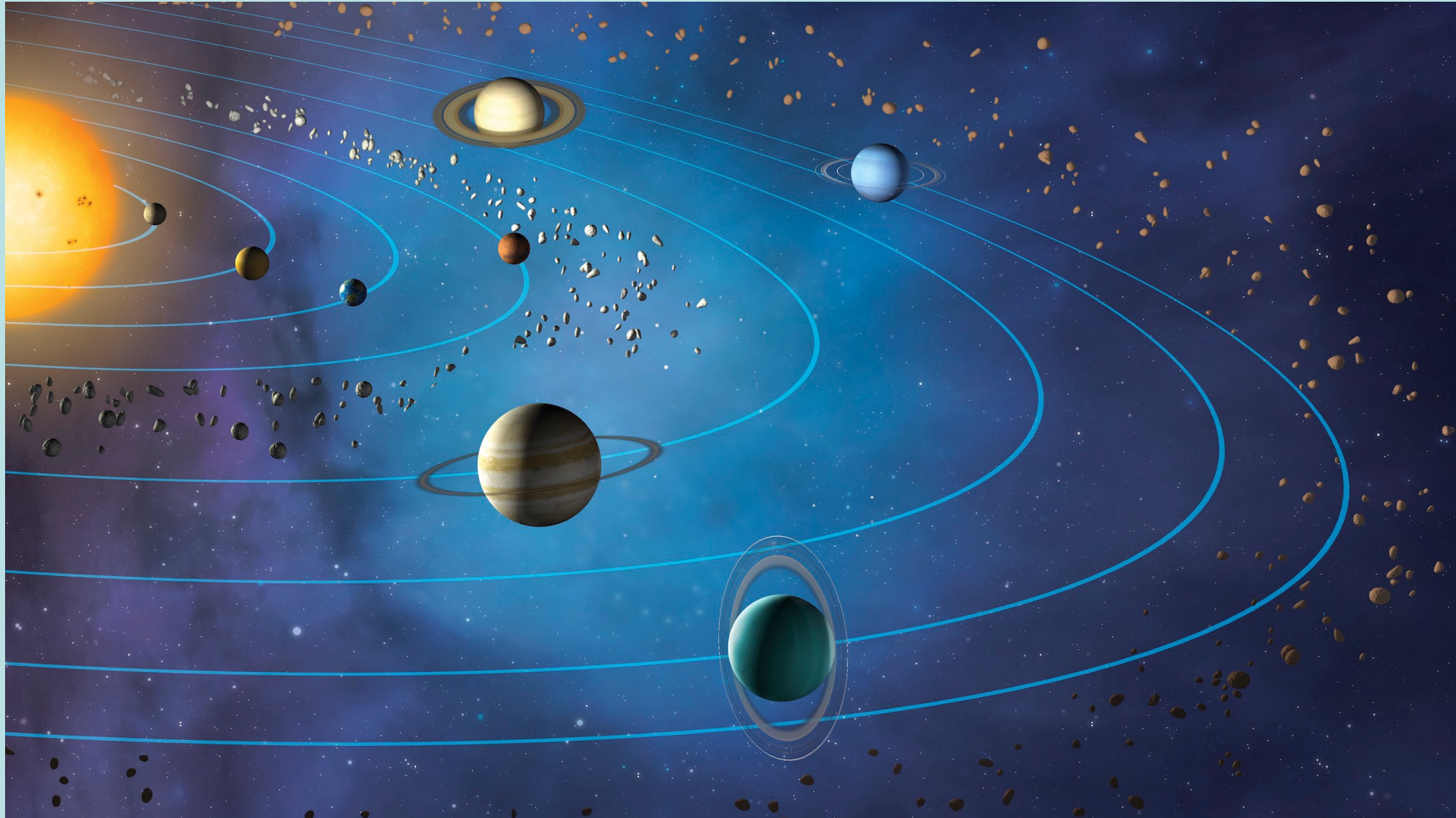


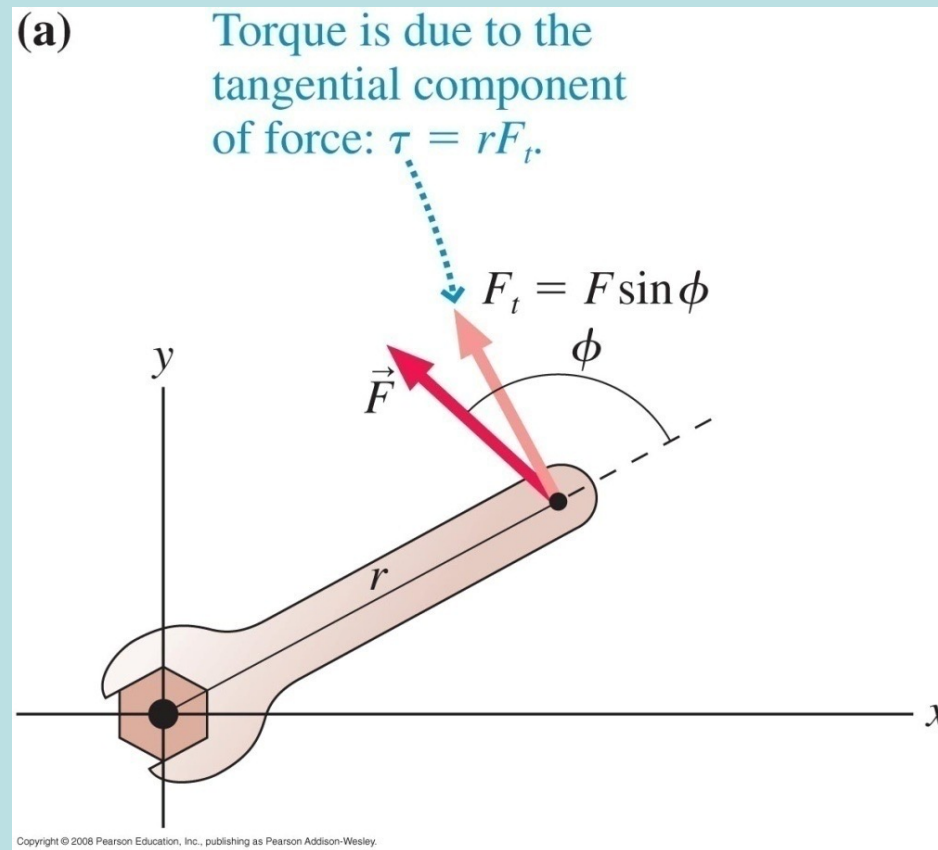
粒子在外力影響下作**旋轉運動 Rotation**

旋轉運動依舊滿足牛頓運動定律，但可以作一些設計與變型使討論更容易！



物體也可受力旋轉！

造成旋轉的物理量，應該與力、力的方向、及施力的位置同時有關！



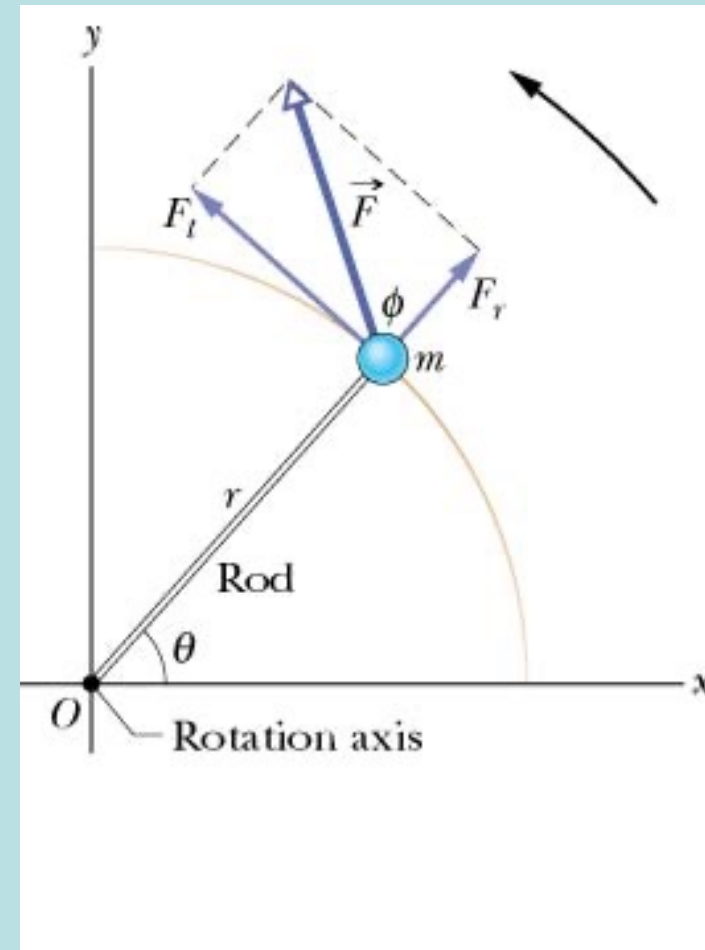
$$F_t \cdot r = F \sin \phi \cdot r \equiv \tau$$

利用”功”來推理

$$W = \vec{F}_t \cdot \Delta \vec{r}_t = F_t \cdot \Delta s = F_t \cdot r \Delta \theta \equiv \tau \Delta \theta$$

正好與一維運動的功對應：

$$W = F \cdot \Delta x$$



大膽的猜想：力在旋動運動的對應是力矩！

力矩 Torque 扭力

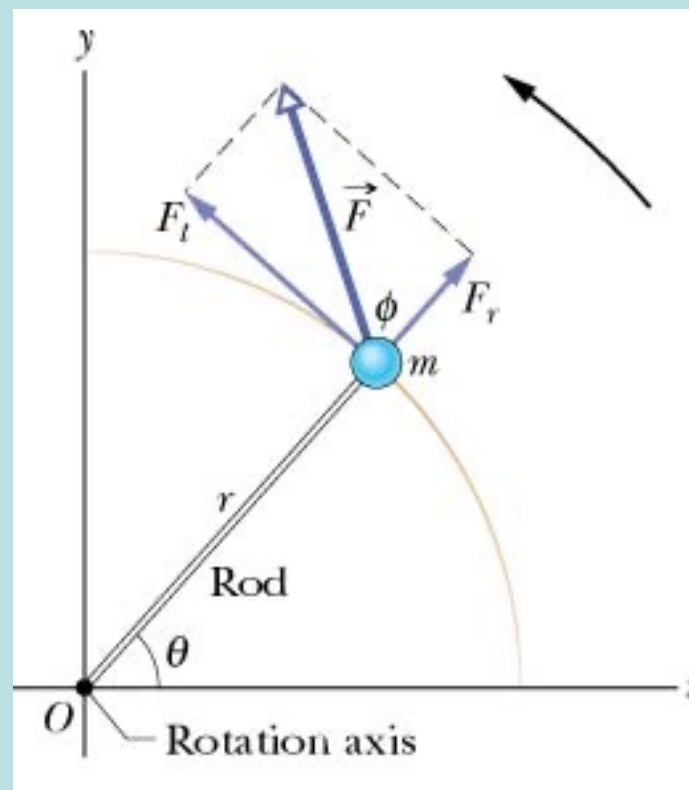
τ

F

$$\tau = r \cdot F_t = r \cdot F \sin \phi = |\vec{r} \times \vec{F}|$$

如此可以定義力矩為一向量 $\vec{\tau}$ ：

$$\vec{\tau} \equiv \vec{r} \times \vec{F}$$



$$\vec{\tau} \equiv \vec{r} \times \vec{F}$$
 這樣的定義有用嗎？

考慮力矩作用於一個粒子之上所產生的效應。

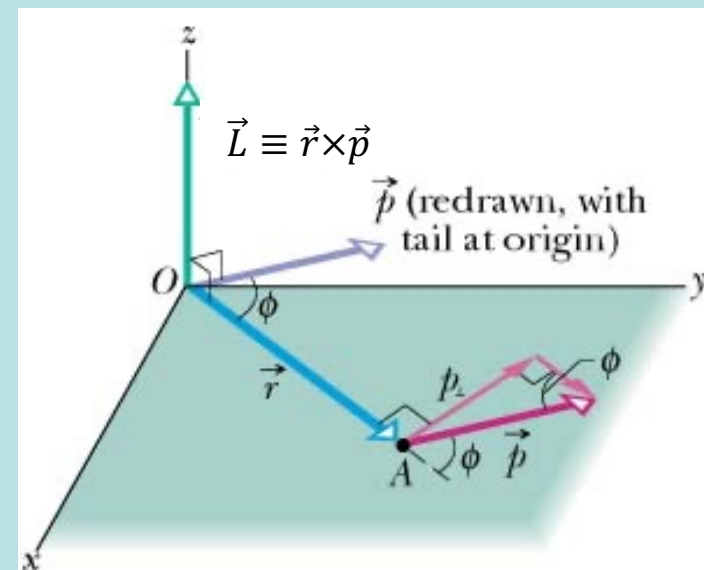
$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) - \cancel{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p})$$

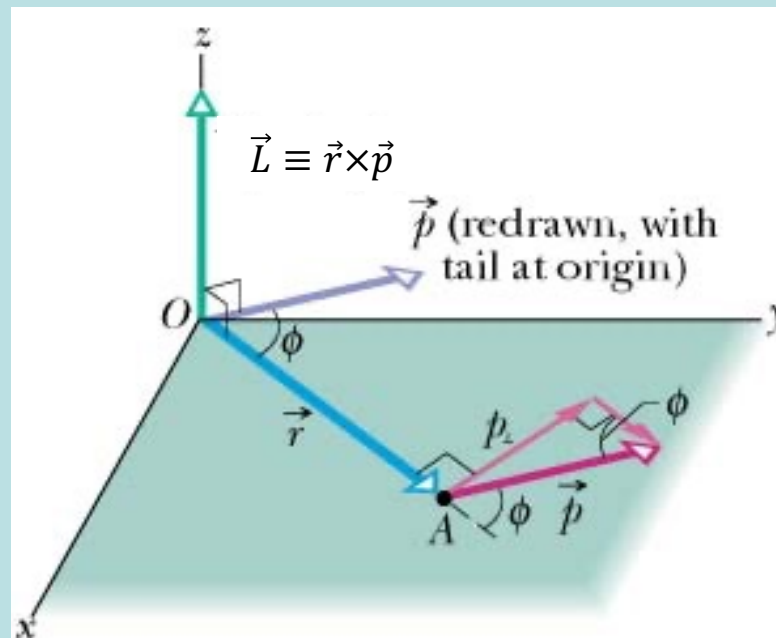
$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$
 力矩可以寫成一個向量物理量的變化率：

$$\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p}$$
 一個粒子的角動量

此公式決定了粒子的旋轉運動。

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$
 如同牛頓第二定律。





$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

力矩真的可以寫成一個向量物理量的變化率：

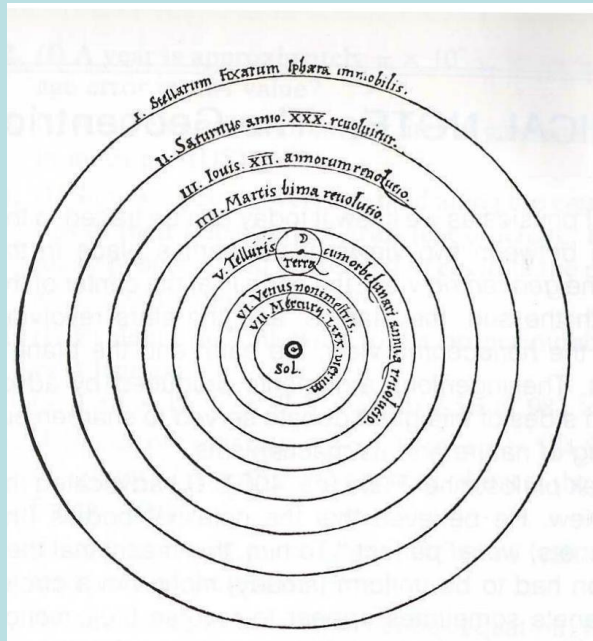
$$\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p}$$

一個粒子的角動量

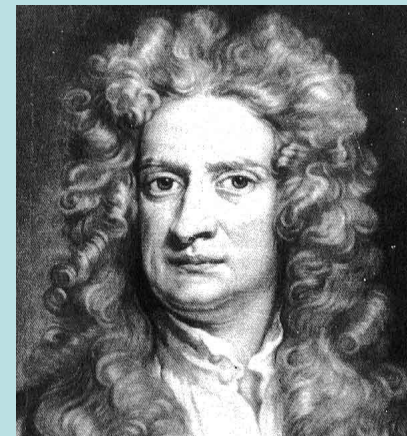
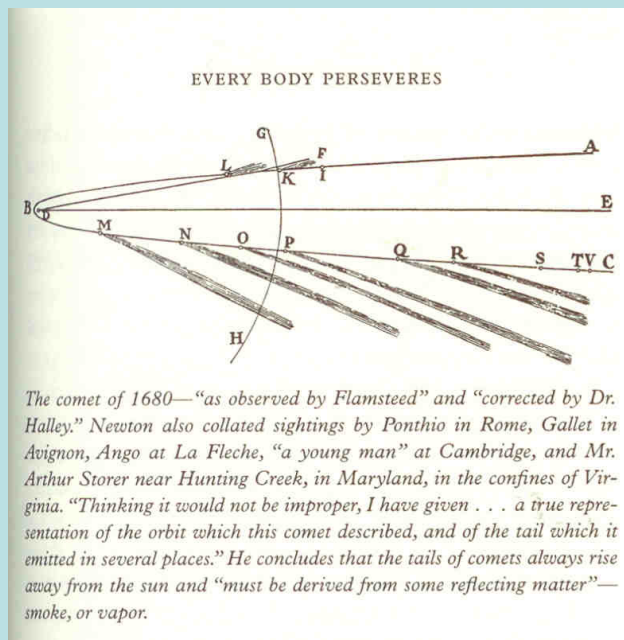
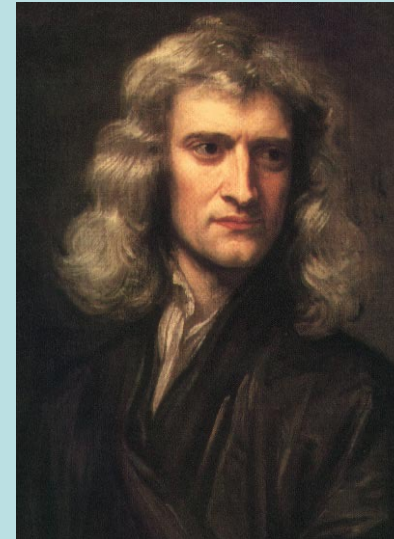
對於一平面運動的粒子，角度量是垂直於此平面的！

即使直線前進的粒子也有角動量！角動量不只適用於旋轉現象。

角動量與原點的選擇有關！



行星、彗星繞太陽是由於太陽的萬有引力：



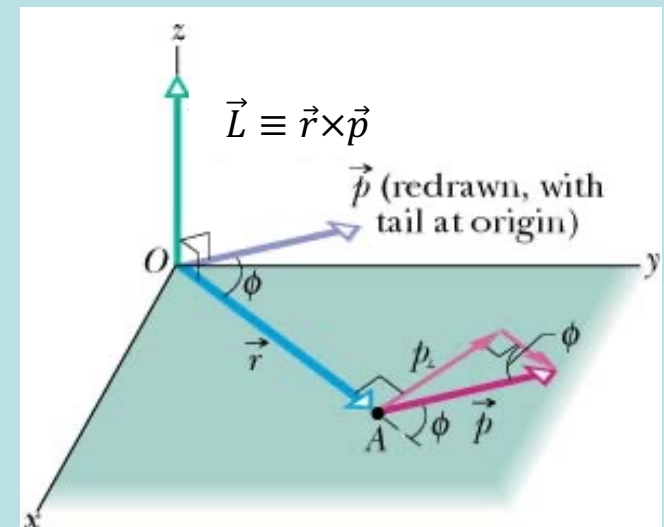
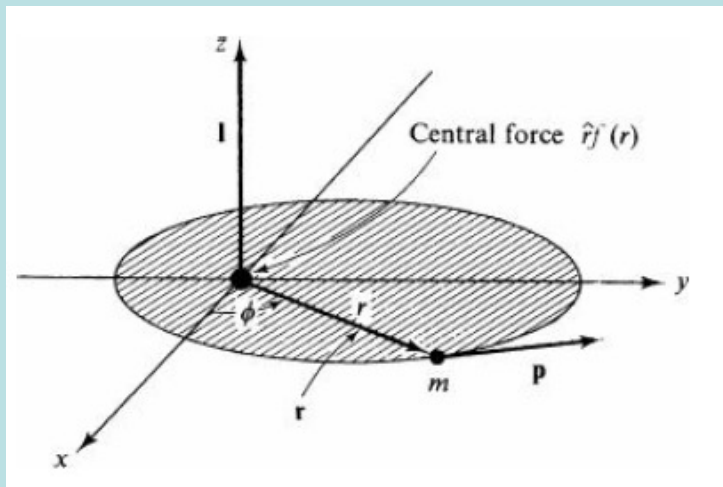
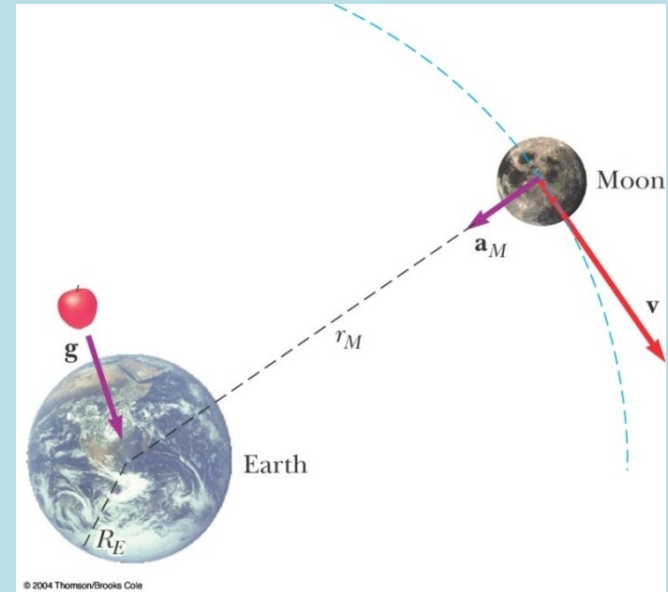
萬有引力是指向施力者： $\vec{F} = -G \frac{mM}{r^2} \hat{r}$

$$\tau = |\vec{r} \times \vec{F}| \sim |\vec{r} \times \hat{r}| = 0$$

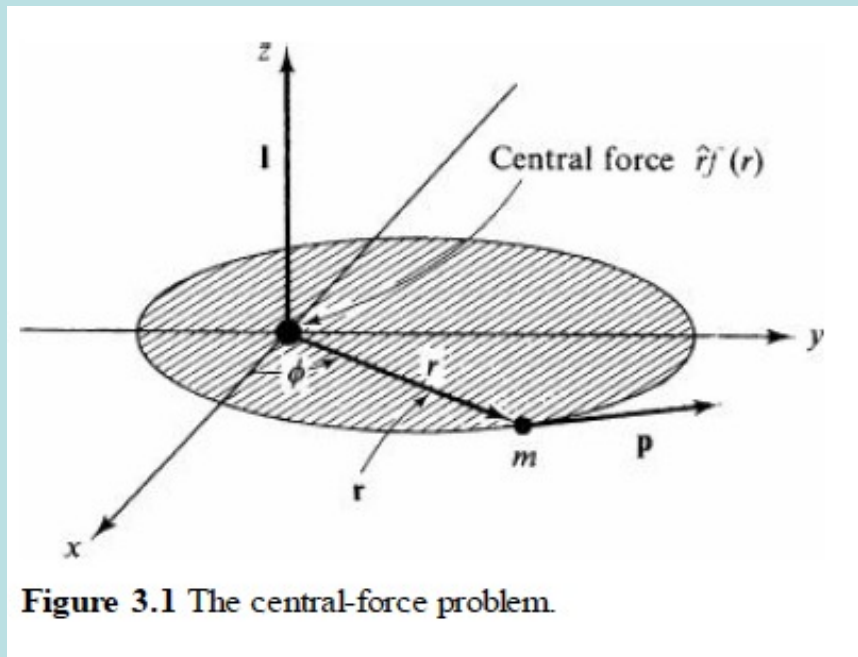
$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

若 $\vec{\tau} = 0$ ，則角動量 $\vec{L}$ 守恆。

如此一般粒子會維持在一垂直於 $\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p}$ 的平面上運動。



行星運動是Central Force Problem 中心力問題的一個特例！



一個粒子在另一個固定的粒子周圍運動。

若兩者之間的作用力可以寫成： $\vec{F} = f(r) \cdot \hat{r}$ $\tau = |\vec{r} \times \vec{F}| \sim |\vec{r} \times \hat{r}| = 0$

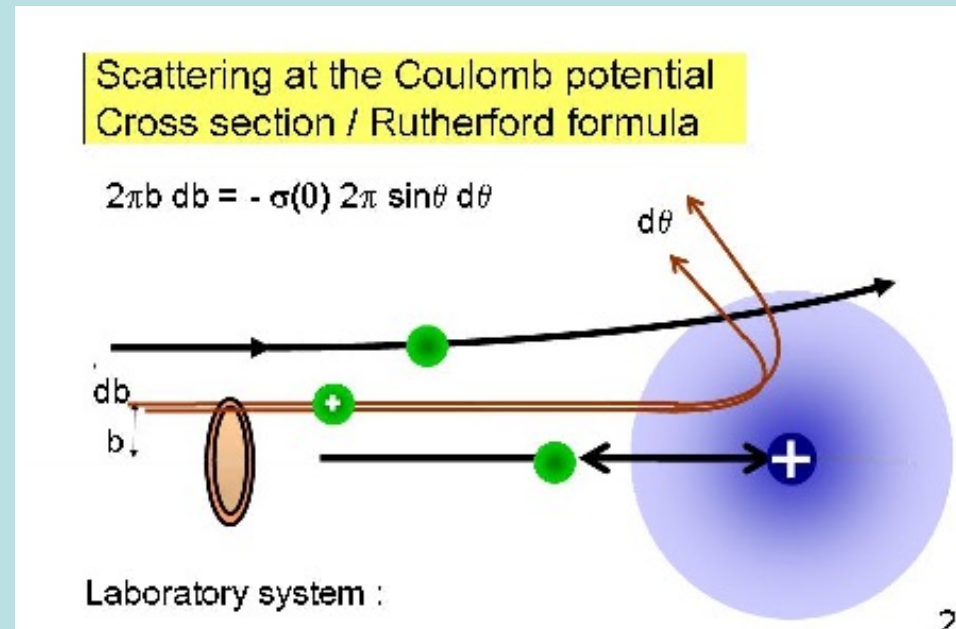
因此角度量守恆！

此粒子會在一個平面上運動！固定粒子也在這平面上。

中心力是保守力，可以用一個由 r 決定的位能 $V(r)$ 來描述！

行星繞恆星的運動顯然屬於這個範圍！

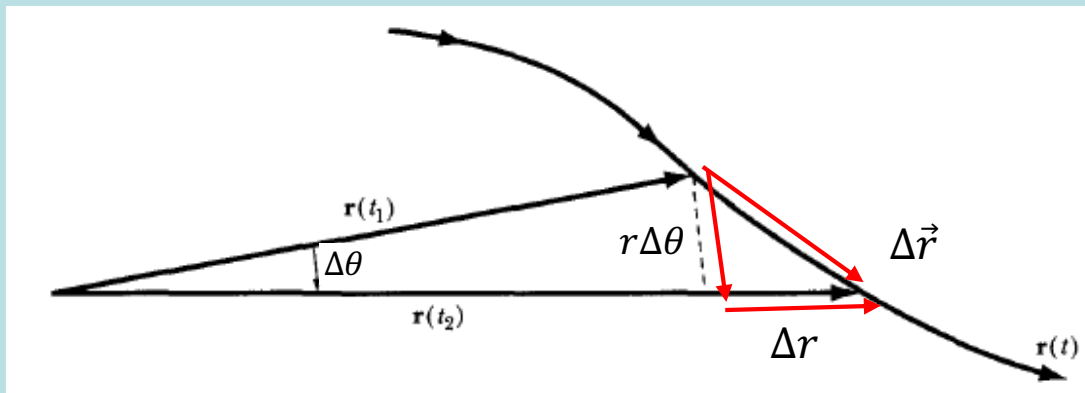
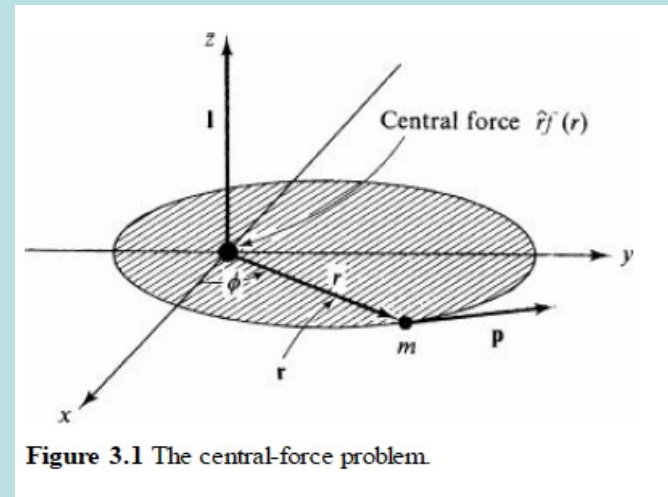
散射



造成散射的庫倫靜電力也是中心力，散射粒子的角動量是守恆的！

考慮行星軌道運動的一小段。

如果把粒子的位置以極座標 r, θ 表示：



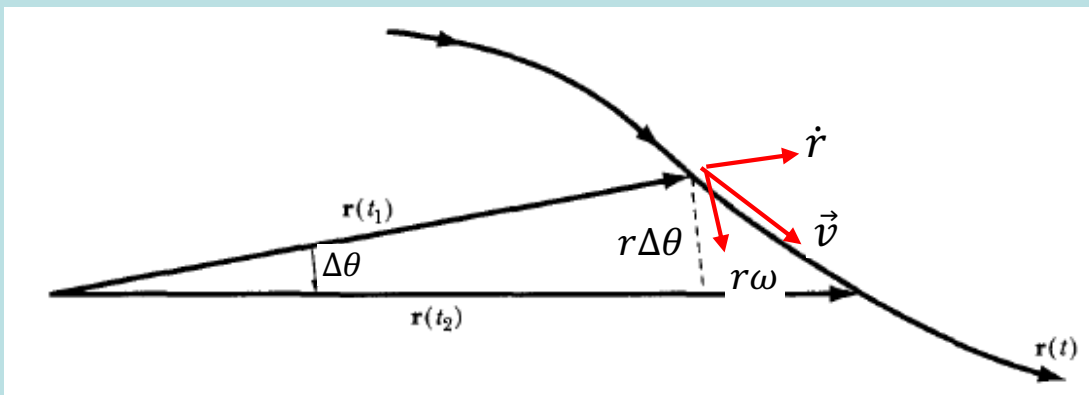
$$\Delta s(t) = r \Delta \theta(t)$$

粒子運動時，一邊改變與原點的距離 r ，一邊繞原點旋轉！

改變與原點的距離 r 的運動位移是沿 r 的徑向： Δr 。

繞原點旋轉位移近似是一個弧長，與弧角 $\Delta \theta$ 對應： $r \Delta \theta$ 。

關鍵是：這兩種運動近似是彼此垂直的！



粒子的速度 $\vec{v}$ 也可以分解成沿 $\hat{r}$ 的方向的分量及垂直於 $\hat{r}$ 的方向的分量。

這兩個速度 $\vec{v}$ 分量分別對應距離的變化率、及旋轉的快慢。

速度 $\vec{v}$ 沿 $\hat{r}$ 的方向的分量，就是距離的變化率！

$$\frac{\Delta r}{\Delta t} \rightarrow \frac{dr}{dt}$$

沿垂直於 $\hat{r}$ 的方向的分量，就是旋轉的速率。

$$\frac{r\Delta\theta}{\Delta t} \rightarrow r \frac{d\theta}{dt} = r\omega$$

這兩個分量彼此垂直，速度大小就可以寫成：

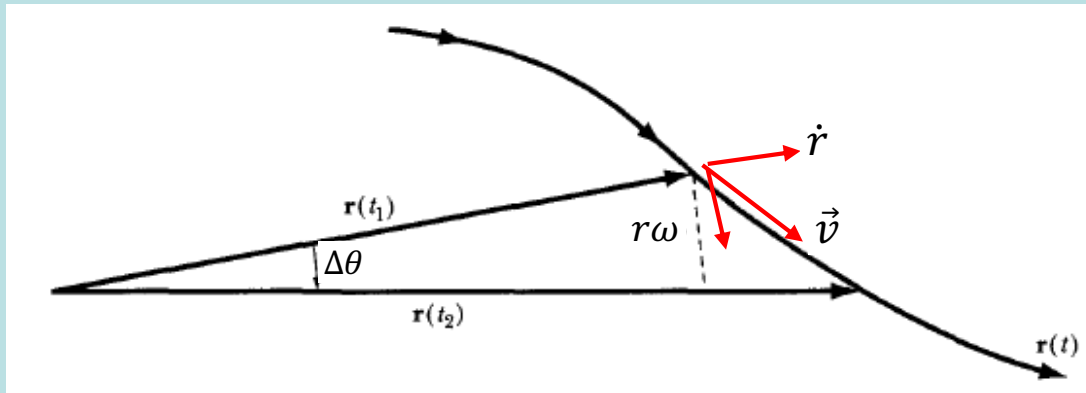
$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\omega^2$$

轉動動能

$$\omega \equiv \frac{d\theta}{dt}$$

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\omega^2 \right]$$

似乎轉動與徑向運動可以分開看！



中心力的力矩為零，因此粒子的角動量守恆：

將粒子的角動量以極座標表示：

$$L \equiv |\vec{r} \times \vec{p}| = r \cdot p_{\perp} = r \cdot mr\omega = mr^2\omega$$

守恆的角動量大小記為 l 。

$$\omega = \frac{l}{mr^2} \quad \text{角速度 } \omega \text{ 由距離決定！}$$

$$E = \frac{1}{2}m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}mr^2\omega^2 = \frac{1}{2}m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) = \frac{1}{2}m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + V_{\text{eff}}(r)$$

轉動動能如同位能一樣！將轉動動能併入位能之中！

二維運動等效於一個在有效位能 $V_{\text{eff}}(r)$ 作用下的一維運動！

$$V_{\text{eff}}(r) \equiv \frac{l^2}{2mr^2} + V(r)$$

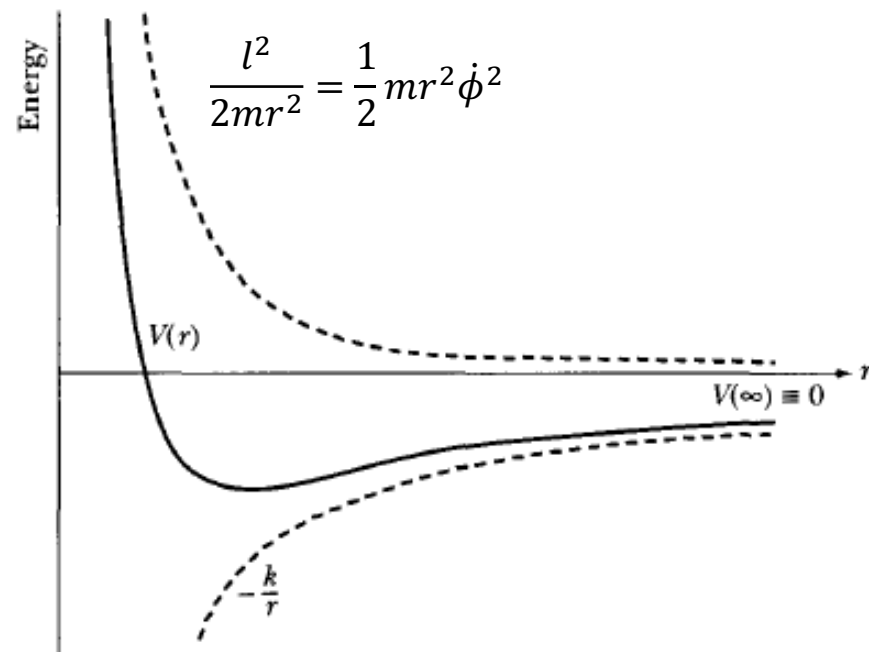
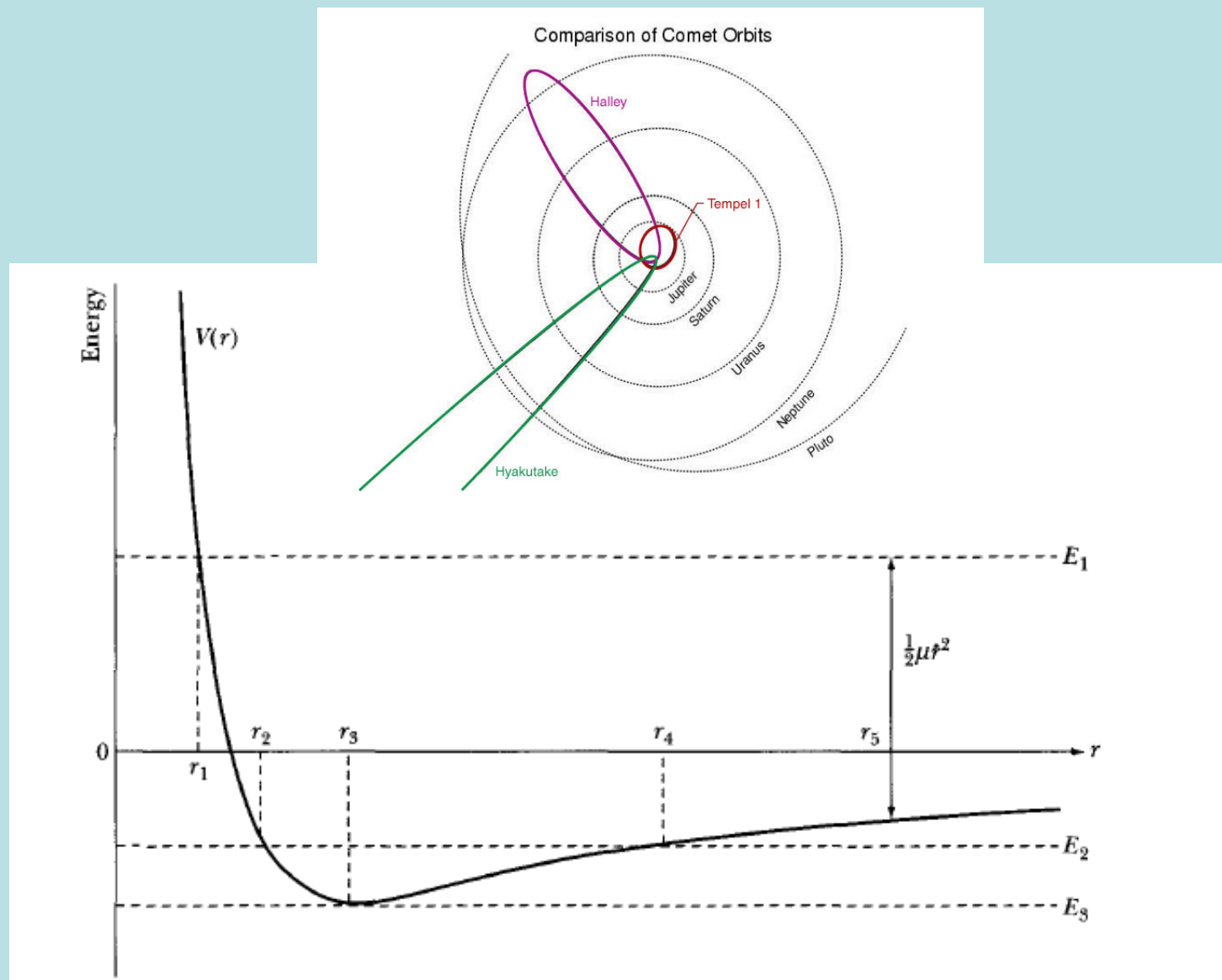


FIGURE 8-5 The effective potential for gravitational attraction $V(r)$ is composed of the real potential $-k/r$ term and the centrifugal potential energy $l^2/2\mu r^2$.

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$



$E = E_1 > 0$ 則粒子成自由態。如彗星、或是散射一般。

$E = E_2 < 0$ 則粒子成束縛態。距離在 $r_2 < r < r_4$ 。橢圓形軌道。

$E = E_3 < 0$ 則粒子軌道是圓形。距離在 $r = r_3$ 。

粒子永遠不會墜入到原點。

$$E = \frac{1}{2}m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) = \frac{1}{2}m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + V_{\text{eff}}(r)$$

有了兩個守恆量 l, E 做標記，粒子的運動可以解出來：

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{2m^{-1}} \cdot \sqrt{E - V_{\text{eff}}(r)}$$

$$\sqrt{\frac{m}{2}} dr \cdot \frac{1}{\sqrt{E - V_{\text{eff}}(r)}} = dt$$

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0}^r dr \cdot \frac{1}{\sqrt{E - V_{\text{eff}}(r)}} = t \quad \text{兩邊積分}$$

距離 r 與時間 t 的關係可以解出來！

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\phi}} = \frac{mr^2}{l} \sqrt{2m^{-1}} \cdot \sqrt{E - V_{\text{eff}}(r)}$$

$$l \sqrt{\frac{1}{2m}} \int_{r_0}^r dr \cdot \frac{1}{r^2 \sqrt{E - V_{\text{eff}}(r)}} = \phi - \phi_0$$

距離 r 與角度 ϕ 的關係，也就是整個軌跡，可以解出來！

The equation for the path of a particle moving under the influence of a central force whose magnitude is inversely proportional to the square of the distance between the particle and the force center can be obtained (see Equation 8.17) from

$$\theta(r) = \int \frac{(l/r^2) dr}{\sqrt{2\mu \left(E + \frac{k}{r} - \frac{l^2}{2\mu r^2} \right)}} + \text{constant} \quad (8.38)$$

The integral can be evaluated if the variable is changed to $u \equiv l/r$ (see Problem 8-2). If we define the origin of θ so that the minimum value of r is at $\theta = 0$, we find

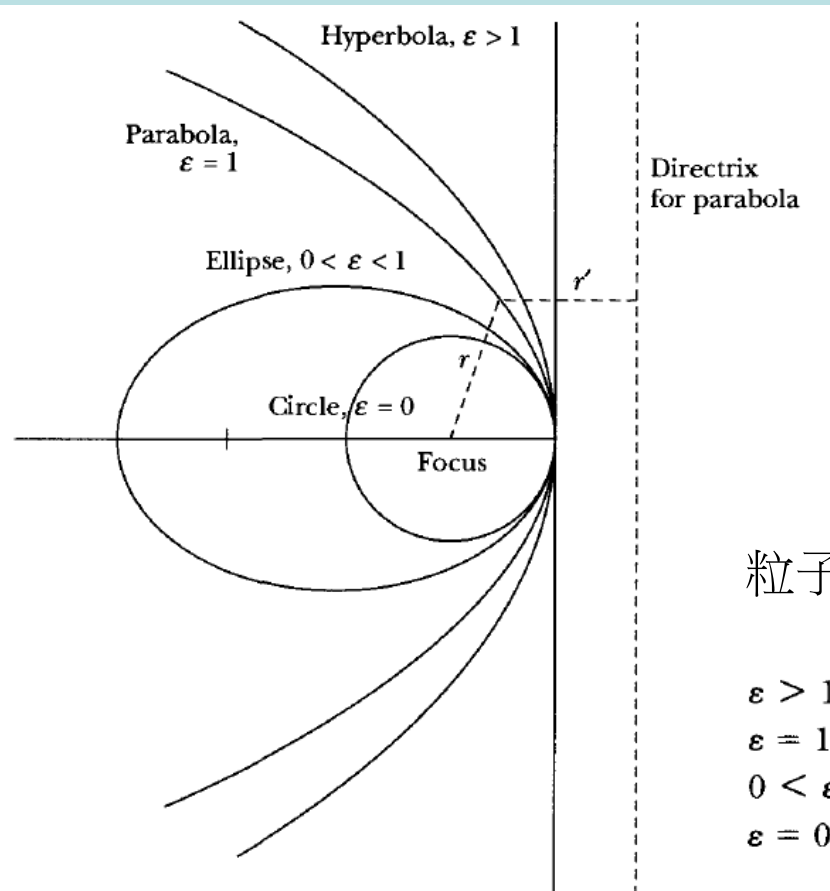
$$\cos \theta = \frac{\frac{l^2}{\mu k} \cdot \frac{1}{r} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}}} \quad (8.39)$$

Let us now define the following constants:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &\equiv \frac{l^2}{\mu k} \\ \varepsilon &\equiv \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}} \end{aligned} \right\} \quad (8.40)$$

Equation 8.39 can thus be written as

$$\boxed{\frac{\alpha}{r} = 1 + \varepsilon \cos \theta} \quad (8.41)$$



粒子永遠不會墜入到原點。

$\varepsilon > 1,$	$E > 0$	Hyperbola
$\varepsilon = 1,$	$E = 0$	Parabola
$0 < \varepsilon < 1,$	$V_{\min} < E < 0$	Ellipse
$\varepsilon = 0,$	$E = V_{\min}$	Circle

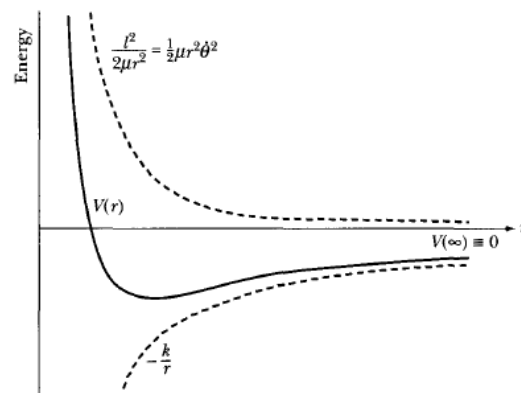


FIGURE 8-5 The effective potential for gravitational attraction $V(r)$ is composed of the real potential $-k/r$ term and the centrifugal potential energy $l^2/2\mu r^2$.

$$a = \frac{\alpha}{1 - \epsilon^2} = \frac{k}{2|E|}$$

$$b = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} = \frac{l}{\sqrt{2\mu|E|}}$$

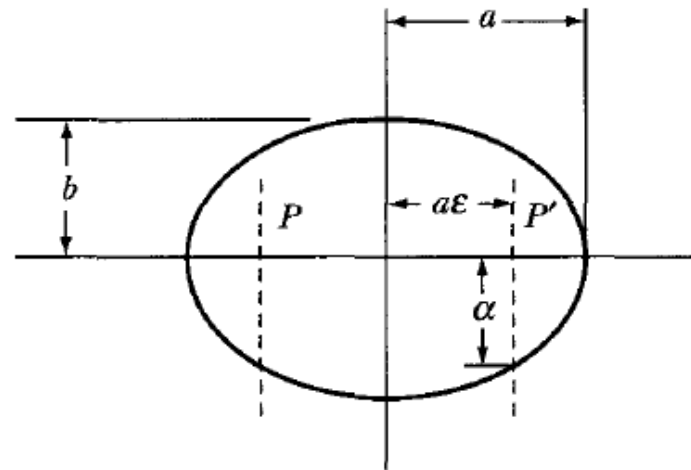
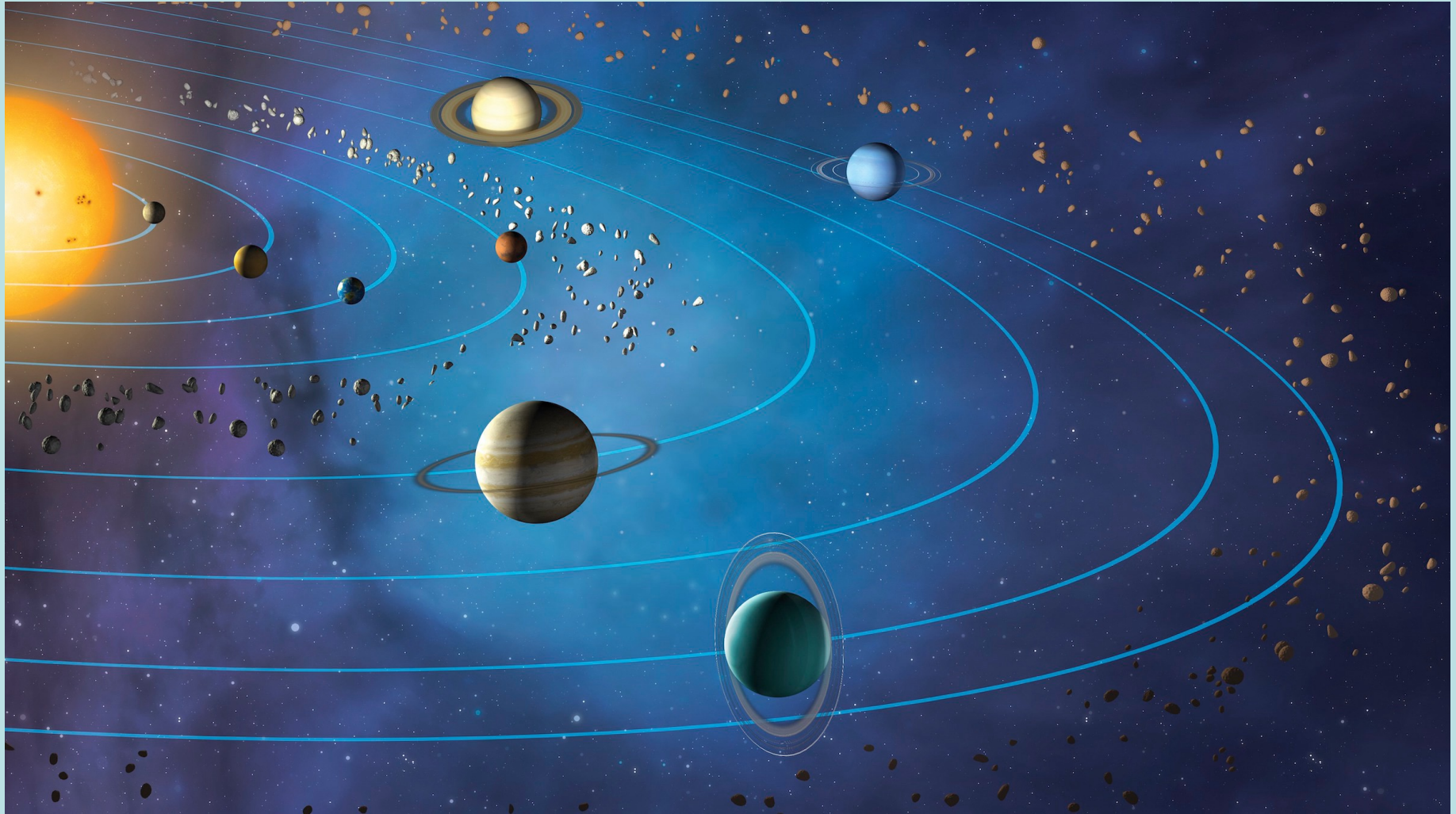


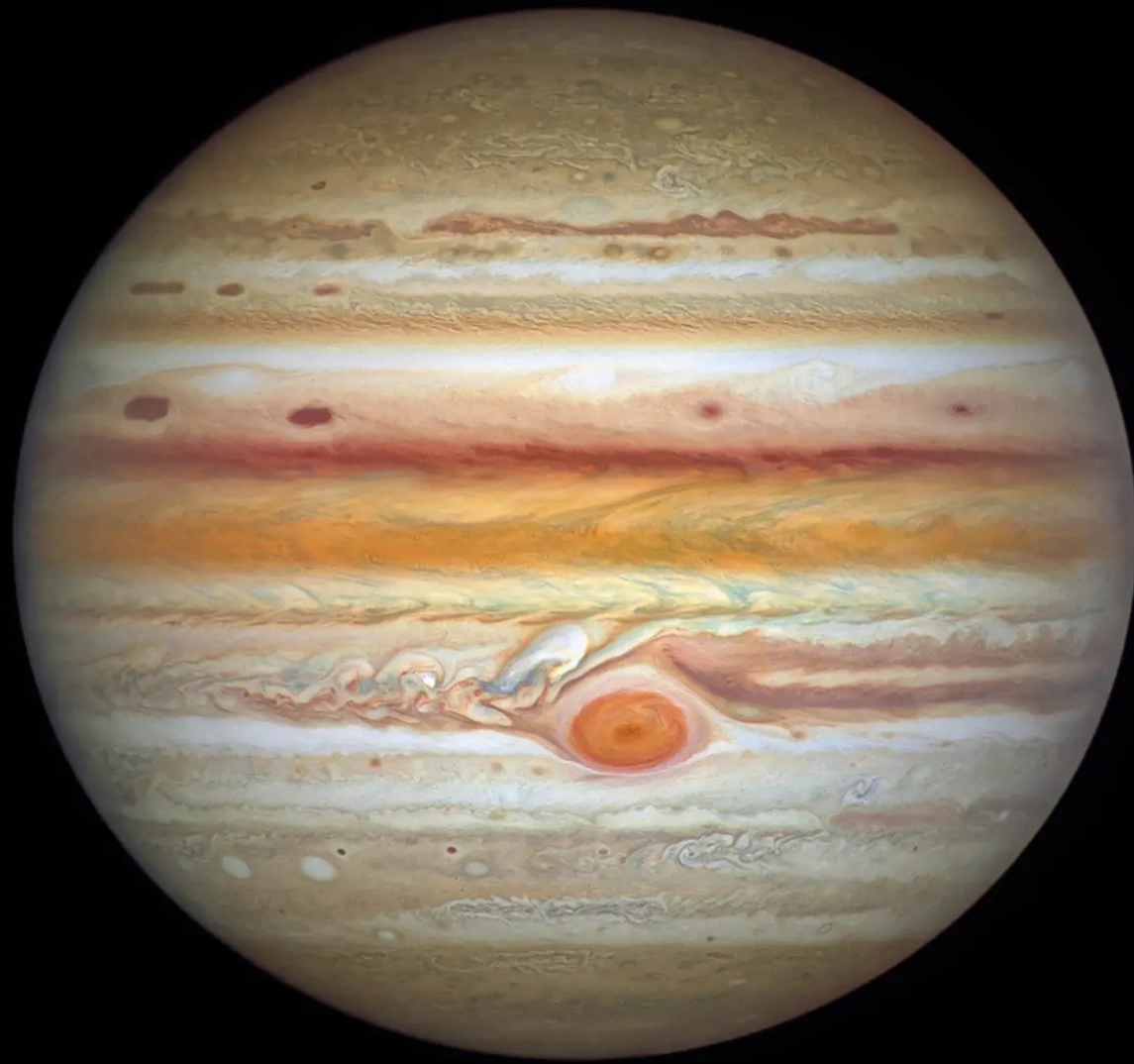
FIGURE 8-9 The geometry of elliptic orbits is shown in terms of parameters α , ϵ , a , and b . P and P' are the foci.

and P' are the foci. From this diagram, we see that the apsidal distances ($r_{\min}$ and $r_{\max}$ as measured from the foci to the orbit) are given by

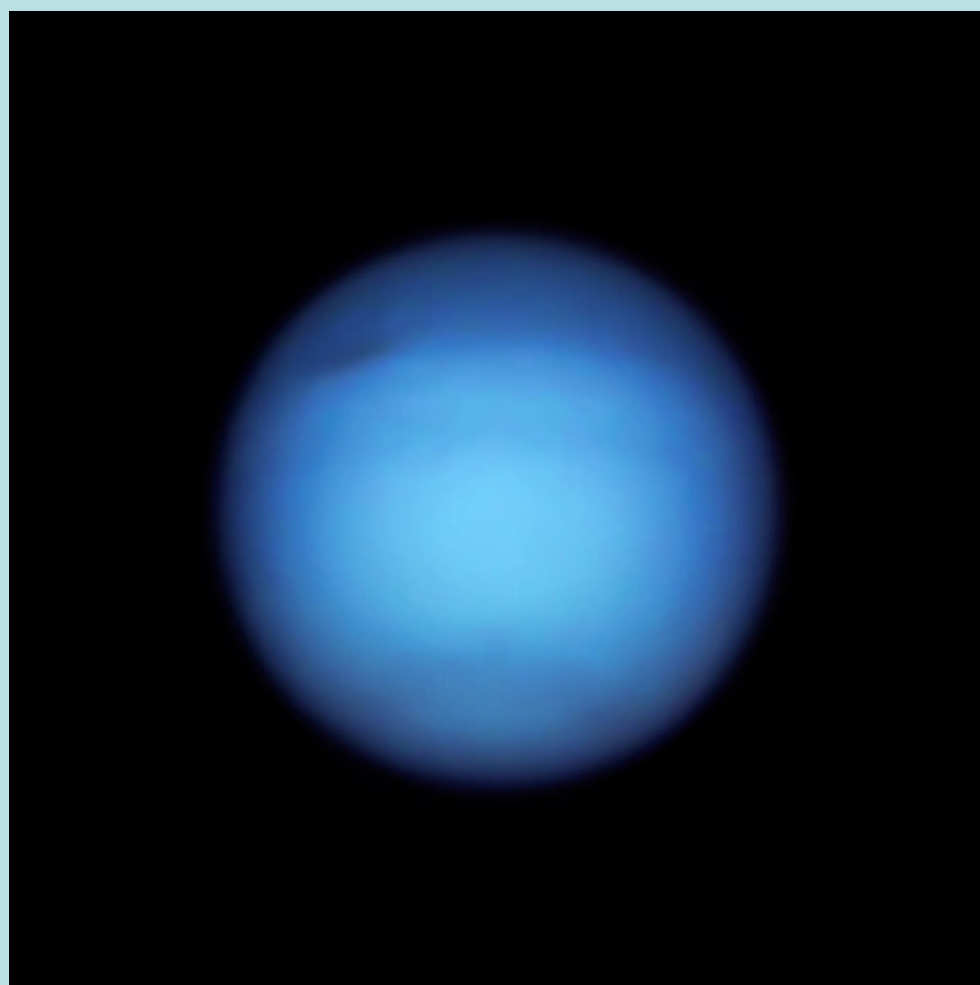
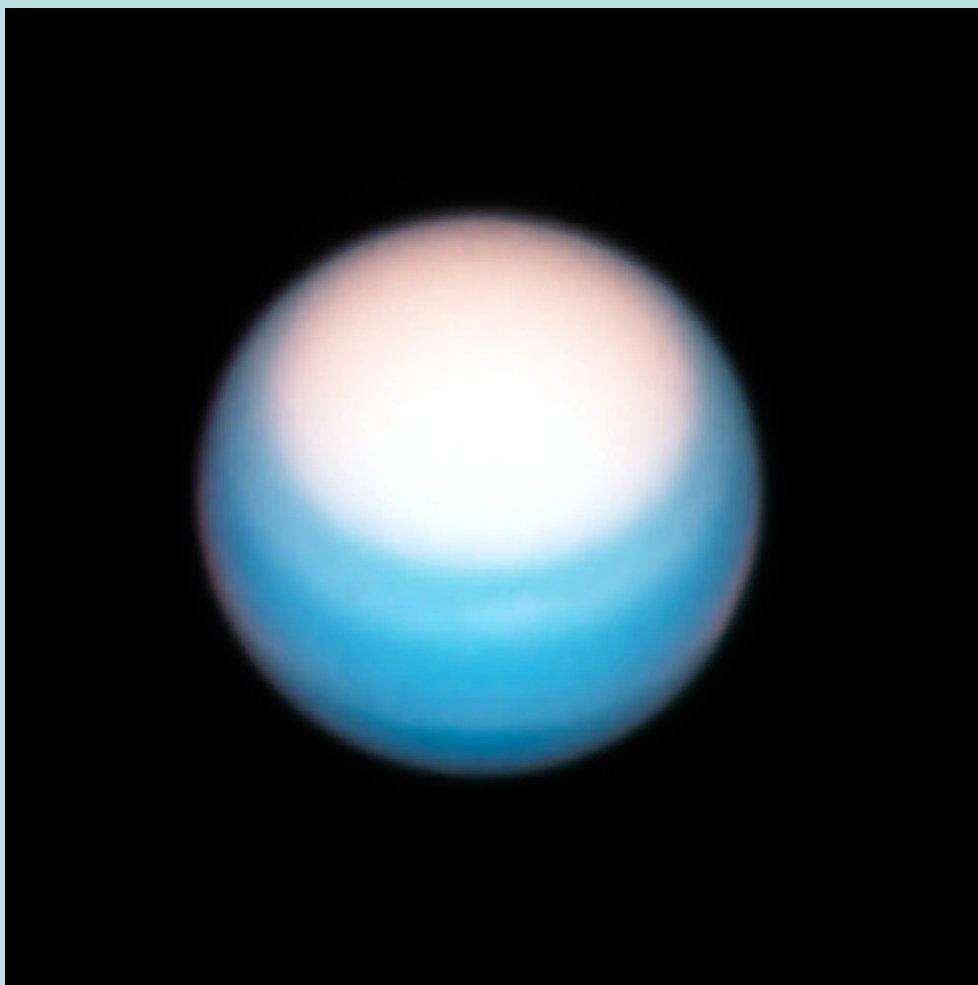
$$\left. \begin{aligned} r_{\min} &= a(1 - \epsilon) = \frac{\alpha}{1 + \epsilon} \\ r_{\max} &= a(1 + \epsilon) = \frac{\alpha}{1 - \epsilon} \end{aligned} \right\} \quad (8.44)$$

行星還有自轉，這時就不能把行星看成粒子！









剛體 Rigid Body 是一種特別的質點系統

剛體是任兩個粒子的距離不變的粒子系統！



非剛體的質點系統



前後為剛體的質點系統





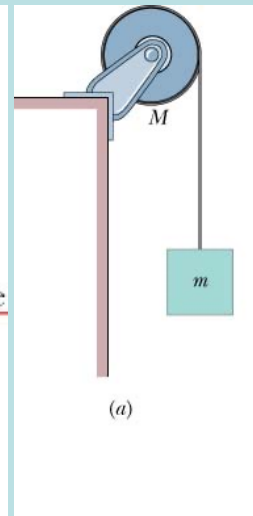
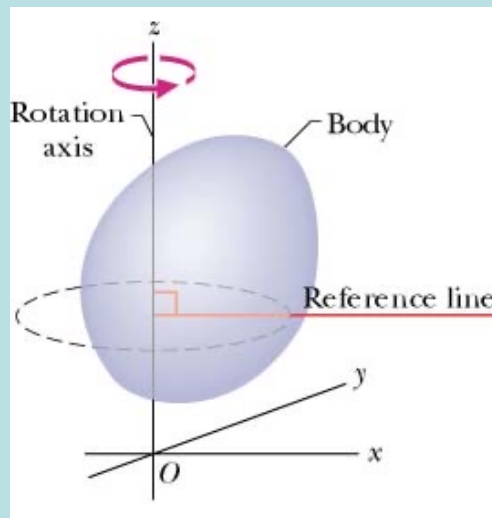
 YouTube

搜尋

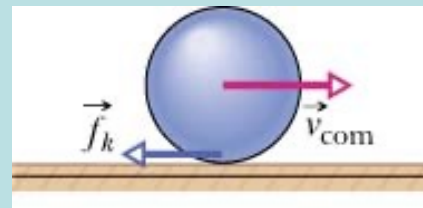
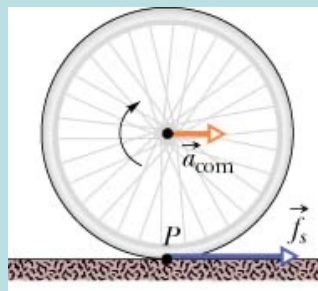


剛體的旋轉 Rotation of Rigid Body

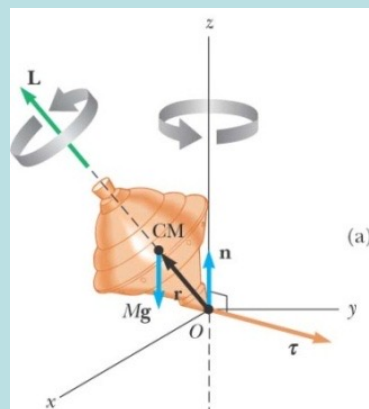
剛體繞一固定軸轉動



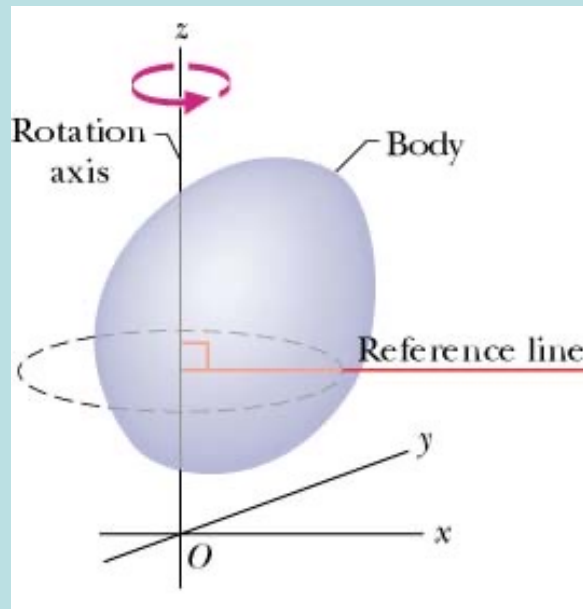
旋轉軸可以在垂直方向平移



旋轉軸可隨時間變化



剛體繞固定軸的旋轉



剛體由質點組成。我們可以先把剛體拆開來看。

讓我們先從組成剛體的質點的運動開始研究。

如有固定旋轉軸，剛體中任一點，與固定旋轉軸的距離 r_i 不隨時間改變！

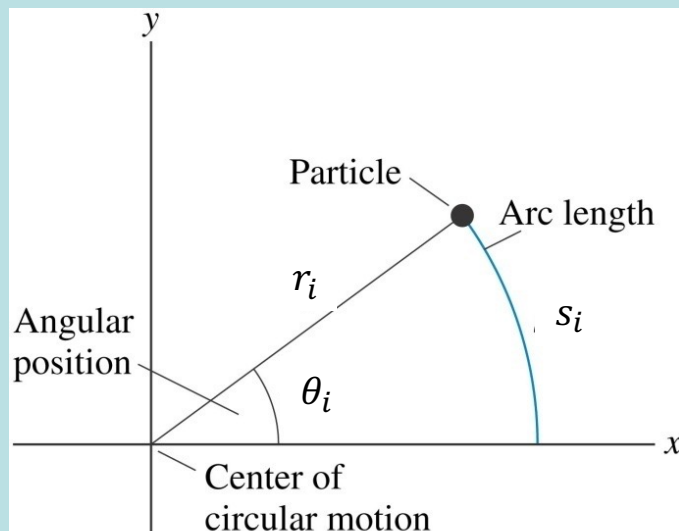
因此當剛體旋轉時，任一粒子的運動，是一圓周上的運動（不一定等速）。

因此只有旋轉，而沒有距離的改變 Δr ！

圓周上的運動以弧長表示最方便。

第 i 個質點在此圓周上的弧長記為 $s_i(t)$ ：時間的函數。

弧長可用轉角表示：由軸至質點取垂直於旋轉軸的線段 $\overline{O_i}$ ，與 x 軸間的角度 θ_i ！

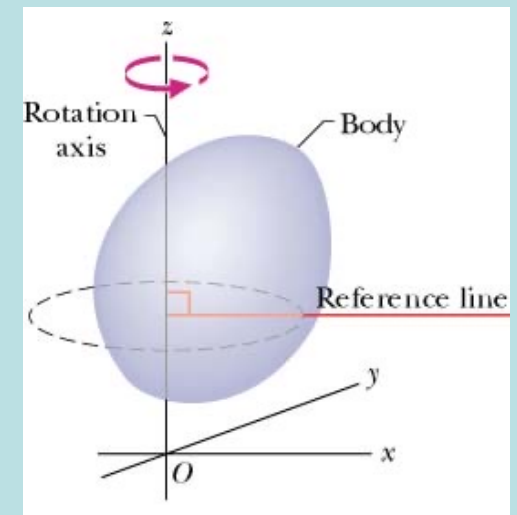


$$s_i(t) = r_i \theta_i(t)$$

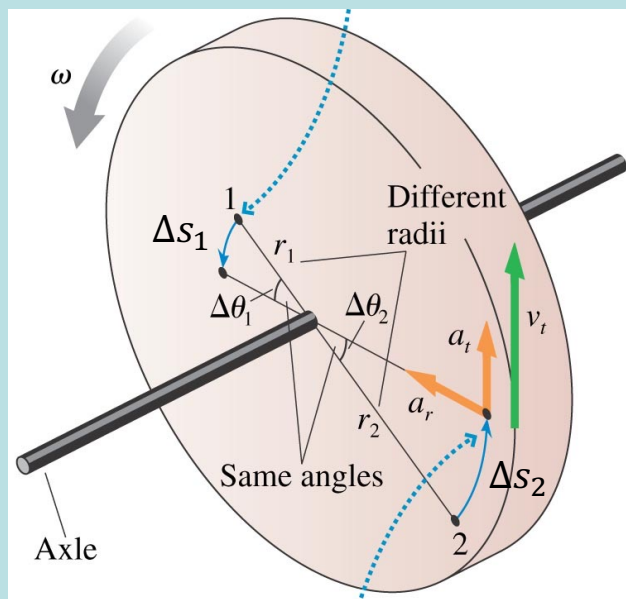
$$\Delta s_i(t) = r_i \Delta \theta_i(t)$$

角度以徑度為單位。

r_i 是距離固定軸的垂直距離。



剛體是任兩個粒子的距離不變的粒子系統！

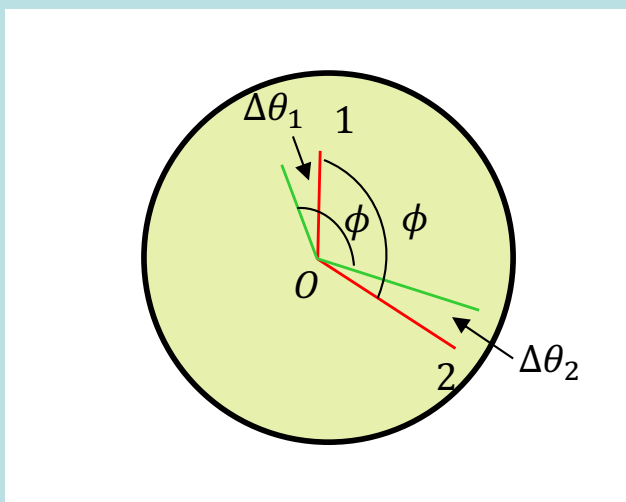


考慮剛體內任兩點：

點1,2的位移：

$$\Delta s_1 = r_1 \Delta \theta_1$$

$$\Delta s_2 = r_2 \Delta \theta_2$$



設 $\overline{O1}$ 及 $\overline{O2}$ 之間的夾角為 ϕ 。

旋轉後會保持此角度 ϕ 不變。

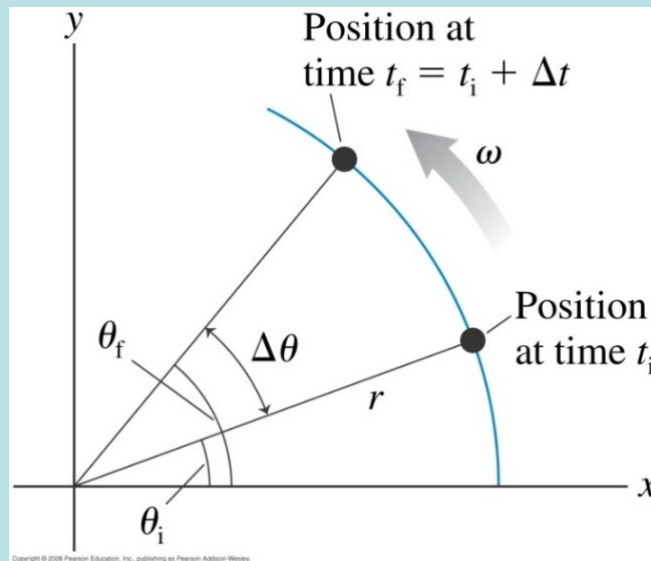
由圖見， $\overline{O1}$ 旋轉的角 $\overline{O2}$ 旋轉的角相等。

$$\Delta \theta_1 = \Delta \theta_2 \equiv \Delta \theta$$

整個剛體只有一個大家共用的角位移 $\Delta \theta$ 。

$$\Delta s_i(t) = r_i \cdot \Delta \theta(t)$$

剛體中不同位置的粒子， r 不同，位移不同。但轉角卻是一樣的 $\Delta \theta$ 。



整個剛體只有一個角位移 θ 。

剛體內所有的粒子都是一起旋轉，有同一個角位移 θ 。

所有運動弧長用同一轉角表示：

$$\Delta s_i = r_i \cdot \Delta\theta$$

質點的運動速度可以算：

$$v_t = \frac{ds_i}{dt} = r_i \frac{d\theta}{dt} \equiv r_i \omega$$

r_i 不隨時間改變。

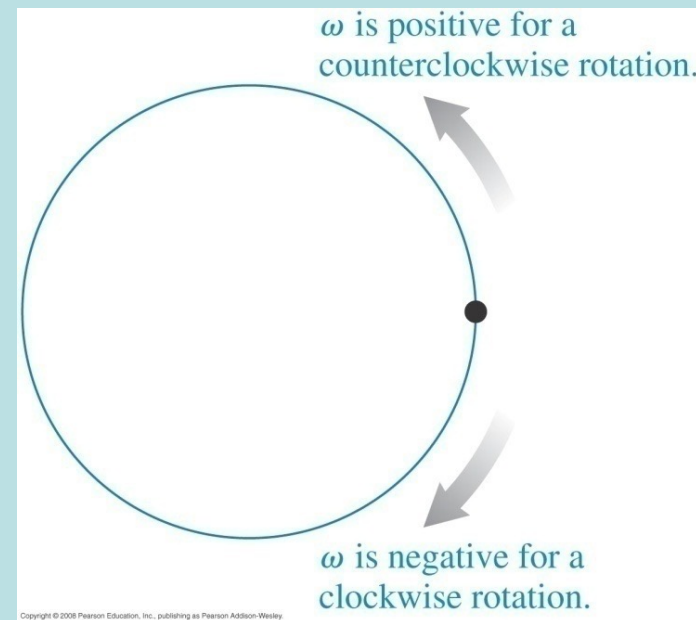
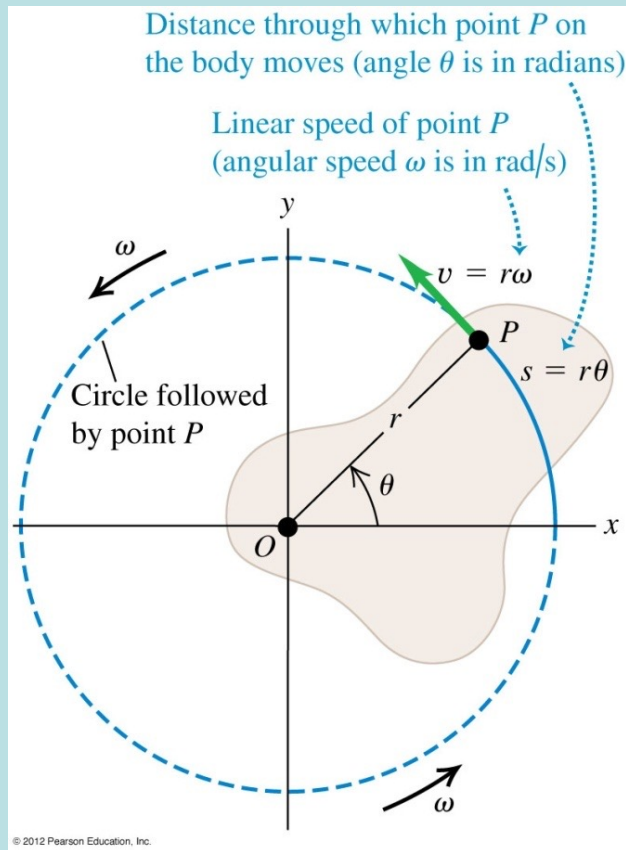
$$\omega \equiv \frac{d\theta}{dt}$$

所有質點的運動速度都可以用此一轉角的變化率表示！

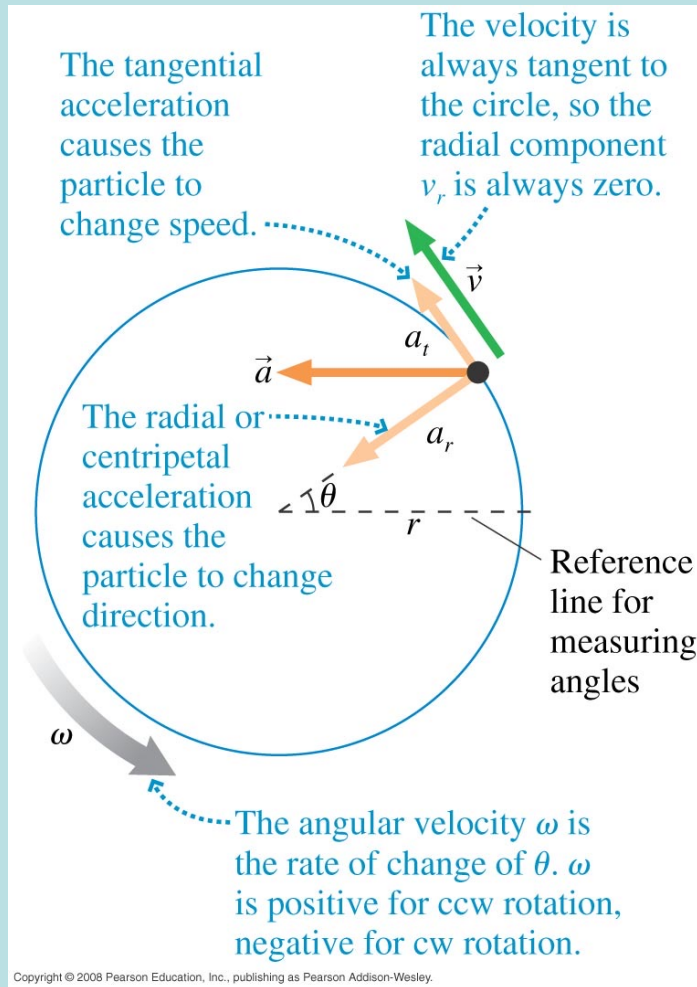
Angular Velocity 角速度

$$\omega(t) \equiv \frac{d\theta}{dt}$$

$$v_{it} = r_i \omega$$



同理：質點沿切線方向的運動加速度可以用角速度的變化率表示：



Angular Acceleration

$$\alpha(t) \equiv \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$v_{it} = r_i \omega$$

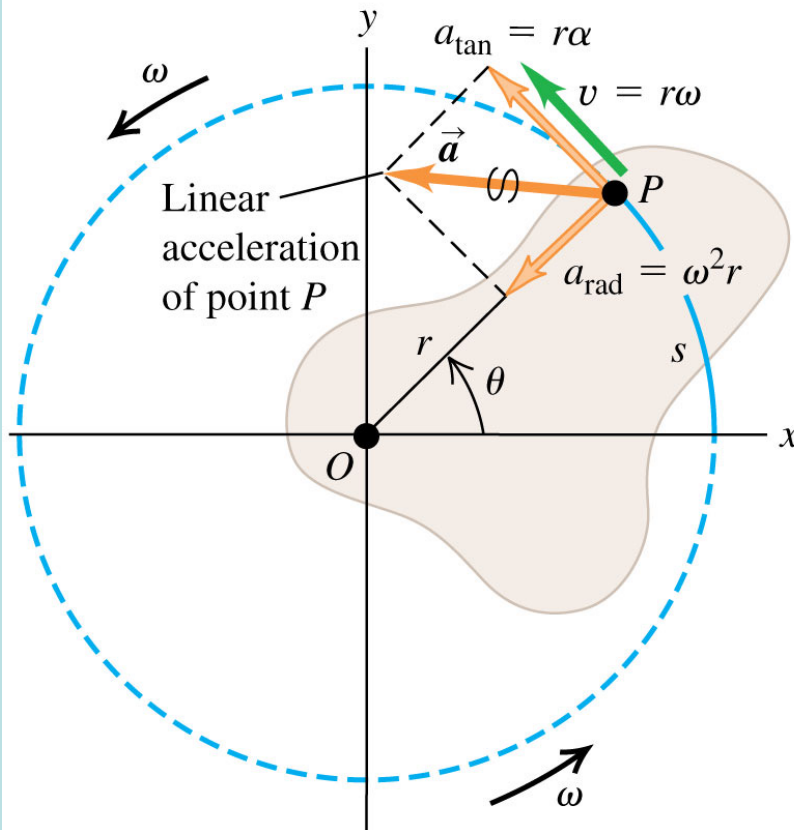
$$a_{it} = \frac{dv_{it}}{dt} = \frac{d(r_i \omega)}{dt} = r_i \frac{d\omega}{dt} = r_i \frac{d^2\theta}{dt^2} = r_i \alpha$$

$$a_{it} = r_i \alpha$$

質點沿向心方向的加速度有剛體本身為維持剛體特性無限供應。

Radial and tangential acceleration components:

- $a_{\text{rad}} = \omega^2 r$ is point P 's centripetal acceleration.
- $a_{\text{tan}} = r\alpha$ means that P 's rotation is speeding up (the body has angular acceleration).



© 2012 Pearson Education, Inc.

$$s = r\theta$$

$$\theta$$

$$v_t = r\omega$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$a_t = r\alpha$$

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

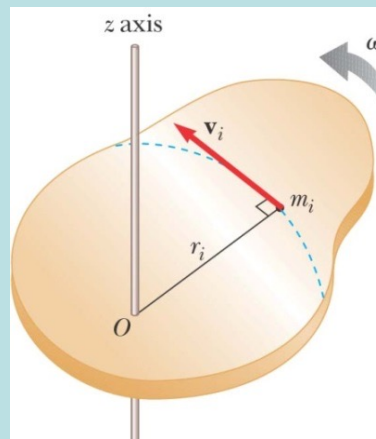
剛體內粒子只有旋轉，而沒有距離的改變 Δr ！

剛體內所有的粒子都是一起旋轉，有同一個角位移 θ 。

一個剛體的旋轉狀態可以用一個時間函數來表示：旋轉角： $\theta(t)$

它的作用如同一維運動的座標一般，但 θ 不是位置座標，

對剛體中的一個粒子來說位置是 s 。 s 才是真正的運動座標。



注意不同處的粒子 r 不同，但 θ 都一樣

$$s_i = r_i \theta$$

$$v_{it} = r_i \omega$$

$$a_{it} = r_i \alpha$$

了解此一維運動就了解整個剛體所有粒子的運動了！

$\theta(t)$



$x(t)$

Angular speed $\omega = d\theta/dt$

Angular acceleration $\alpha = d\omega/dt$

Linear speed $v = dx/dt$

Linear acceleration $a = dv/dt$

剛體繞固定軸的轉動與一維運動似乎有一對一對應

例如等角加速度運動：

$$\text{If } \alpha = \text{constant} \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_f = \omega_i + \alpha t \\ \theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \\ \omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i) \end{array} \right.$$

$$\text{If } a = \text{constant} \quad \left\{ \begin{array}{l} v_f = v_i + at \\ x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2} at^2 \\ v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i) \end{array} \right.$$

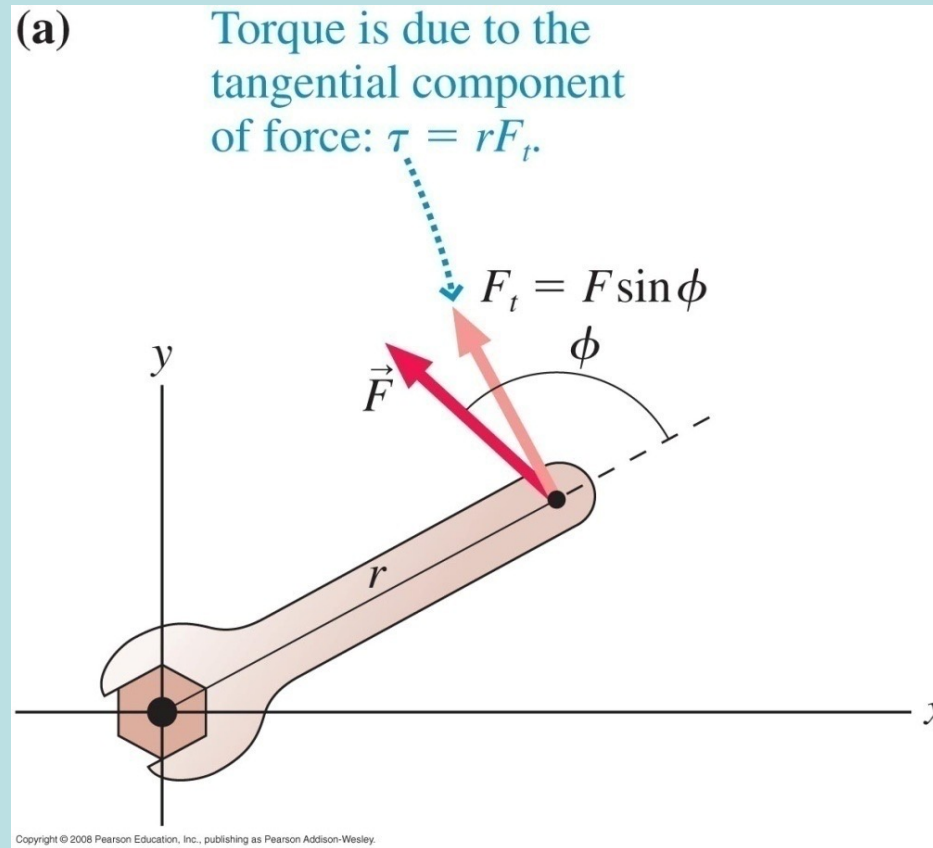
那一維運動的力在剛體轉動的對應是甚麼？

?



F

此“力的對應”應該與力及施力的位置同時有關！



而平行於 r 的力分量因為剛體形狀不變，沒有效果。

因此，將垂直於 r 的力分量乘上 r ，這個物理量可以帶動「旋轉的增加」！

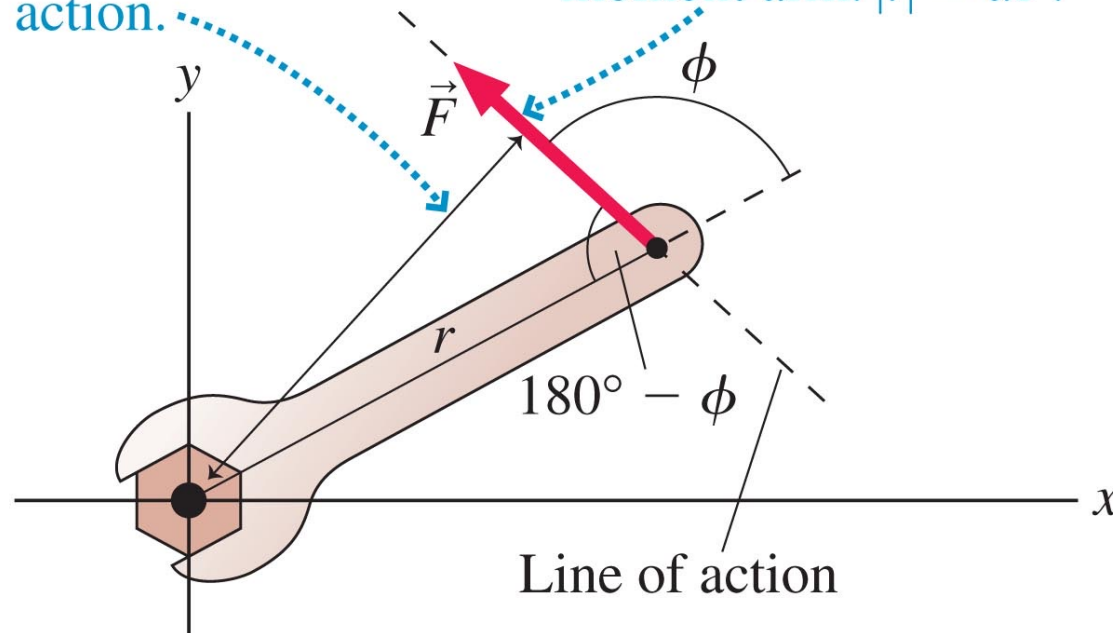
$$F_t \cdot r = F \sin \phi \cdot r \equiv \tau$$

$$F_t \cdot r = F \sin \phi \cdot r = Fd$$

此式也可用力臂表示！

(b) The moment arm $d = r \sin \phi$ is the distance between the pivot point and the line of action.

Torque is the force multiplied by the moment arm: $|\tau| = dF$.

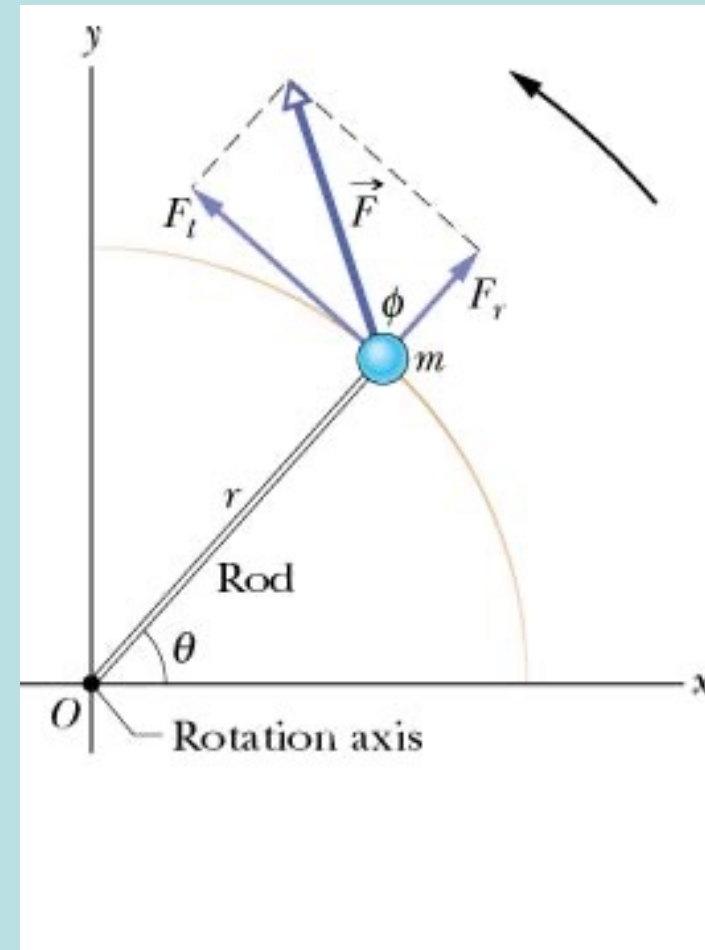


利用”功”來推理

$$W = \vec{F}_t \cdot \Delta \vec{r}_t = F_t \cdot \Delta s = F_t \cdot r \Delta \theta \equiv \tau \Delta \theta$$

正好與一維運動的功對應：

$$W = F \cdot \Delta x$$



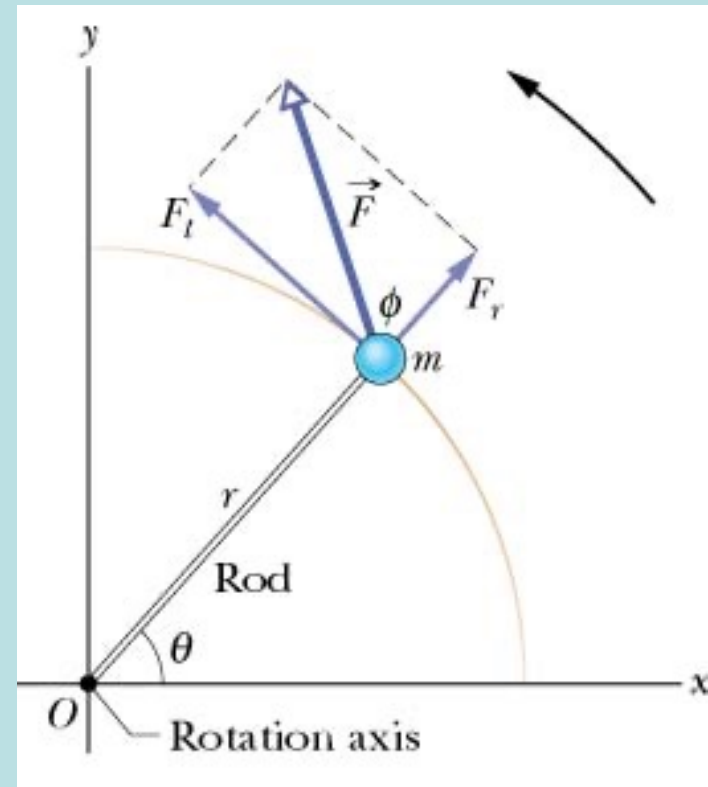
大膽的猜想：一維運動的力在剛體轉動的對應是力矩！

力矩 Torque 扭力

τ

F

$$\tau = r \cdot F_t = r \cdot F \sin \phi = |\vec{r} \times \vec{F}|$$



考慮一個剛體所受的總力矩：

設剛體中第 i 個粒子，所受力矩為 τ_i ：

$$\tau_i = r_i \cdot F_{it} = r_i \cdot m_i a_{it} = r_i \cdot m_i r_i \alpha = m_i r_i^2 \alpha$$

$$a_{it} = r_i \alpha$$

對整個剛體來說，總力矩為：

$$\tau = \sum_i \tau_i = \sum_i (m_i r_i^2 \alpha) = \left[\sum_i (m_i r_i^2) \right] \cdot \alpha \equiv I \alpha$$

內力的力矩正好抵消
只有外力矩需要考慮

與運動狀態無關
由剛體形狀決定

完全由運動狀態決定

對應的牛頓第二定律

$$\tau = I \alpha$$

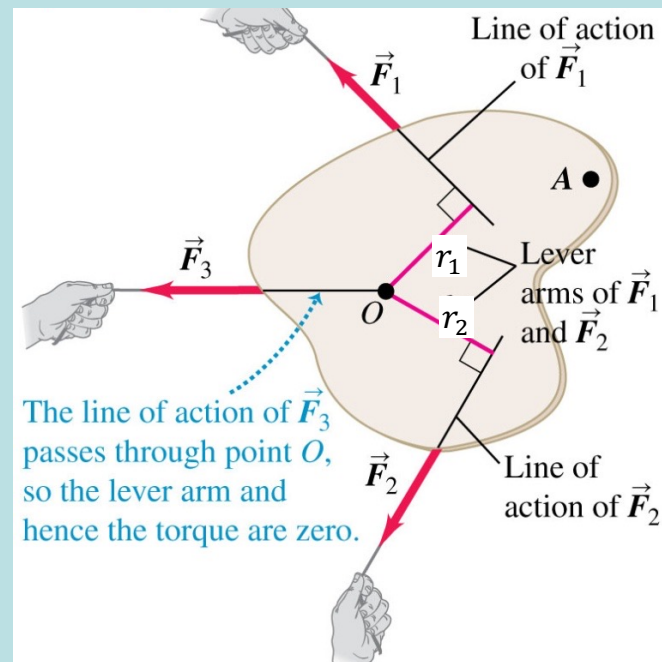
I



m

轉動慣量

一維運動的質量在剛體轉動的對應是轉動慣量！



$$I \equiv \sum_i (m_i r_i^2)$$

$$\theta(t)$$



$$x(t)$$

Angular speed $\omega = d\theta/dt$

Angular acceleration $\alpha = d\omega/dt$

Linear speed $v = dx/dt$

Linear acceleration $a = dv/dt$

轉動與一維運動似乎有一對一對應

$$\tau$$



$$F$$

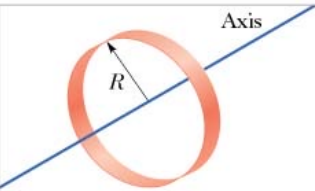
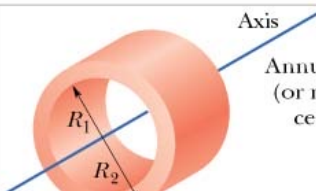
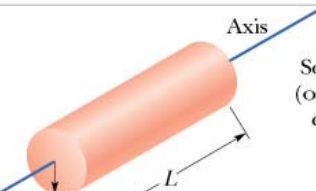
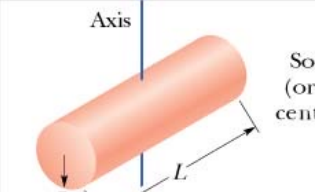
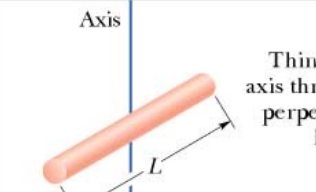
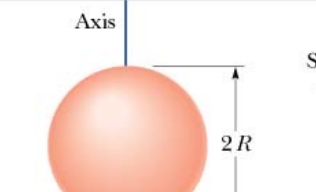
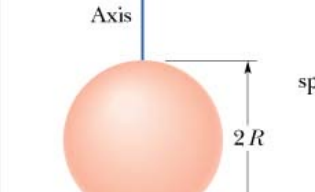
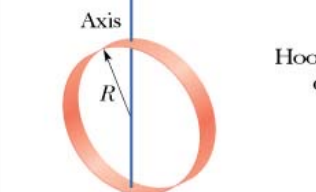
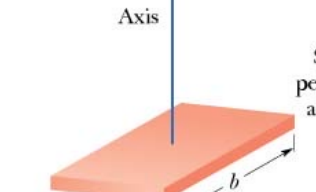
$$\tau = I\alpha$$



$$F = ma$$

一維的角運動由對應的牛頓第二定律控制

轉動慣量 I

 Hoop about central axis $I = MR^2$ (a)	 Annular cylinder (or ring) about central axis $I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$ (b)	 Solid cylinder (or disk) about central axis $I = \frac{1}{2}MR^2$ (c)
 Solid cylinder (or disk) about central diameter $I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$ (d)	 Thin rod about axis through center perpendicular to length $I = \frac{1}{12}ML^2$ (e)	 Solid sphere about any diameter $I = \frac{2}{5}MR^2$ (f)
 Thin spherical shell about any diameter $I = \frac{2}{3}MR^2$ (g)	 Hoop about any diameter $I = \frac{1}{2}MR^2$ (h)	 Slab about perpendicular axis through center $I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$ (i)

$$I \equiv \sum_i (m_i r_i^2)$$

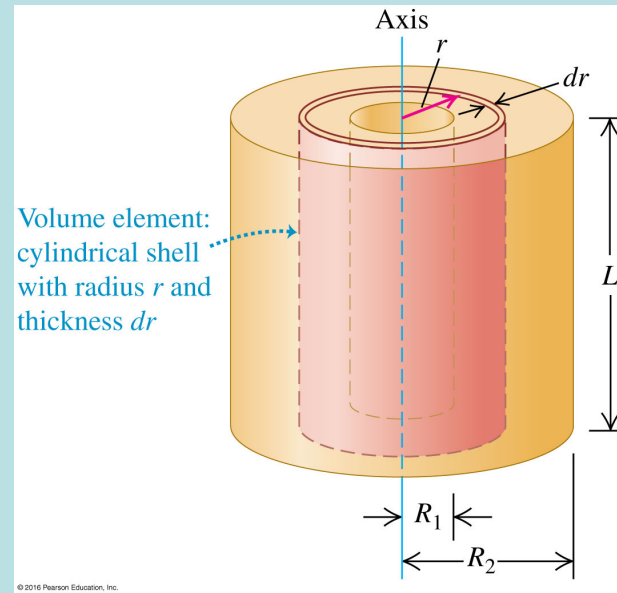
$$I = \lim_{\substack{\Delta m_i \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \sum_i (\Delta m_i \cdot r_i^2)$$

物質若連續分佈

$$I \equiv \int r^2 dm$$

慣量是一體積分

計算中空圓柱的轉動慣量！



$$I \equiv \int r^2 dm$$

注意 r 是距固定軸的垂直距離！

收集所積函數相同的體積，在此就是相同 r 的物質，計算其體積：

$$\begin{aligned} I &\equiv \int r^2 \rho dV = \int_{R_1}^{R_2} r^2 \rho (2\pi r L) \cdot dr = 2\pi \rho L \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr \\ &= \frac{2\pi \rho L}{4} (R_1^4 - R_2^4) = \frac{\pi \rho L}{2} (R_1^2 - R_2^2)(R_1^2 + R_2^2) \end{aligned}$$

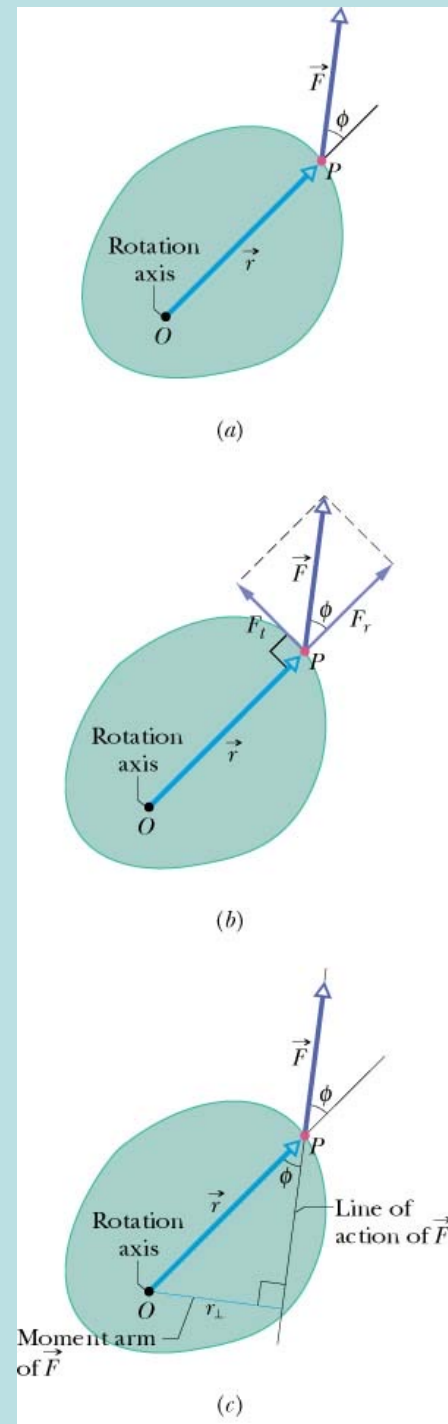
積分就是求和再取極限。

$$M = \rho V = L \rho \pi (R_1^2 - R_2^2)$$

$$I = \frac{1}{2} M (R_1^2 + R_2^2) \xrightarrow{R_1=0, R_2=R} I = \frac{1}{2} M R^2$$

力矩 Torque

$$\tau = F_t \cdot r = F \cdot r_t = |\vec{r} \times \vec{F}|$$



剛體轉動對應的牛頓第二定律：

$$\tau = I\alpha = \frac{d(I\omega)}{dt} \equiv \frac{dL}{dt}$$

$$L = I\omega$$

角動量 Angular Momentum

$$\tau = 0 \rightarrow \Delta L = 0$$

角動量守恆

旋轉動能

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \sum_i (m_i r_i^2) \cdot \omega^2 \equiv \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Useful Equations in Rotational and Linear Motion

Rotational Motion About a Fixed Axis

Angular speed $\omega = d\theta/dt$

Angular acceleration $\alpha = d\omega/dt$

Net torque $\Sigma\tau = I\alpha$

If $\alpha = \text{constant}$
$$\begin{cases} \omega_f = \omega_i + \alpha t \\ \theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i) \end{cases}$$

Work $W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta$

Rotational kinetic energy $K_R = \frac{1}{2}I\omega^2$

Power $\mathcal{P} = \tau\omega$

Angular momentum $L = I\omega$

Net torque $\Sigma\tau = dL/dt$

Linear Motion

Linear speed $v = dx/dt$

Linear acceleration $a = dv/dt$

Net force $\Sigma F = ma$

If $a = \text{constant}$
$$\begin{cases} v_f = v_i + at \\ x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2}at^2 \\ v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i) \end{cases}$$

Work $W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$

Kinetic energy $K = \frac{1}{2}mv^2$

Power $\mathcal{P} = Fv$

Linear momentum $p = mv$

Net force $\Sigma F = dp/dt$

繞固定軸的剛體旋轉與一維平移運動有一對一的對應

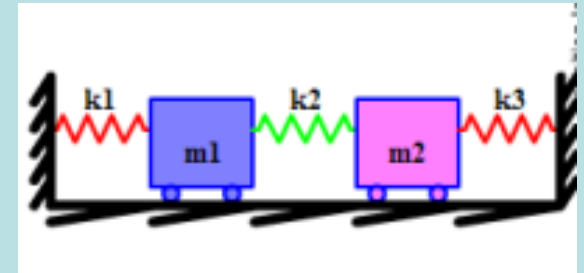
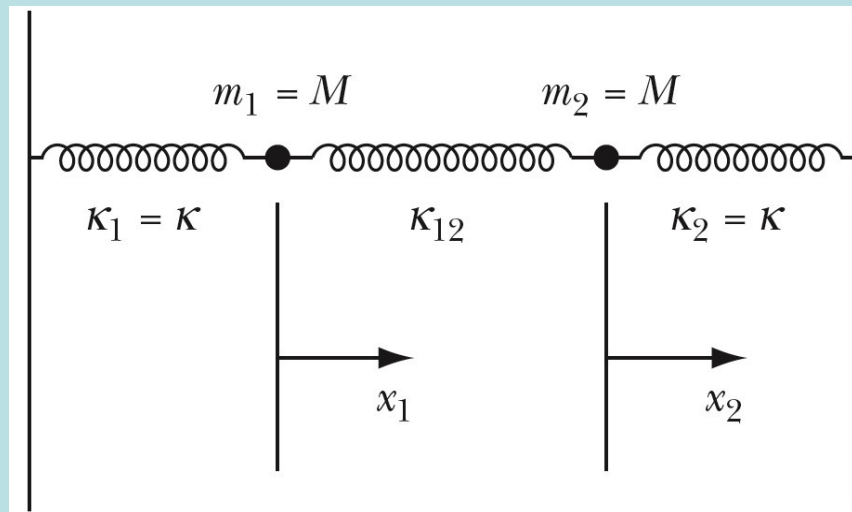
旋轉角稱為廣義座標

$\theta(t)$



$x(t)$

很類似的耦合振盪



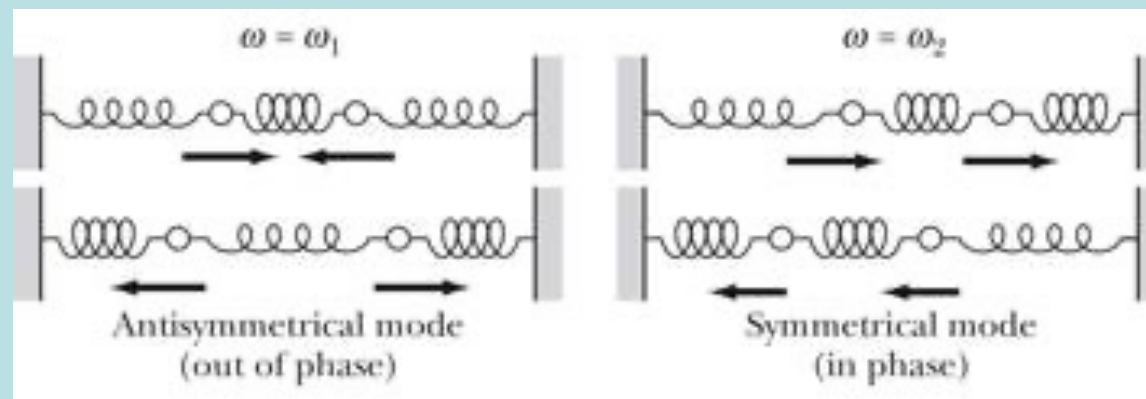
廣義座標：

$$q_1 \equiv x_1 + x_2$$

$$q_2 \equiv x_1 - x_2$$

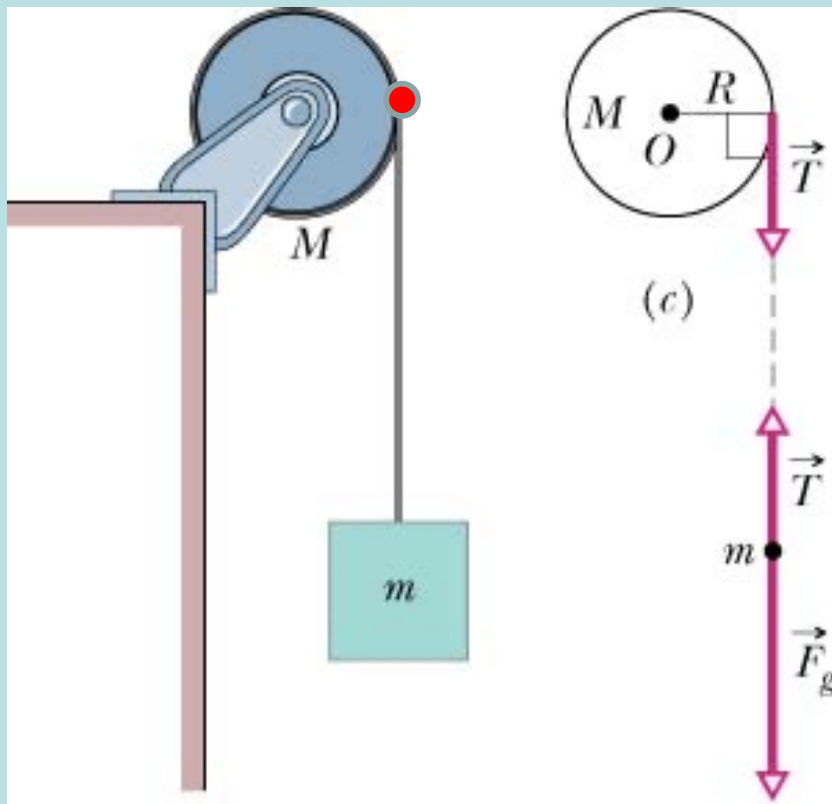
$$\frac{d^2 q_1}{dt^2} = -\omega_1^2 q_1$$

$$\frac{d^2 q_2}{dt^2} = -\omega_2^2 q_2$$



每一個粒子的平移有一個牛頓第二定律。

每一個剛體的旋轉也有一個牛頓第二定律。



$$TR = I\alpha$$

$$mg - T = ma$$

$$a = R\alpha = \frac{TR^2}{I}$$

$$mg - T = \frac{mR^2}{I}T$$

$$T = \frac{mg}{1 + \frac{mR^2}{I}}$$

$$a = \frac{g}{1 + \frac{I}{mR^2}}$$

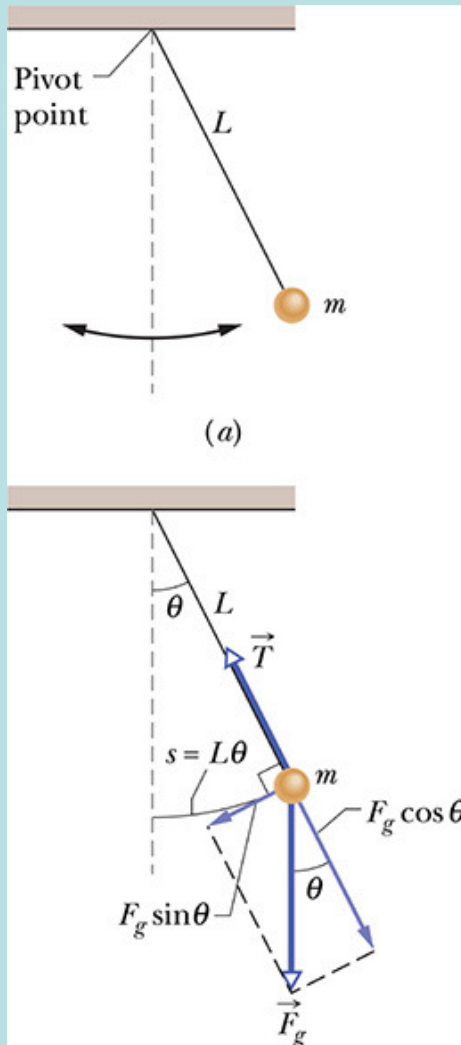
$$\omega = \alpha t$$

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\alpha = \frac{a}{R}$$



有了旋轉的牛頓第二定律，就可以寫下廣義座標 θ 的運動方程式：



$$\tau = I\alpha$$

$$mgL \sin \theta = mL^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

小角度近似： $\sin \theta \sim \theta$

$$L^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = gL\theta$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{g}{L} \theta$$



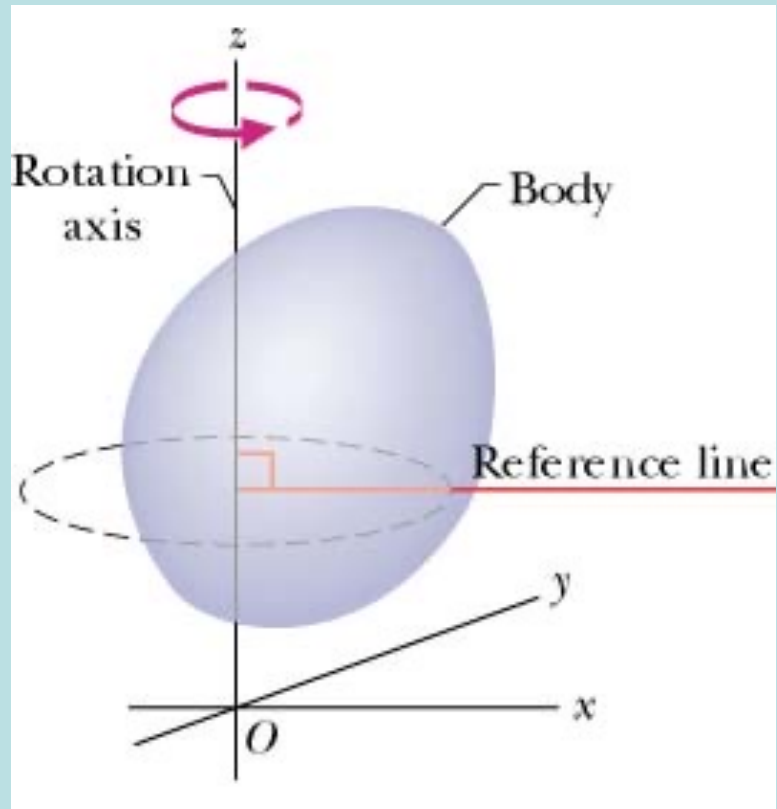
$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

單擺運動與簡諧運動滿足一模一樣的運動方程式：
因此，解完全相同。

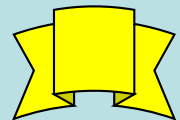
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

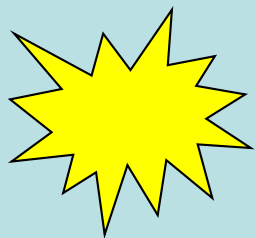
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

簡諧運動的週期 T 等於

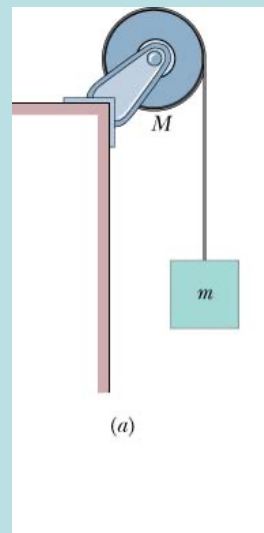
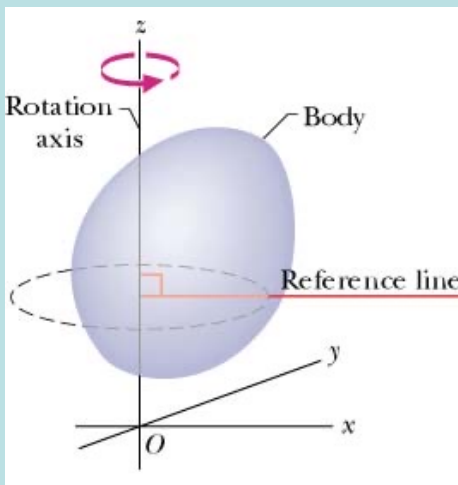


繞固定軸轉動是一個一維運動，由一個廣義座標 θ 來描述。

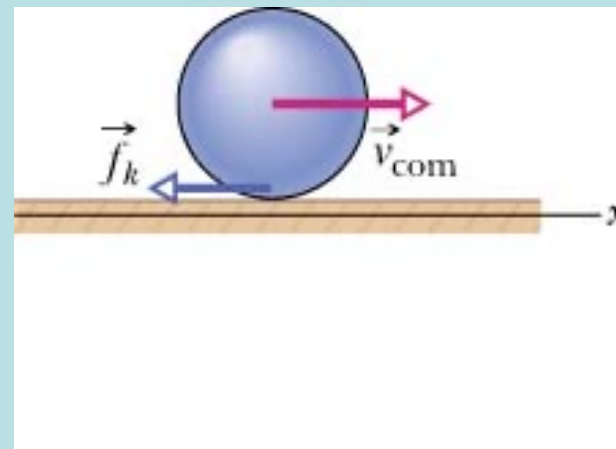
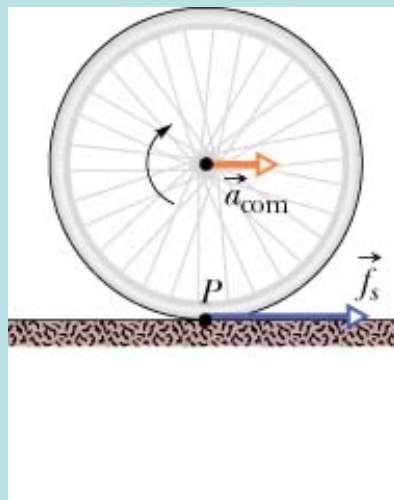




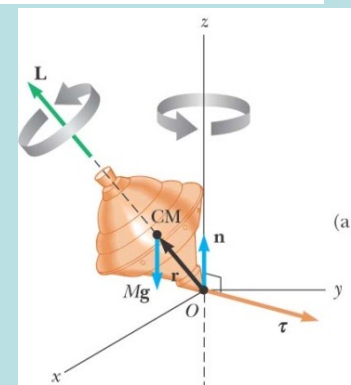
剛體繞一固定軸轉動



旋轉軸可以在垂直方向平移



旋轉軸可隨時間變化





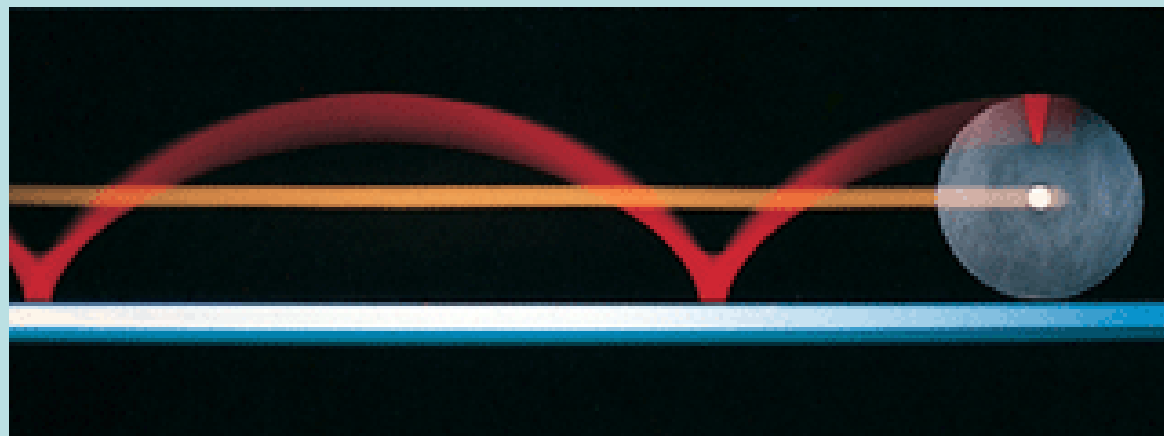
旋轉軸可以在垂直方向平移的剛體旋轉一般稱為滾動！





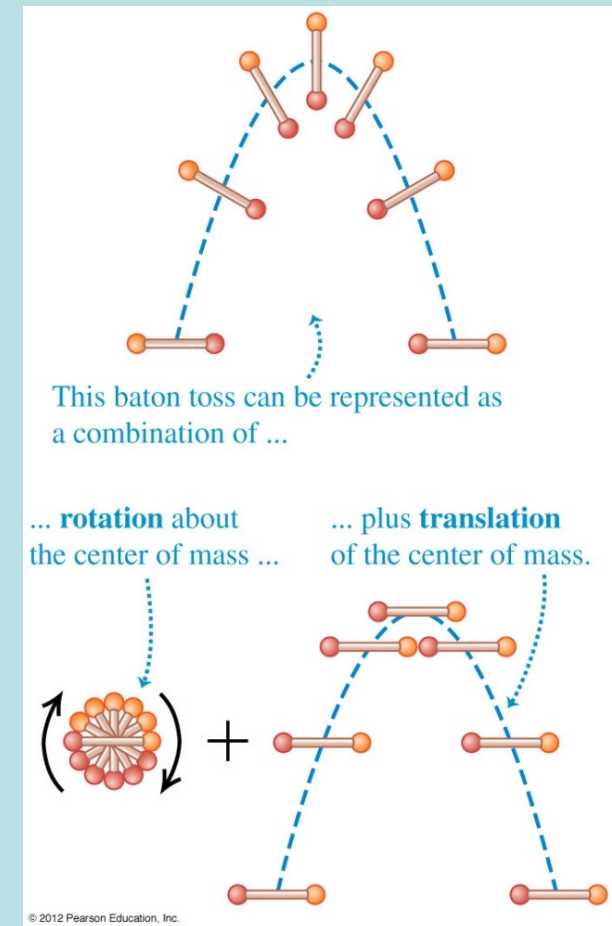
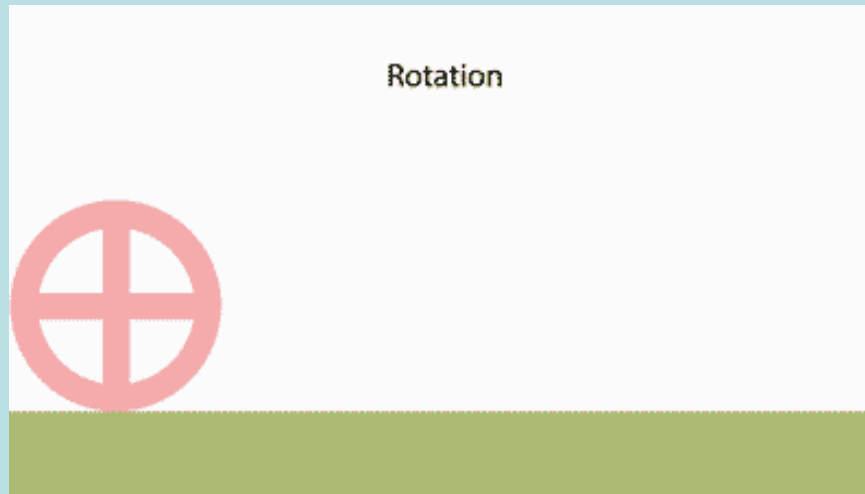


滾動是平移與轉動的組合



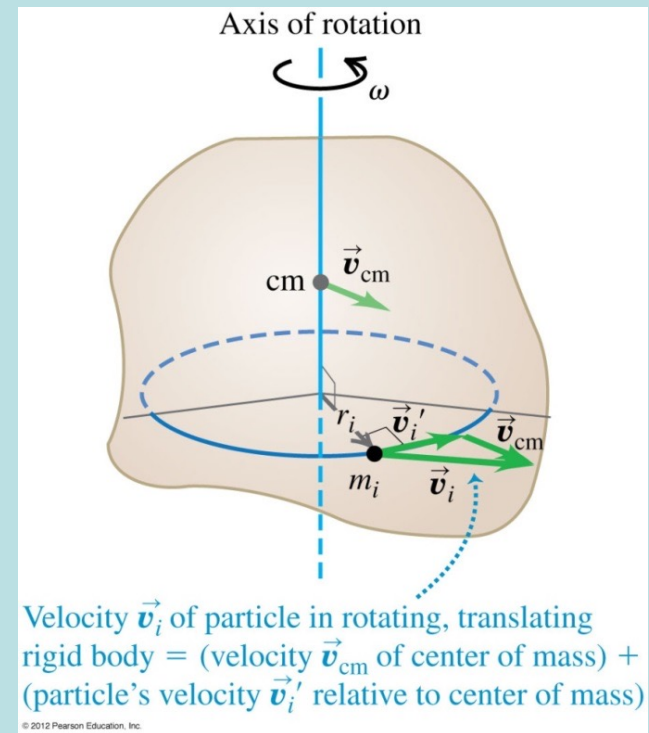
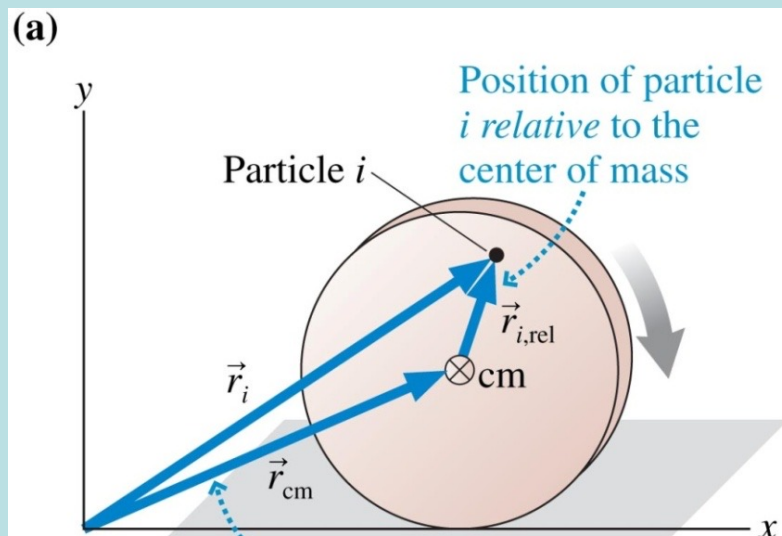
在質心座標系，輪子作一繞固定軸的純轉動

滾動是平移與轉動的組合



如果從一個隨質心一起運動的觀察者（質心坐標系）看來，剛體只能繞通過質心的一個固定軸作旋轉運動。

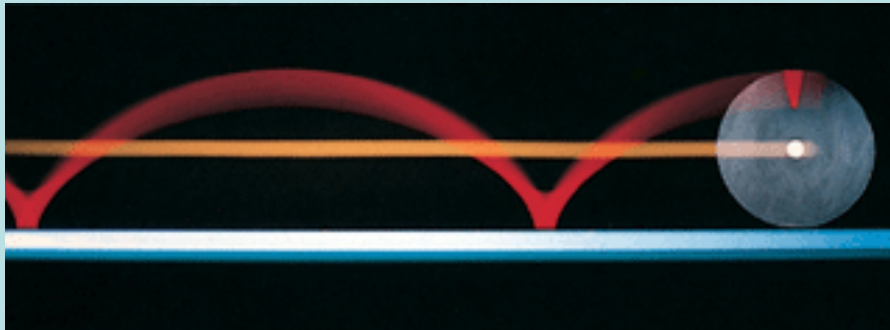
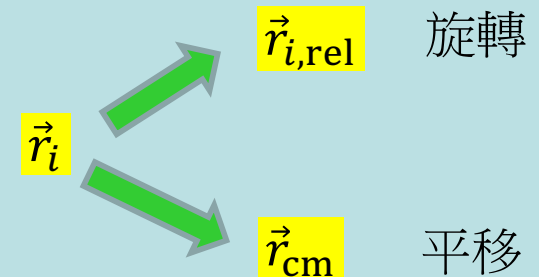
因此，之前的固定軸旋轉討論，在質心坐標系內可以適用。



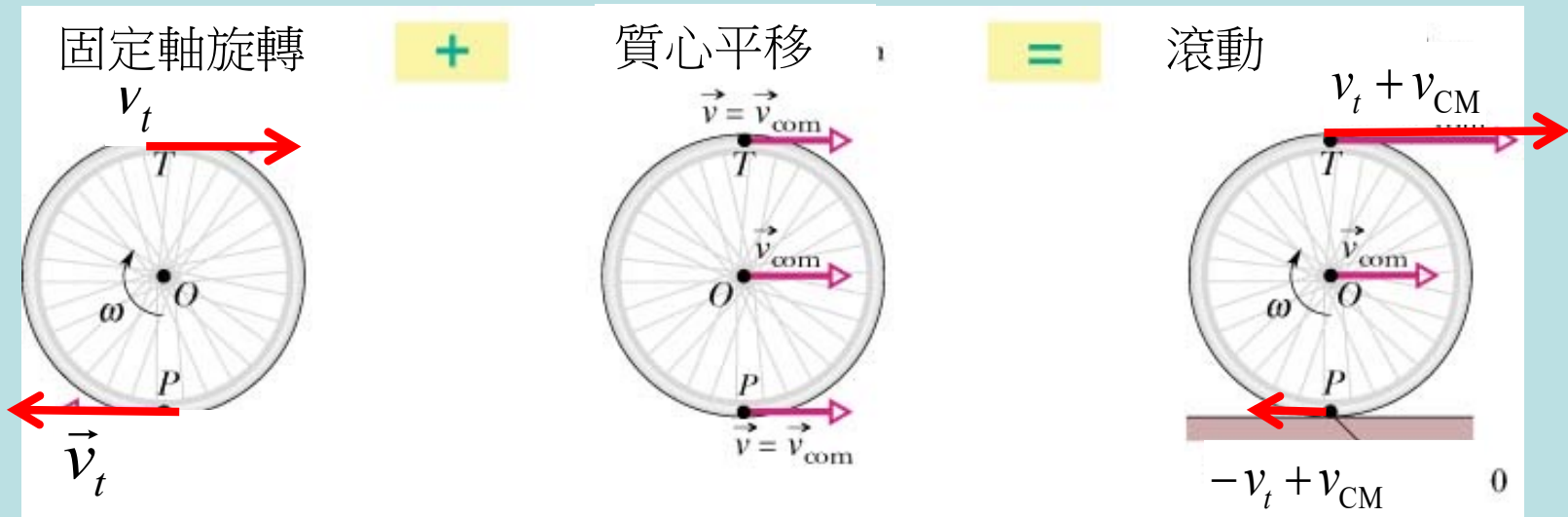
反過來說，將質心的平移與剛體繞固定軸的旋轉疊加，即是滾動！

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{i,\text{rel}} + \vec{r}_{\text{cm}}$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{i,\text{rel}} + \vec{v}_{\text{cm}}$$



滾動是平移與轉動的組合



在質心座標系中為繞固定軸旋轉

$$\tau = I\alpha$$

質心平移

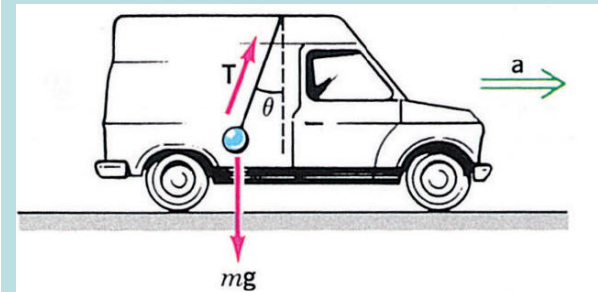
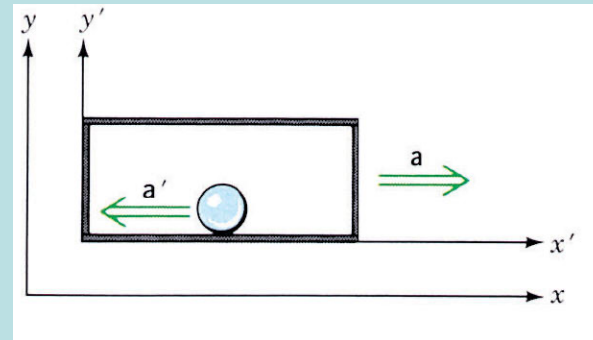
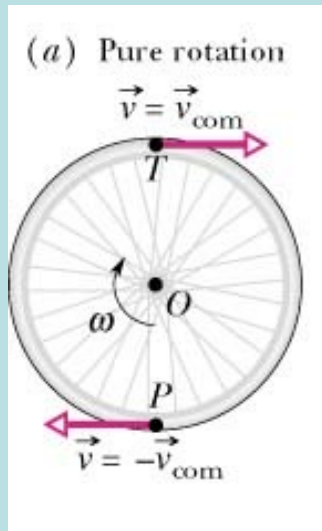
$$F_{\text{ext}} = Ma_{\text{cm}}$$

可是質心座標系不是慣性座標系！

質心座標系不是慣性座標系！

牛頓第二定律必須加入一個沒有來源的虛力Virtual Force。

$$\vec{F}_{i \text{ vir}} = -m_i \vec{a} \quad \text{對任一物體，虛力的加速度是一樣的。}$$



計算虛力所做的力矩， $r_{\perp}$ 是力臂：投影於垂直方向的距離：

$r_{\perp}$ 是力臂：投影於垂直 $\vec{F}_{i \text{ vir}} = -m_i \vec{a}$ 方向的距離：

$$\tau_{\text{vir}} = \sum_i (r_{\perp} \cdot F_{i \text{ vir}}) = - \sum_i (r_{\perp} \cdot m_i a) = - \left[\sum_i (r_{\perp} \cdot m_i) \right] \cdot a = 0$$

在質心座標系中
為繞固定軸旋轉

$$\tau = I\alpha$$

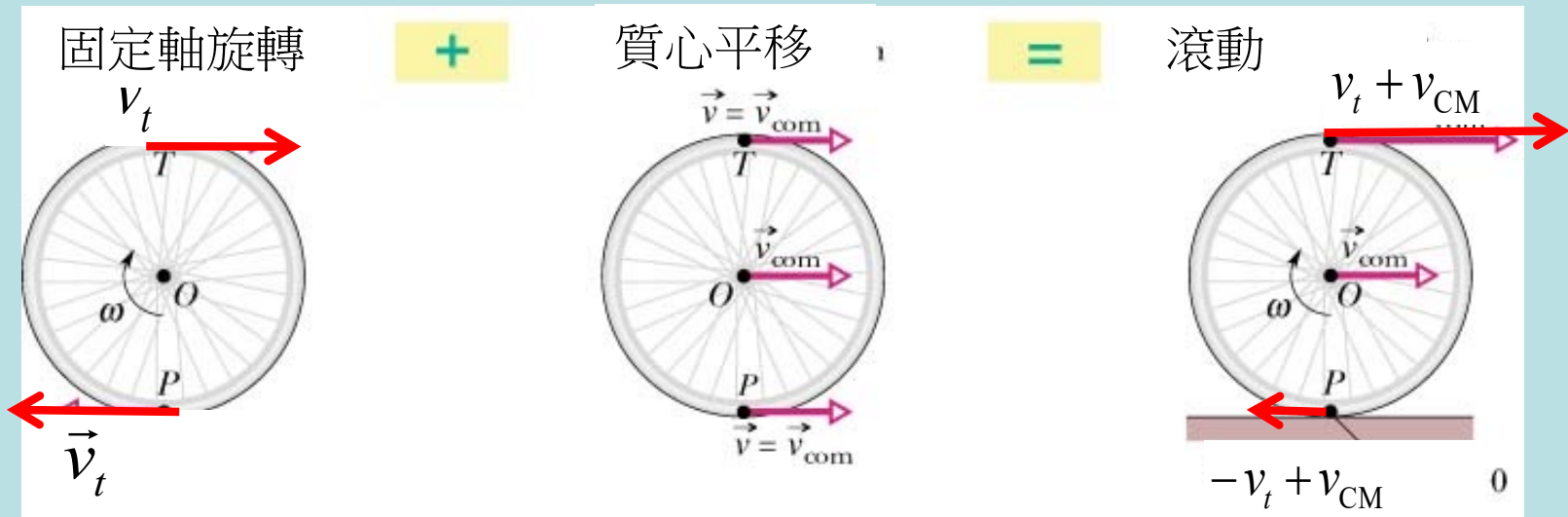
因為質心在原點，距離 r_{cm} 為零。

$$\sum_i (r_{\perp} \cdot m_i) = M r_{\text{CM}\perp} = 0$$

零距離投影於垂直 $-\vec{a}$ 方向的距離 $r_{\text{cm}\perp}$ 還是零：

在質心座標系，虛力的力矩正好抵消

滾動由兩個牛頓動定律來描述



繞固定軸旋轉的剛體的牛頓第二定律

$$\tau = I\alpha$$

質心遵守的牛頓第二運動定律

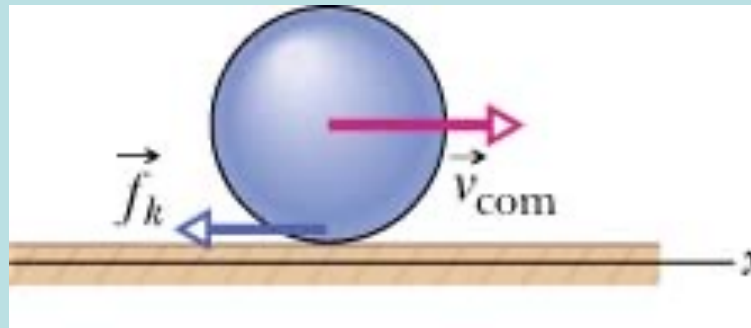
$$F_{\text{ext}} = Ma_{\text{cm}}$$

摩擦力在滾動現象扮演重要角色：

一種滾動是帶著滑動的滾動

球緣與地面的接觸點相對於地面是滑動的！

地面對球施予動摩擦力：摩擦力完全由正向力決定。



質心平移

$$-f_k = -Mg\mu_k = Ma_{\text{cm}}$$



$$a_{\text{cm}} = -g\mu_k$$

減速

旋轉（設順
時針為正）

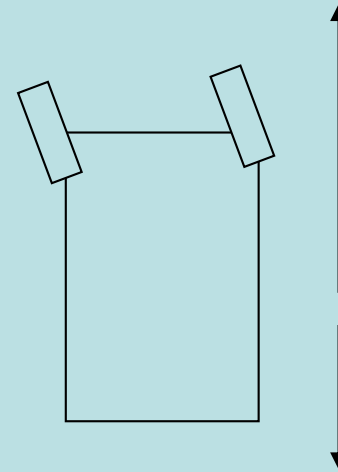
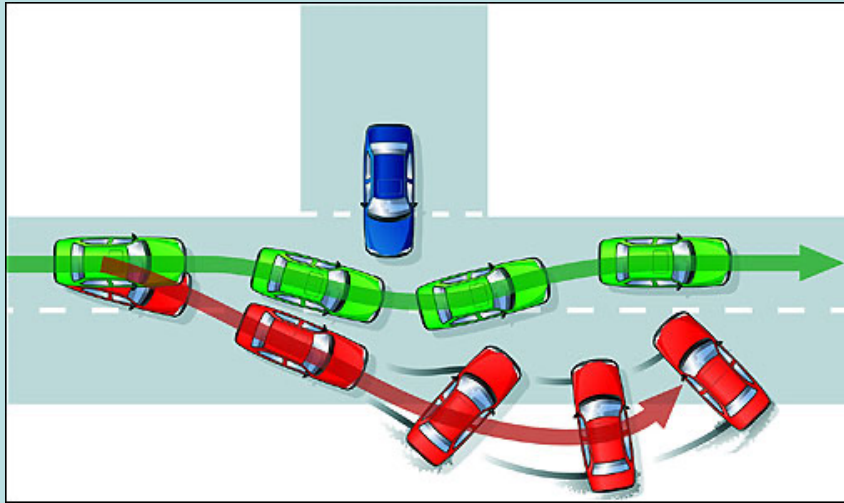
$$\tau = Rf_k = RMg\mu_k = I\alpha$$



$$\alpha = \frac{RMg\mu_k}{I}$$

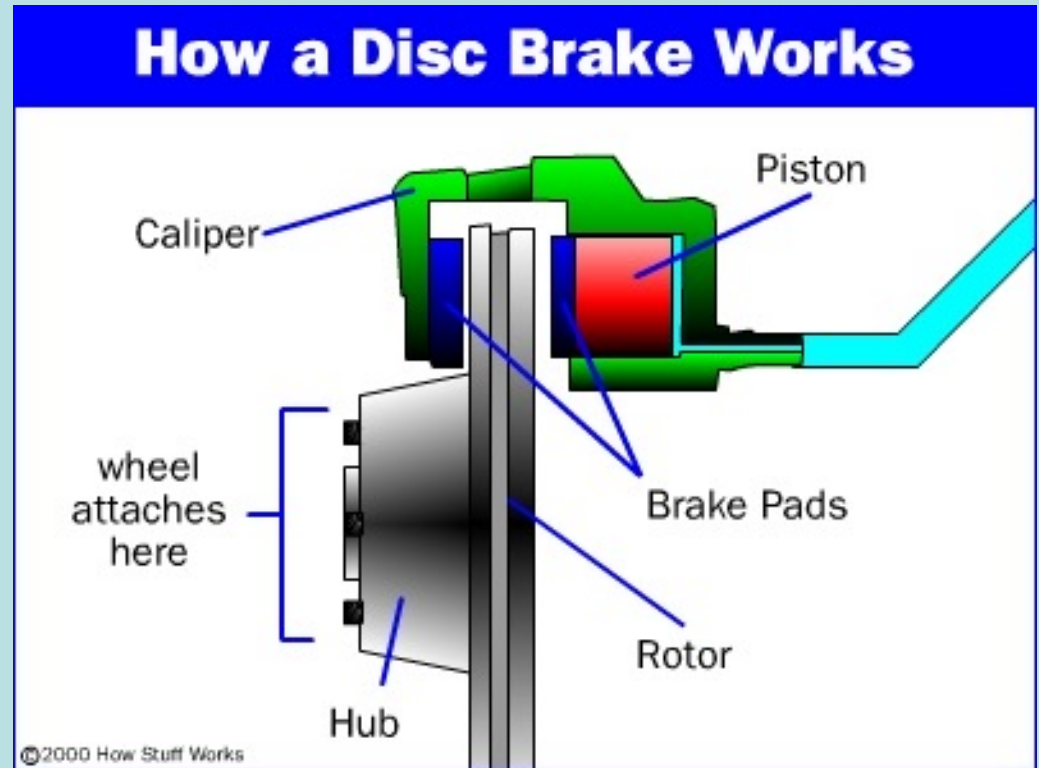
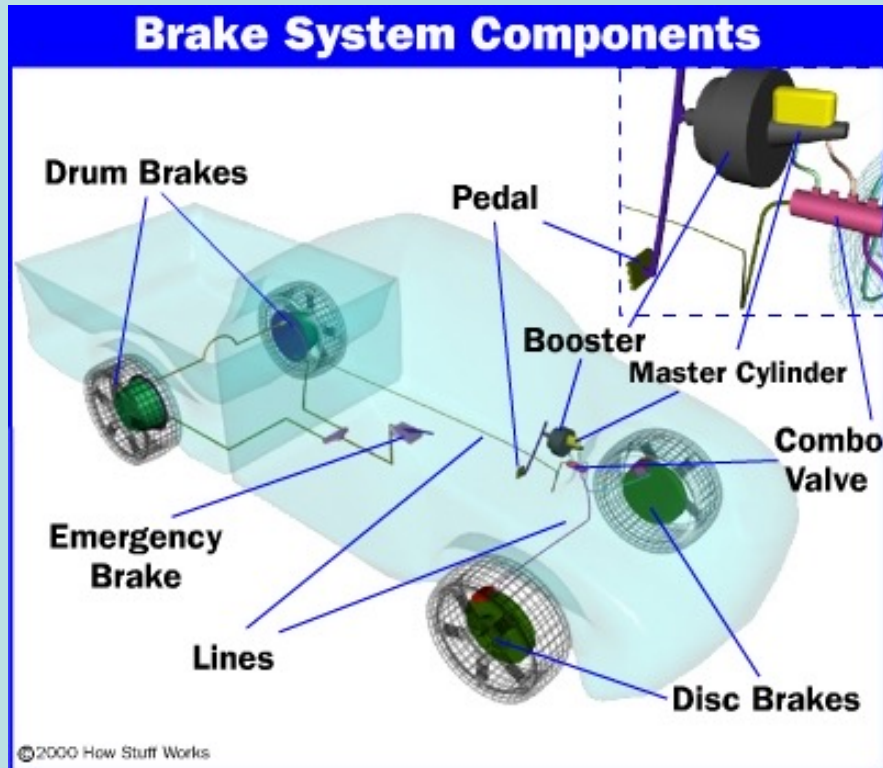
加速旋轉

質心平移運動與相對於質心的旋轉，基本上是獨立分離的兩個運動。



帶著滑動的滾動並不是正常的汽車行駛狀態，
如果旋轉與平移獨立，你操控輪胎的旋轉，將無法影響車子的平移！

車子的剎車是車子的一部分，並不直接施力於車子的平移運動！



剎車是作用於輪軸，
所以是減小輪子的轉動速度。
踩煞車是使輪胎轉動變慢！

正常的汽車行駛狀態

平滑滾動，Smooth Rolling

無滑動的滾動 Rolling without slipping

平滑滾動，球緣與地面的接觸點相對於地面是靜止的！

地面對球施予靜摩擦力。摩擦力大小由情況決定。

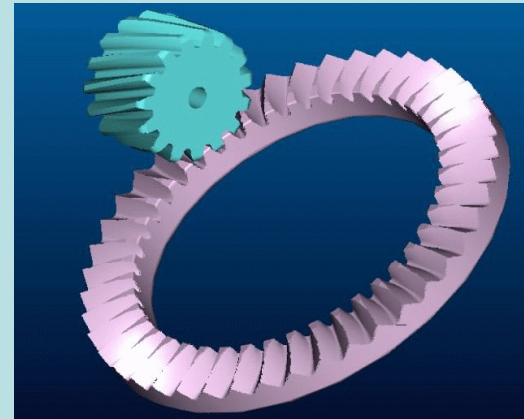
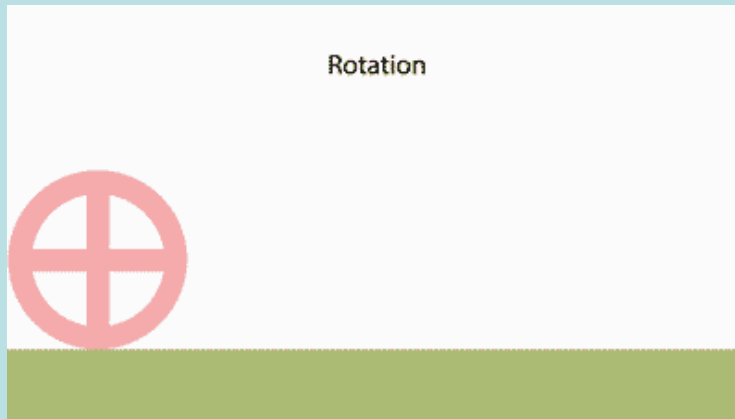


為了保持球緣與地面的接觸點是靜止的（平滑滾動）

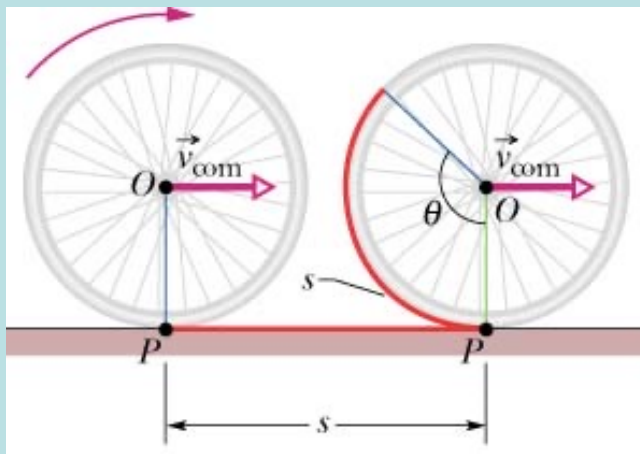
滾動是移動與轉動兩者協調進行！

質心平移與旋轉相關。

踩煞車使輪胎轉動變慢，同時也會使平移變慢！



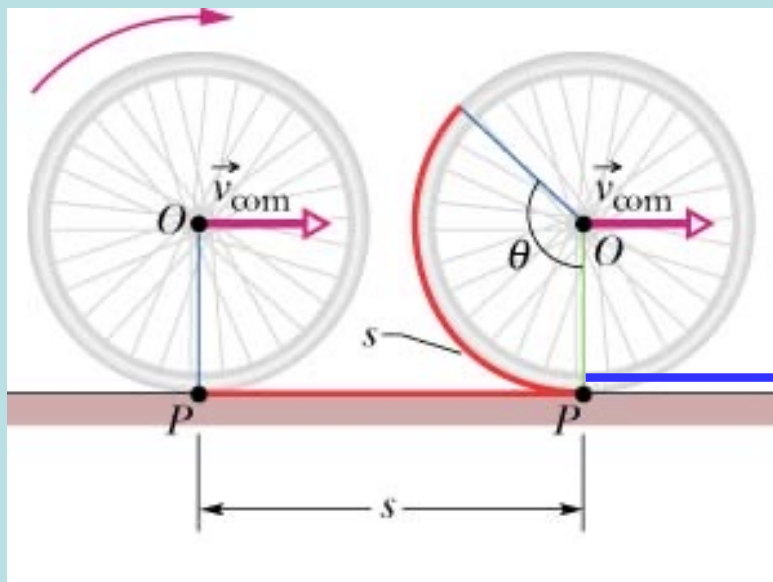
質心的移動距離必須等於，起始時，輪緣上的接觸點，所轉過的弧長！



$$\Delta x_{\text{cm}} = s = R\theta$$

平滑滾動條件

質心的移動距離必須等於，輪緣上的接觸點，所轉過的弧長！



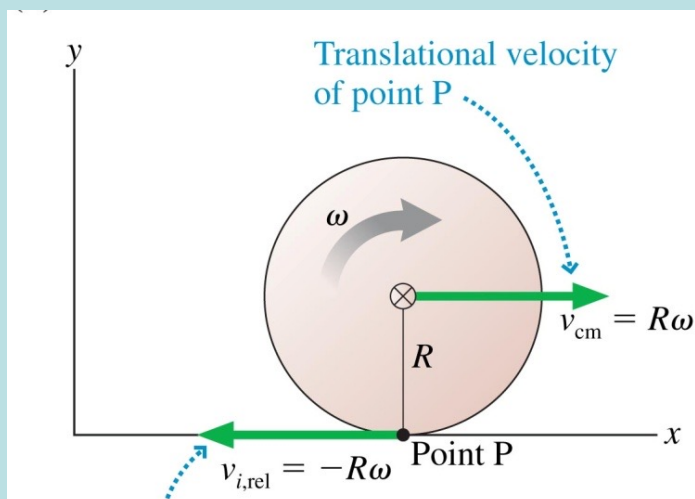
$$x_{\text{cm}} = s = R\theta$$

取微分：

$$v_{\text{cm}} = R\omega$$

$$a_{\text{cm}} = R\alpha$$

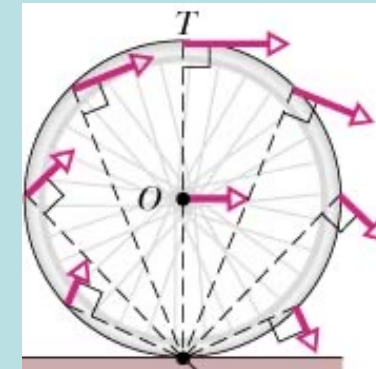
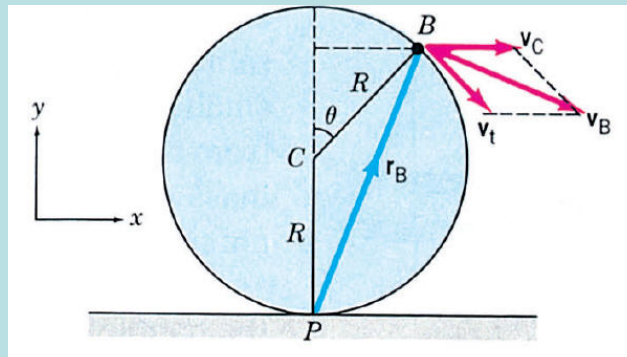
質心平移與旋轉是連鎖的！



因為無滑動，輪面與地面之間是靜摩擦
這個條件決定了靜摩擦力的大小。



純滾動等於平移與對應的轉動的組合。



$$\vec{v}_i = \vec{v}_{i,\text{rel}} + \vec{v}_{\text{cm}}$$

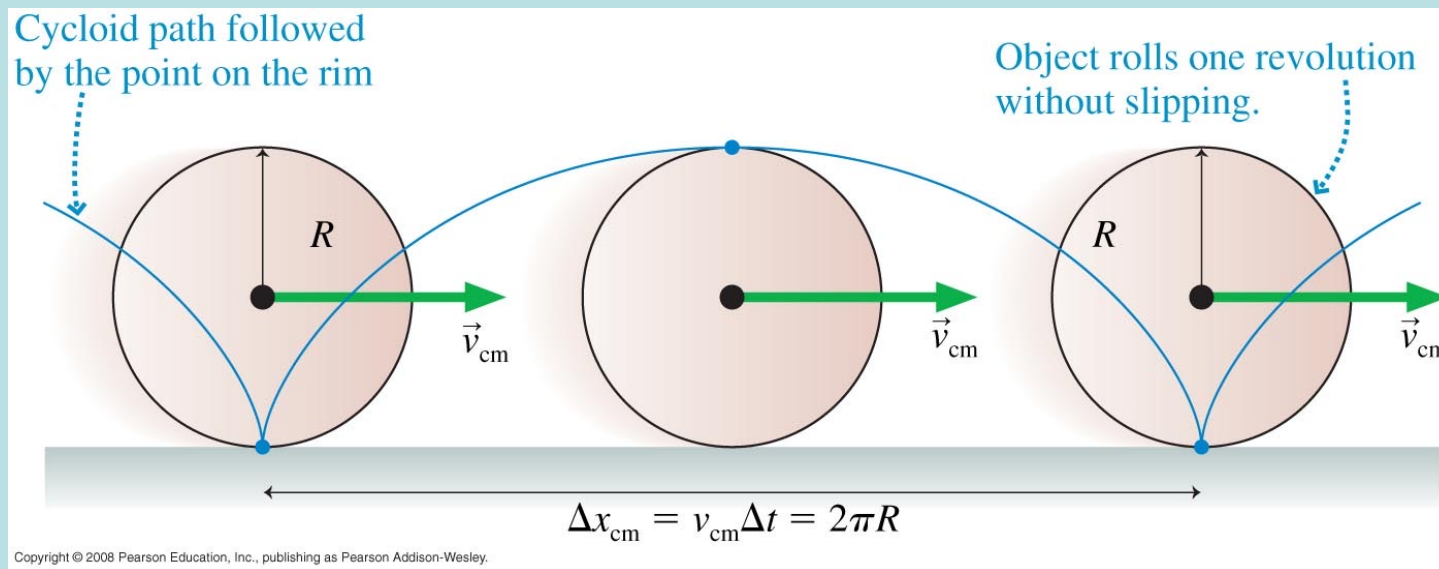
$$v_{i,\text{rel}} = r_i \omega \quad v_{\text{cm}} = R\omega$$

Translation of center of mass:
velocity $\vec{v}_{\text{cm}}$

Rotation around center of mass:
for rolling without slipping,
speed at rim = v_{cm}

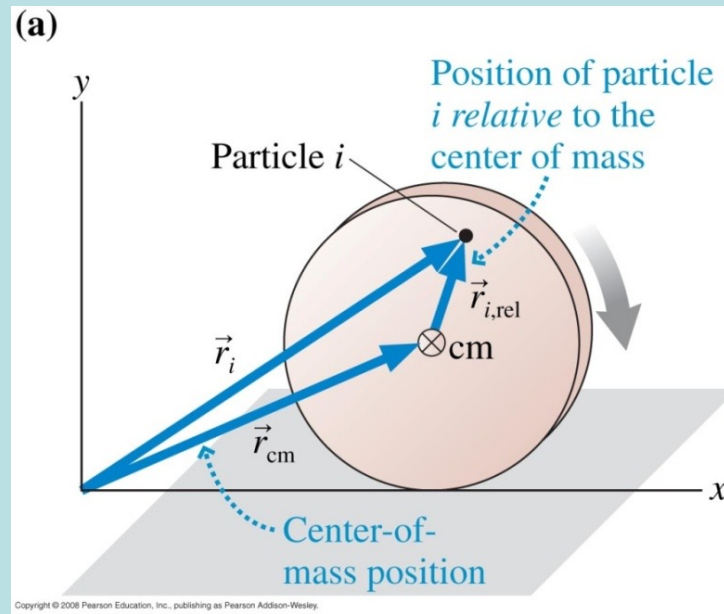
Combined motion

Wheel is instantaneously at rest where it contacts the ground.



$$\vec{r}_i = \vec{r}_{i,\text{rel}} + \vec{r}_{\text{cm}}$$

滾動是平移與轉動的組合



$$\vec{r}_i = \vec{r}_{i,rel} + \vec{r}_{cm}$$

對邊緣上的一點：

$$\vec{r}_{cm} = (v_{cm}t, 0)$$

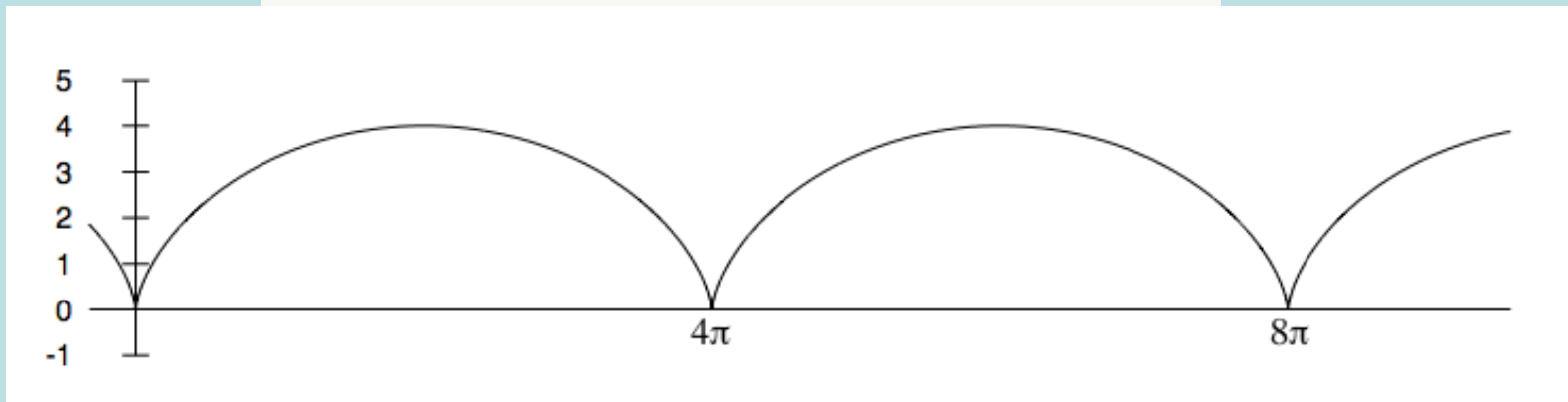
$$\vec{r}_i = \vec{r}_{i,rel} = (R \cos \omega t, R \sin \omega t + R)$$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{i,rel} + \vec{r}_{cm} = (v_{cm}t + R \cos \omega t, R \sin \omega t + R)$$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{i,\text{rel}} + \vec{r}_{\text{cm}} = (v_{\text{cm}}t + R \cos \omega t, R \sin \omega t + R)$$

$$x = R \sin^{-1} \left(\frac{y}{R} - 1 \right) + \sqrt{R - (y - R)^2}$$

擺線Cycloid



例一：斜面上的平滑滾動

$$Mg \sin \theta - f_s = Ma_{\text{cm}} \quad \text{質心平移。}$$

摩擦力的方向：

先假設無摩擦，判斷接觸點相對斜面移動方向，
此方向的反方向即為摩擦力的方向。

$$\tau = Rf_s = I\alpha \quad \text{旋轉，重力通過質心故無力矩。}$$

旋轉的力矩來自靜摩擦力。

$$a_{\text{cm}} = R\alpha \quad \text{無滑動條件。}$$

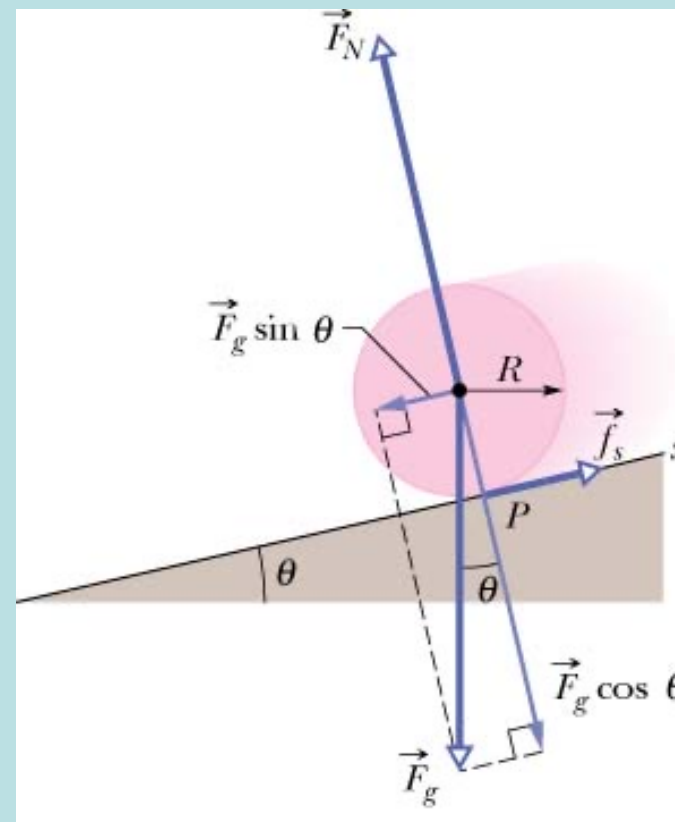


$$a_{\text{cm}} = \frac{g \sin \theta}{1 + \frac{I}{MR^2}}$$

摩擦力可求出：

$$f_s = \frac{I}{R^2} \frac{g \sin \theta}{1 + \frac{I}{MR^2}}$$

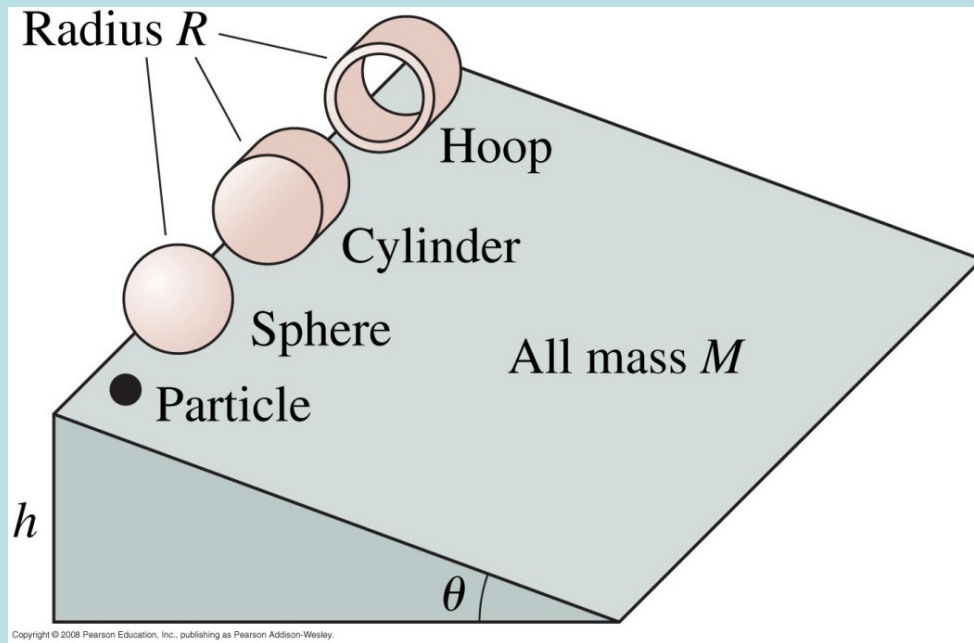
加速度小於單純的粒子下滑。



另一種作法：能量

剛體的動能：移動 + 旋轉

$$K = \frac{1}{2} I_{\text{cm}} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2$$



$$K = \frac{1}{2} I_{\text{cm}} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 = Mgh$$

$$v_{\text{cm}} = R\omega \quad \text{純滾動條件}$$

1	Particle	$c = 0$ $a = a_{\text{particle}}$
2	Solid sphere	$c = \frac{2}{5}$ $a_{\text{cm}} = \frac{5}{7} a_{\text{particle}}$ $= 0.71 a_{\text{particle}}$
3	Solid cylinder	$c = \frac{1}{2}$ $a_{\text{cm}} = \frac{2}{3} a_{\text{particle}}$ $= 0.67 a_{\text{particle}}$
4	Circular hoop	$c = 1$ $a_{\text{cm}} = \frac{1}{2} a_{\text{particle}}$ $= 0.50 a_{\text{particle}}$

Copyright © 2008 Pearson Education, Inc., publishing as Pearson Addison-Wesley.

Known

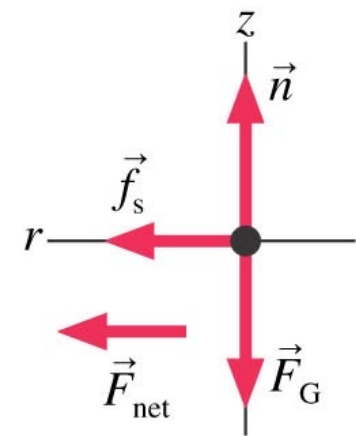
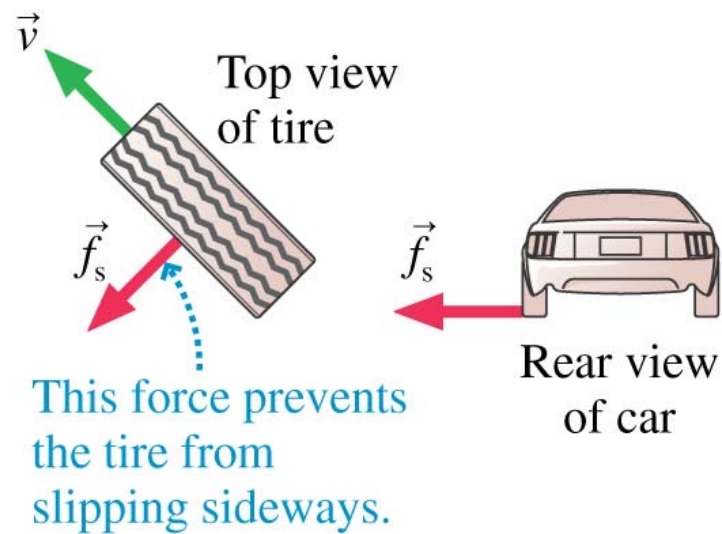
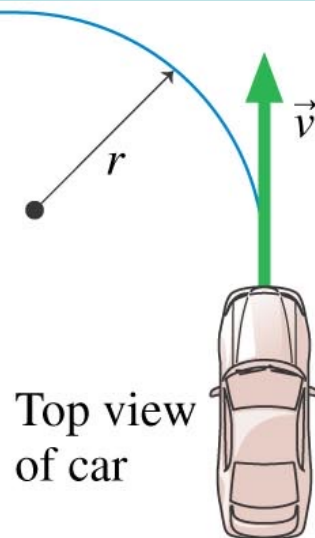
$$m = 1500 \text{ kg}$$

$$r = 50 \text{ m}$$

$$\mu_s = 1.0$$

Find

$$v_{\text{max}}$$



若斜角太大，靜摩擦大於最大靜摩擦，球就開始滑動

$$f_s = \frac{I}{R^2} \frac{g \sin \theta}{1 + \frac{I}{MR^2}} > Mg \cos \theta \mu_s$$

例二：斜面上的非平滑滾動

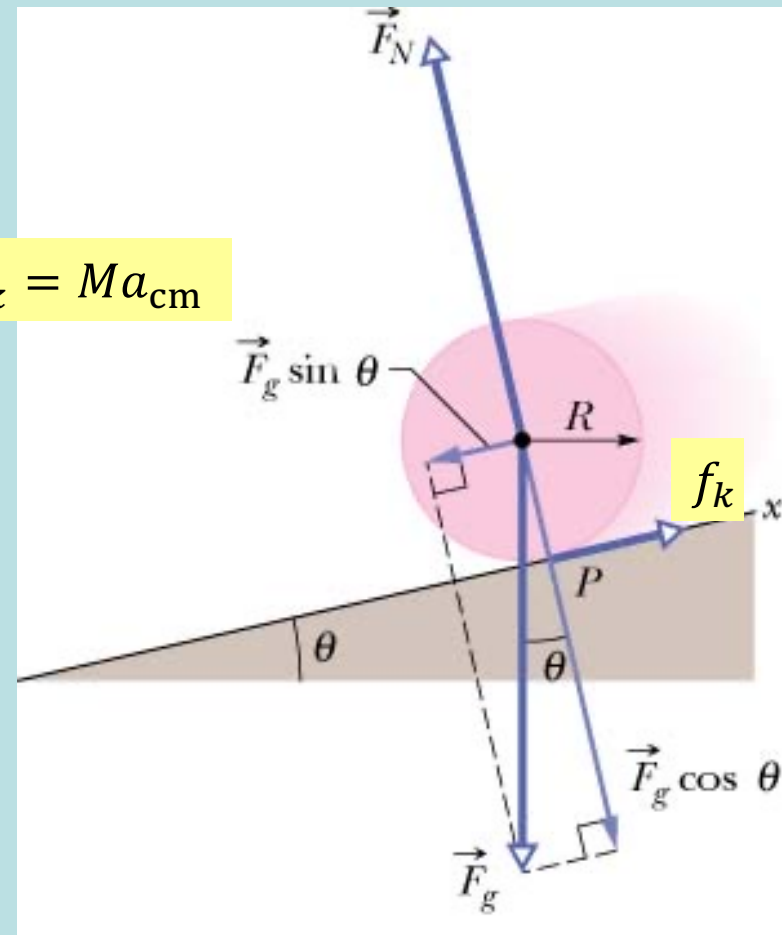
$$Mg \sin \theta - f_k = Mg \sin \theta - RMg \cos \theta \mu_k = Ma_{\text{cm}}$$

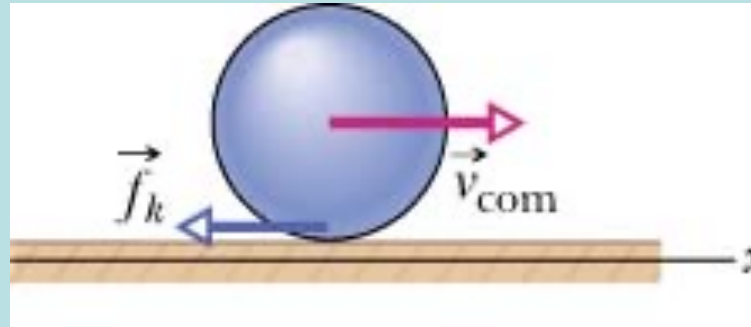
質心平移

$$\tau = Rf_k = RMg \cos \theta \mu_k = I\alpha$$

旋轉

注意動摩擦力已知。





質心平移

$$-f_k = -Mg\mu_k = Ma_{\text{cm}}$$



$$a_{\text{cm}} = -g\mu_k$$

減速

旋轉

$$\tau = Rf_k = RMg\mu_k = I\alpha$$



$$\alpha = \frac{RMg\mu_k}{I} = \frac{5g\mu_k}{2R}$$

加速旋轉

$$v_{\text{cm}} = v_{\text{cm}0} - g\mu_k t$$

$$\omega = \frac{5g\mu_k}{2R} t$$

與地面接觸點速度

$$v = v_{\text{cm}} - R\omega = v_{\text{cm}0} - g\mu_k t - \frac{5g\mu_k}{2} t = v_{\text{cm}0} - \frac{7g\mu_k}{2} t$$

過了一段時間後，此速度為零，從此滾動成為平滑滾動！

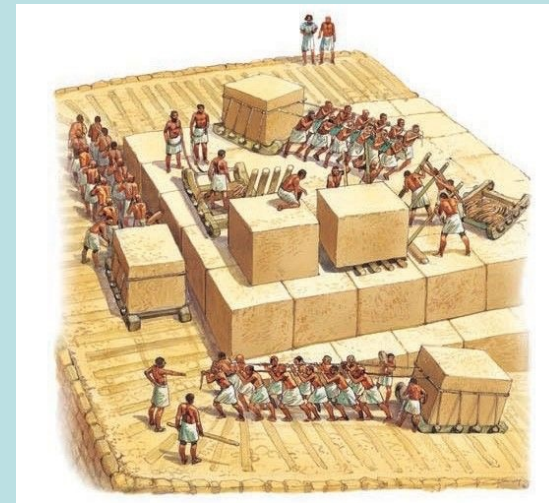
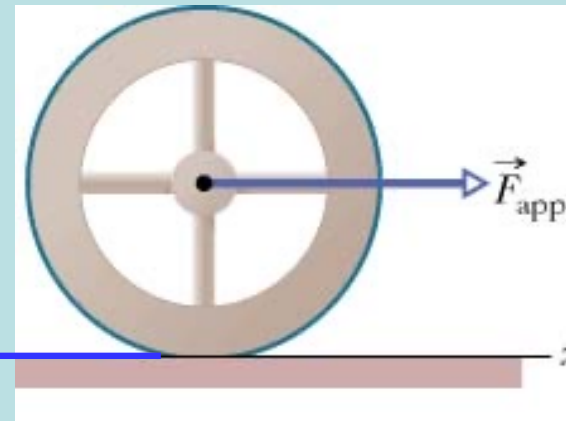
例三：以外力驅動的平面滾動

$$F_{\text{app}} - f_s = Ma_{\text{cm}}$$

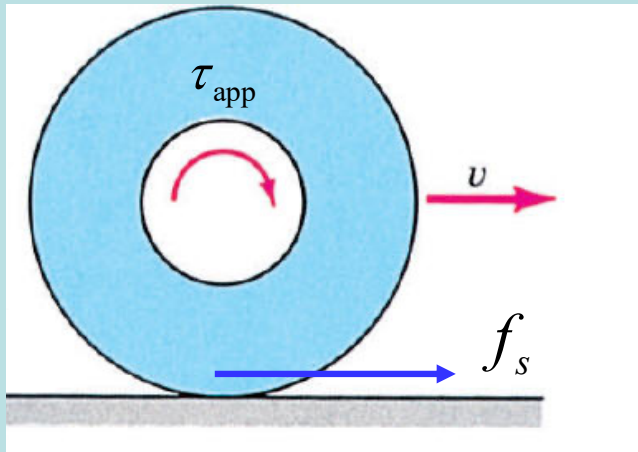
$$\tau = Rf_s = I\alpha$$

$$a_{\text{cm}} = R\alpha$$

f_s



例四：以內力矩驅動的平面滾動



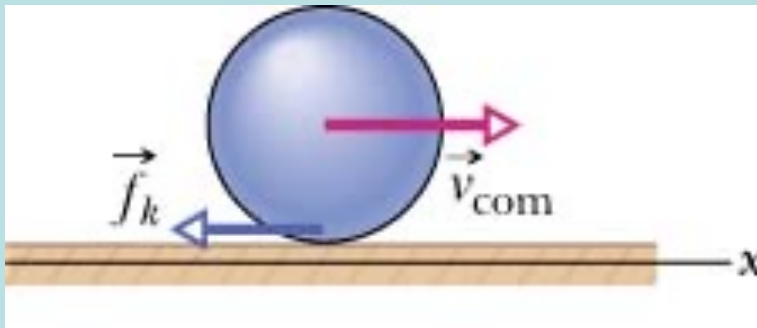
$$f_s = Ma_{\text{cm}}$$

$$\tau_{\text{app}} - Rf_s = I\alpha$$

$$a_{\text{cm}} = R\alpha$$

帶著滑動的滾動

球緣與地面的接觸點相對於地面是滑動的！
地面對球施予動摩擦力。



質心平移 $-f_k = -Mg\mu_k = Ma_{\text{cm}}$

旋轉 $\tau = Rf_k = RMg\mu_k = I\alpha$

平移與旋轉基本上分離。

無滑動的滾動 Rolling without slipping

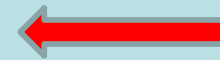
球緣與地面的接觸點相對於地面是靜止的！
地面對球施予靜摩擦力。



$$f_s - Mg \sin \theta = Ma_{\text{cm}}$$

$$\tau = Rf_s = I\alpha$$

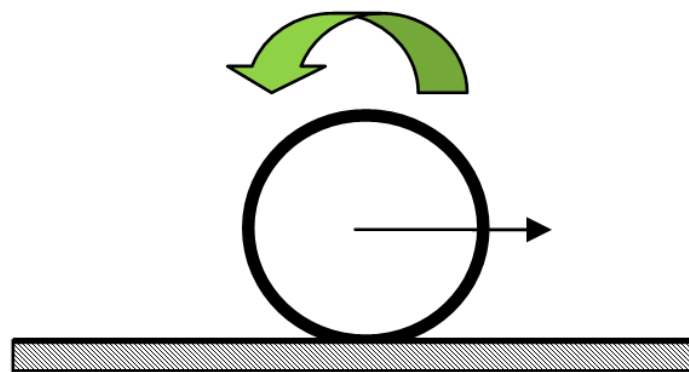
$$a_{\text{cm}} = R\alpha$$



滾動是移動與轉動兩者協調進行！

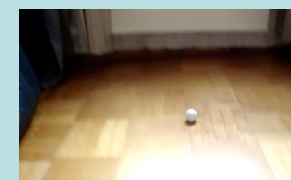
24. 想讓鐵環像聰明的寵物般會出門後自動回家嗎？考慮一空心鐵環（半徑 $R=1.0\text{ m}$ ，質量 $M=1.0\text{ kg}$ ）。自原點將它以環心的平移速度 4.0 m/s 向 $+x$ 方向擲出著地的同時，使它繞環心以 20 rad/s 的角速度逆時鐘快速旋轉。假設地面與鐵環之間的動摩擦係數 $\mu_k=0.21$ ，靜摩擦係數 $\mu_s=0.5$ 。著地的時間設為 $t=0$ 。

(1) 在鐵環著地後，地面對於鐵環會施予摩擦力，此摩擦力會使質心速度及旋轉都減

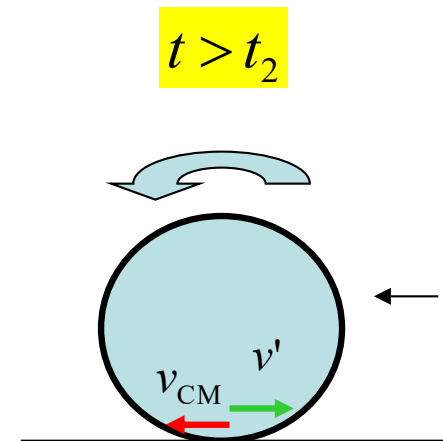
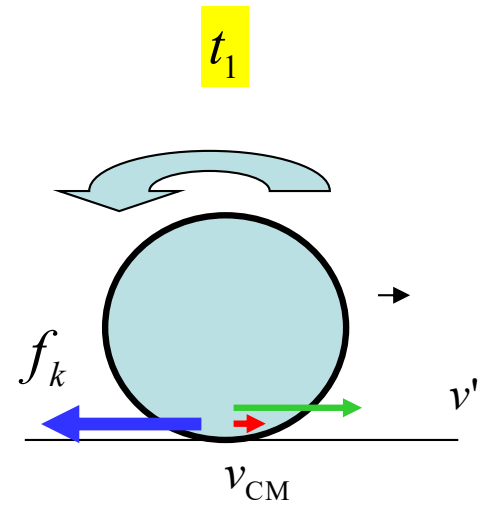
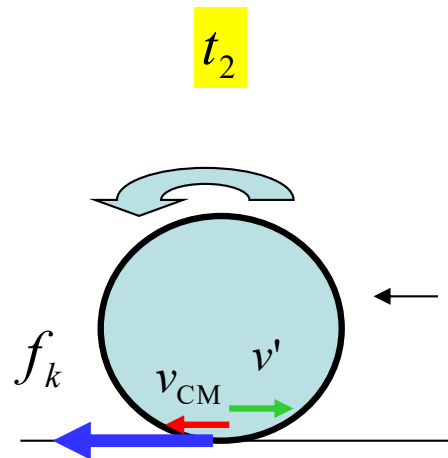
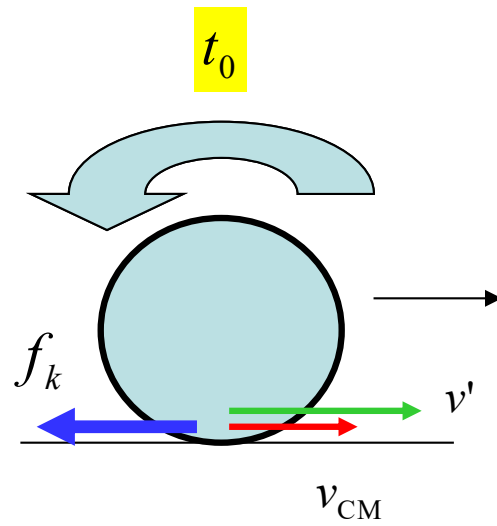


速，質心的平移甚至會在一段時間後轉向，朝 $-x$ 方向運動。計算環的平移運動向右到達的最遠處，與出發點的距離。

(2) 轉向之後，到了時間 t 時（由出發時算起），接觸點相對於地面的速度變成零，鐵環開始無滑動的滾動，問此時間 t 是多少 s ？



回家鐵環



(1) 當環著地時，接觸點相對於質心的速度為 20 m/s 。接觸點相對於地為 $20 + 4 = 24 \text{ m/s}$ ，向 $+x$ 方向，因此動摩擦力為向 $-x$ 方向，大小為 $f_k = \mu_k \times Mg = 0.21 \times 9.8 = 2.06 \text{ N}$ 。此力是常數，因此質心作等減速運動，加速度為 -2.06 m/s^2 。當質心速度減至零時， $t_1 = 4 / 2.06 = 1.94 \text{ s}$ 。因此距離出發點為 $4 \times 1.94 - \frac{1}{2} \times 2.06 \times 1.94^2 = 3.88 \text{ m}$ 。

(2) 繞質心的旋轉所受力矩為 $\tau = f_k \times R = 2.06 \text{ N} \cdot \text{m}$ ，轉動慣量 $I = MR^2 = 1.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ，

轉動角加速度為 $\alpha = \frac{\tau}{I} = 2.06 \text{ rad/s}^2$ 。如此在 $t_1 = 4 / 2.06 = 1.94 \text{ s}$ 時的角速度為：

$20 - 2.06 \times 1.94 = 16.0 \text{ rad/s}$ ，很明顯旋轉依舊是逆時針方向，接觸點對地的速度是

$v_{\text{cm}} + \omega R = 16.0 \text{ m/s}$ 向 $+x$ 方向，因此摩擦力依舊向 $-x$ 方向，所以質心從靜止開始朝 $-x$ 方向移動。動摩擦力大小並沒有改變，接觸點對地速度為

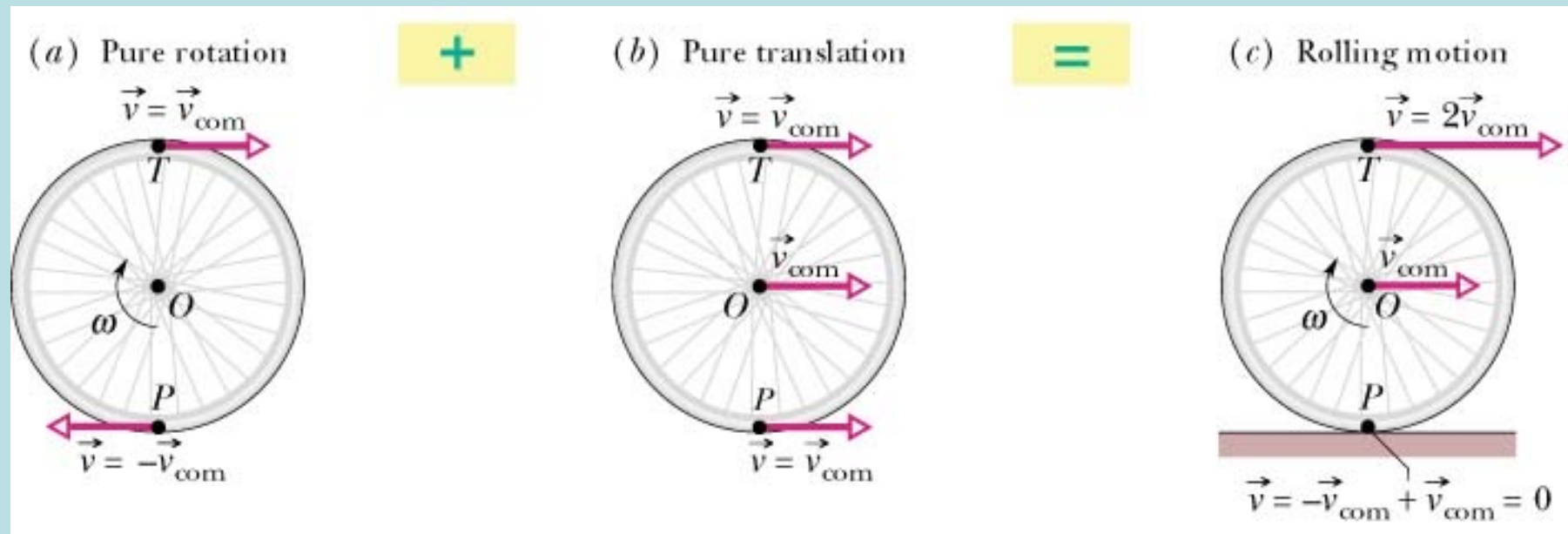
$v_{\text{cm}} + \omega R = -2.06 \cdot (t - t_1) + (20 - \alpha t) \cdot R = -2.06 \cdot (t - 1.94) + (20 - 2.06t)$ ，當此速度為零時，時間為 $t = 5.8 \text{ s}$ 。

無滑動的滾動

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{i,\text{rel}} + \vec{v}_{\text{cm}}$$

$$v_{\text{cm}} = R\omega$$

$$v_{\text{接觸點}} = v_{\text{cm}} - R\omega = 0$$

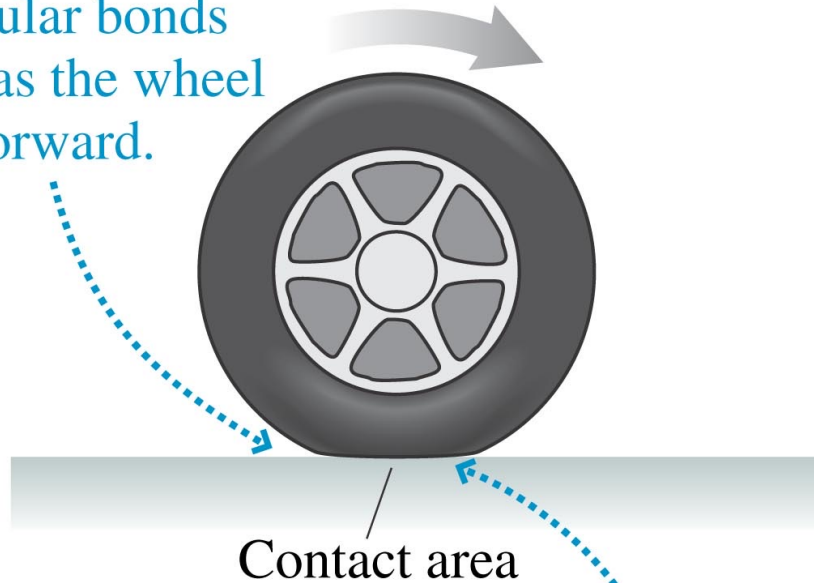


接觸點是靜止的。靜摩擦力不作功！

原則是永遠沒有能量消耗！可以一直滾下去！

但事實上剛體只是一個理想的近似！

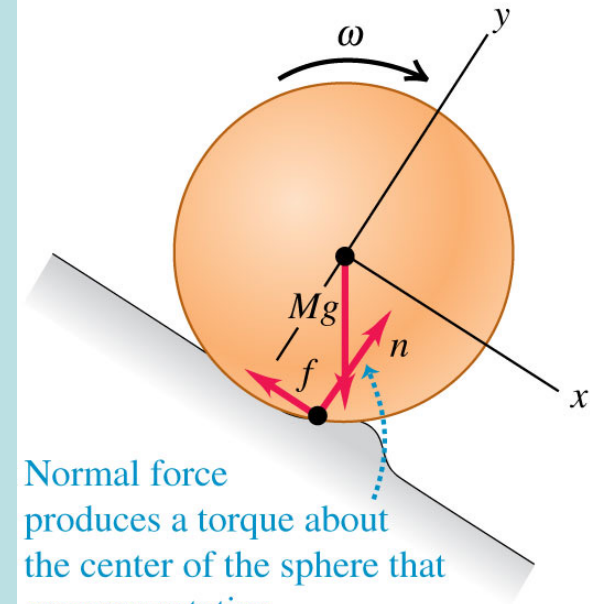
Molecular bonds
break as the wheel
rolls forward.



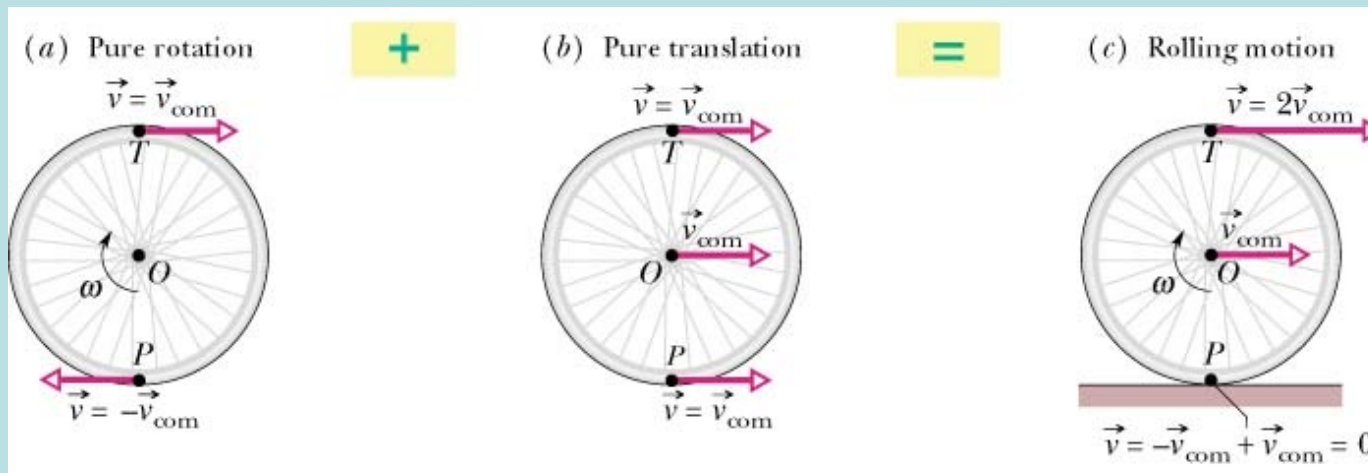
The wheel flattens where it touches
the surface, giving a contact area
rather than a point of contact.

Copyright © 2008 Pearson Education, Inc., publishing as Pearson Addison-Wesley.

(b) Rigid sphere rolling on a deformable
surface



© 2012 Pearson Education, Inc.



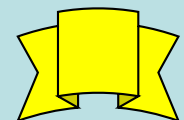
在質心座標系中
為繞固定軸旋轉

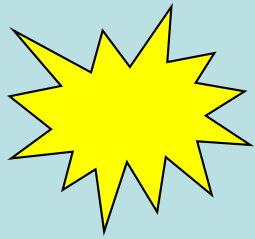
$$\tau = I\alpha$$

質心第二運
動定律

$$F_{\text{ext}} = Ma_{\text{cm}}$$

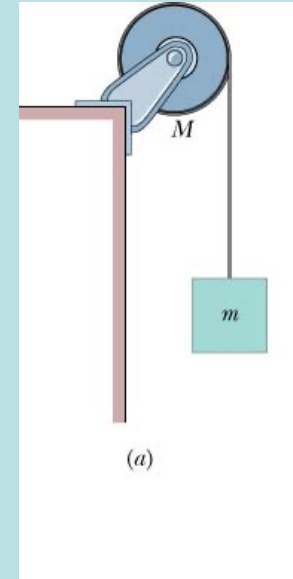
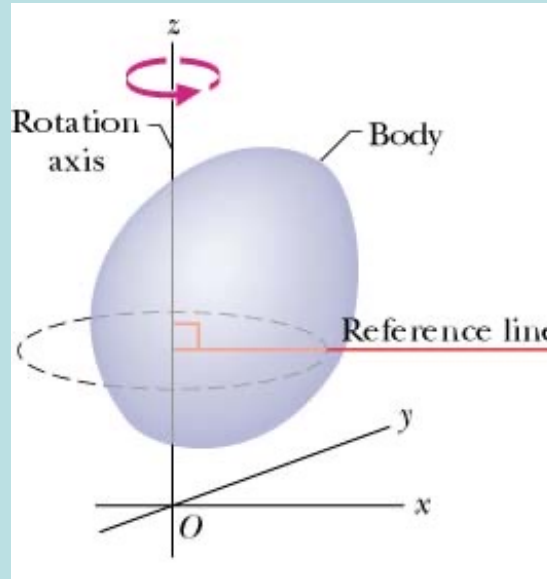
二維剛體運動由一個平移及一個轉動所構成，分別由一個牛頓動定律來描述！



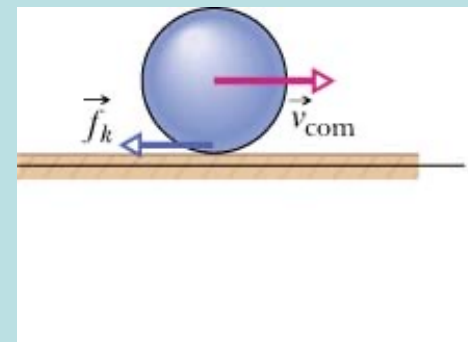
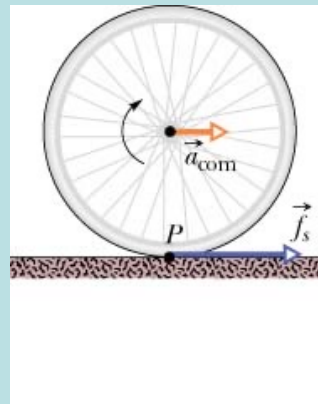


剛體的旋轉 Rotation of Rigid Body

剛體繞一固定軸轉動



旋轉軸可以在垂直方向平移



旋轉軸可隨時間變化

