $\vec{b}$

雖然也是來自狀態函數，Bra$\langle \phi |$ 開口向右，正好與開口向左的Ket $|\psi\rangle$準備對接。

當Bra與Ket合體成為一Bracket，即這兩個狀態的內積，符號就是：$\langle \psi | \phi \rangle$。

$\langle \phi |$ $|\psi\rangle$ ➡ $\langle \phi | \psi \rangle$ 為一個複數。 $\vec{a} \cdot \vec{b}$

這就是Bra與Ket符號設計的核心概念，一左一右才能非常自然地得到內積！

畢竟內積是一個狀態函數與一個狀態函數的複數共軛乘起來作積分。

例如兩個右方ket $|\psi\rangle|\phi\rangle$就不是內積，這是一個張量積。

但注意Bra$\langle \phi |$，是來自Ket$|\phi\rangle$所指涉的波函數的複數共軛，彼此有對應。

但別忘了兩個Ket的線性組合$c_1|\phi_1\rangle + c_2|\phi_2\rangle$對應的Bra $c_1^* \langle \phi_1 | + c_2^* \langle \phi_2 |$，

係數要取複數共軛，畢竟Bra本質上就是狀態函數的複數共軛。

這個抽象的內積，其實是函數乘積的積分：

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot \phi(x)^* \cdot \psi(x) \equiv \langle\phi|\psi\rangle$$

因此內積對右邊ket是線性。但對左邊bra是共軛線性。

$$\langle\psi|(c_1|\phi_1\rangle + \ c_2|\phi_2\rangle\ ) = c_1\langle\psi|\phi_1\rangle + c_2\langle\psi|\phi_2\rangle$$

$$(\langle c_1\psi_1| + \langle c_2\psi_2|)|\phi\rangle = c_1^*\langle\psi_1|\phi\rangle + c_2^*\langle\psi_2|\phi\rangle$$

一般內積與前後次序無關。

但內積前後次序對調後，會是對調前內積的複數共軛。

$$\langle\psi|\phi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot \psi^* \cdot \phi = \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot \phi^* \cdot \psi\right)^* = \langle\phi|\psi\rangle^*$$

物理量 → 算子 $\hat{A}$

算子$\hat{A}$是向量空間上的線性變換，將向量映射到向量。

矩陣

算子作用於一狀態，就得到向量空間上的另一狀態向量。 $\hat{T}\vec{A}$

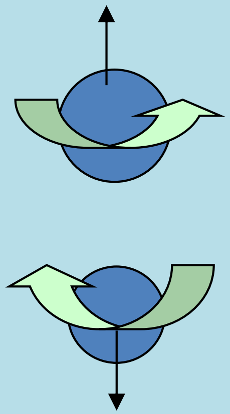
$\hat{A}\psi(x)$ → $\hat{A}|\psi\rangle \equiv |\hat{A}\psi\rangle$

如此測量期望值可以寫成：

$$\langle A\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\cdot\psi^*(x)\cdot\hat{A}\psi(x)$$

→ $|\hat{A}\psi\rangle$ 與 $\langle\psi|$ 的內積 $\langle\psi|\hat{A}\psi\rangle$

$\langle\hat{A}\rangle = \langle\psi|\hat{A}\psi\rangle$ 新的內積符號使期望值表示式非常簡潔！



$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

此定義可以推廣到不同態之間，而且寫成：

$$\langle\phi|\hat{A}\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\cdot\phi^*(x)\cdot\hat{A}\psi(x) \equiv \langle\phi|\hat{A}|\psi\rangle$$

未來會介紹古典沒有的電子自旋，它的狀態就不是位置波函數，而真是向量。

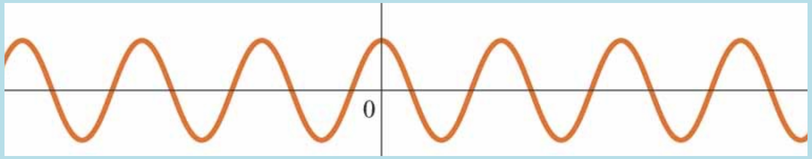
測量值確定的本徵態

$\hat{A}\psi_a(x) = a\psi_a(x)$ ➡ $\hat{A}|\psi_a\rangle = a|\psi_a\rangle$

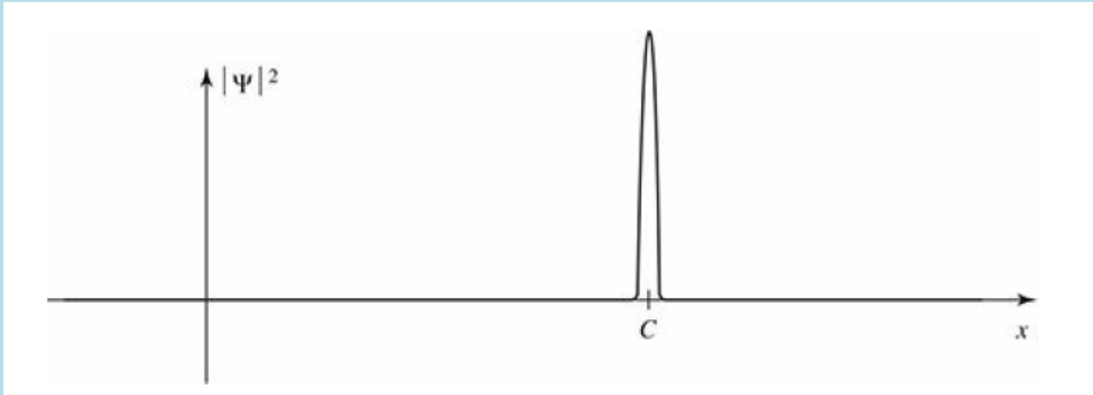
有時會把本徵值寫在ket符號內，來標定本徵態。 $|\psi_a\rangle \to |a\rangle$ $\hat{A}|a\rangle = a|a\rangle$

例如：動量的本徵態

$$u_{p_0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i\frac{p_0}{\hbar}x}$$ ➡ $|p_0\rangle$



$\hat{p}|p_0\rangle = p_0|p_0\rangle$



位置的本徵態

$\delta(x - x_0)$ ➡ $|x_0\rangle$

$\hat{x}|x_0\rangle = x_0|x_0\rangle$

能量的本徵態，定態：$\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$

任一狀態$|\psi\rangle$可以以所有$|a\rangle$組成的基底展開，分量c_a等於：$c_a = \langle\psi_a, \psi\rangle \equiv \langle a|\psi\rangle$

$$|\psi\rangle = \sum_a c_a|a\rangle = \sum_a \langle a|\psi\rangle|a\rangle = \sum_a |a\rangle\langle a|\psi\rangle$$

Adjoint算子

$\hat{A}$ 對應的矩陣元：

$$\langle\phi|\hat{A}\psi\rangle \equiv \langle\phi|\hat{A}|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\cdot\phi^*(x)\cdot\hat{A}\psi(x)$$

似乎很多時候算子可以看成作用在Bra上，例如$\hat{x}$算子：

$$\langle\phi|\hat{x}\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\cdot\phi(x)^*[x\psi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} dx\cdot[x\phi]^*\psi \equiv \langle\hat{x}\phi|\psi\rangle$$

$\hat{p}$算子也是：

$$\langle\phi|\hat{p}\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\cdot\phi(x)^*\cdot i\hbar\frac{d\psi(x)}{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} dx\cdot\left[i\hbar\frac{d\phi(x)}{dx}\right]^*\psi(x) \equiv \langle\hat{p}\phi|\psi\rangle$$

具有這樣性質的算子稱為Hermitian：

$$\langle\phi|\hat{A}\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\cdot\phi(x)^*[\hat{A}\psi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} dx\cdot[\hat{A}\phi]^*\psi \equiv \langle\hat{A}\phi|\psi\rangle$$

$$\langle \phi | \hat{A}\psi \rangle = \langle \hat{A}\phi | \psi \rangle$$

Hermitian算子的期望值永遠是實數!

$$\langle \hat{A} \rangle^* = \langle \psi | \hat{A}\psi \rangle^* = \langle \hat{A}\psi | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{A}\psi \rangle = \langle \hat{A} \rangle$$

大膽推測：可測量的物理量都由 Hermitian算子代表！

本徵值就是本徵態的期望值，Hermitian算子的期望值是實數！

因此Hermitian算子的本徵值必是實數。

一般來說，算子不一定是Hermitian。

$$\langle\phi|\hat{A}\psi\rangle \equiv \langle\phi|\hat{A}|\psi\rangle$$

這個內積，也可以表示為$|\psi\rangle$，與ϕ經過某個線性變換後的態$\hat{A}^\dagger\phi$的內積：

$$\langle\phi|\hat{A}|\psi\rangle \equiv \langle\phi|\hat{A}\psi\rangle = \left(\langle\hat{A}^\dagger\phi|\right)\cdot|\psi\rangle$$

$\langle\hat{A}^\dagger\phi|$是Ket$|\hat{A}^\dagger\phi\rangle$對應的Bra。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\cdot\phi(x)^*\left[\hat{A}\psi(x)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} dx\cdot\left[\hat{A}^\dagger\phi(x)\right]^*\psi(x)$$

以上就是$\hat{A}^\dagger$的定義，稱為$\hat{A}$的Adjoint算子。 若是矩陣：$\widehat{M}^\dagger = \widehat{M}^{T*}$

$\hat{A}^\dagger$的Adjoint就是$\hat{A}$。 $(\hat{A}^\dagger)^\dagger = \hat{A}$

因此Hermitian算子的定義，就是它與它的Adjoint算子相等！

$$\hat{A}^\dagger = \hat{A}$$

$\hat{p}^\dagger = \hat{p}$ $\hat{x}^\dagger = \hat{x}$ $\widehat{H}^\dagger = \widehat{H}$

量子力學原則以狄拉克符號表示的完整版

某一個時刻的狀態 ⟶ 狀態單位向量 $|\psi\rangle$

隨時間變化的狀態 ⟶ 隨時間演化的向量 $|\psi(t)\rangle$

物理量測量 ⟶ Hermitian算子 $\hat{A}$

有古典對應的物理量，就直接將位置算子及動量算子代入同樣的數學形式：

$$f(x,p) \to \hat{f}\left(x, -i\hbar\frac{d}{dx}\right) \equiv f(\hat{x},\hat{p})$$

就得到量子力學對應的算子。

$$\langle A\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$$

把對應算子放入此式就可得到測量期望值。

$$\hat{A}|\psi_a\rangle = a|\psi_a\rangle$$

對一物理量$\hat{A}$測量，結果完全確定的狀態，
就是該物理量對應算子$\hat{A}$的本徵函數$|\psi_a\rangle$，本徵值a就是測量結果。

$$\hat{H}|\psi(t)\rangle = i\hbar\frac{\partial|\psi(t)\rangle}{\partial t}$$

狀態向量隨時間的演化由漢米爾頓量算子來負責！

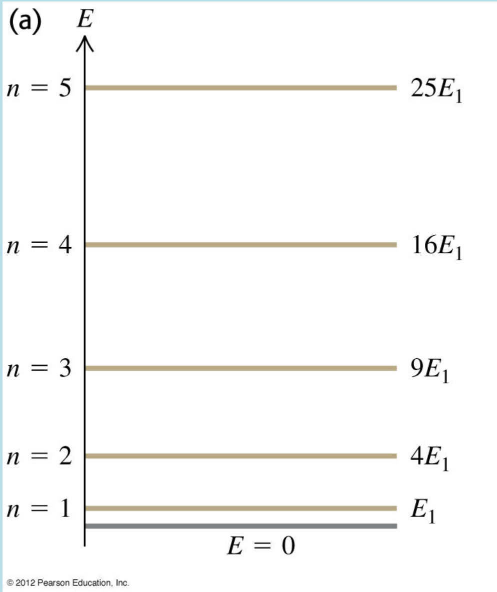
$\psi(x)$ $|\psi\rangle$

$\hat{\mathcal{A}}$

不同的狀態下，機率的分佈不同！
但可能的結果卻一樣！

$|c_n|^2, n = 1,2,3 \cdots$

測量、算子是很有個性的！
由它的本徵值來決定測量的結果有哪些可能！



算子有它的堅持！

$\psi(x)$ ➡ $|\psi\rangle$

狄拉克符號用抽象的符號，來對待量子狀態，獨立於基底、也就適用於任何基底。

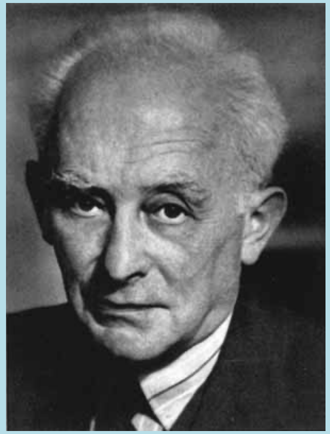
相對的，波函數是分量，因此是依賴於$\delta(x - x_0)$組成的基底。

那我們是否也可以用狄拉克符號，”獨立於基底”，直接探討代表量子測量的算子？

$\hat{\mathcal{A}}$ Operator 算子的方法

我們會發現算子彼此的關係，竟會直接決定它們的本徵值！

算子與數最大不同是沒有交換性。。



位置與動量就不能對易 Commute！ $\hat{x}\cdot\hat{p}\neq\hat{p}\cdot\hat{x}$

讓我們選擇在$|x\rangle$基底來計算 $\hat{x}\cdot\hat{p}-\hat{p}\cdot\hat{x}$：

$$(\hat{x}\cdot\hat{p}-\hat{p}\cdot\hat{x})\psi(x)=-i\hbar x\frac{d\psi}{dx}-\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)[x\cdot\psi(x)]=i\hbar\psi$$

這個結果對任意狀態$\psi(x)$都對。因此是一個算子的等式！

定義Commutator 對易子 $\left[\hat{A},\hat{B}\right]\equiv\hat{A}\cdot\hat{B}-\hat{B}\cdot\hat{A}$

$\hat{x}\cdot\hat{p}-\hat{p}\cdot\hat{x}\equiv[\hat{x},\hat{p}]=i\hbar$ 位置與動量的對易算子是常數算子。這很特別。

$[\hat{x},\hat{p}]=i\hbar$ 量子化條件，Quantization Condition 標誌古典與量子化的不同！

你也可以由此量子化條件出發，推導出動量算子在$|x\rangle$基底，等同位置微分：

兩者邏輯上等價。

是否可以用”獨立於基底”的方式，直接探討算子的關係？

意思就是可否以量子化條件取代動量是空間微分，來進行推導？

$$\hat{p}=-i\hbar\frac{d}{dx}\quad\longrightarrow\quad[\hat{x},\hat{p}]=i\hbar$$

$$[\hat{x},\hat{p}]=i\hbar$$

由這個量子化條件可以推導出測不準原理： $\Delta x\cdot\Delta p\geq\hbar$

有了量子化條件，所有粒子運動的量子力學，都能推導出來。

我們將以量子彈簧的能階作例子來說明！

原則上所有由$\hat{x},\hat{p}$組成的物理量算子的對易子，都可以由此導出。

幾個有用的公式：

$$[A,B]=-[B,A]$$

$$[A+B,C]=[A,C]+[B,C]$$

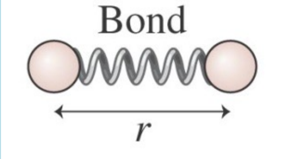
$$[A,BC]=[A,B]C+B[A,C]$$

$$[AB,C]=A[B,C]+[A,C]B$$

$$[AB,C]=ABC-CAB=ABC-ACB+ACB-CAB=A[B,C]+[A,C]B$$

簡諧振盪器、量子彈簧、古典完全是束縛態，預期定態能量完全量子化。

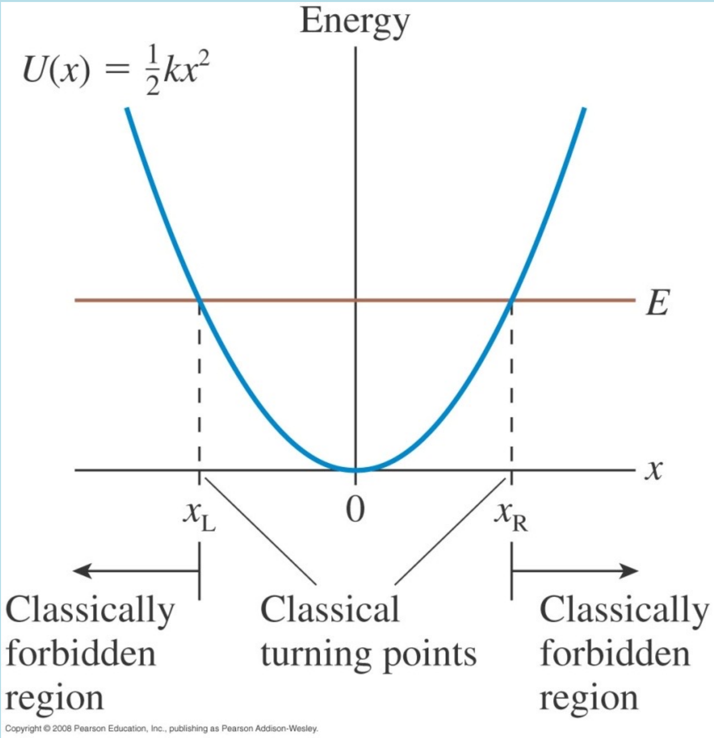
$$\frac{d^2\psi_E}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2}\left(\frac{1}{2}kx^2 - E\right)\psi_E$$

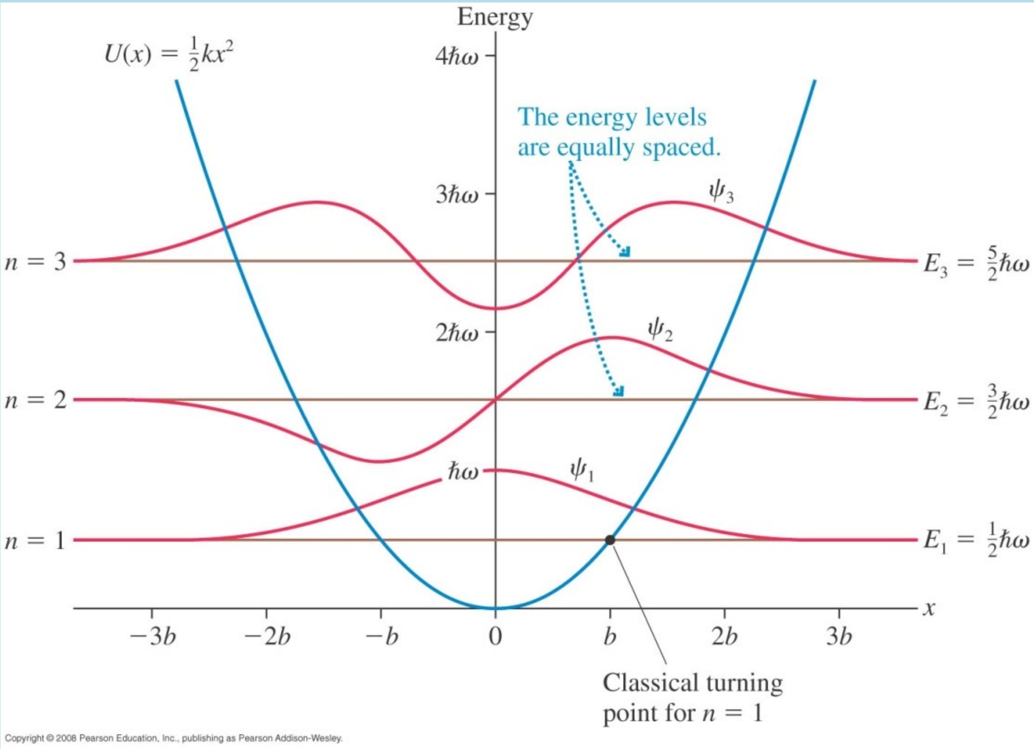


這是一個二次常微分方程式，可以求解。只有某些E會有解！

$$E_n = \left(n - \frac{1}{1}\right)\hbar\omega$$

Energy is quantized



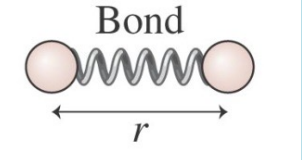


現在我們用算子的辦法來探討量子彈簧能量的本徵值！

Quantum SHO 量子彈簧

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$$



現在引入量子化條件 Quantization Condition：

$$[x, p] = i\hbar$$

量子化條件 Quantization Condition： $[x,p]=i\hbar$

現在引入一組位置與動量的線性組合：新的算子a及他的共軛$a^\dagger$：

$$a=\frac{\sqrt{m\omega}x+i\sqrt{\frac{1}{m\omega}}p}{\sqrt{2\hbar}}$$

$$a^\dagger=\frac{\sqrt{m\omega}x-i\sqrt{\frac{1}{m\omega}}p}{\sqrt{2\hbar}}$$

此兩算子古典意義不大，量子意義則很清楚！

首先量子化條件會給出算子a及共軛$a^\dagger$的對易關係 Communication Relation：

$$[a,a^\dagger]=\frac{1}{2\hbar}\left[\sqrt{m\omega}x+i\sqrt{\frac{1}{m\omega}}p,\sqrt{m\omega}x-i\sqrt{\frac{1}{m\omega}}p\right]=$$

$$[A+B,C]=[A,C]+[B,C]$$

$$=\frac{1}{2\hbar}\left\{m\omega[x,x]+i[p,x]-i[x,p]+\frac{1}{m\omega}[p,p]\right\}=\frac{1}{2\hbar}2\hbar=1$$

$$[a,a^\dagger]=1$$

$$[a, a^\dagger] = 1$$

將 Hamiltonian 以a算子來表示：

$$a = \frac{\sqrt{m\omega}x + i\sqrt{\frac{1}{m\omega}}p}{\sqrt{2\hbar}}$$

$$a^\dagger = \frac{\sqrt{m\omega}x - i\sqrt{\frac{1}{m\omega}}p}{\sqrt{2\hbar}}$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$$

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger)$$

$$p = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(a - a^\dagger)$$

$$H = \frac{1}{4}\hbar\omega\left[-(a - a^\dagger)^2 + (a + a^\dagger)^2\right] = \frac{1}{2}\hbar\omega(a^\dagger a + aa^\dagger) = \frac{1}{2}\hbar\omega(a^\dagger a + a^\dagger a + [a,a^\dagger])$$

$$H = \hbar\omega a^\dagger a + \frac{\hbar\omega}{2}$$

由算子a及共軛$a^\dagger$的對易關係可以得出算子H與a及$a^\dagger$的對易關係

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$$

$$[H, a^\dagger] = \hbar\omega[a^\dagger a, a^\dagger] = \hbar\omega\{a^\dagger[a, a^\dagger] + [a^\dagger, a^\dagger]a\} = \hbar\omega a^\dagger$$

$$[H, a^\dagger] = \hbar\omega a^\dagger$$

$$[H, a\,] = -\hbar\omega a$$

$$[H, a^\dagger] = Ha^\dagger - a^\dagger H = \hbar\omega a^\dagger \qquad [H, a\,] = -\hbar\omega a$$

現在將共軛算子$a^\dagger$作用在算子H的一個本徵態上:$a^\dagger|E\rangle$ $\qquad H|E\rangle = E|E\rangle$

$$Ha^\dagger|E\rangle = [H, a^\dagger]|E\rangle + a^\dagger H|E\rangle = \hbar\omega a^\dagger|E\rangle + Ea^\dagger|E\rangle = (E + \hbar\omega)a^\dagger|E\rangle$$

$$H\, a^\dagger|E\rangle = (E + \hbar\omega)\, a^\dagger|E\rangle$$

因此$a^\dagger|E\rangle$也是算子H的一個本徵態，其本徵值是$E + \hbar\omega$。

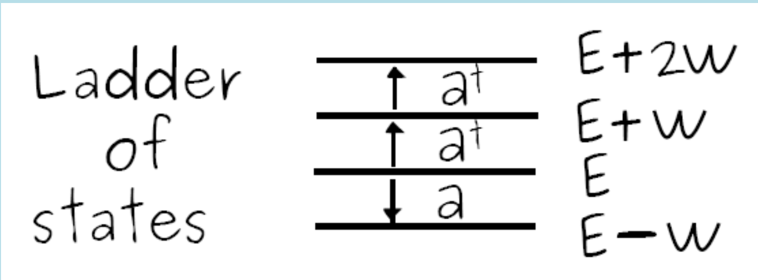
$a^\dagger$算子可以提高能量 by $\hbar\omega$.

如果是算子a作用在算子H的一個本徵態$|E\rangle$

$$H\, a|E\rangle = (E - \hbar\omega)\, a|E\rangle$$

因此$a|E\rangle$也是算子H的一個本徵態，其本徵值是$E - \hbar\omega$。

a 算子可以降低能量 by $\hbar\omega$.



$a^\dagger$ is called Raising Operator while a Lowering Operator.

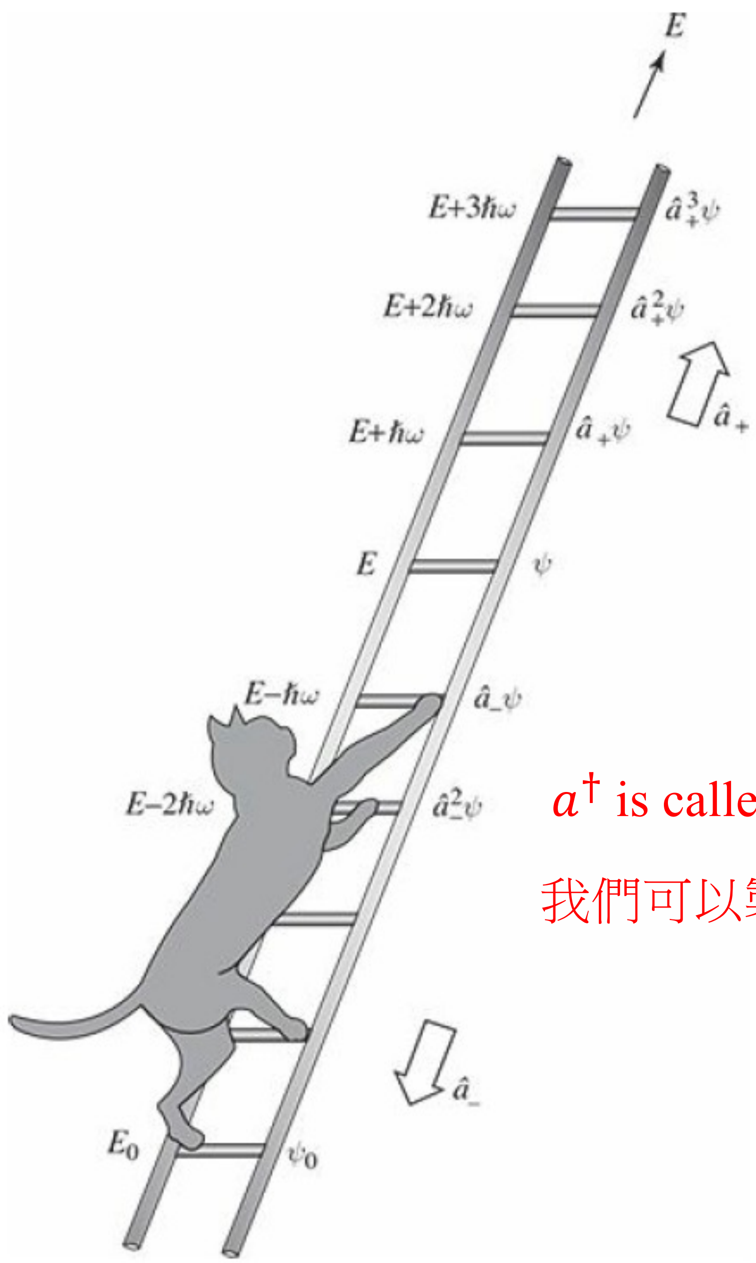


Figure 2.5: The “ladder” of states for the harmonic oscillator.

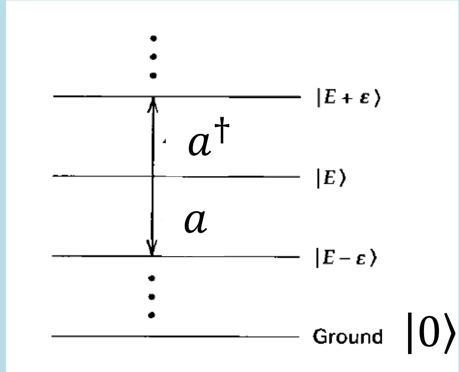
$a^{\dagger}$ is called Raising Operator while a Lowering Operator.

我們可以製造出一個各個能量差為$\hbar\omega$的一系列狀態。

量子彈簧能量是量子化的！

連續使用a降低能量，最後須有停止之處，將此態記$|0\rangle$：

要停止製造出更低能量的態，條件是：$\hat{a}|0\rangle = 0$



此態$|0\rangle$的能量：$H|0\rangle = \left(\hbar\omega a^\dagger a + \frac{\hbar\omega}{2}\right)|0\rangle = \frac{\hbar\omega}{2}|0\rangle$

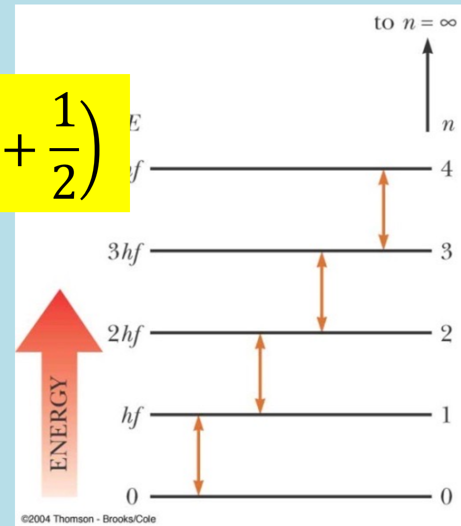
這個本徵值為$\frac{\hbar\omega}{2}$的能量本徵態，能量最低，就稱為基態 Ground State！

將$a^\dagger$連續作用在基態$|0\rangle$上，就得到一系列量子彈簧的能態：

$a^\dagger|0\rangle \sim |1\rangle$ $\quad H|1\rangle = \left(1+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega \cdot |1\rangle$

$\left(a^\dagger\right)^n|0\rangle \sim |n\rangle$ 能態依次數n編號，量子數n是能量子數目：

$H|n\rangle = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega \cdot |n\rangle = \left(\hbar\omega a^\dagger a + \frac{\hbar\omega}{2}\right)|n\rangle$ $\quad E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$



可以定義$a^\dagger a$為能量子數算子N：$N|n\rangle = a^\dagger a|n\rangle = n|n\rangle$

$N|0\rangle = a^\dagger a|0\rangle = 0|0\rangle$

$(a^\dagger)^n|0\rangle \sim |n\rangle$ 只定義$|n\rangle$到可以自由乘上一個係數。

選擇此係數將這些能量本徵態歸一： $\langle n|n\rangle = 1 \;\; \forall\, n$

$a^\dagger|n\rangle \propto |n+1\rangle$ 設係數為c_n： $a^\dagger|n\rangle = c_n|n+1\rangle$

取此態與自己的內積：

$$\langle n|(a^\dagger)^\dagger \cdot a^\dagger\,|n\rangle = \langle n|aa^\dagger|n\rangle = \langle n|a^\dagger a|n\rangle + \langle n|n\rangle = n+1$$

$$|c_n|^2 \cdot \langle n+1|n+1\rangle = |c_n|^2$$

$$[a, a^\dagger] = aa^\dagger - a^\dagger a = 1$$

$$c_n = \sqrt{n+1}$$

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\cdot|n+1\rangle$$

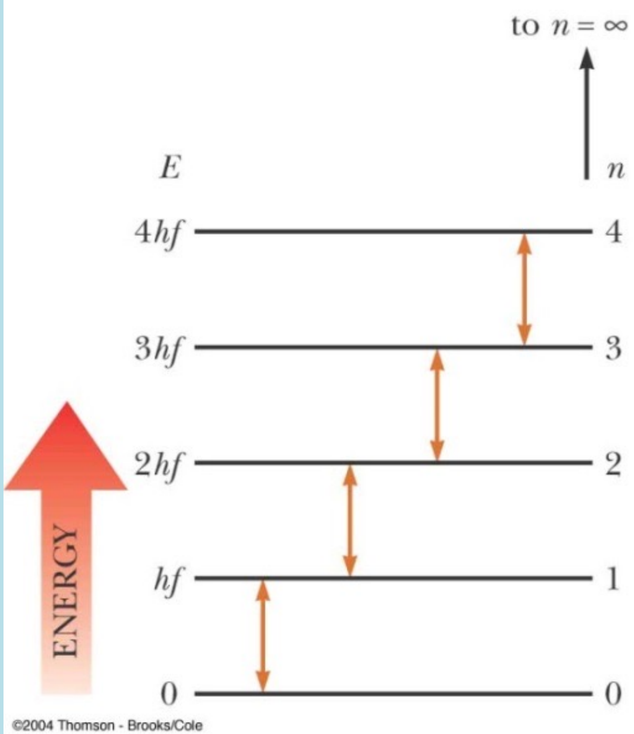
$$|n+1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}}a^\dagger|n\rangle$$

利用類似的方法：

$$a|n\rangle = \sqrt{n}\cdot|n-1\rangle$$

$$|n-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}a|n\rangle$$

有了此二式，所有量子彈簧問題都可以解出！



$$|n+1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}} a^\dagger |n\rangle$$

第一激發態可以由基態以$a^\dagger$製造出來！

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{1}} a^\dagger |0\rangle$$

第二激發態又由第一激發態以$a^\dagger$製造出來！

$$|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} a^\dagger |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2!}} a^\dagger a^\dagger |0\rangle$$

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(a^\dagger\right)^n |0\rangle$$

SHM的整個量子空間就被定義為以這些能量本徵態為基底所展開的空間！

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

Exercise :計算在能量本徵態$|n\rangle$，位置q及動量π的期望值。

$$\langle n|q|n\rangle$$

提示：$a|n\rangle = \sqrt{n}\cdot|n-1\rangle$

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\cdot|n+1\rangle$$

$$q = \sqrt{\hbar}\frac{a+a^\dagger}{\sqrt{2}}$$

$$\langle n|q|n\rangle = \frac{\sqrt{\hbar}}{\sqrt{2}}\langle n|\left(a+a^\dagger\right)|n\rangle = \frac{\sqrt{\hbar}}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{n}\langle n|n-1\rangle + \sqrt{n+1}\langle n|n+1\rangle\right) = 0$$

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a+a^\dagger\right)$$

$$p = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\left(a-a^\dagger\right)$$

Exercise :計算在能量本徵態$|n\rangle$，位能$\frac{1}{2}\omega q^2$及動能$\frac{1}{2}\omega p^2$的期望值。

$$\left\langle n\left|\frac{1}{2}\omega q^2\right|n\right\rangle$$

提示：$a|n\rangle = \sqrt{n}\cdot|n-1\rangle$

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\cdot|n+1\rangle$$

$$q = \sqrt{\hbar}\frac{a+a^\dagger}{\sqrt{2}}$$

$$\left\langle n\left|\frac{1}{2}\omega q^2\right|n\right\rangle = \frac{\omega}{2}\frac{\hbar}{2}\langle n|(a+a^\dagger)(a+a^\dagger)|n\rangle = \frac{\omega}{2}\frac{\hbar}{2}\langle n|(aa+aa^\dagger+a^\dagger a+a^\dagger a^\dagger)|n\rangle$$

$$= \frac{\omega}{2}\frac{\hbar}{2}\langle n|(aa^\dagger+a^\dagger a)|n\rangle = \frac{\hbar\omega}{4}\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}\langle n|n\rangle + \frac{\hbar\omega}{4}\sqrt{n}\sqrt{n}\langle n|n\rangle = \frac{\hbar\omega}{4}(2n+1)$$

注意最低能態的基態，位能與動能的期望值都不為零。

古典的基態是靜止於平衡點。能量為零。

$$\left\langle 0\left|\frac{1}{2}\omega q^2\right|0\right\rangle = \frac{1}{4}\hbar\omega$$

連續使用 a 降低能量，必須有停止之處$|0\rangle$，滿足以下條件： $a|0\rangle = 0$

符合此條件的態只能有一個。真的嗎？

求解基態的波函數 $\psi_0(x)$： $\psi_0(x) = \langle x|0\rangle$

$q \equiv \sqrt{m\omega}x$

我們還可以由此寫下其他本徵態的波函數 $\psi_n(x)$：

$$\pi \equiv \sqrt{\frac{1}{m\omega}}p$$

$a|0\rangle = 0$

$$(q + i\pi)|0\rangle = \left(\sqrt{m\omega}x + i\sqrt{\frac{1}{m\omega}}p\right)|0\rangle = \sqrt{m\omega}\cdot x|0\rangle + i\sqrt{\frac{1}{m\omega}}\cdot p|0\rangle = 0$$

我們可以選擇在位置空間中，以波函數來寫這個條件：

第一項是ket $\hat{x}|0\rangle$， $\hat{x}$ 算子作用於基態，波函數就等於$x\psi_0$。

第二項是ket $\hat{p}|0\rangle$的波函數，因此等於$-i\hbar\frac{d}{dx}\psi_0$。因此條件可以寫成：

$$\sqrt{m\omega}x\psi_0(x) + \hbar\sqrt{\frac{1}{m\omega}}\frac{d}{dx}\psi_0(x) = 0$$

$\psi_0(x) = \langle x|0\rangle$

$a|0\rangle = 0$

$q \equiv \sqrt{m\omega}x$

$$\langle x|a|0\rangle \propto \langle x|(q + i\pi)|0\rangle = \left\langle x\middle|\left(\sqrt{m\omega}x + i\sqrt{\frac{1}{m\omega}}p\right)\middle|0\right\rangle = 0$$

$\pi \equiv \sqrt{\frac{1}{m\omega}}p$

$$\sqrt{m\omega}\langle x|x|0\rangle + i\sqrt{\frac{1}{m\omega}}\langle x|p|0\rangle = 0$$

第一項是ket $\hat{x}|0\rangle$， $\hat{x}$ 算子作用於基態，的波函數，等於$x\psi_0 = x\langle x|0\rangle$。

第二項是ket $\hat{p}|0\rangle$的波函數，因此等於$-i\hbar\frac{d}{dx}\psi_0 = -i\hbar\frac{d}{dx}\langle x|0\rangle$。

計算$\hat{p}|\psi\rangle$的波函數：$\langle x|\hat{p}|\psi\rangle$

$$\langle x|\hat{p}|\psi\rangle = \int dp \cdot \langle x|\hat{p}|p\rangle\langle p|\psi\rangle$$

插入一$|p\rangle$組成的總投影算子！

$$= \int dp \cdot p\langle x|p\rangle\langle p|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int dp \cdot pe^{i\frac{p}{\hbar}x}\langle p|\psi\rangle$$

$$= -i\hbar\frac{d}{dx}\int dp \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{i\frac{p}{\hbar}x}\langle p|\psi\rangle = -i\hbar\frac{d}{dx}\int dp \cdot \langle x|p\rangle\langle p|\psi\rangle$$

$$= -i\hbar\frac{d}{dx}\langle x|\psi\rangle$$

$$\langle x|\hat{p}|\psi\rangle = -i\hbar\frac{d}{dx}\langle x|\psi\rangle$$

$\hat{p}|\psi\rangle$的波函數就是$|\psi\rangle$的波函數的微分。

$$\langle x|\hat{p}|0\rangle = -i\hbar\frac{d}{dx}\langle x|0\rangle$$

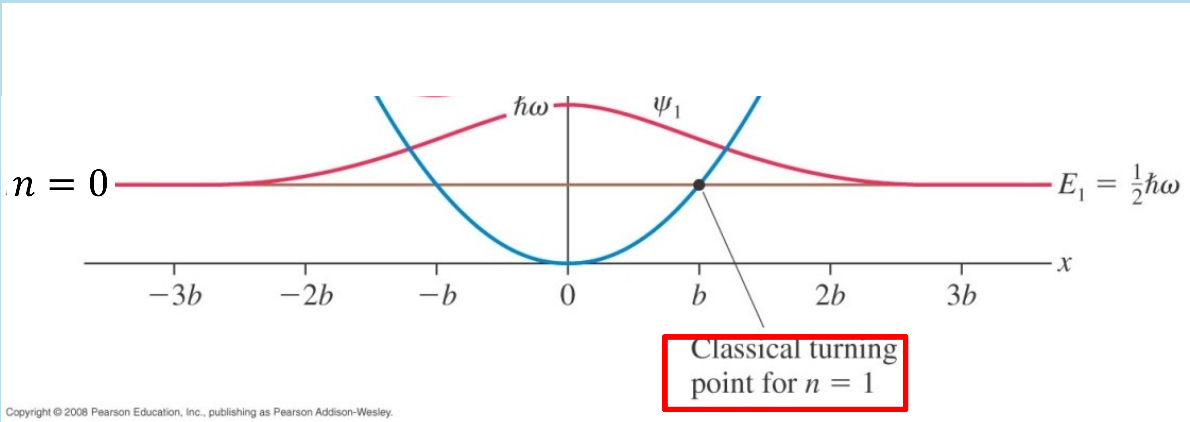
基態的波函數$\psi_0(x)$滿足：

$$\sqrt{m\omega}x\psi_0(x) + \hbar\sqrt{\frac{1}{m\omega}}\frac{d}{dx}\psi_0(x) = 0$$

$$\hbar\frac{d}{dx}\psi_0(x) + m\omega x\psi_0(x) = 0 \qquad \text{6-54}$$

$$\psi_0(x) = Ce^{-m\omega x^2/2\hbar}$$

基態波函數成波包狀，但不移動。

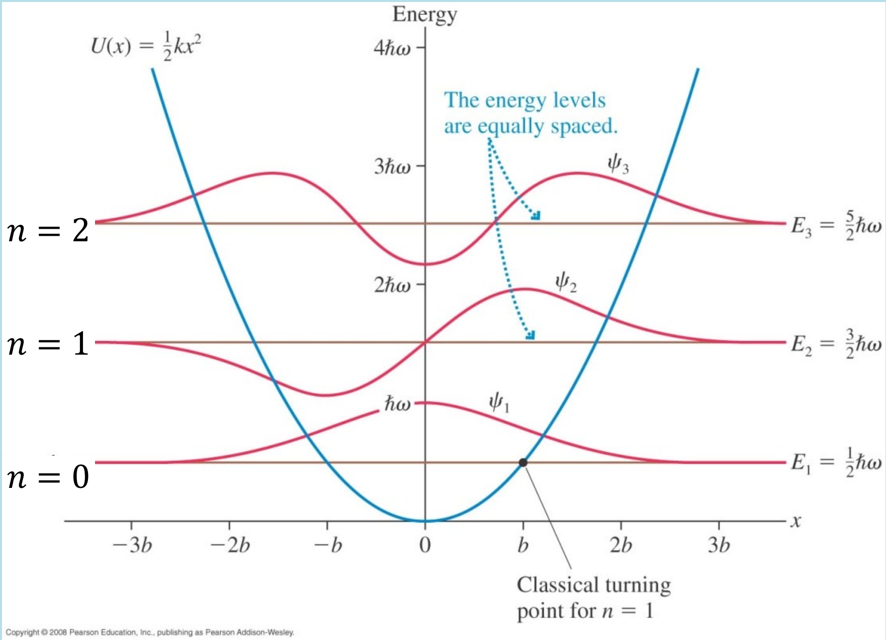


注意波函數超過了古典的Turning Point。

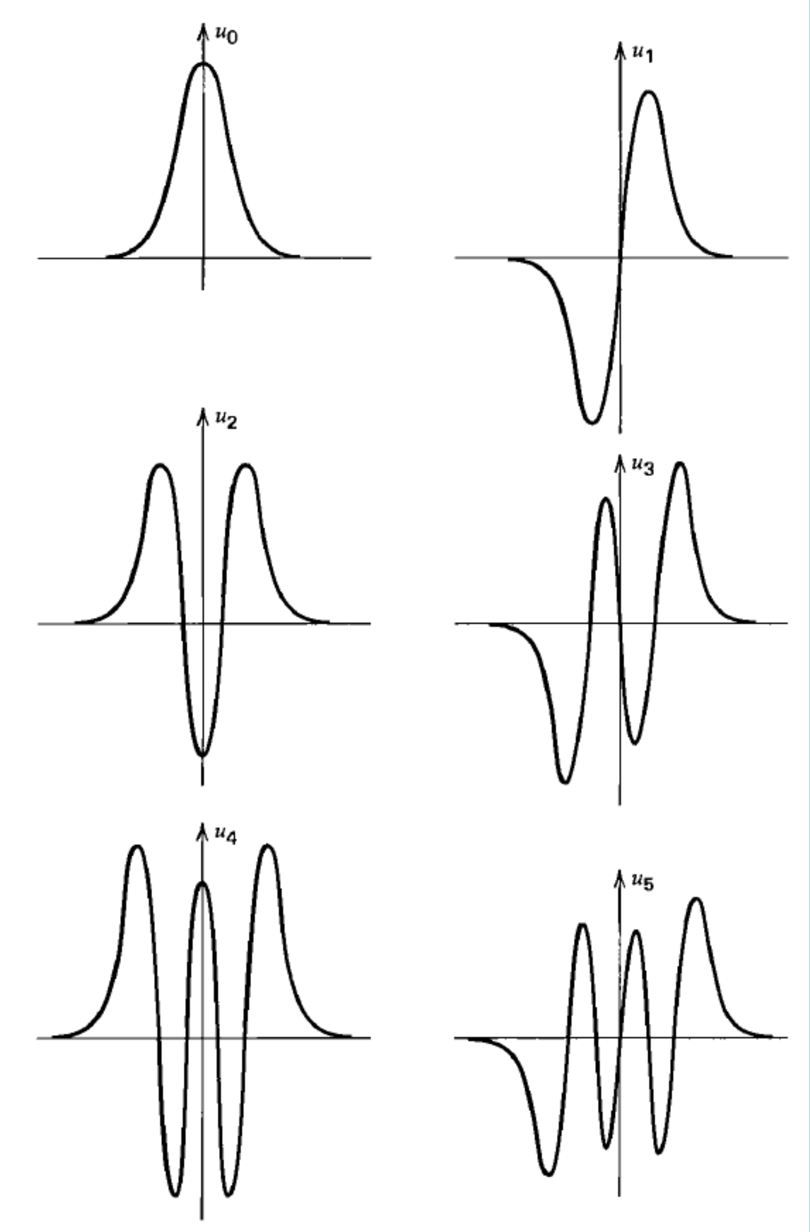
我們還可以由此寫下其他本徵態的狀態函數 $\psi_n(x)$：

$$\psi_1(x) = \langle x|1\rangle = \langle x|\frac{1}{\sqrt{1!}}a^\dagger|0\rangle$$

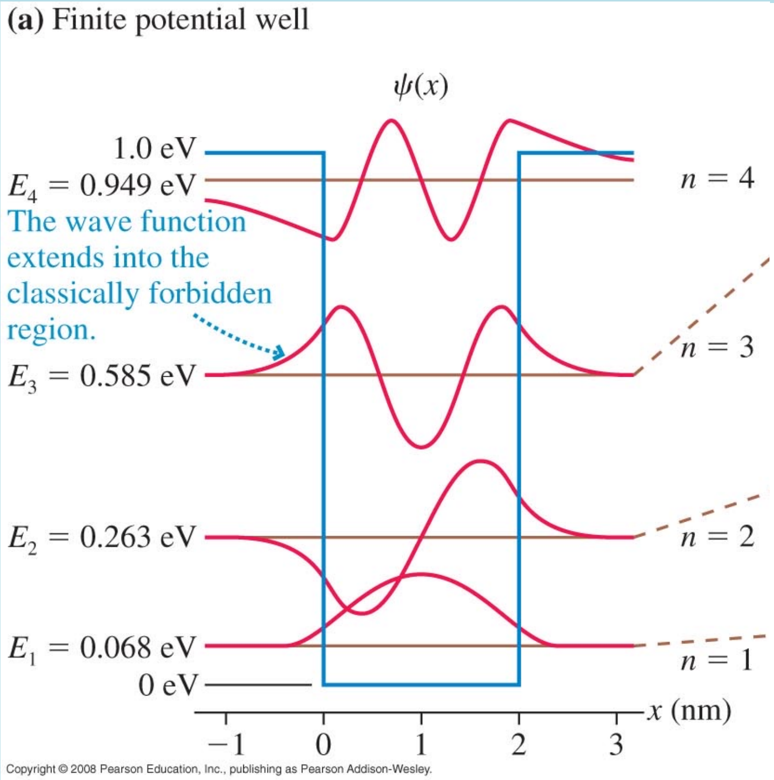
$$\frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\langle x|(q - i\pi)|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\sqrt{m\omega}x - \hbar\sqrt{\frac{1}{m\omega}}\frac{d}{dx}\right)\psi_0(x)$$

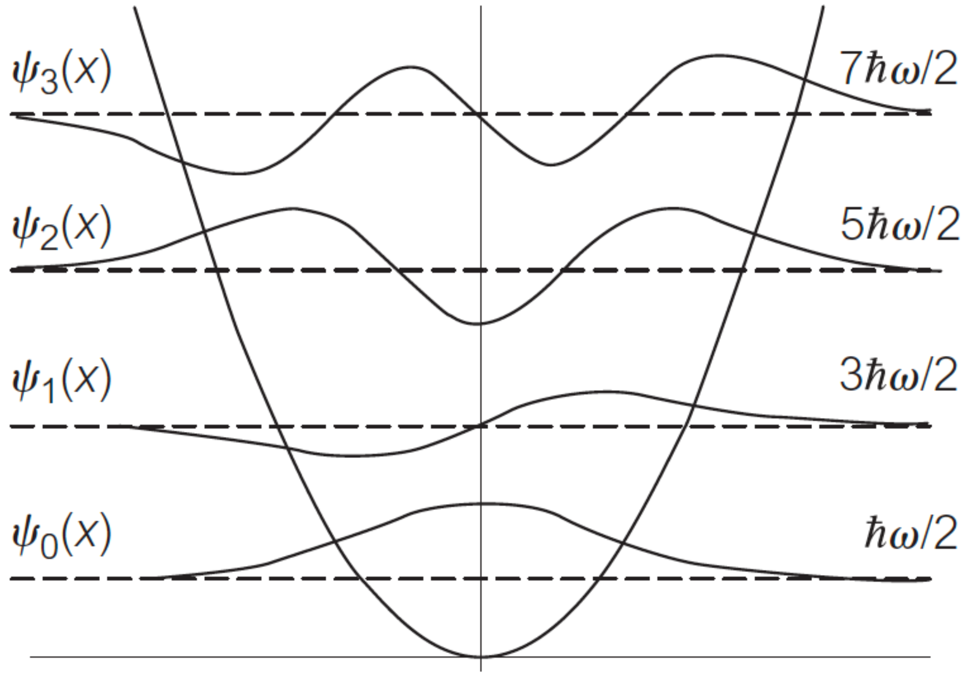


$$\psi_n(x) = \langle x|n\rangle = \langle x|\frac{1}{\sqrt{n!}}\left(a^\dagger\right)^n|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\right)^n\left(\sqrt{m\omega}x - \hbar\sqrt{\frac{1}{m\omega}}\frac{d}{dx}\right)^n\psi_0(x)$$



u_0
u_1
u_2
u_3
u_4
u_5





定性上，SHM與位能井類似。

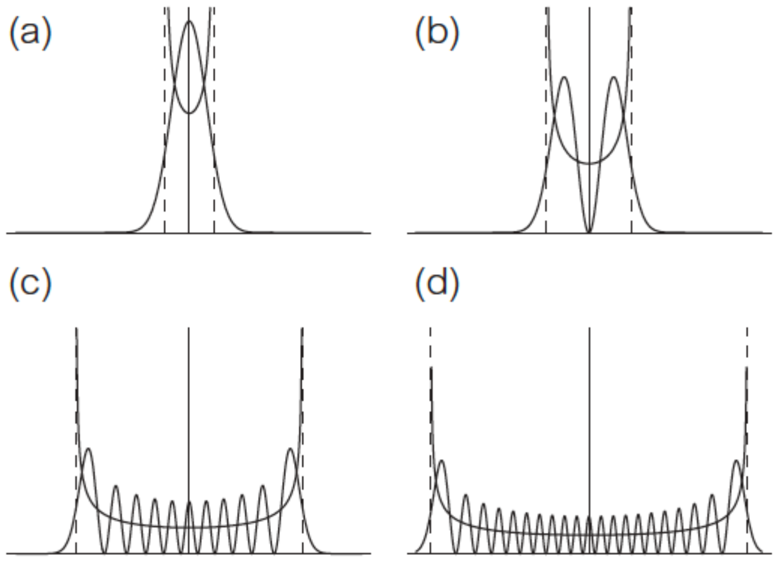


Figure 9.7. Classical (smooth, diverging curves) versus quantum probability distributions (oscillatory curves) for (a) $n = 0$, (b) $n = 1$, (c) $n = 10$, and (d) $n = 20$. The vertical dashed lines are turning points for the classical motion.

4. Prove that if $f(A^+)$ is any polynomial in A^+, then

$$Af(A^+)|0\rangle = \frac{df(A^+)}{dA^+}|0\rangle$$

[*Hint:* See Eq. (6-47).]

$$af(a^\dagger)|0\rangle = \frac{df(a^\dagger)}{da^\dagger}|0\rangle$$

$$aa^{\dagger n}|0\rangle = aa^\dagger a^\dagger \cdots a^\dagger|0\rangle = a^\dagger a a^\dagger \cdots a^\dagger|0\rangle + [a, a^\dagger]a^\dagger \cdots a^\dagger|0\rangle$$

$$= a^\dagger a a^\dagger \cdots a^\dagger|0\rangle + 1 \cdot a^\dagger \cdots a^\dagger|0\rangle$$

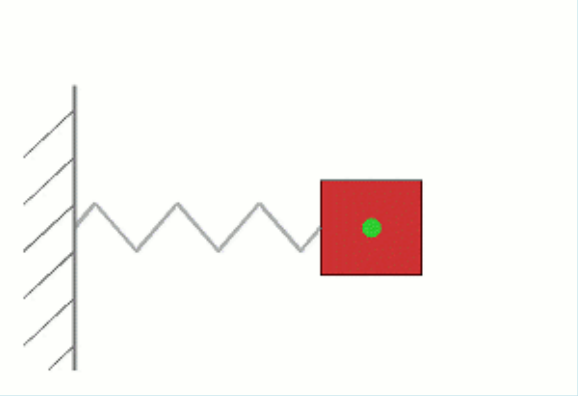
$$= a^\dagger a^\dagger a \cdots a^\dagger|0\rangle + a^\dagger[a, a^\dagger] \cdots a^\dagger|0\rangle + a^\dagger \cdots a^\dagger|0\rangle$$

$$\cdots = a^\dagger a^\dagger \cdots a^\dagger a|0\rangle + na^\dagger \cdots a^\dagger|0\rangle = na^\dagger \cdots a^\dagger|0\rangle = \frac{da^{\dagger n}}{da^\dagger}|0\rangle$$

此式對單項式成立，對單項式線性疊加的多項式自然也對，

指數$e^{\alpha a^\dagger}$可以展開為無限級數多項式，因此也對！

但千萬別誤會這些本徵態會像振動的彈簧！



這些能量本徵態是定態，沒有任何測量會隨時間變化！

但如同波包，如果將定態疊加，就有可能製造出期望值會變的態。

調和態 Coherent State 就是最好的例子。

$$\boxed{a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle} \tag{17.3.5}$$

調和態 Coherent State 是a的本徵態。本徵值是給定的複數α。

This result is a bit shocking: we have found eigenstates of the *non-Hermitian* operator $\hat{a}$. Because $\hat{a}$ is not Hermitian, our theorems about eigenstates and eigenvectors of Hermitian operators do not apply. For example, the eigenvalues need not be real ($\alpha \in \mathbb{C}$), two eigenvectors with different eigenvalues need not be orthogonal (they are not!), and the set of eigenvectors need not form a complete basis (coherent states actually give an overcomplete basis!). We actually determined explicitly the eigenstates of the annihilation operator in example 13.21.

Exercise 17.5. *Ordering the exponential in the state $|\alpha\rangle$ in (17.3.2), show that*

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger}|0\rangle$$

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-|\alpha|^2/2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}}|n\rangle.$$

Exercise 17.6. *Show that*

$$\langle\beta|\alpha\rangle = \exp\Big(-\tfrac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2) + \beta^*\alpha\Big). \tag{17.3.7}$$

Hint: You may find it helpful to evaluate $e^{\beta^*\hat{a}+\alpha\hat{a}^\dagger}$ in two different ways using (17.2.23).

Exercise 17.7. *The above formula for the overlap $\langle\beta|\alpha\rangle$ does not make $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$ manifest. Show that the above can be rewritten as*

$$\langle\beta|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha-\beta|^2} e^{i\,\mathrm{Im}(\beta^*\alpha)}. \tag{17.3.8}$$

When $\beta = \alpha$, both exponents vanish manifestly, and thus the overlap is clearly equal to one. Note that the result implies that $|\langle\beta|\alpha\rangle|^2 = e^{|\alpha-\beta|^2}$.

計算調和態 Coherent State 的位置期望值：

$$x = \sqrt{\frac{1}{m\omega}}\,q = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a + a^{\dagger}\right)$$

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

$$\langle\alpha|x|\alpha\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle\alpha|\left(a + a^{\dagger}\right)|\alpha\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left\{\langle\alpha|a|\alpha\rangle + \langle\alpha|a^{\dagger}|\alpha\rangle\right\}$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\{\alpha\langle\alpha|\alpha\rangle + (\langle\hat{a}\alpha|)|\alpha\rangle\} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\{\alpha + \alpha^{*}\langle\alpha|\alpha\rangle\} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\alpha + \alpha^{*})$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\alpha + \alpha^{*}) = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\,\mathrm{Re}\alpha$$

類似的：

$$\langle\alpha|p|\alpha\rangle = \sqrt{2m\omega\hbar}\;\; \mathrm{Im}\alpha$$

To find the physical interpretation of the complex number α, we first note that when real, as in (17.3.1), α encodes the initial position x_0 of the coherent state. More precisely, it encodes the expectation value of $\hat{x}$ in the state at $t = 0$. For complex α, its real part is still related to the initial position:

$$\langle\alpha|\hat{x}|\alpha\rangle = \frac{L_0}{\sqrt{2}}\langle\alpha|(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)|\alpha\rangle = \frac{L_0}{\sqrt{2}}(\alpha+\alpha^*) = L_0\sqrt{2}\,\mathrm{Re}(\alpha), \tag{17.3.9}$$

where we used (17.3.5), both on bras and on kets. We have thus learned that

$$\mathrm{Re}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\langle\hat{x}\rangle}{L_0}. \quad \text{位置期望值是}\alpha\text{的實數部。} \tag{17.3.10}$$

It is natural to conjecture that the imaginary part of α is related to the momentum expectation value on the initial state. So we explore

$$\langle\alpha|\hat{p}|\alpha\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}\frac{\hbar}{L_0}\langle\alpha|(\hat{a}^\dagger-\hat{a})|\alpha\rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}}\frac{\hbar}{L_0}(\alpha-\alpha^*) = \sqrt{2}\frac{\hbar}{L_0}\,\mathrm{Im}(\alpha) \tag{17.3.11}$$

and learn that

$$\mathrm{Im}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{L_0}{\hbar}\langle\hat{p}\rangle. \quad \text{動量期望值是}\alpha\text{的虛數部。} \tag{17.3.12}$$

The identification of α in terms of expectation values of $\hat{x}$ and $\hat{p}$ is now complete:

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\langle\hat{x}\rangle}{L_0} + i\frac{L_0\langle\hat{p}\rangle}{\hbar}\right).} \tag{17.3.13}$$

$$\boxed{|\alpha, t\rangle = e^{-i\frac{1}{2}\omega t}|e^{-i\omega t}\alpha\rangle} \qquad (17.3.19)$$

α的相角會隨時間而增加。

This is how a coherent state $|\alpha\rangle$ evolves in time: up to an irrelevant phase, the state remains a coherent state with a time-varying parameter $e^{-i\omega t}\alpha$. In the complex α plane, the state is represented by a vector that rotates clockwise with angular velocity ω. The α plane can be viewed as having a real axis that gives $\langle\hat{x}\rangle$, up to a proportionality constant, and an imaginary axis that gives $\langle\hat{p}\,\rangle$, up to a proportionality constant. The evolution of any state is represented by a circle. This is illustrated in figure 17.2.

α的複數平面

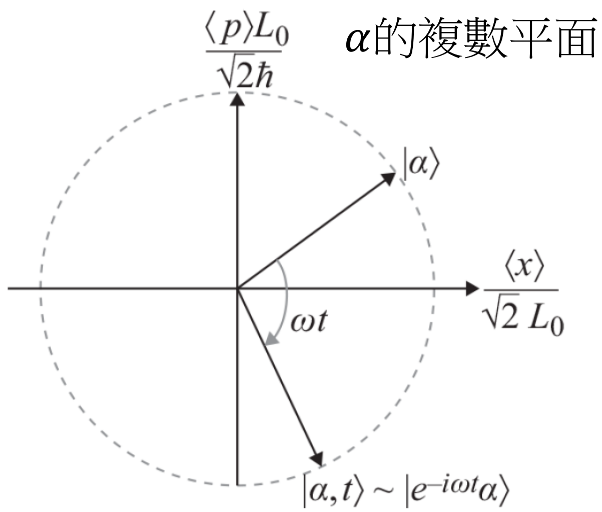
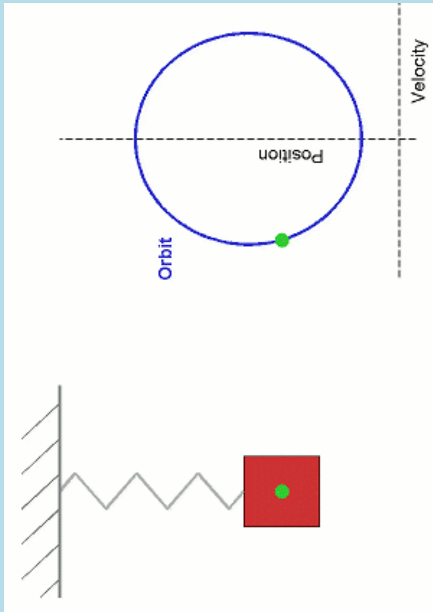


Figure 17.2
Time evolution of the coherent state $|\alpha\rangle$. The real and imaginary parts of α determine, respectively, the expectation values $\langle\hat{x}\rangle$ and $\langle\hat{p}\,\rangle$. As time goes by, the α parameter of the coherent state rotates clockwise with angular velocity ω.



調和態的位置與動量期望值真的像振動的彈簧！

$$\psi^{(\alpha)}(x,t) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}\left(x - \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\Re[\alpha(t)]\right)^2 + i\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\Im[\alpha(t)]x + i\theta(t)\right),$$

where *θ(t)* is a yet undetermined phase, to be fixed by demanding that the wavefunction satisfies the Schrödinger equation.

It follows that

$$\theta(t) = -\frac{\omega t}{2} + \frac{|\alpha(0)|^2 \sin(2\omega t - 2\sigma)}{2}, \text{where} \qquad \alpha(0) \equiv |\alpha(0)| \exp(i\sigma),$$

so that σ is the initial phase of the eigenvalue.

The mean position and momentum of this "minimal Schrödinger wave packet" $\psi^{(\alpha)}$ are thus ***oscillating just like a classical system***,

$$\boxed{\langle\hat{x}(t)\rangle = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\Re[\alpha(t)] = |\alpha(0)|\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\cos(\sigma - \omega t),}$$

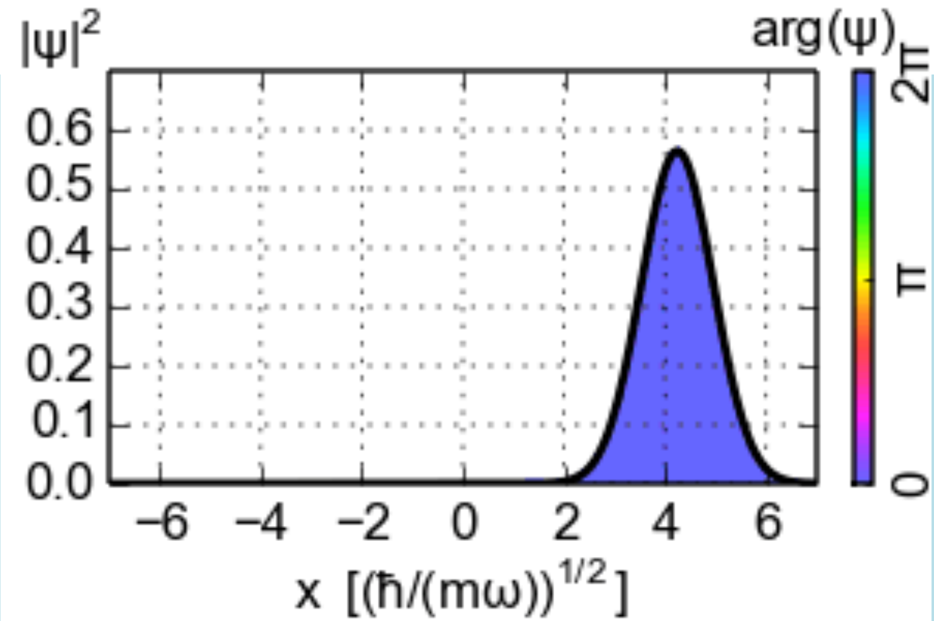
$$\boxed{\langle\hat{p}(t)\rangle = \sqrt{2m\hbar\omega}\Im[\alpha(t)] = |\alpha(0)|\sqrt{2m\hbar\omega}\sin(\sigma - \omega t).}$$

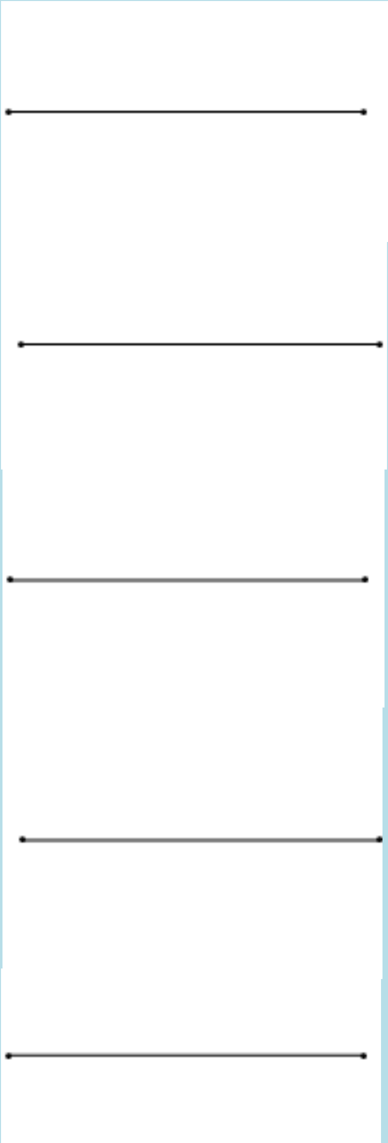
調和態的波函數是一波包。

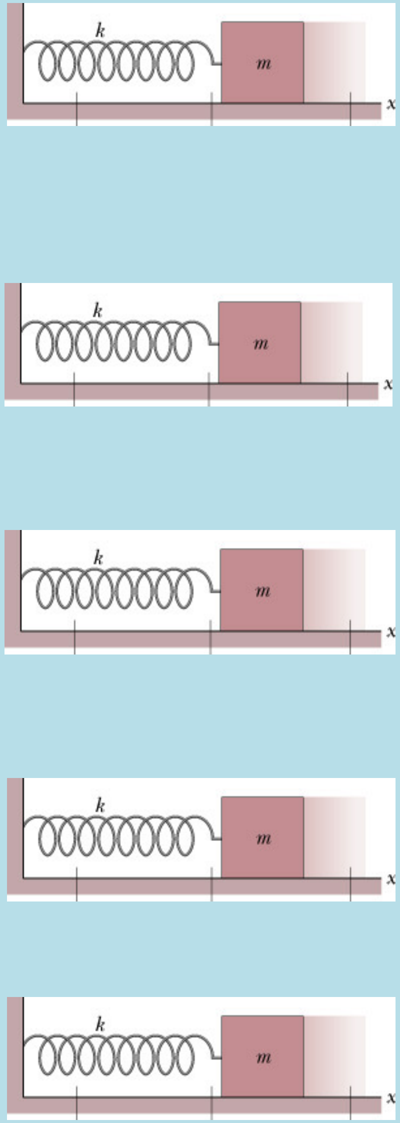
波包的中心運動如簡諧震盪。

The probability density remains a Gaussian centered on this oscillating mean,

$$|\psi^{(\alpha)}(x,t)|^2 = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} e^{-\frac{m\omega}{\hbar}\left(x - \langle\hat{x}(t)\rangle\right)^2}.$$





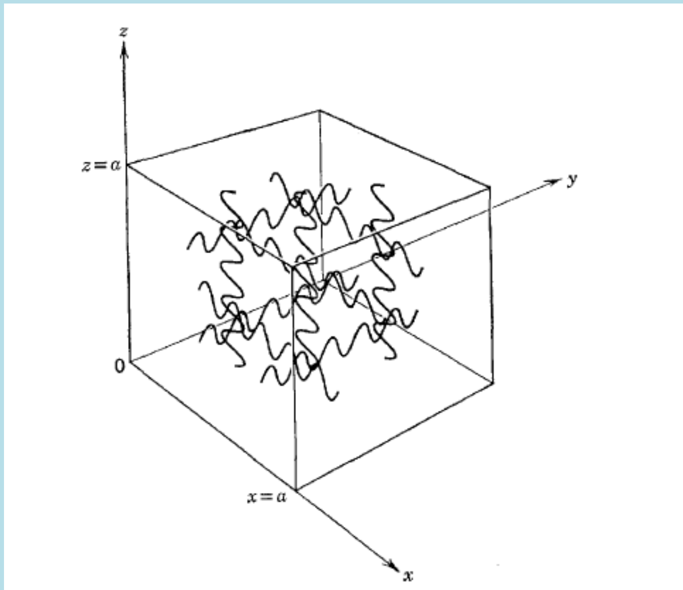


如何製造如電磁振盪的光子態？

例如一維空腔內，一駐波模式對應的電磁波？

$$E(x,t) \sim E_0 \sin kx \cdot \cos \omega t$$

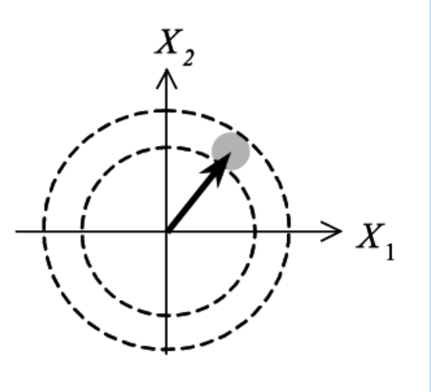
Coherent State 相干態、定調態

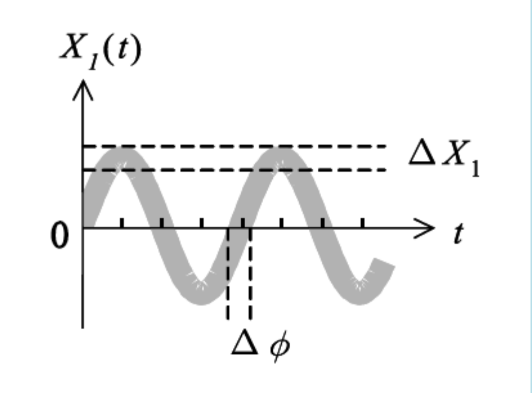


This is a standing wave. To make this clear, we write $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$ and find that

$$\langle \hat{E}_x(z,t)\rangle = 2\mathcal{E}_0 \,\mathrm{Re}(\alpha e^{-i\omega t}) \sin kz \; = \; 2\mathcal{E}_0\, |\alpha| \; \cos(\omega t - \theta) \sin kz. \qquad (17.4.14)$$

Coherent photon states with large $|\alpha|$ give rise to classical electric fields! In the state $|\alpha\rangle$, the expectation value of the number operator $\hat{N}$ is $|\alpha|^2$. Thus, the above electric field is the classical field associated with a quantum state with about $|\alpha|^2$ photons.





$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$$

Canonical Commutation Relation

有了這個關係，所有粒子運動的量子力學，都可以推導出來。

物理學家假設這個量子化條件適用於所有的物理系統！

物理系統的量子化：

找到系統的自由度q_i，求出對應的共軛動量p_i：

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

寫下此系統的 Hamiltonian $H(q_i, p_i)$

將q_i及p_i升級為算子： $\hat{q}_i$及$\hat{p}_i$

加入量子化條件： $[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$

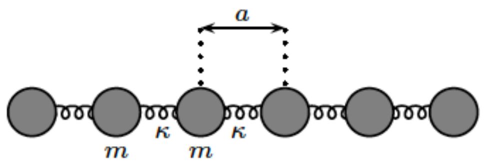


Fig. 9.1 The one-dimensional monatomic harmonic chain. Each ball has mass m and each spring has spring constant κ. The lattice constant, or spacing between successive masses at rest, is a.

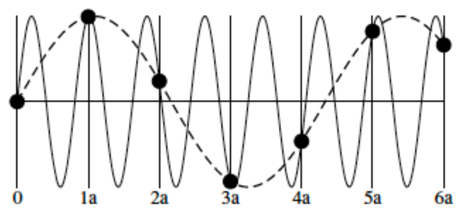
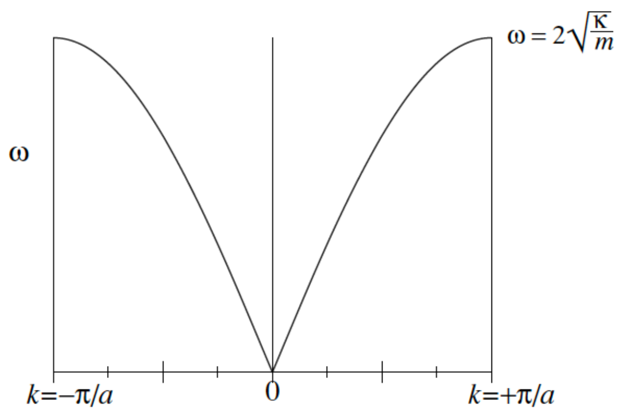


Fig. 9.3 Aliasing of waves. The dashed curve has wavevector k whereas the solid curve has wavevector $k + 2\pi/a$. These two waves have the same value (solid dots) at the location of the lattice



9.3 Quantum Modes: Phonons

We now make a rather important leap from classical to quantum physics.

> **Quantum Correspondence:** If a classical harmonic system (i.e., any quadratic Hamiltonian) has a normal oscillation mode at frequency ω the corresponding quantum system will have eigenstates with energy
>
> $$E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}). \tag{9.7}$$

Presumably you know this well in the case of a single harmonic oscillator. The only thing different here is that our harmonic oscillator can be a collective normal mode not just the motion of a single particle. This quantum correspondence principle will be the subject of Exercises 9.1 and 9.7.

Definition 9.1 *A phonon is a discrete quantum of vibration.*[8]

This is entirely analogous to defining a single quantum of light as a photon. As is the case with the photon, we may think of the phonon as actually being a particle, or we can think of the phonon as being a quantized wave.