

能量 Energy 守恒量 Conservation

抽象的物理開始對生活與文明產生巨大的具體影響。



© 2004 Thomson - Brooks/Cole



能量速飲



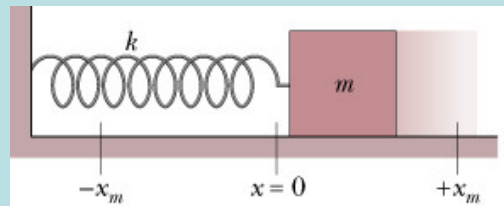
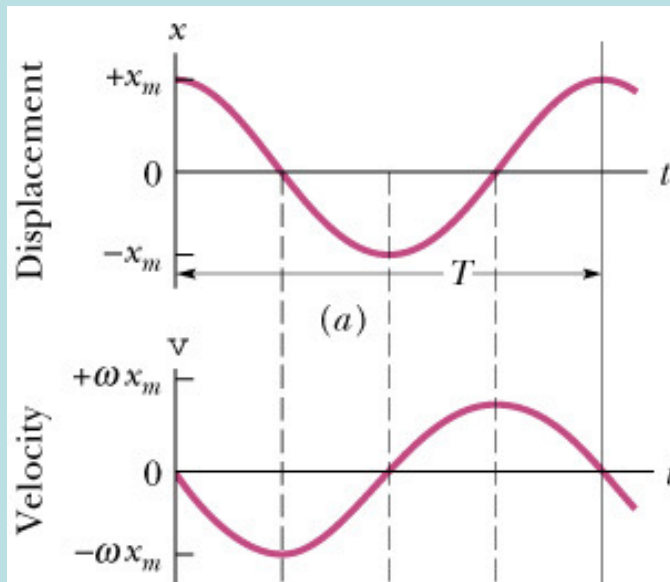
能源
➡



能量是一種可以儲存的東西，使吸收者能利用產生運動！

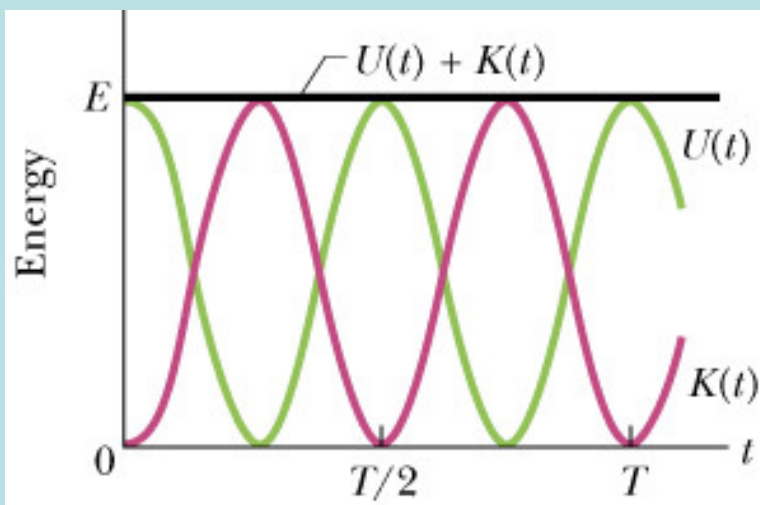
而物體中儲存的能量可以透過很多方式釋放，例如燃燒、位移、核反應等。

彈簧的簡諧運動



$$x = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$v = -\sqrt{\frac{k}{m}} x_m \sin(\omega t + \phi)$$



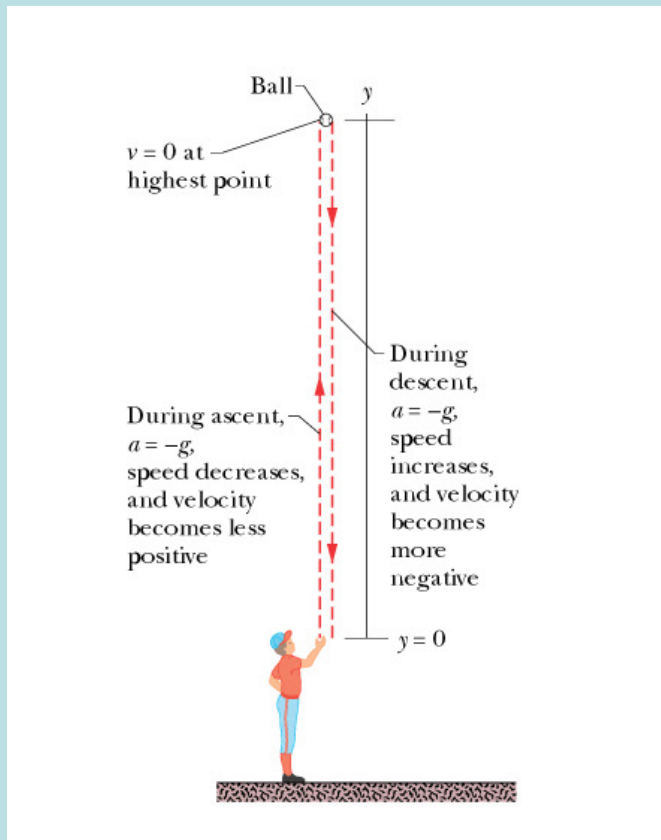
$$\frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} k x_m^2 = \text{constant}$$

位置 U

運動 K

與時間無關的守恆量

彈簧的簡諧運動過程中有一個與時間無關的守恆量



自由拋體

$$v^2 = 2g(y - y_0) + v_0^2$$

$$mgy + \frac{1}{2}mv^2 = mgy_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \text{constant}$$

守恆量

運動 K ，這部分與簡諧運動相同！

位置 U

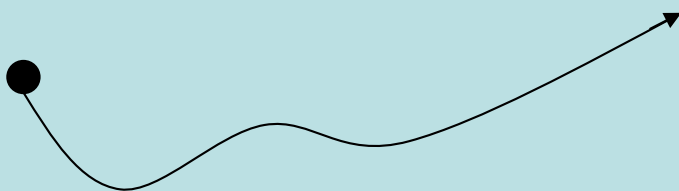
自由拋體運動過程中也有一個與時間無關的守恆量



物體在特定位置上，存在某種潛在能力可以轉化為運動。

牛頓定律加上力的描述給定運動方程式 Equation of Motion，加上起使條件(起始位置與速度)，便能決定此系統未來任一時間的狀態！

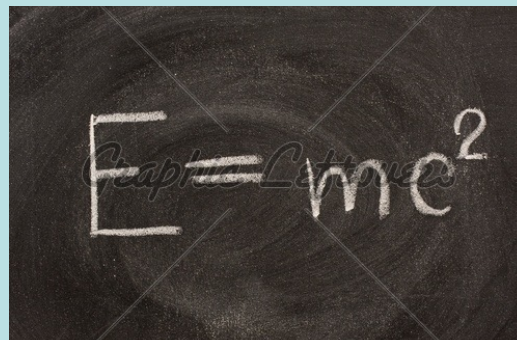
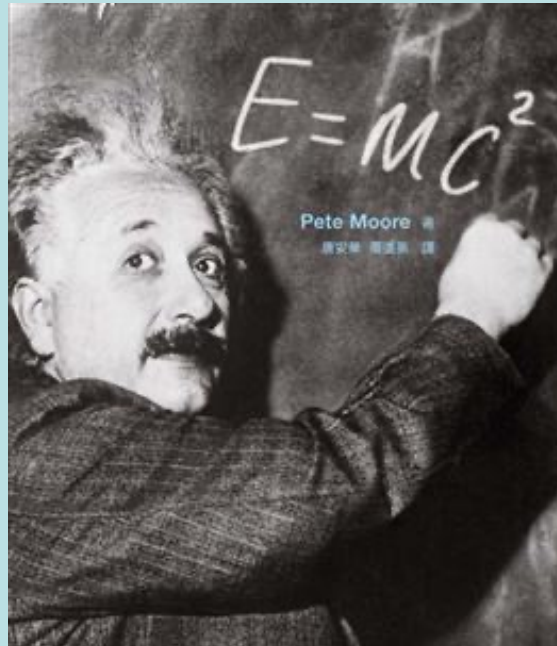
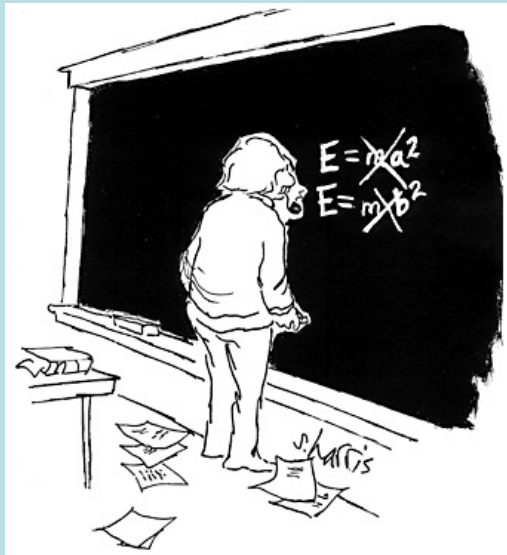
$$\vec{F}\left(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}, \dots\right) = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$



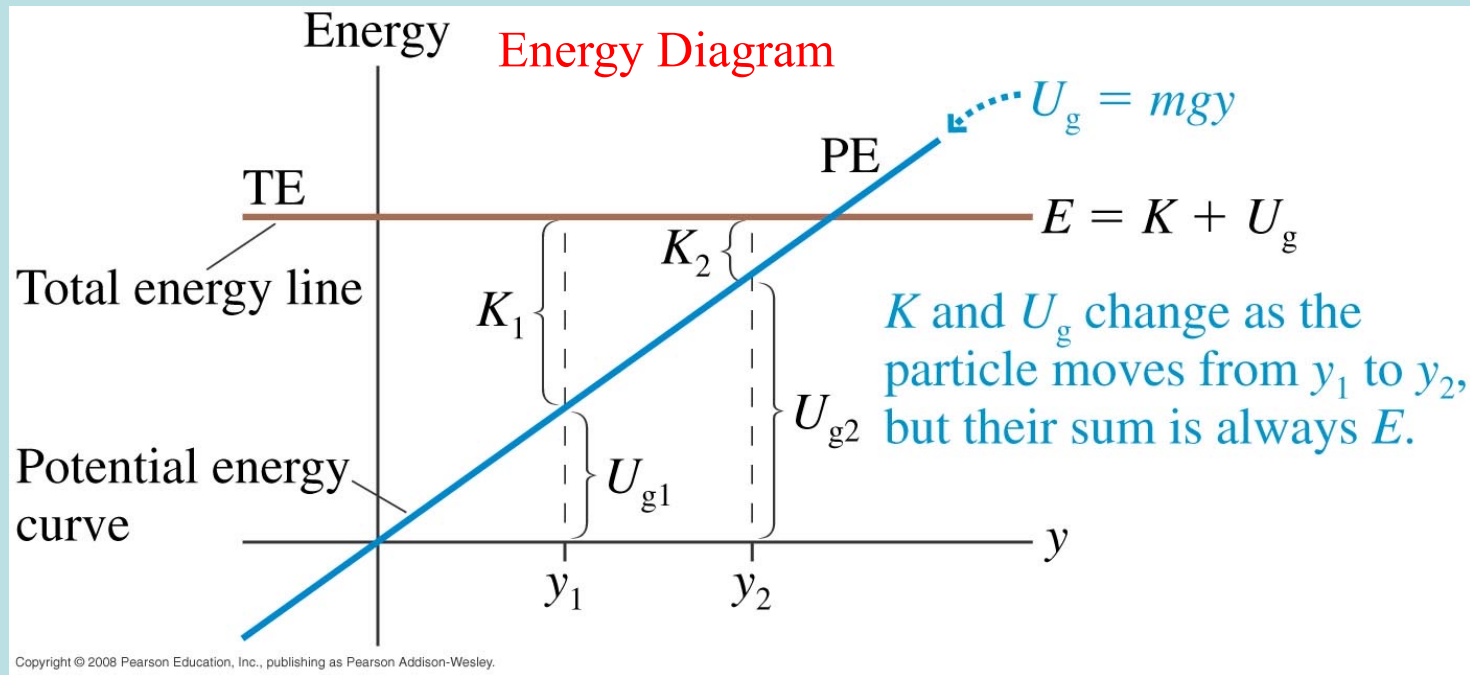
不是所有的問題都可以被運動方程式解決了嗎？

守恆量的適用範圍超越運動方程式。

牛頓力學在物體速度接近光速時，必須考慮相對論修正，
但能量守恆在相對論中還是對的！



運動方程式不容易解，守恆量可以提供有用的有限資訊。



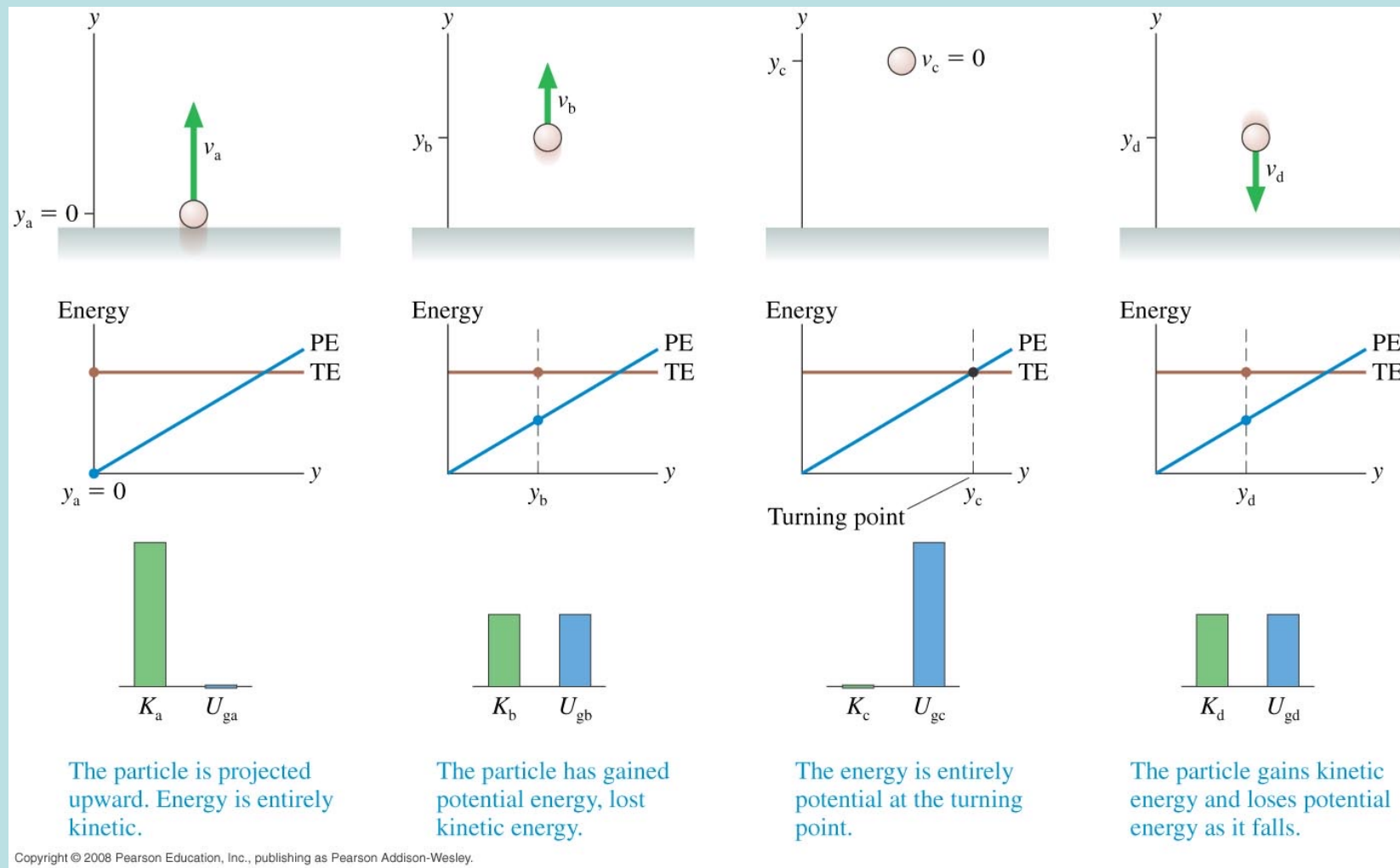
將自由拋體的位能 $U = mgy$ 對位置 y 作圖。

守恆的 E 與位置無關，因此在圖上是水平線，其值可以由起始條件可以得到。

運動過程中任意位置 y 的動能 $K = \frac{1}{2}mv^2$ 即是水平線與位能線的差：

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = E - U(y) = E - mgy$$

因此速度與位置的關係可以立刻得到。



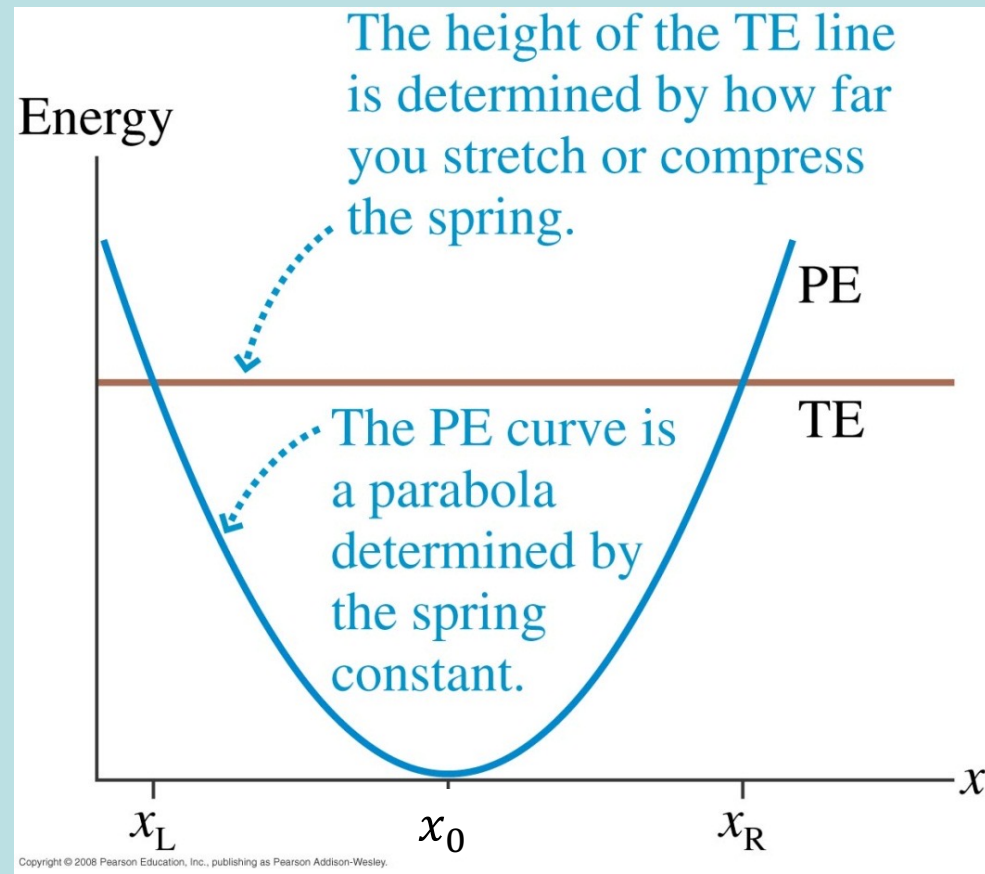
Turning point: 位能線與總能線交會處。

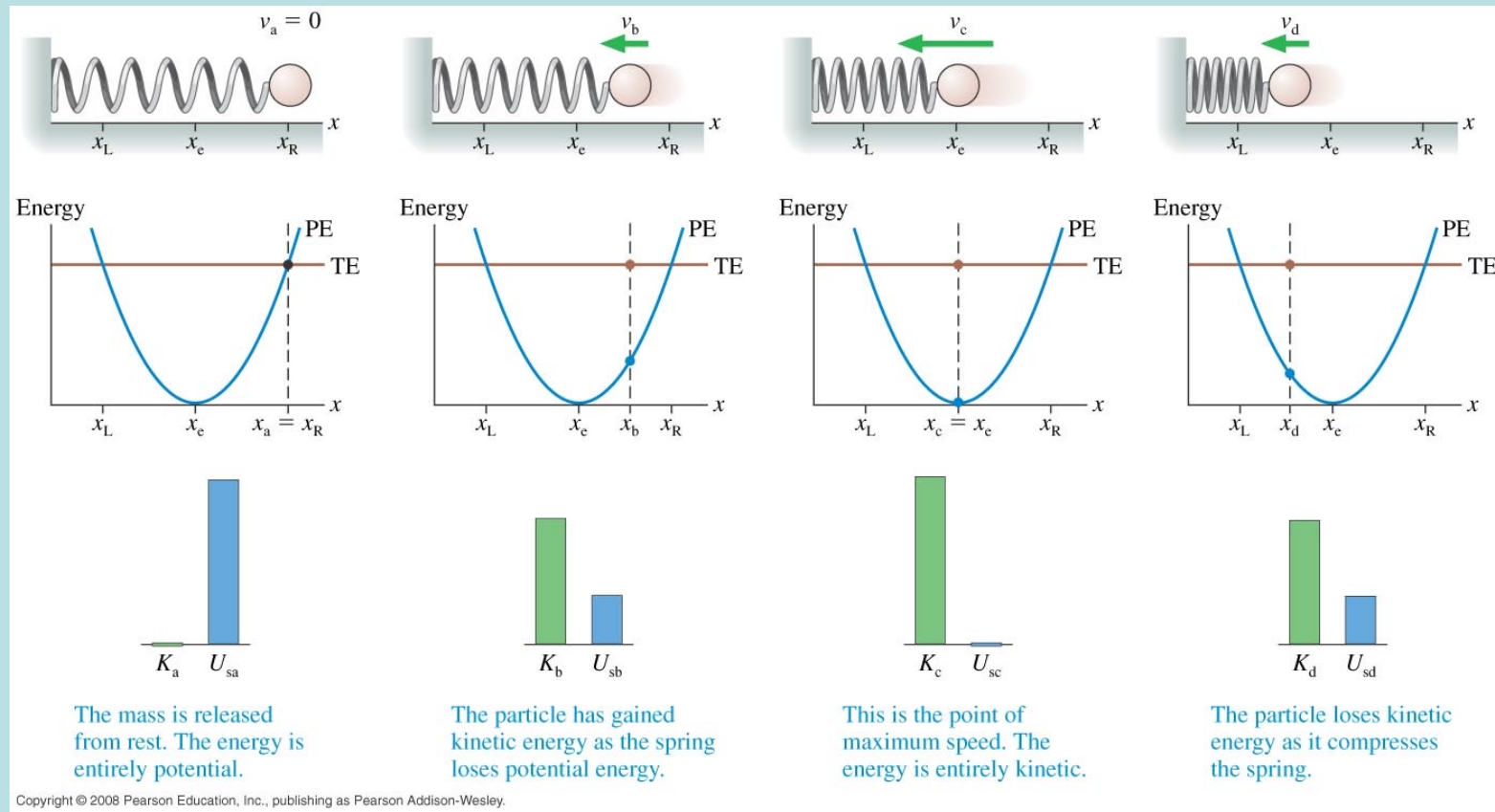
若粒子通過Turning point，位能將大於總能量，動能將為負。

因此粒子無法通過Turning point，在Turning point，粒子會轉向。

同樣的思考也可以運用在彈簧的運動！

$$U(x) = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2$$



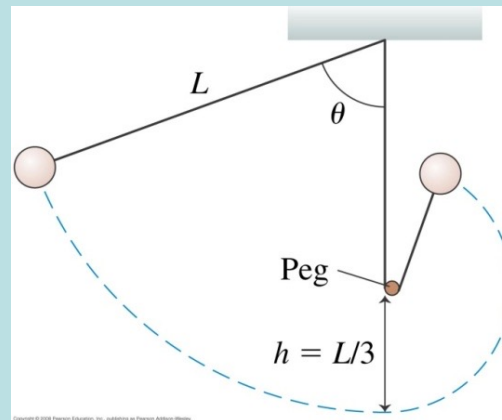
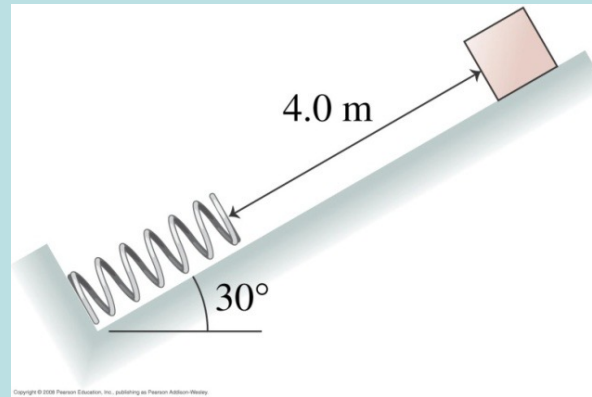


運動過程中任意位置 y 的動能 $K = \frac{1}{2}mv^2$ 即是水平線與位能線的差：

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = E - U(x) = E - \frac{1}{2}k(\Delta x)^2$$

因此速度與位置的關係可以立刻得到。

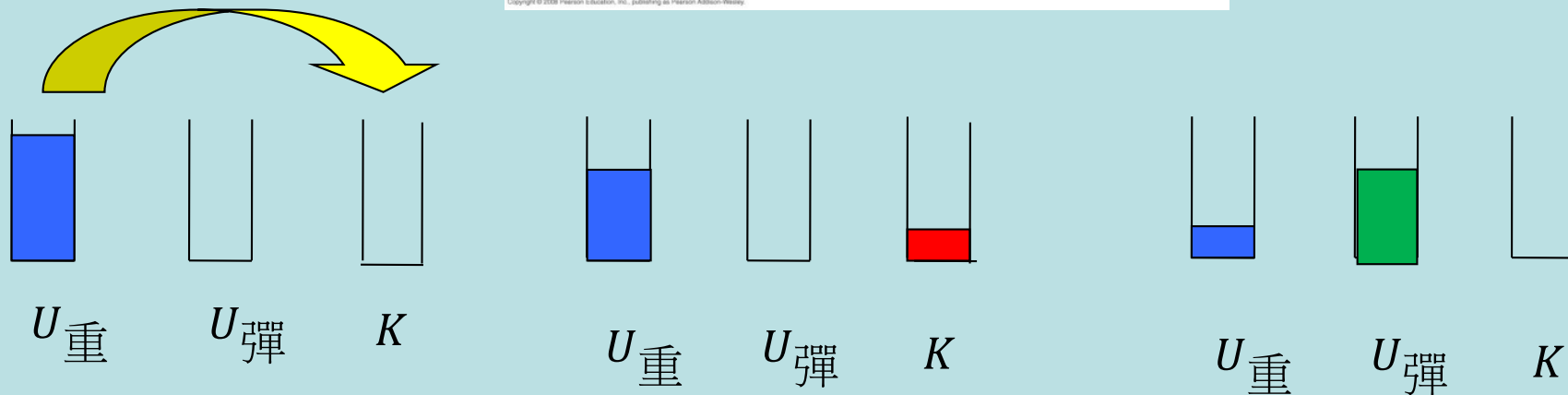
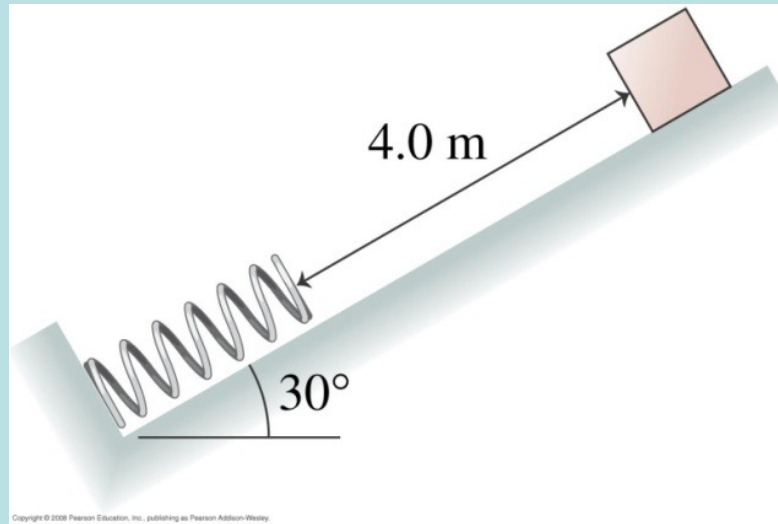
簡諧運動兩端都有turning point，因此運動就被拘限在一個範圍內。



例如可問球到達某角度時的繩張力。

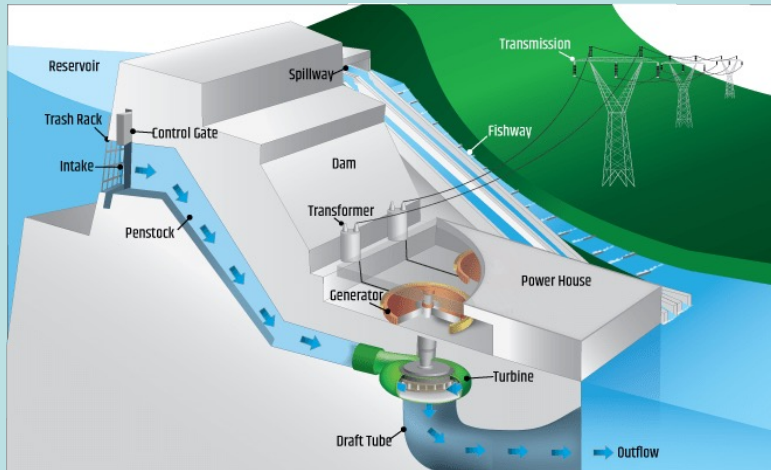
運動方程式給出運動物理量（位置，速度）與時間的關係！

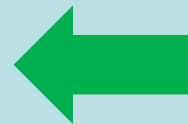
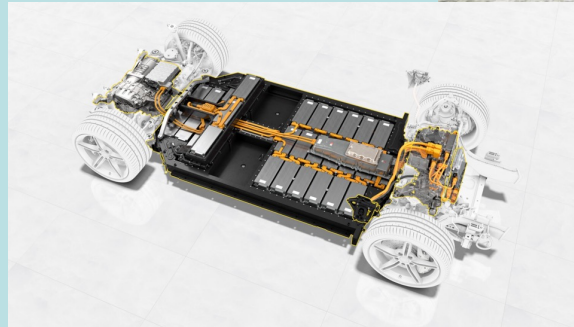
守恆律則排除時間，得出運動物理量彼此之間的關係！



能量的具體特徵是能驅動，使吸收能量的物體運動。

能量可以來回在許多形式之間轉換，總能量守恆。可以回到出發點。

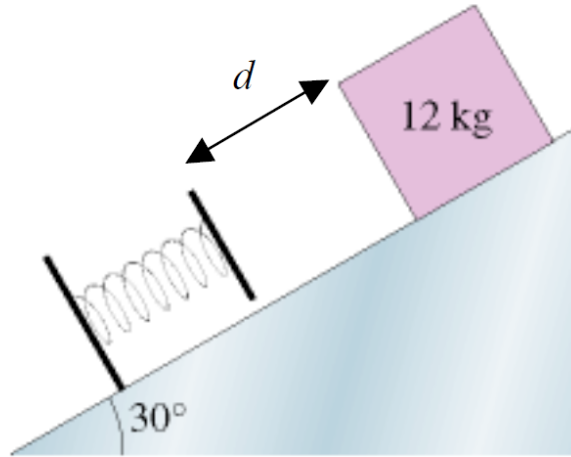




能量的具體特徵是能驅動。

能量可以來回在許多形式之間轉換、儲存、傳輸。

2. 一質量為 12 kg 的方塊，沿一 30° 角的斜面自靜止狀態滑下，滑行距離 d 之後接觸一個彈簧，此彈簧的彈力係數 k 為 2000 N/m。



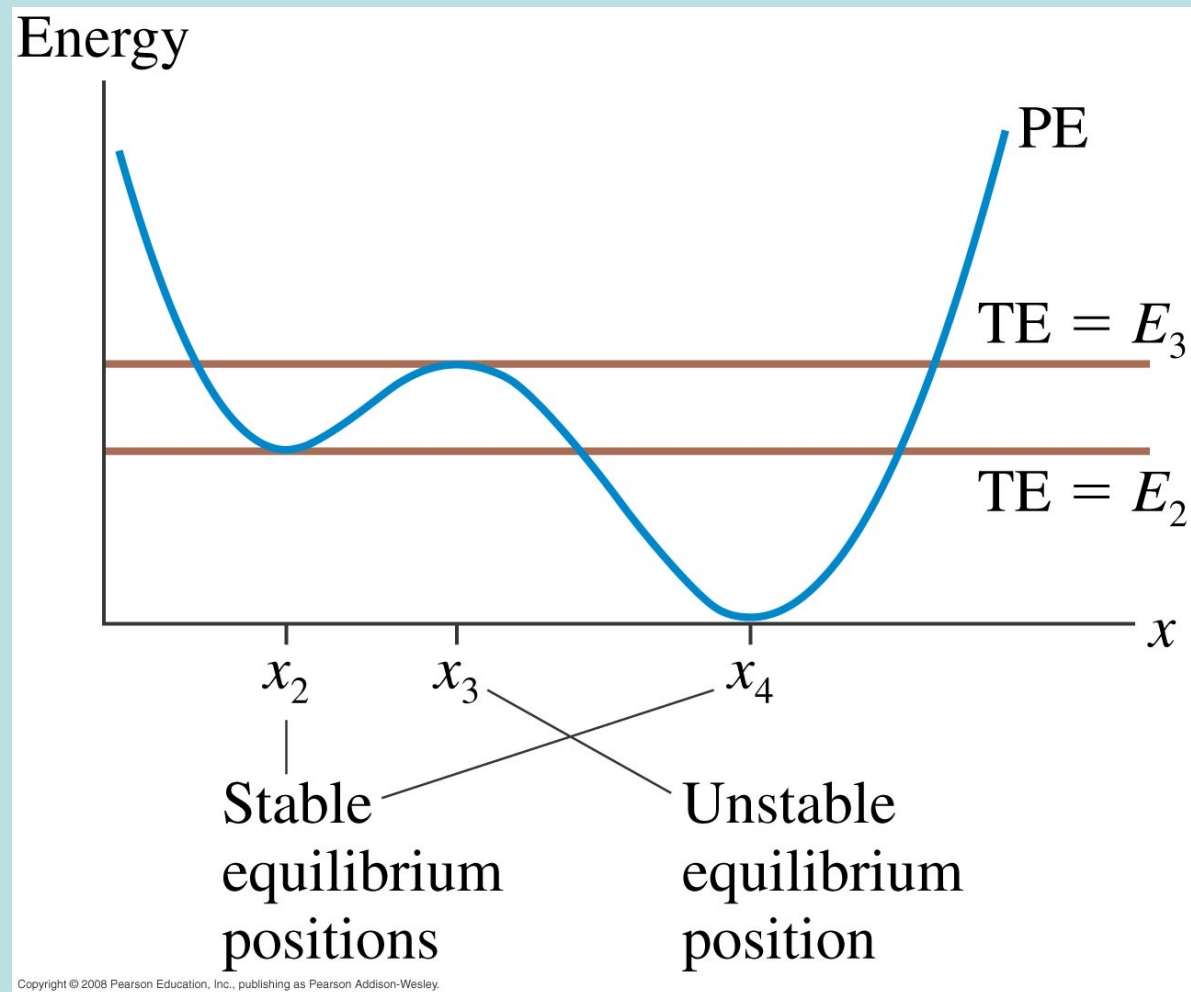
接觸彈簧後，此方塊繼續向前下滑行距離 $x = 0.27$ m 後才停止。請問距離 d 是多少 m？(10)

2. 停止時，重力位能的減少應該等於彈力位能：

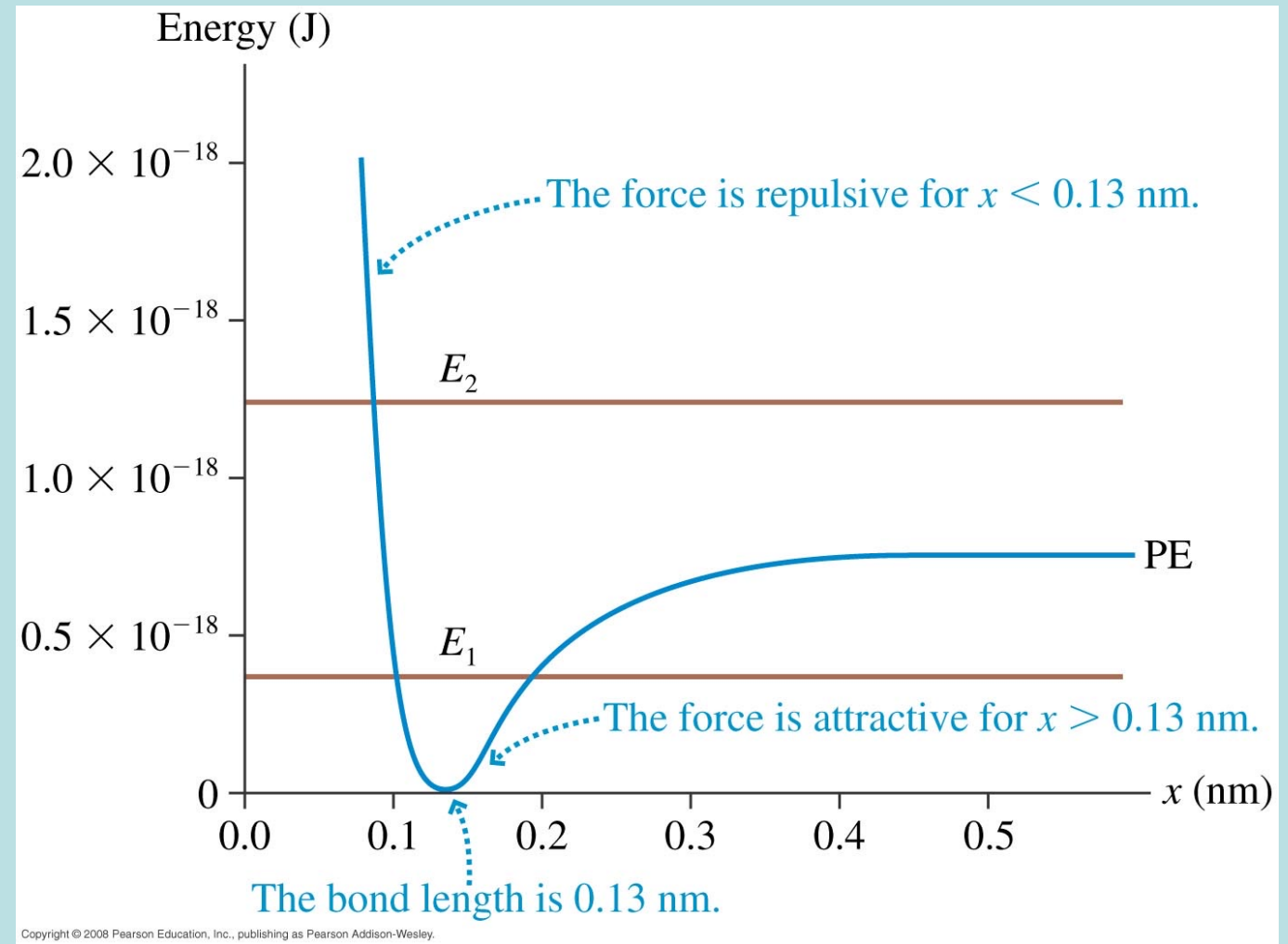
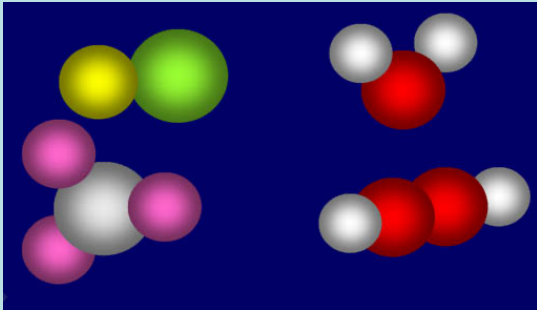
$$12 \times g \times (0.27 + d) / 2 = 2000 \times 0.27^2 / 2$$

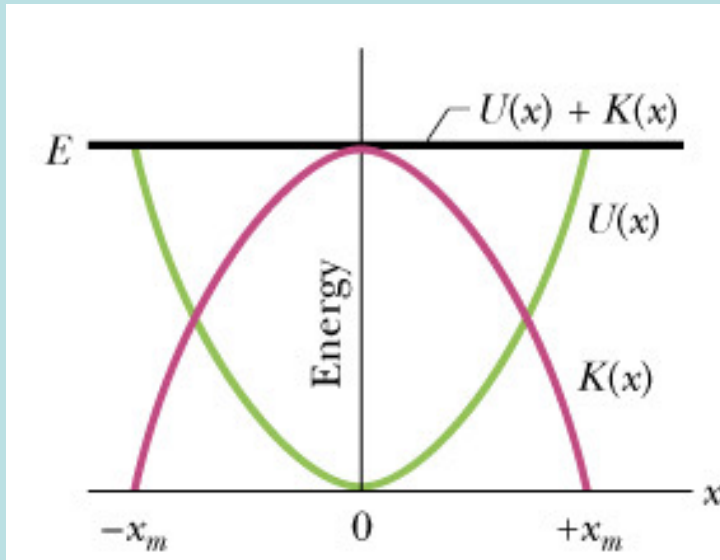
$$d = 0.97 \text{ m}$$

其它的力是不是也有這樣的 U ?



兩個粒子間的力是否能束縛它們形成束縛態 bound state，
以位能來思考是最簡單的方法！

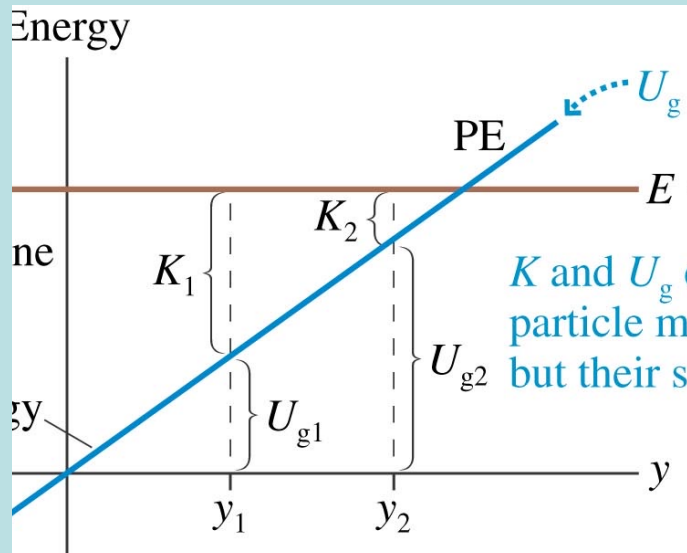




彈簧

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \text{constant} \longrightarrow \text{守恆量}$$

位置 U 運動 K



自由拋體

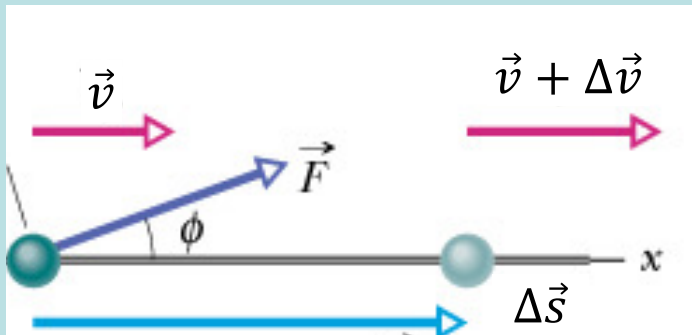
$$mgy + \frac{1}{2}mv^2 = \text{constant} \longrightarrow \text{守恆量}$$

位置 U 運動 K

在這兩個例子中，同時出現的 K 是相同的式子。

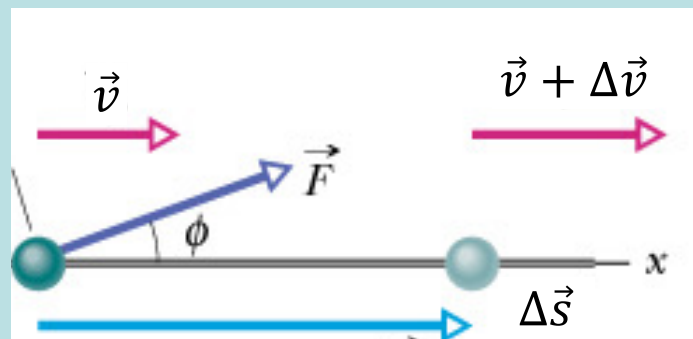
研究 $K = \frac{1}{2}mv^2$ 動能在運動過程中的變化。

考慮一個無限小的過程：



$$\Delta \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{1}{2} m (\vec{v} + \Delta \vec{v}) \cdot (\vec{v} + \Delta \vec{v}) - \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} \approx m \Delta \vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$= m \Delta \vec{v} \cdot \frac{\Delta \vec{S}}{\Delta t} = m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \cdot \Delta \vec{S} = m \vec{a} \cdot \Delta \vec{S} = \vec{F} \cdot \Delta \vec{S} \equiv W$$

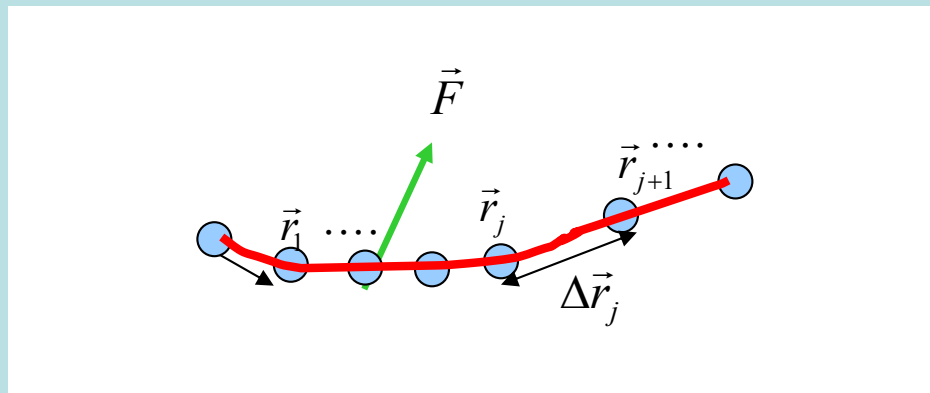


功 **Work** 造成粒子動能的變化

$$\Delta \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \vec{F} \cdot \Delta \vec{s} \equiv W$$

以上的式子只對無限小的運動過程適用

但將無限多無限小的過程組合起來，即成為一個有限的過程：



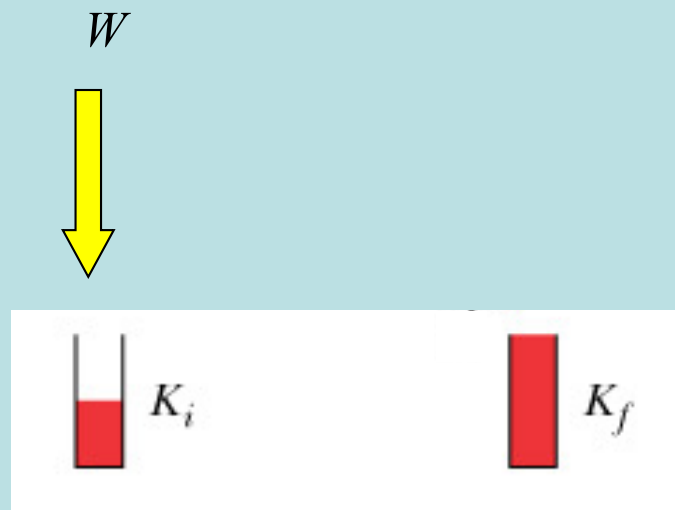
對每一段無限小的過程動能變化都等於力所作的功：

$$\Delta \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \vec{F} \cdot \Delta \vec{s} \equiv W$$

動能的總變化等於無限多段無限小的過程的動能變化的總和：

$$K_f - K_i = \left(\frac{1}{2} m v^2 \right)_f - \left(\frac{1}{2} m v^2 \right)_i = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta s \rightarrow 0}} \sum_{j=0}^N \left[\Delta_j \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) \right] = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta s \rightarrow 0}} \sum_{j=0}^N (\vec{F}_j \cdot \Delta \vec{s}_j) = W_{i \rightarrow f}$$

動能的總變化就等於沿著運動的路徑力所作的功的總和。

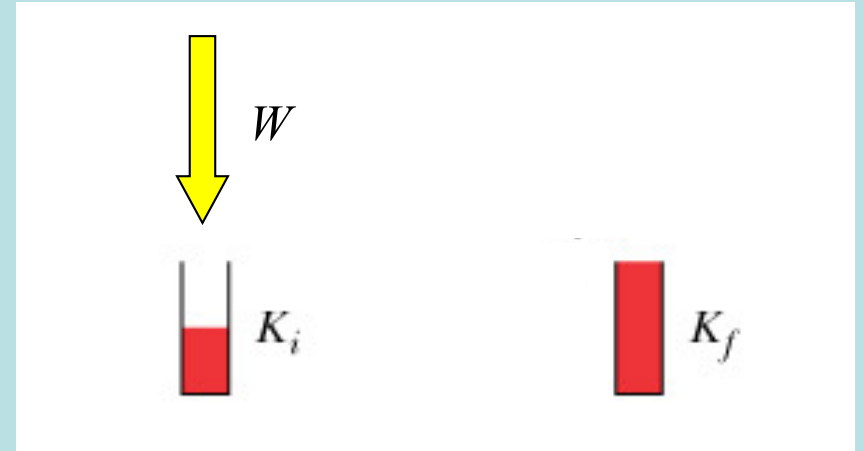
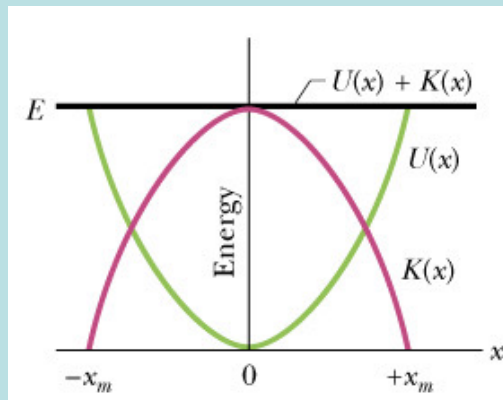


$$\left(\frac{1}{2}mv^2\right)_f - \left(\frac{1}{2}mv^2\right)_i = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta s \rightarrow 0}} \sum_{j=0}^N \Delta W_j \equiv \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta s \rightarrow 0}} \sum_{j=0}^N (\vec{F}_j \cdot \Delta \vec{s}_j) = W_{i \rightarrow f}$$

功等於動能變化，稱為功與動能原理。

$$\Delta K = W$$

其它的力是不是也如彈力有一位能 U ，使得 U 與 K 的和是守恒量？



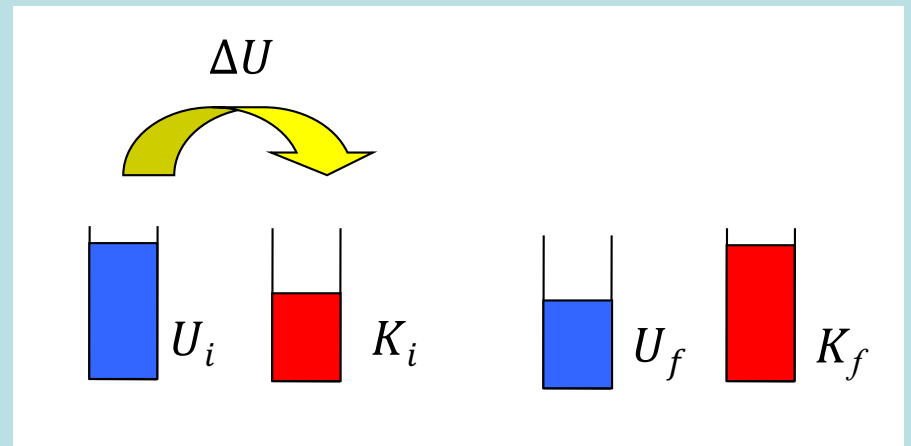
如果有這樣的 U 存在， K 的變化與 U 的變化必須互相抵消：

$$\Delta K = -\Delta U \quad ?$$

而已知 K 的變化等於功： $\Delta K = W$

如果任一段運動過程的功都等於 U 的變化：

$$W = -\Delta U = -(U_f - U_i) \quad ?$$



如此施力者與受力者之間內在的 U 的變化，就取代外來的功。

大膽猜想：其它的力要如彈力有位能 U 存在，

先決條件是**在任何運動過程中，此力所作的功必須可以寫成一個物理量的前後差。**



運動的起點與終點，兩地的高度差就是可以寫成海拔高度的前後差。

但兩地之間的里程就無法寫成一個量的前後差，

因為里程與所採取的路徑有關。即使起點終點一樣，不同路徑的里程不同。

$$W = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta s \rightarrow 0}} \sum_{j=0}^N (\vec{F}_j \cdot \Delta \vec{s}_j)$$

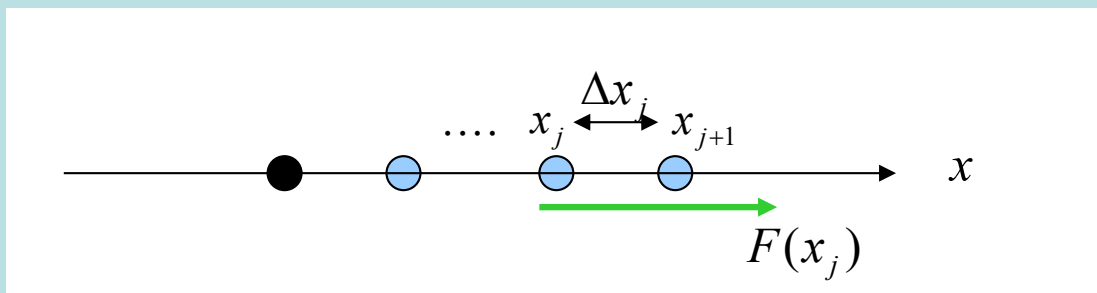
功可不可以寫成一個物理量的前後差？

先考慮一維運動：力與運動的方向在同一個軸上。



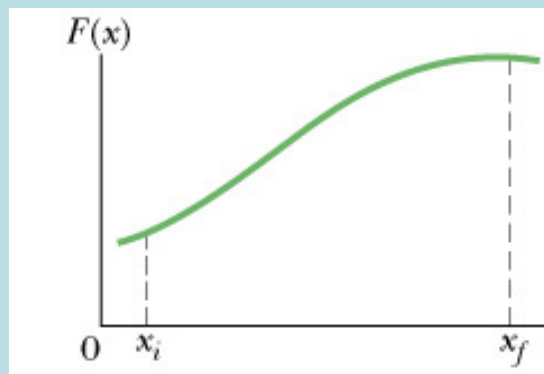
考慮外力只與位置有關， $F \rightarrow F(x)$

因此適用於原子力、靜電力、萬有引力。

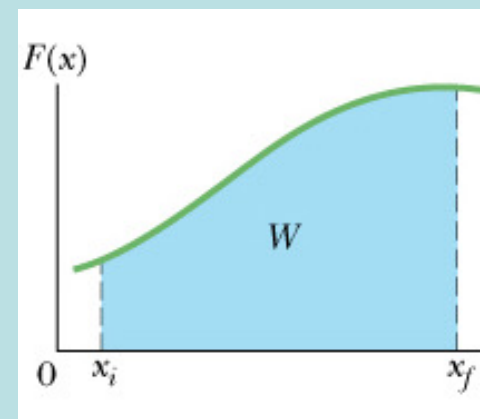
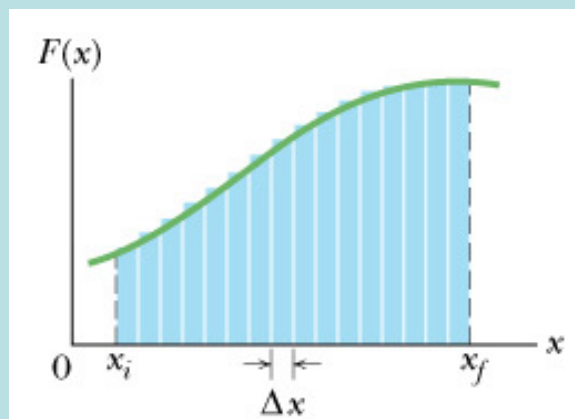
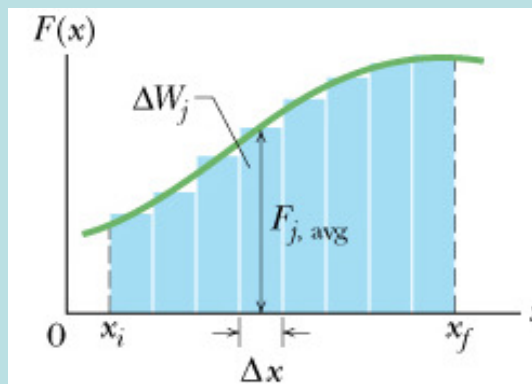


$F(x)$ 將此函數對位置作圖：

$$W = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta s \rightarrow 0}} \sum_{j=0}^N (F_j \cdot \Delta x_j)$$



在此圖上，功有一幾何意義：

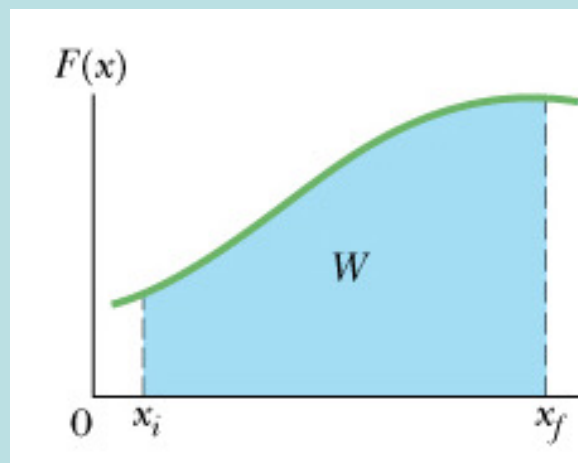


功就是力曲線下的面積，即是 **$F(x)$** 的積分

功是力函數曲線下的面積。

這就定義為 $F(x)$ 對 x 的積分：

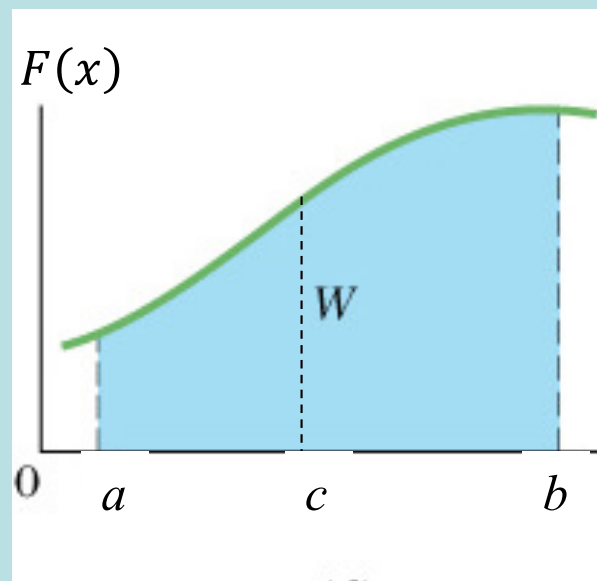
$$W = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta s \rightarrow 0}} \sum_{j=0}^N (F_j \cdot \Delta x_j) = \int_{x_i}^{x_f} F(x) \cdot dx$$



兩個定理：

$$\int_b^a F(x') \cdot dx' = - \int_a^b F(x') \cdot dx'$$

$$\int_a^b F(x') \cdot dx' = \int_a^c F(x') \cdot dx' + \int_c^b F(x') \cdot dx'$$



$$\int_{x_i}^{x_f} F(x') \cdot dx'$$

積分值只與函數及端點值有關
定積分，它是一個值，不是函數

不定積分：讓積分的一個端點可以自由變化，
因此得到一個以端點值為變數的函數

$$G(x) = \int_{x_i}^x F(x') \cdot dx'$$

$$\int: F(x) \rightarrow G(x)$$

積分是一個由函數得到另一個函數的運算

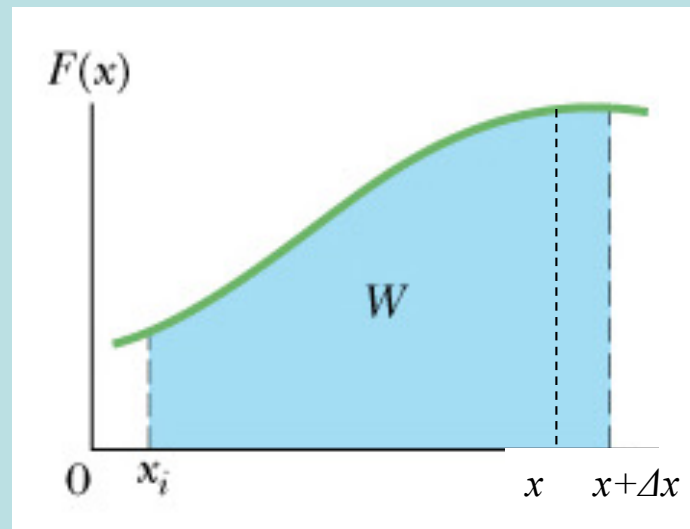
微積分基本定理

微分與積分是反運算

$$G(x) = \int_{x_i}^x F(x') \cdot dx'$$



$$\frac{d}{dx} G(x) = F(x)$$



$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} G(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{G(x + \Delta x) - G(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_{x_i}^{x+\Delta x} F(x') dx' - \int_{x_i}^x F(x') dx'}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} F(x') dx'}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x) \Delta x}{\Delta x} = F(x) \end{aligned}$$

微分與積分是反運算，那麼積分的計算就是微分的反向運算！

所以要算積分時，就是去猜一個函數，使它的微分就是你要積的函數 F 。

如果有一個函數 H ，它的微分等於函數 F ：

$H'(x) = F(x)$ 這樣的函數 H 稱為函數 F 的**反微分**

例如： x^n 的反微分可以是 $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$

你可以在函數 H 上加一個常數，依舊是反微分。

$$(H(x) + c)' = H'(x) = F(x)$$

反微分有無限多個，

但任兩個反微分的微分的差為零！

因此任兩個反微分的差只是一個常數！

例如：所有 x^n 的反微分都可以寫成 $\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$

最重要的積分公式：

根據微積分基本定理， F 的積分是 F 的一個反微分。

如果你能猜到任一個 F 的反微分 H ，你離積分就只差一個常數。

$$\int_a^x dx' \cdot F(x') = H(x) + c \quad \text{幸運的是常數 } c \text{ 可以很容易求出：}$$

只要將積分的起始端點 a 代入積分式的終點，值必為零

$$\int_a^a dx' \cdot F(x') = 0 = H(a) + c \quad c = -H(a)$$

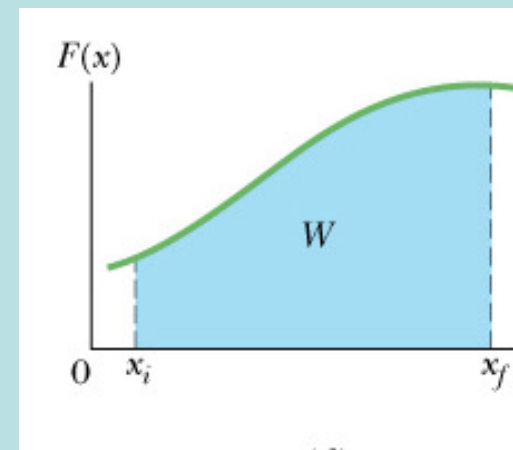
因此可以寫下最後的公式：

$$\int_a^x dx' \cdot F(x') = H(x') \Big|_a^x = H(x) - H(a)$$

此式對任一個反微分 H 都對！

積分的計算：猜到任一個 F 的反微分 H

$$\int_a^x dx' \cdot F(x') = H(x') \Big|_a^x = H(x) - H(a)$$



$$\int_{x_i}^x dx' \cdot x'^n = \frac{1}{n+1} x'^{n+1} \Big|_{x_i}^x = \frac{1}{n+1} x^{n+1} - \frac{1}{n+1} x_i^{n+1}$$

$$\int_{x_i}^x dx' \cdot e^{ax'} = \frac{1}{a} e^{ax'} \Big|_{x_i}^x = \frac{1}{a} e^{ax} - \frac{1}{a} e^{ax_i}$$

$$\int_{x_i}^x dx' \cdot \sin \omega x' = -\frac{1}{\omega} \cos \omega x' \Big|_{x_i}^x = -\frac{1}{\omega} \cos \omega x + \frac{1}{\omega} \cos \omega x_i$$

解微分方程式可以以積分來進行：

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g$$



$$\frac{dy}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} = -g$$



$$v = -gt + c_1$$



$$\frac{dy}{dt} = -gt + c_1$$



$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1t + c_0$$

$$v = \int_{t_0}^t dt'(-g) = -gt + gt_0 = -gt + c_1$$

$$y(t) = \int_{t_0}^t dt' \cdot (-gt' + c_1) = \left(-\frac{1}{2}gt'^2 + c_1t' \right) \Big|_{t_0}^t \\ = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1t + c_2$$

$$\int_{x_i}^x dx' \cdot \frac{1}{x'} = ?$$

證明：

$$\frac{d}{dx} (\ln x) = \frac{1}{x}$$

$$e^{\ln x} = x$$

對 x 微分並使用連鎖律：

$$\frac{d}{d(\ln x)} e^{\ln x} \cdot \frac{d}{dx} (\ln x) = 1$$

$$e^{\ln x} \cdot \frac{d}{dx} (\ln x) = x \cdot \frac{d}{dx} (\ln x) = 1$$

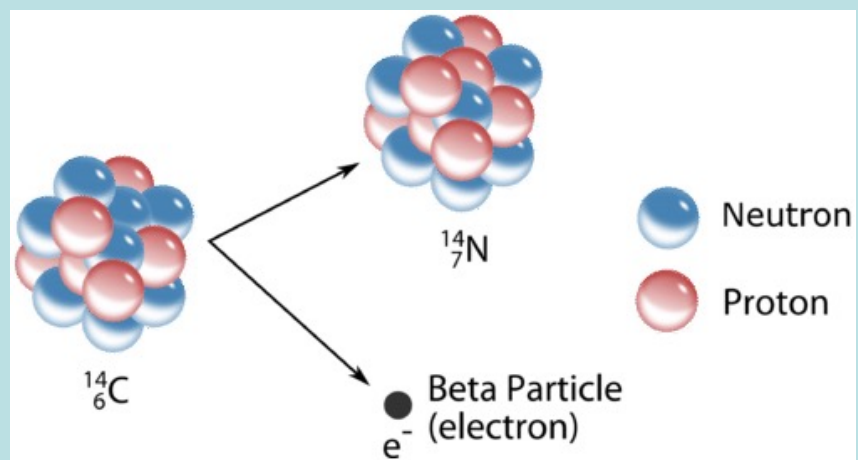
得證：

$$\frac{d}{dx} (\ln x) = \frac{1}{x}$$

$$\int_{x_i}^x dx' \cdot \frac{1}{x'} = \ln x' \Big|_{x_i}^x = \ln x - \ln x_i = \ln \left(\frac{x}{x_i} \right)$$

原子核的衰變是一個微觀的量子現象。

我們無法預測單一一顆原子核何時及是否衰變，只能預測它衰變的機率。



以積分來進行解微分方程式的技巧：

$$\frac{dN}{dt} = -\Gamma N$$

$$\frac{1}{N} dN = -\Gamma dt$$

$$\frac{1}{N} \Delta N = -\Gamma \Delta t$$

$$\sum \frac{1}{N} \Delta N = -\sum \Gamma \Delta t$$

這是把函數 N 看成變數時，其變化 dN 與原來的變數變化 dt 之間的比例。

兩邊都取積分：

$$\int_{N_0}^N \frac{1}{N'} dN' = -\Gamma \int_{t_0}^t dt'$$

$$\ln N' \Big|_{N_0}^N = -\Gamma t' \Big|_{t_0}^t$$

$$\ln N - \ln N_0 = \ln \left(\frac{N}{N_0} \right) = -\Gamma(t - t_0)$$

兩邊都取指數：

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\Gamma(t-t_0)}$$

功 W 可不可以寫成一個物理量的前後差？



F 的任一反微分函數

$$W = \int_{x_i}^{x_f} dx' \cdot F(x') = H(x_f) - H(x_i) = \Delta H$$

$$W = \Delta K$$

功是力的積分。

根據微積分基本定理，功一定可以寫成反微分 H 函數的前後差！

$K - H$ 保持守恆。

另一個推導：

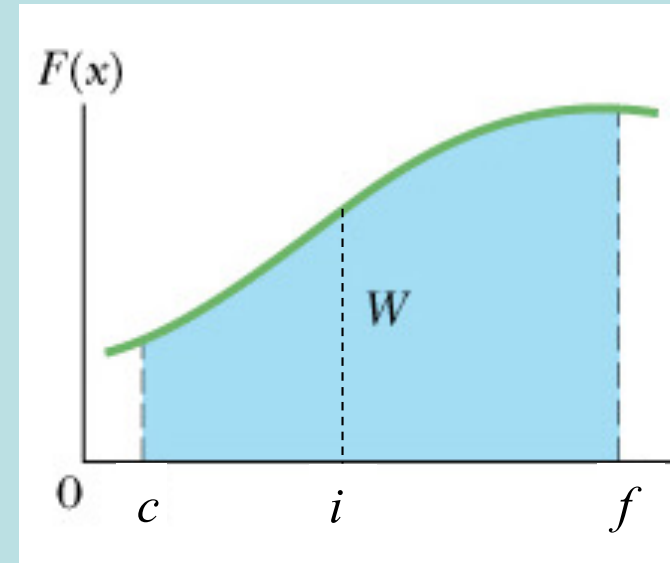
可以另找一個起點 c ，將力函數的積分，拆成由 c 出發的積分的前後差：

$$W = \int_{x_i}^{x_f} dx' F(x') = \int_c^{x_f} dx' F(x') - \int_c^{x_i} dx' F(x')$$

於是功已經自動寫成此積分函數的前後差！

根據功與動能原理，功又是動能的前後差，

$$= K_f - K_i = W$$



將與運動前後有關的量分別移到左右兩邊：

$$K_f - \int_c^{x_f} dx' F(x') = K_i - \int_c^{x_i} dx' F(x')$$

定義位能

$$U(x) \equiv - \int_c^x dx' F(x')$$

$$K_f + U(x_f) = K_i + U(x_i)$$

$$K + U \quad \text{守恆}$$



在一維運動，如果外力只與位置有關， $F \rightarrow F(x)$

$$U(x) \equiv - \int_c^x dx' F(x')$$

這是普遍適用的表示式！

位能 U 即是由某起點 c 出發到達 x ，此力所作的功的負數！

$K + U$ 動能與位能的和，稱為機械能，機械能是守恆的！

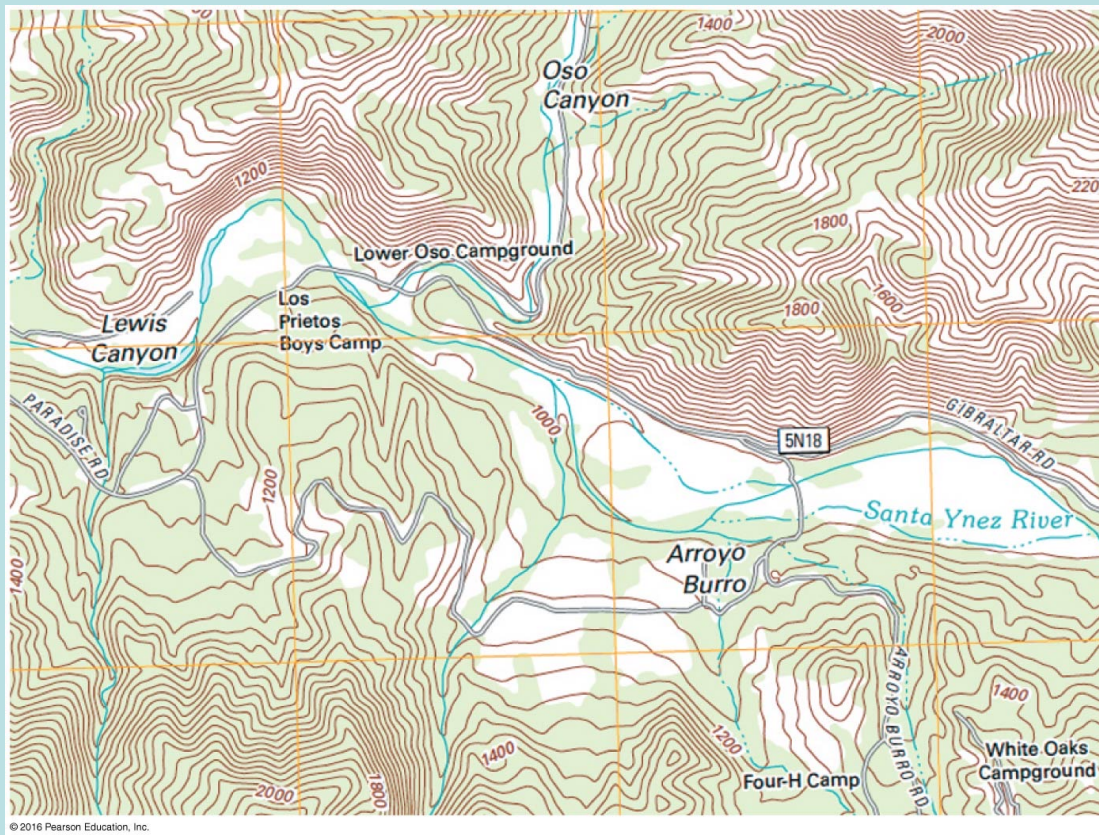
可以說位能的變化，轉換成了動能的變化。

物體在特定位置上是具有潛在能力可以轉化為運動。



$$U(x) \equiv - \int_c^x dx' F(x')$$

位能由位置決定，每一個座標對應一個位能值。
如同地圖上的高度標示一樣！



$$U(x) \equiv - \int_c^x dx' F(x')$$

定義中積分的下限 c 是一個任意常數，

$$U(c) = 0 \quad c \text{ 是位能為零的位置！}$$

但其值可以任意，可見位能的值並不是唯一。

可以唯一定義的是位能差：

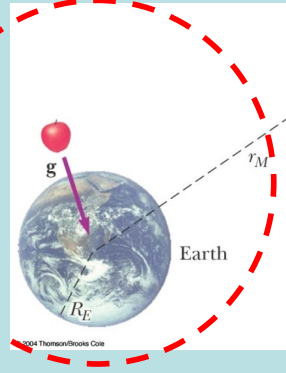
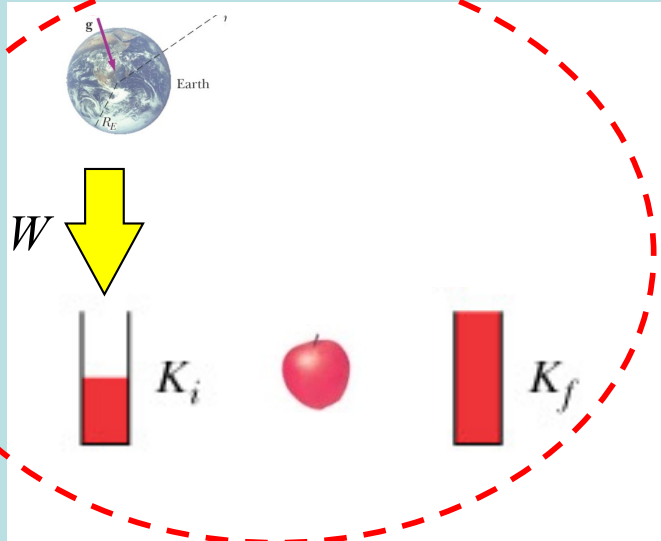
$$\Delta U = -W = - \int_{x_i}^{x_f} dx' \cdot F(x') = - \int_c^{x_f} dx' F(x') + \int_c^{x_i} dx' F(x')$$

位能差恰為此力 F 從起點運動到末點所作功的負號

物理現象只與位能差有關，所以 c 位能為零的位置可以任意選取。

功與動能原理是來自第二定律物理的結果

粒子動能變化等於施力者所作的功： $\Delta K = W$

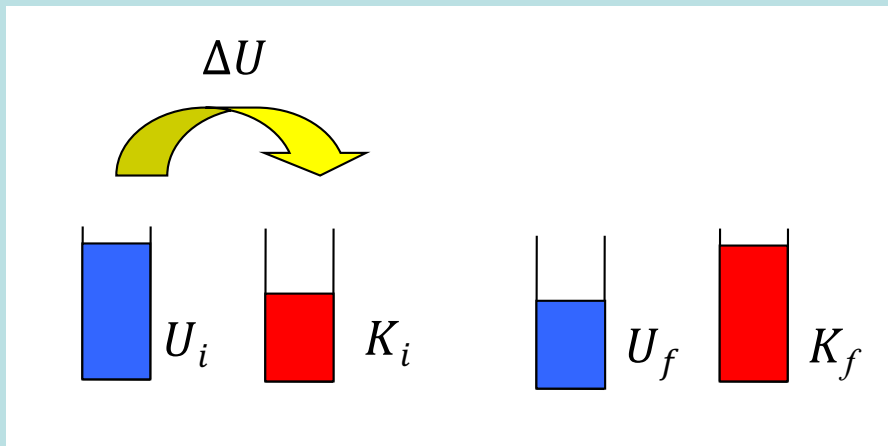


數學的推導得到功可以寫成位能差。

$$W = -\Delta U$$

可將受力者與施力者視為一個系統，

以位能差來代替功，即可利用位能來描述力的作用。



$$\Delta K = -\Delta U$$

原本是外力所做的功，就變身為受力者與施力者的總系統，內部位能的變化。

$$\Delta K + \Delta U = 0$$



機械能守恆

$$E_{\text{Mech}} \equiv K + U$$

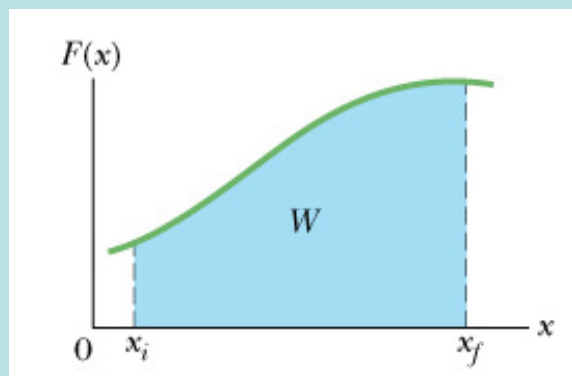
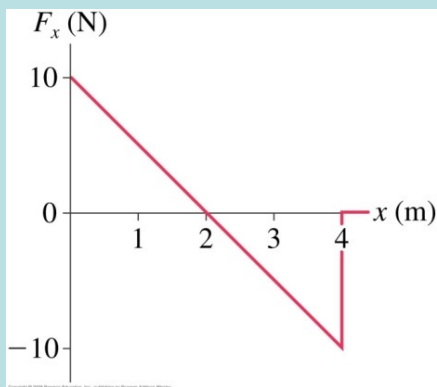
位能 Potential Energy

$$U(x) \equiv - \int_c^x dx' F(x')$$

位能是由位能為零的參考點 c 運動到 x 的過程中，此力所作的功負號。
我們可以自由選擇參考位置 c

$$\Delta U = U(x_f) - U(x_i) = -W = - \int_{x_i}^{x_f} dx' F(x')$$

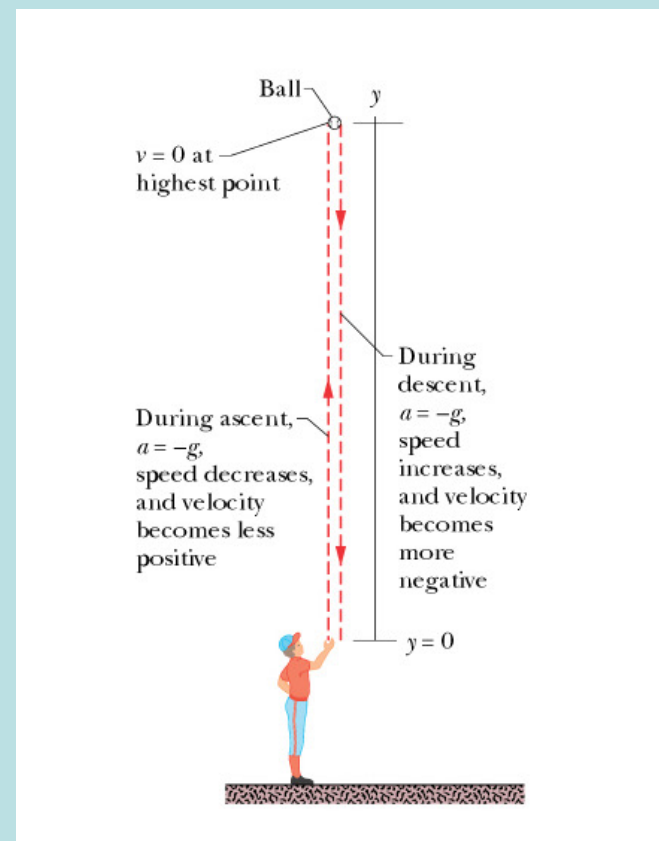
位能差是由起點運動到末點的過程中此力所作的功的負號。



重力位能

取 $U(0) = 0$

$$U(y) = - \int_0^y (-mg) \cdot dy' = mgy$$



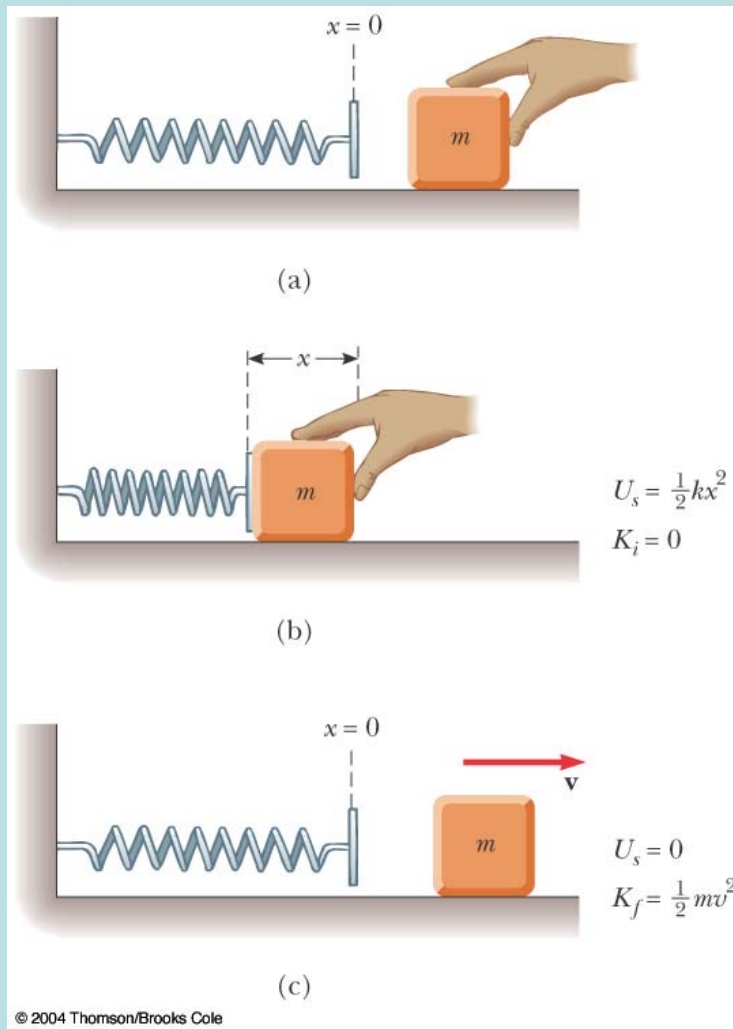
$$\int_{x_i}^x dx' \cdot x'^n = \frac{1}{n+1} x'^{n+1} \Big|_{x_i}^x = \frac{1}{n+1} x^{n+1} - \frac{1}{n+1} x_i^{n+1}$$

彈力位能

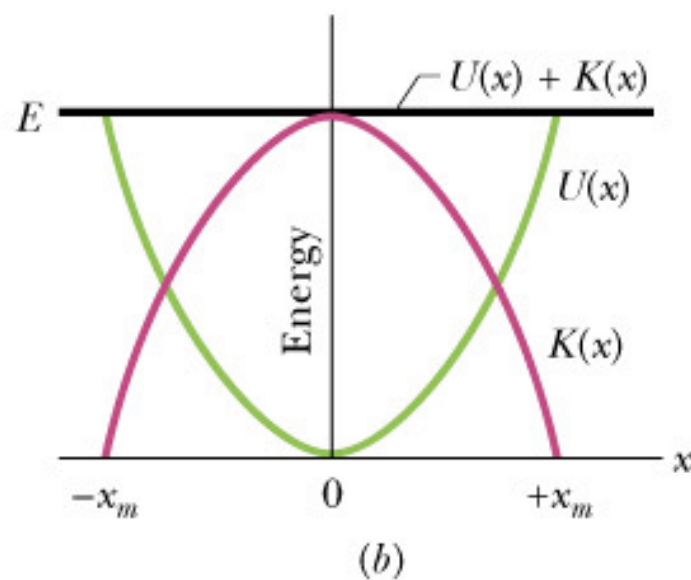
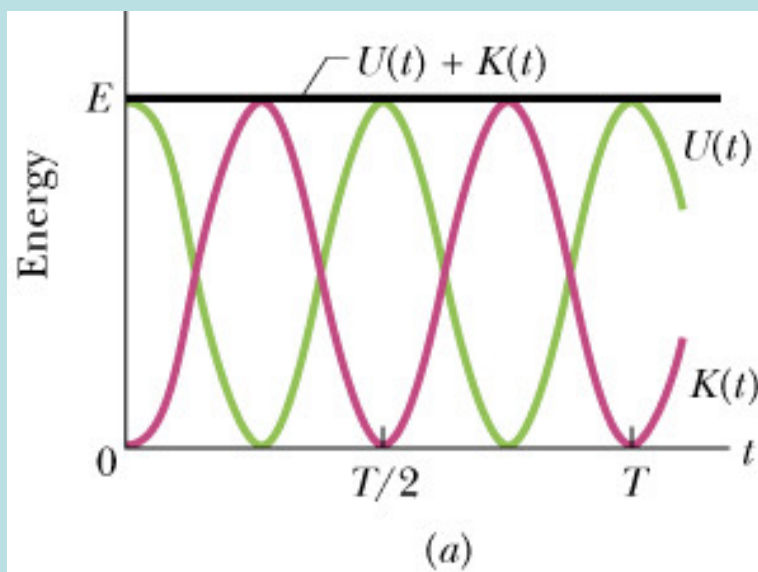
Elastic Potential Energy

取 $U(0) = 0$

$$U(x) = - \int_0^x (-kx') \cdot dx' = \frac{1}{2} kx^2$$



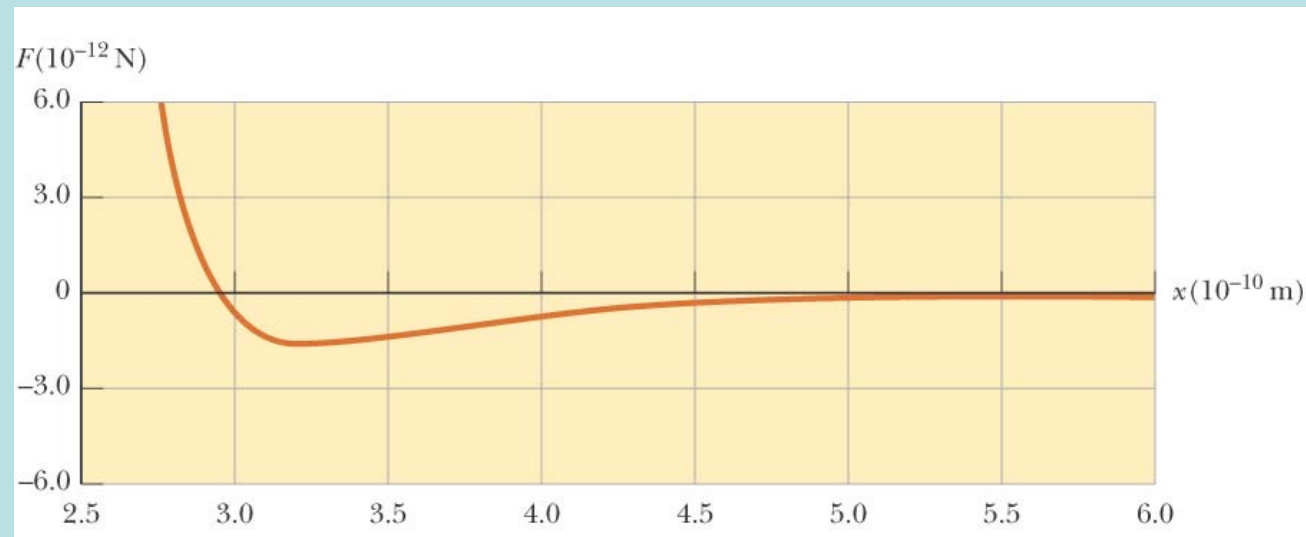
$$\int_{x_i}^x dx' \cdot x'^n = \frac{1}{n+1} x'^{n+1} \Big|_{x_i}^x = \frac{1}{n+1} x^{n+1} - \frac{1}{n+1} x_i^{n+1}$$



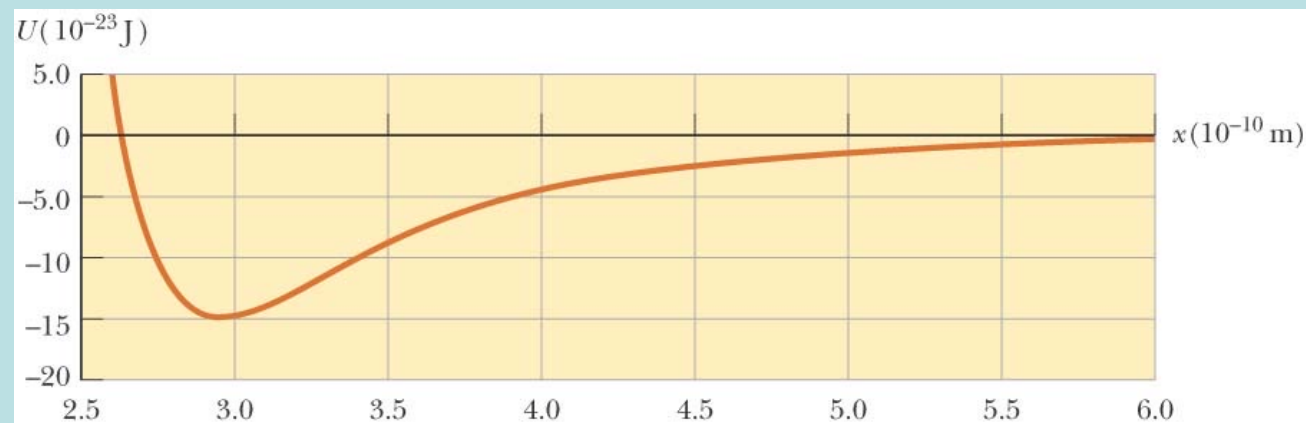
守恒量

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \text{constant}$$

原子力



$$F(x) = \frac{\varepsilon}{\sigma} \left[12 \left(\frac{\sigma}{x} \right)^{13} - 6 \left(\frac{\sigma}{x} \right)^7 \right]$$



$$C = \infty$$

$$U(x) = - \int_{\infty}^x dx' \frac{\varepsilon}{\sigma} \left[12 \left(\frac{\sigma}{x'} \right)^{13} - 6 \left(\frac{\sigma}{x'} \right)^7 \right] = \varepsilon \left[\left(\frac{\sigma}{x'} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x'} \right)^6 \right]_{\infty}^x = \varepsilon \left[\left(\frac{\sigma}{x} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x} \right)^6 \right]$$

由位能求力

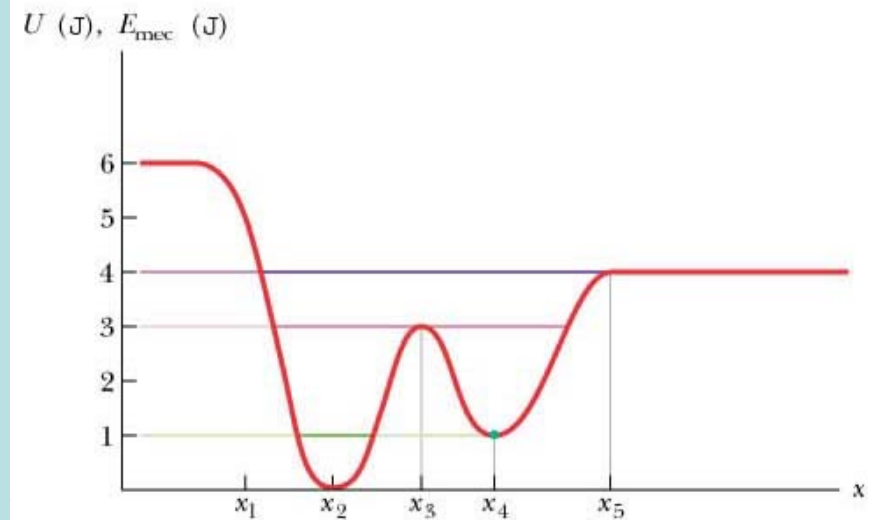
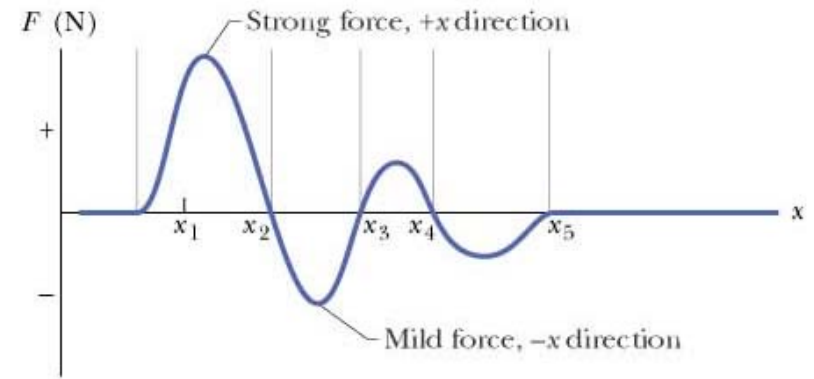
$$U(x) = - \int_c^x dx' F(x')$$

位能函數是力的積分的負號

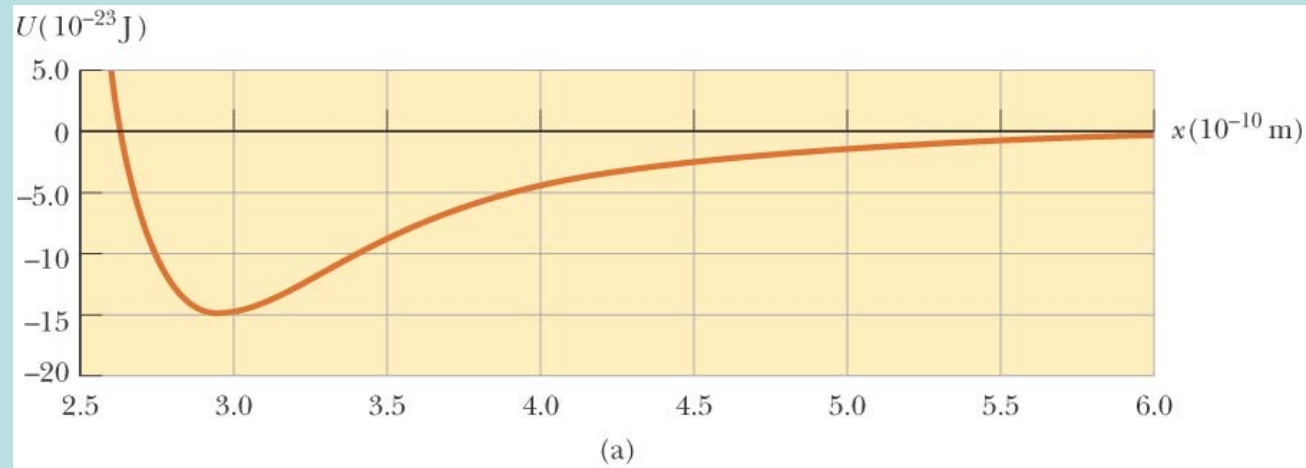
$$F = - \frac{dU}{dx}$$

力是位能函數的微分的負號。

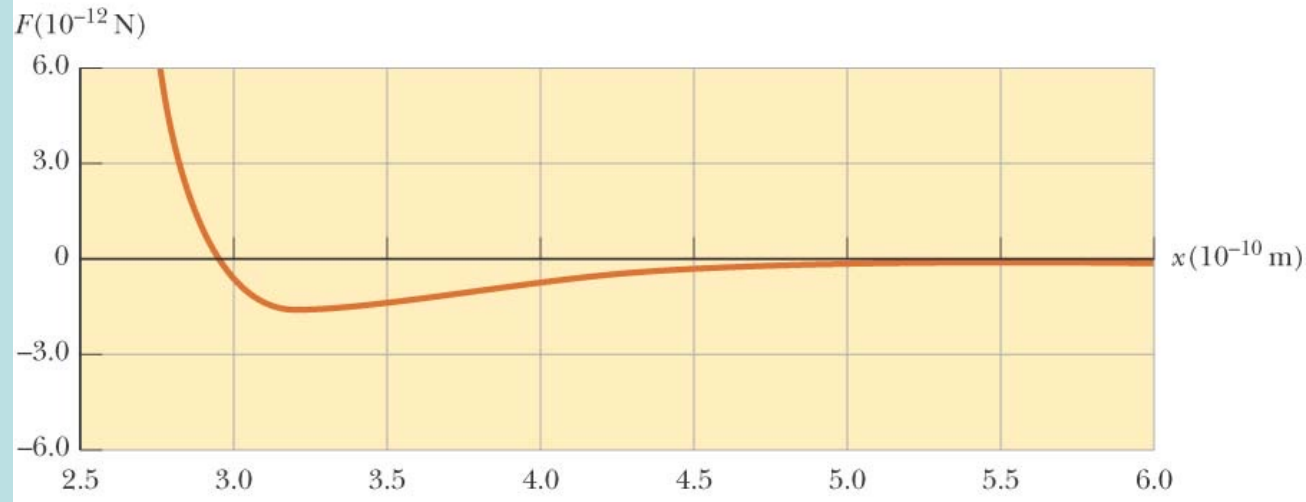
力是位能函數曲線切線斜率的負號。



原子力



$$U(x) = 4\varepsilon \left[\left(\frac{\sigma}{x} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x} \right)^6 \right]$$

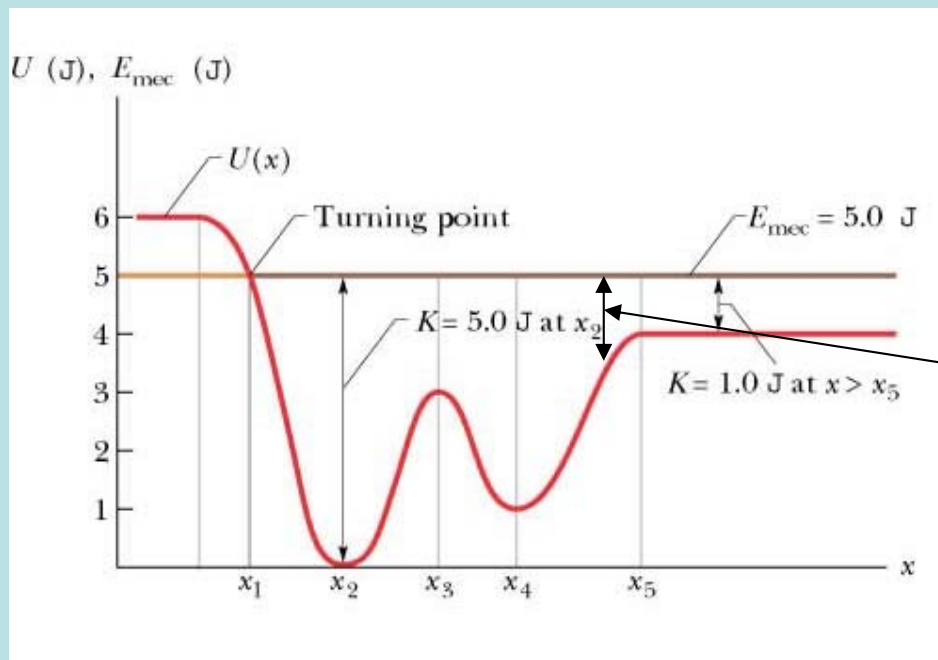
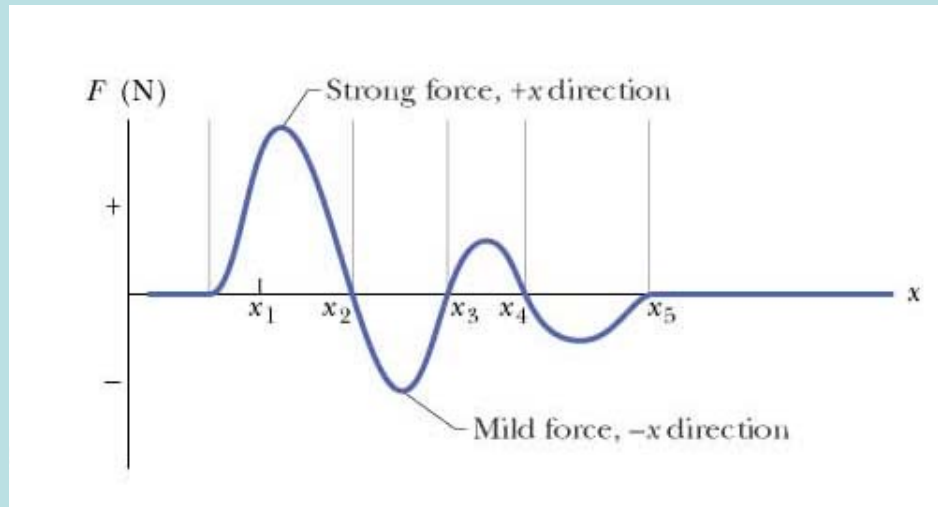


$$\sigma = 0.263 \text{ nm}$$

$$\varepsilon = 1.51 \times 10^{-22} \text{ J}$$

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = 4\frac{\varepsilon}{\sigma} \left[12 \left(\frac{\sigma}{x} \right)^{13} - 6 \left(\frac{\sigma}{x} \right)^7 \right]$$

有了位能函數，由起始的總能量即可求出在任一位置的速率！



$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x) = E_0$$

動能就是兩線的間隔

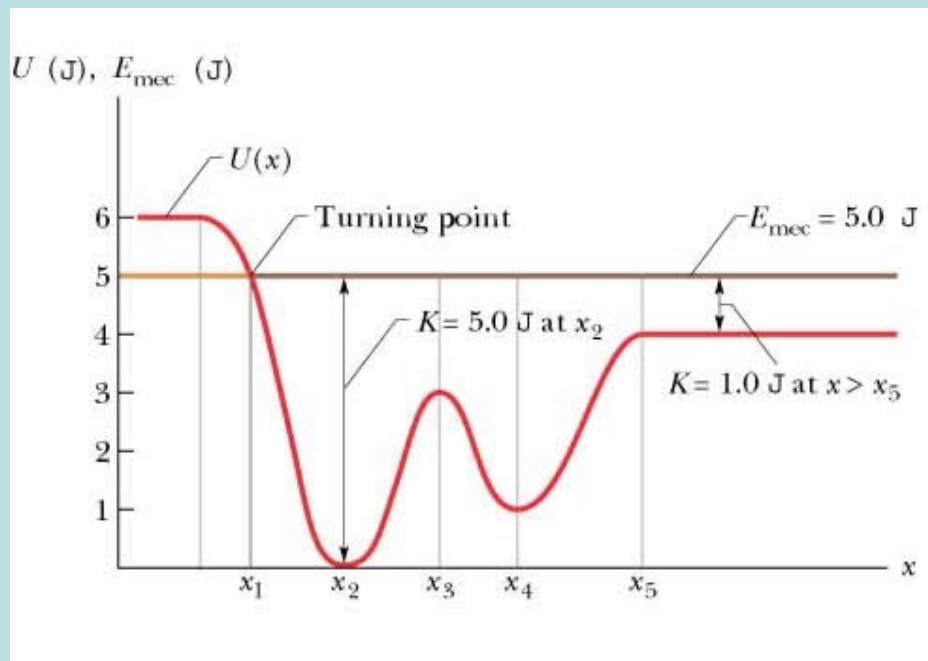
$$v = \sqrt{\frac{2[E_0 - U(x)]}{m}}$$

折返點 Turning point

$$v = \sqrt{\frac{2[E_0 - U(x)]}{m}}$$

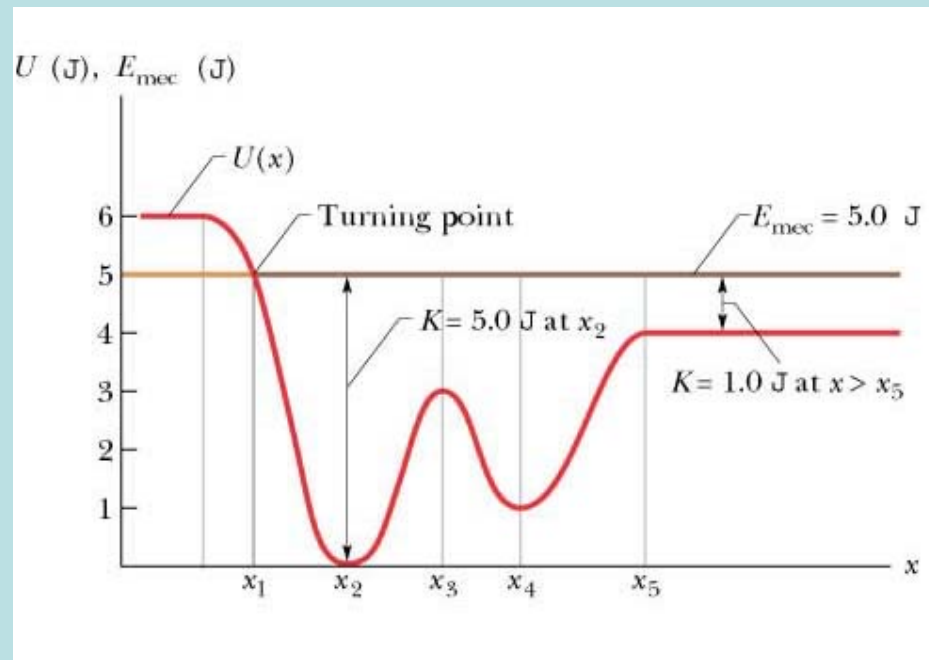
粒子無法進入 $U > E_0$

$U = E_0$ 折返點

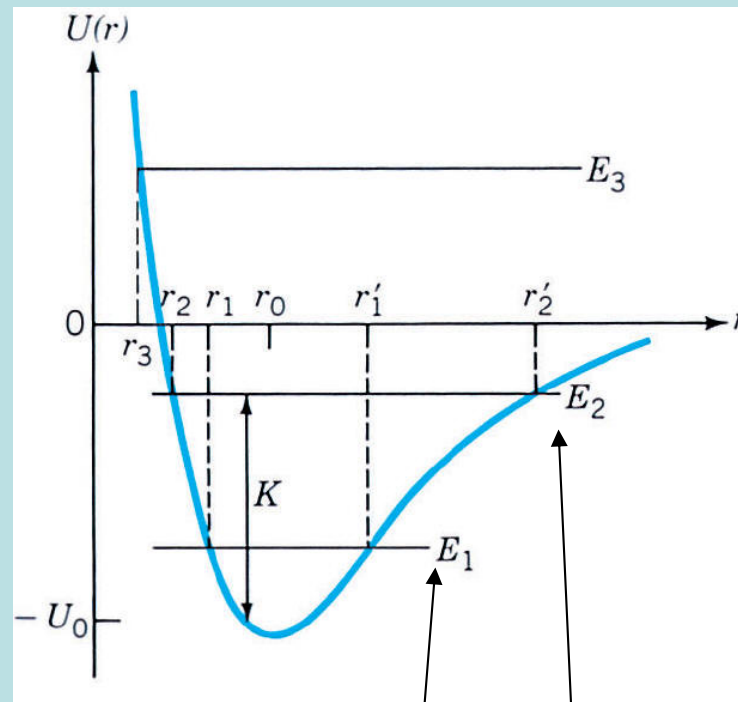


在一個位能中的粒子運動可以分成兩種：

自由態：運動範圍並沒有被限制於一個區域內，
這種情況下，機械能必須大於無限遠處的位能



束縛態 Bound State：運動範圍被限制於一個區域內，
這種情況，機械能必須小於無限遠處的位能
兩端都有 turning point，所以只能拘限在這兩點之間運動。

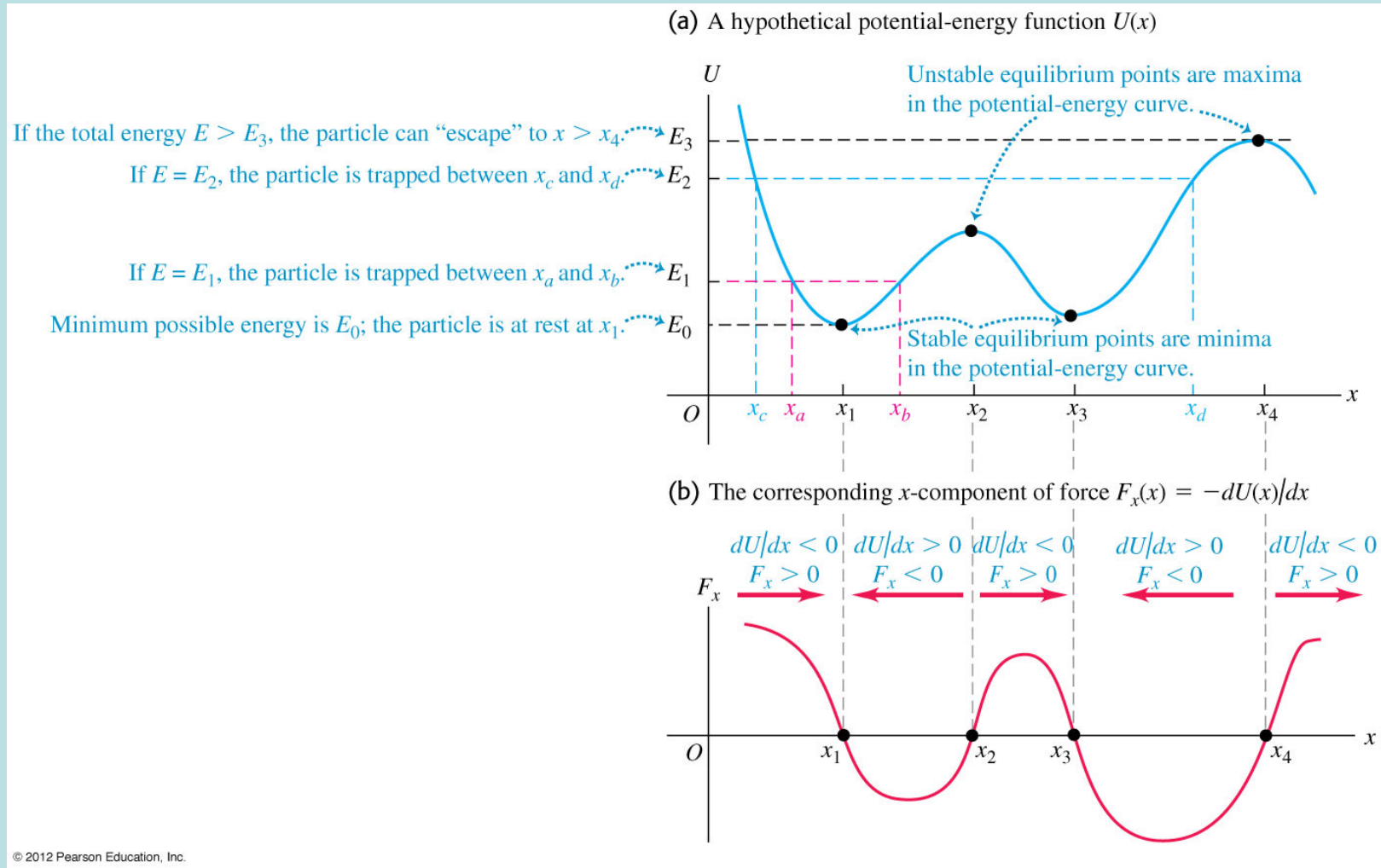


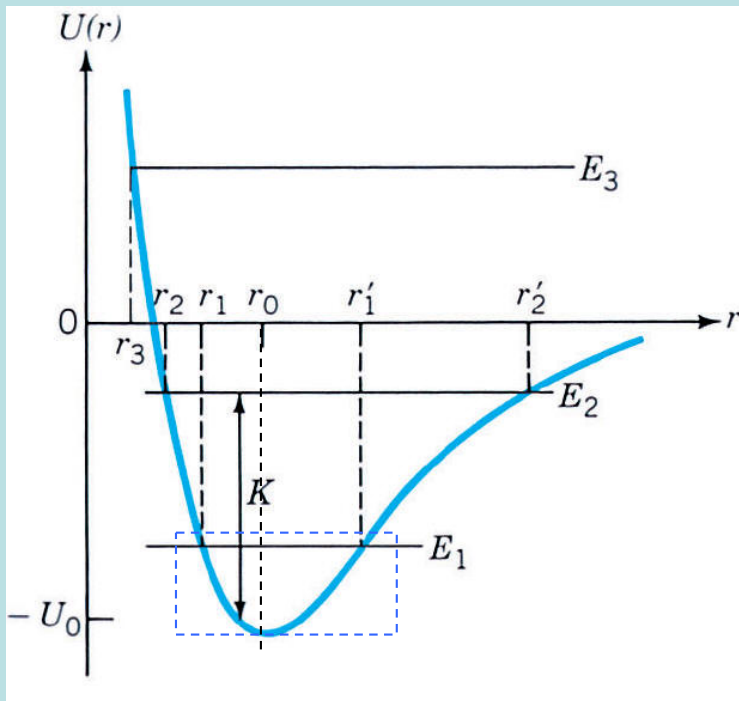
一般來說束縛的範圍會和能量有關。

平衡點 Equilibrium Point

$$F(x_0) = -\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x_0} = 0$$

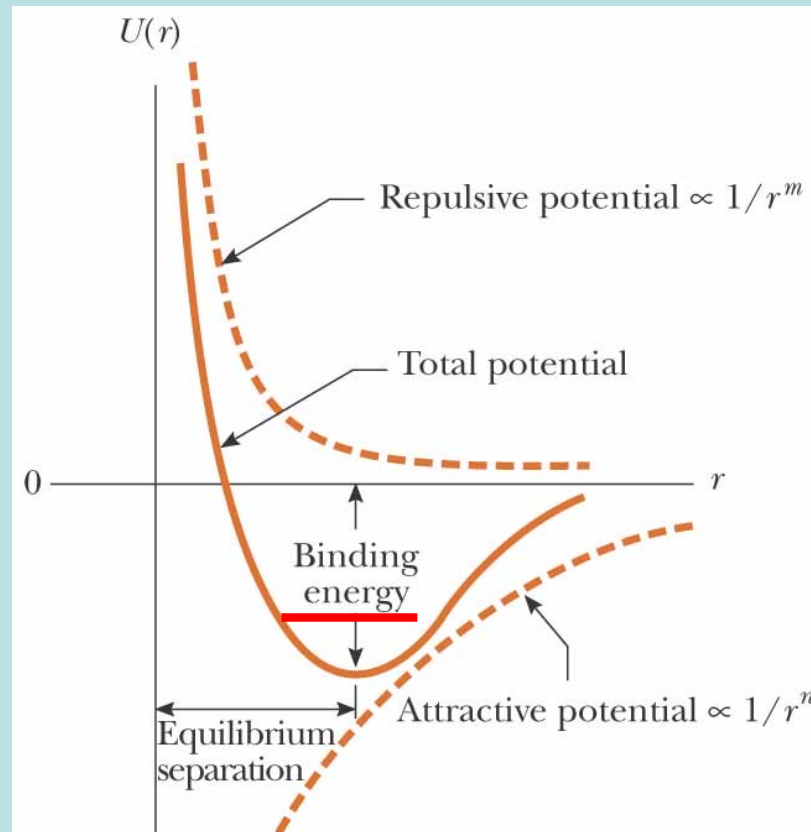
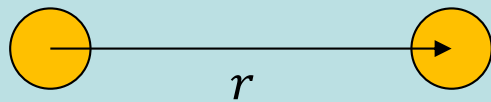
束縛態的運動範圍一定有一個平衡點





在平衡點附近不遠處震盪的束縛態，他所感覺的位能近似於一拋物線，
因此近似於一個以平衡點為中心的簡諧運動！
簡諧運動的能量一般會慢慢在束縛範圍被熱消耗掉，
最後束縛態的兩粒子大致就停在平衡點。

束縛態

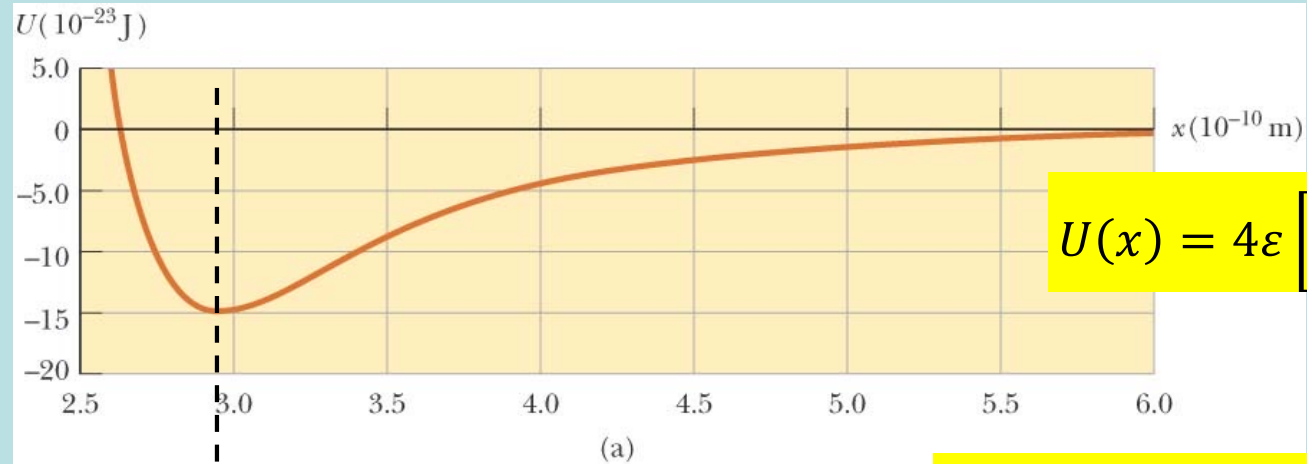
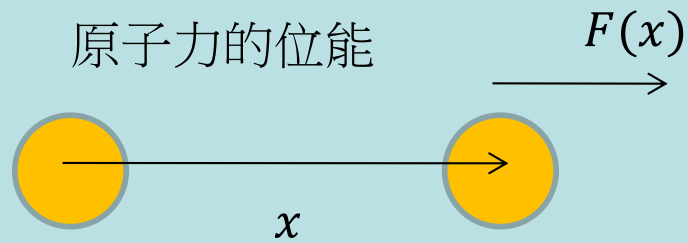


設無限遠處位能為零：

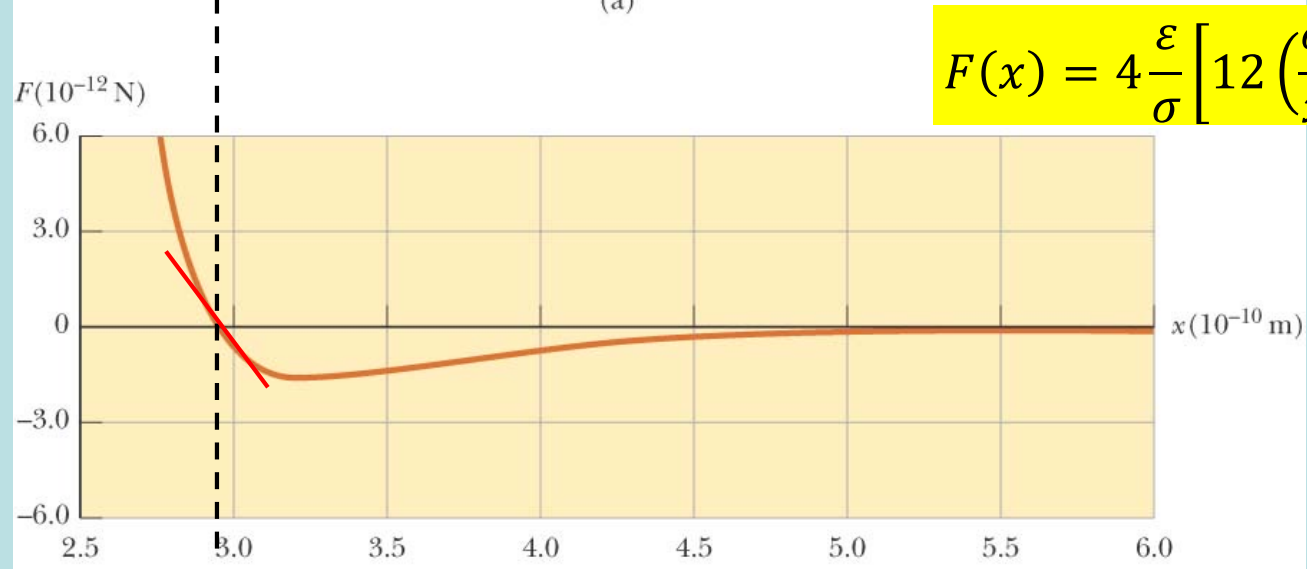
如果兩粒子總能量小於零，平衡點兩側都會有折返點，就能形成束縛態。

束縛能：拆散束縛態所需的能量，平衡點位能與無限遠處位能的差！

原子力的位能



$$U(x) = 4\varepsilon \left[\left(\frac{\sigma}{x} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x} \right)^6 \right]$$

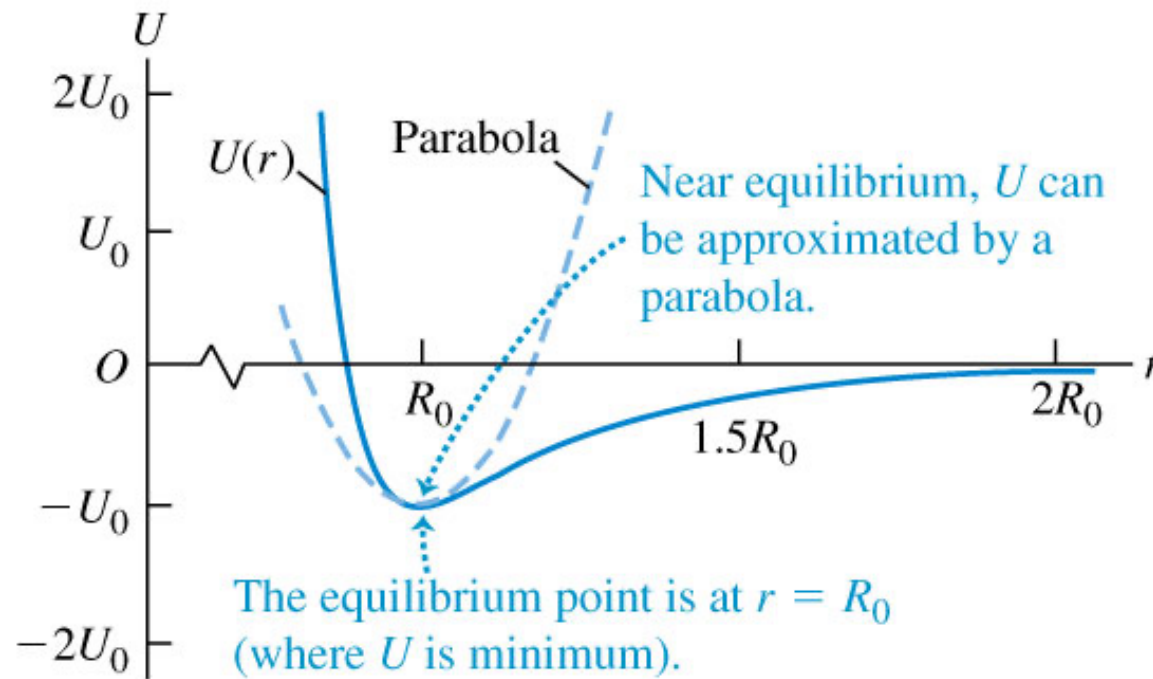


$$F(x) = 4 \frac{\varepsilon}{\sigma} \left[12 \left(\frac{\sigma}{x} \right)^{13} - 6 \left(\frac{\sigma}{x} \right)^7 \right]$$

原子力在遠距時是吸引力，近距時是排斥力，有一個平衡點。

原子力的位能

(b) Potential energy U of the two-atom system as a function of r

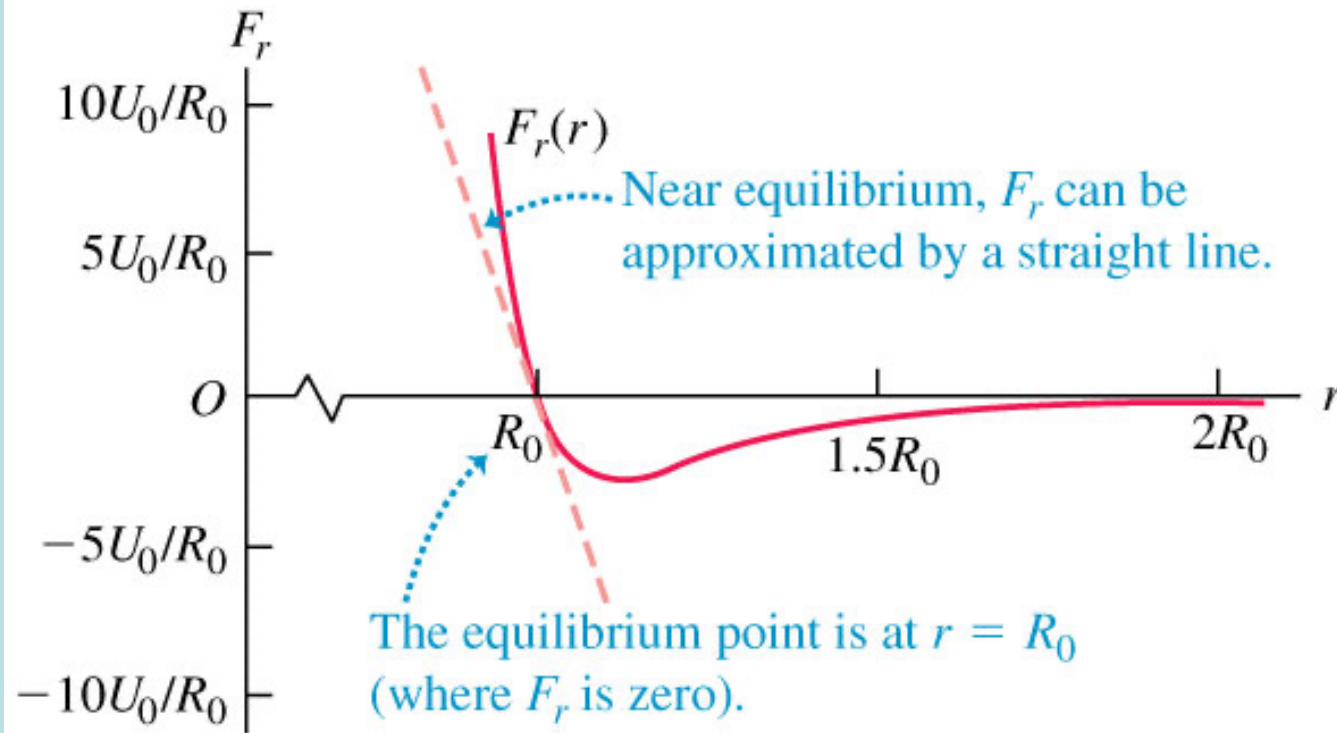


© 2012 Pearson Education, Inc.

在平衡點附近，位能近似於一拋物線。

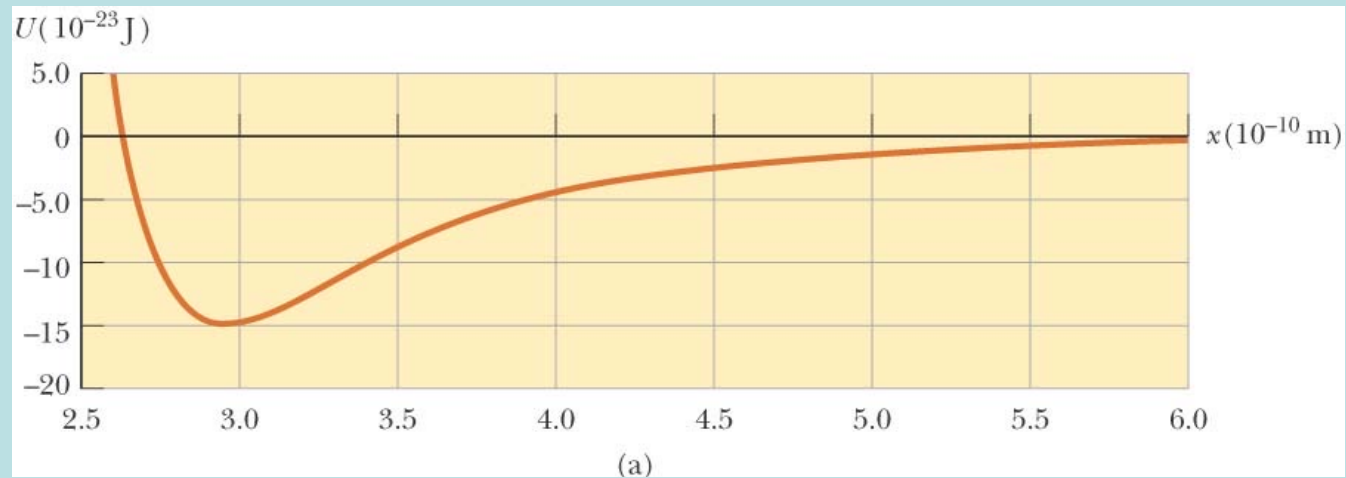
原子力

(c) The force F_r as a function of r



© 2012 Pearson Education, Inc.

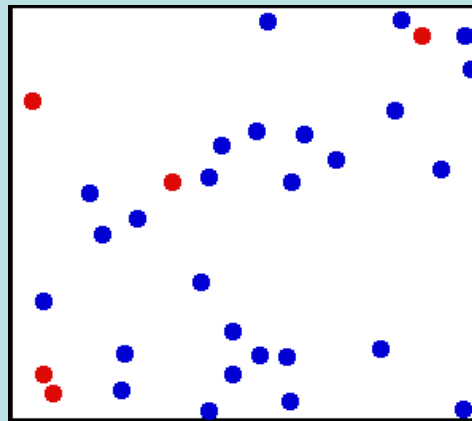
在平衡點附近，原子力近似於一直線。



原子力束縛態

$$U(x) = 4\varepsilon \left[\left(\frac{\sigma}{x} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x} \right)^6 \right]$$

原子力可形成束縛態，但束縛能只有約 0.001eV ，
而室溫時熱擾動能量 $kT \sim 0.02\text{eV}$ ，束縛態會被熱拆散。

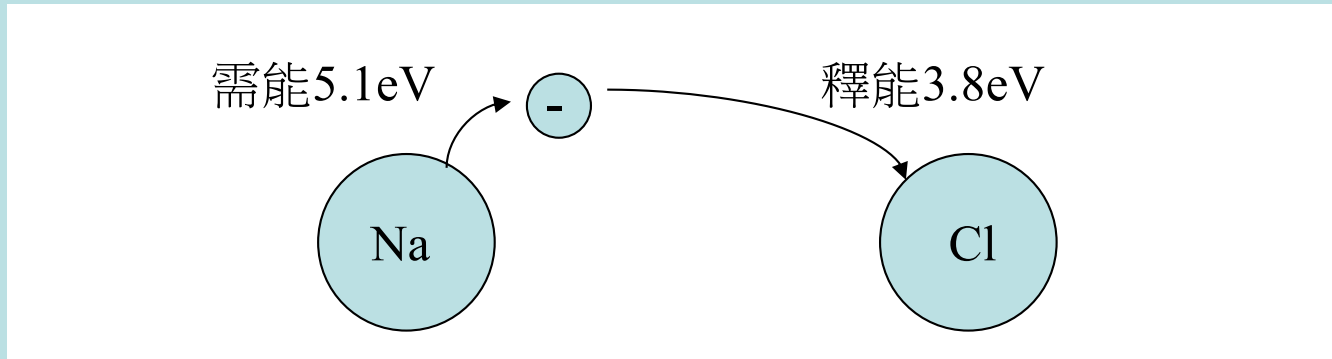


要形成束縛態，必須增加平衡態附近的谷深，即在近距離減低能量。

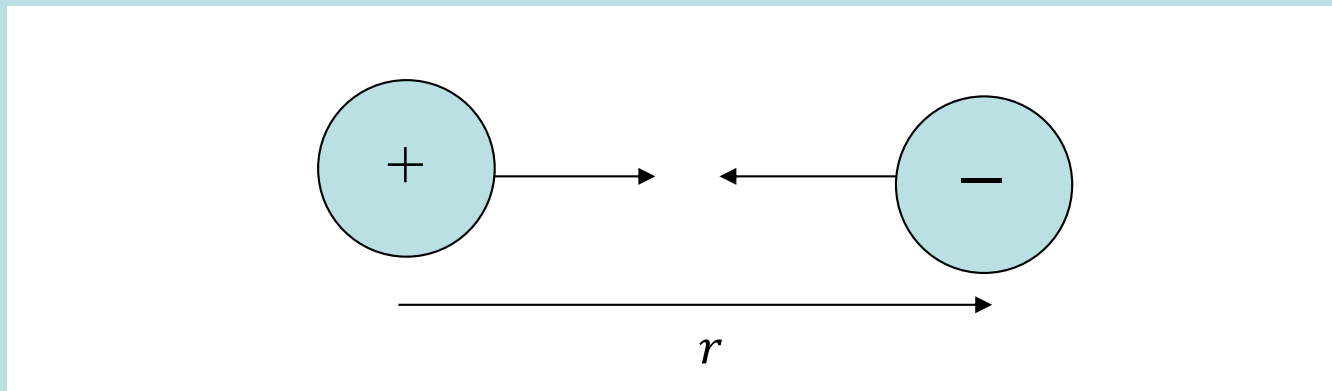
離子束縛態

兩原子交換電子後形成兩個離子。

形成離子需要耗能，但兩個相反電荷的離子，靠近時會降低能量。

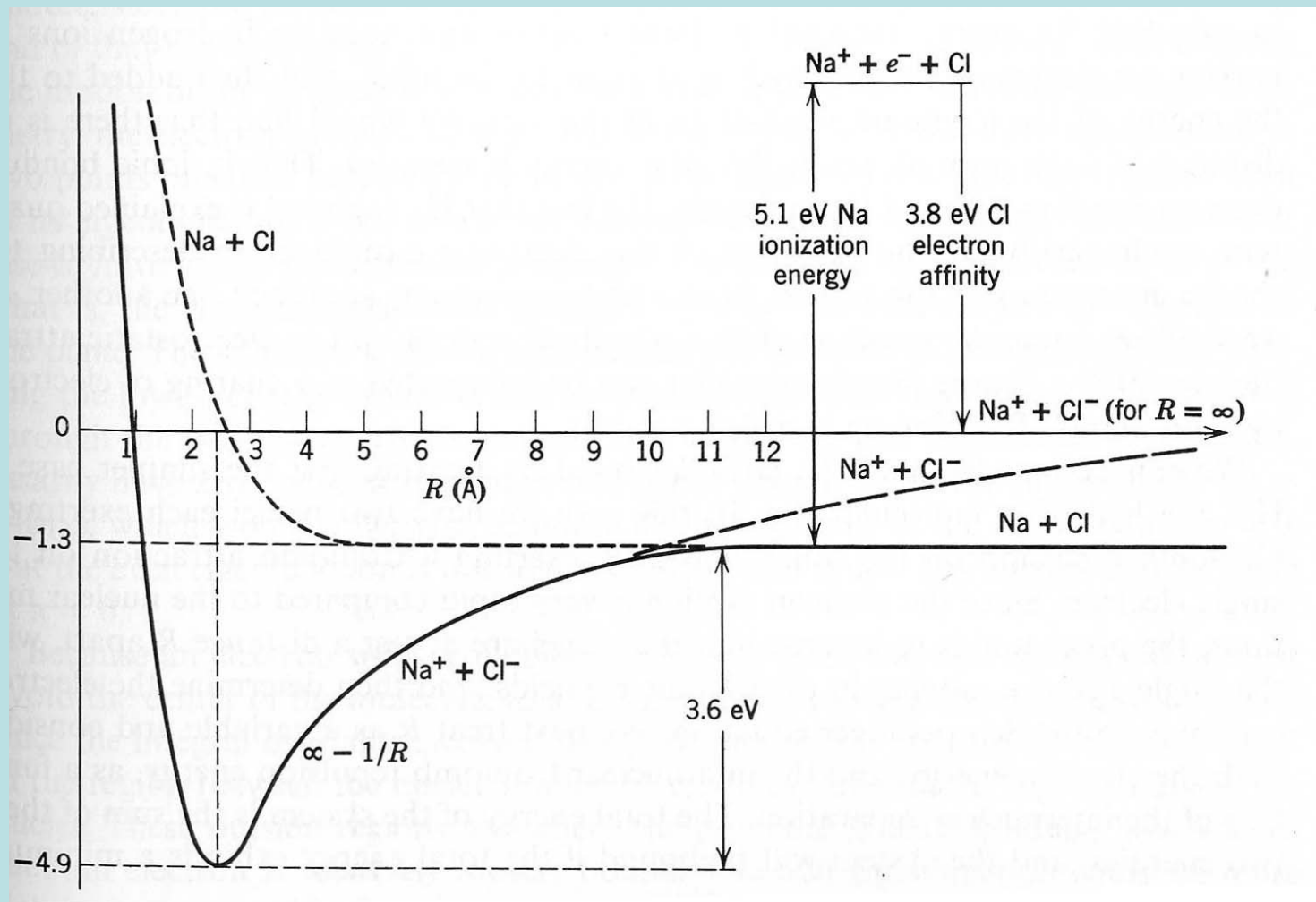


如果降低的能量可以彌補形成離子所耗的能量，就可以形成離子束縛態。



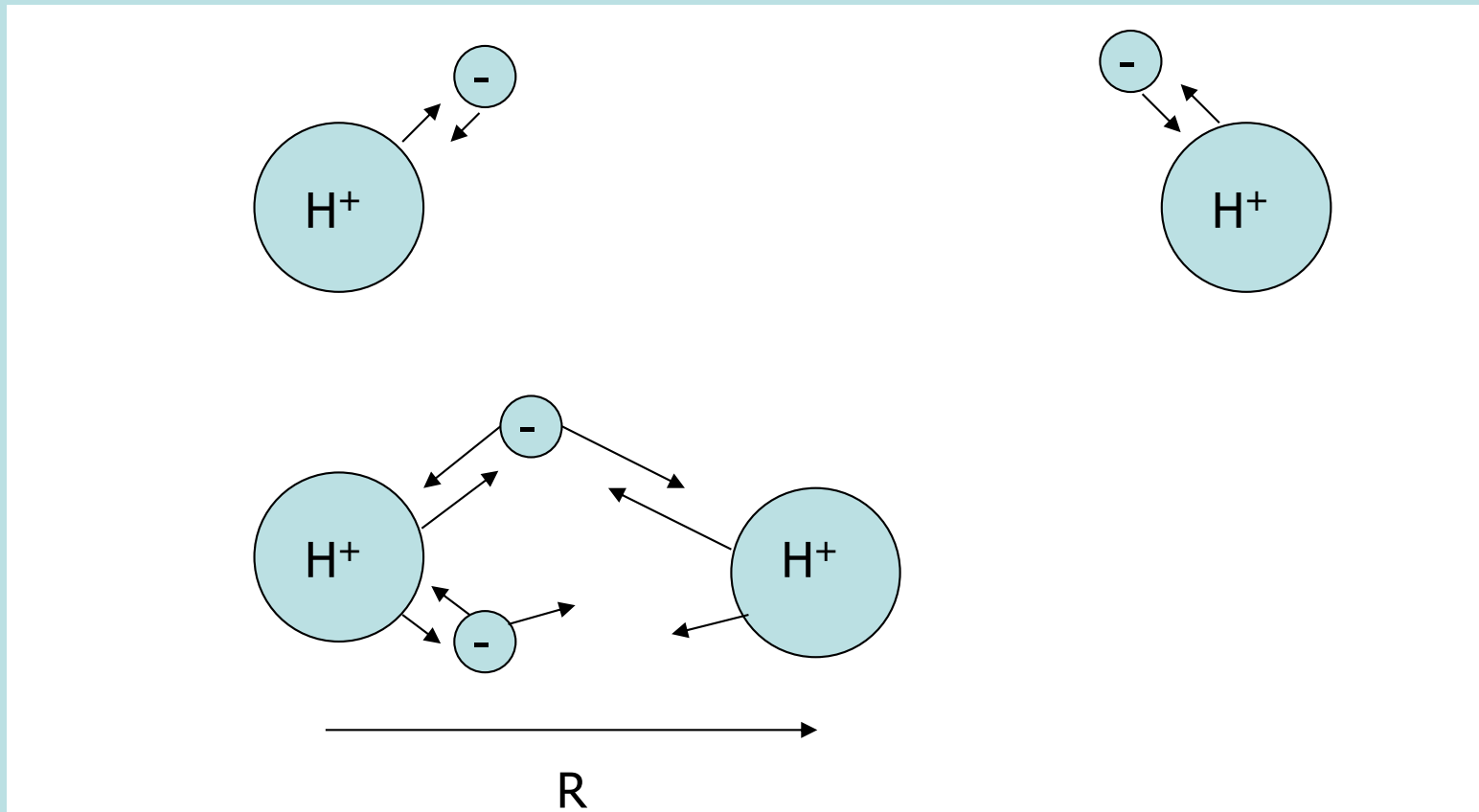
若束縛可釋得 1.3 eV 以上能量，則束縛態能量較低。

離子束縛態



束縛能3.6eV已大於室溫的熱擾動能量，故為穩定的束縛態。

共價鍵束縛態



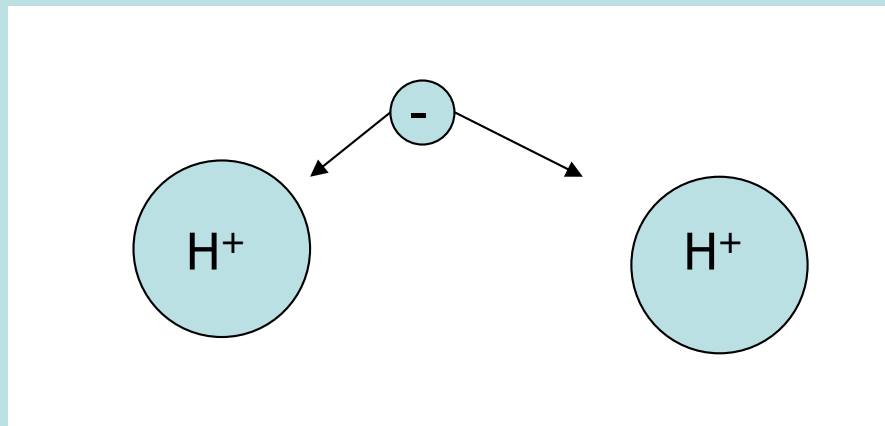
電子共享也可使能量降低，因此形成束縛態。

所降低的能量與原子核的距離及電子軌道有關

在量子的微觀層次，因為位置動量無法同時測準，

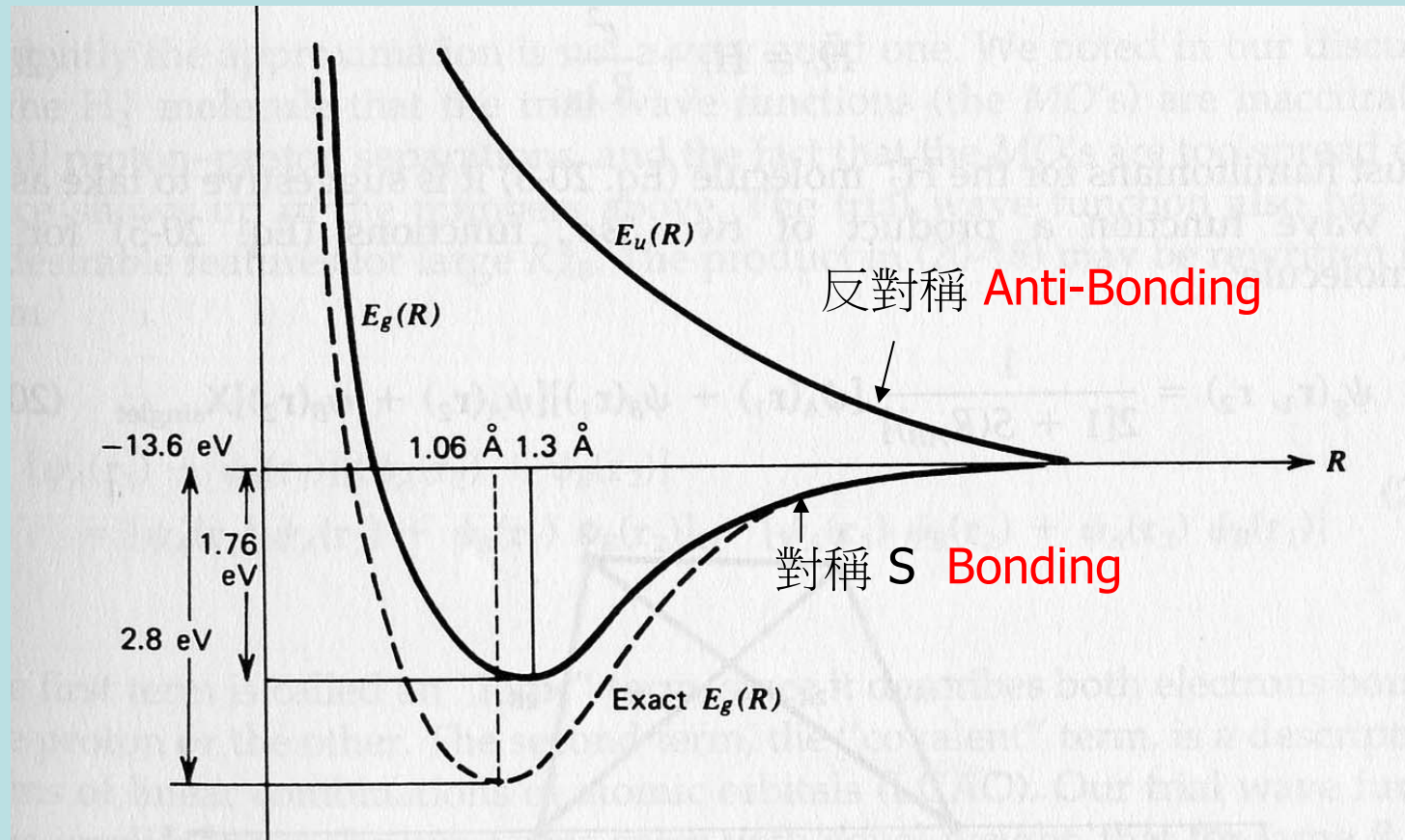
力的概念變得很不方便，但原子系統能量仍然可以測準。

$$\psi(\vec{r}, R)$$



解兩個原子核外的電子能階與對應的能態，
找到電子能態的能階與距離 R 的關係。

分子中電子能態的能量與距離 R 的關係：

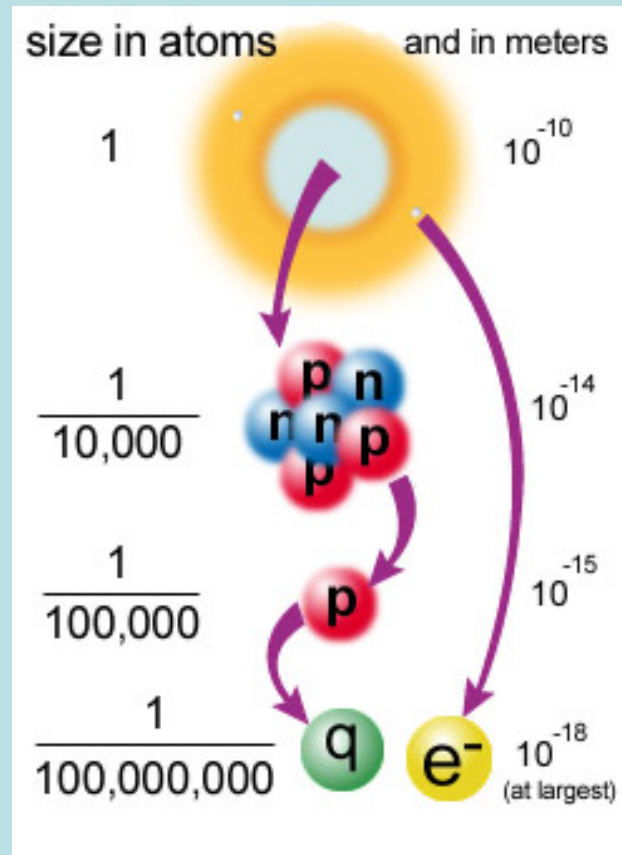


電子因為由兩個原子核共享而增加了負的庫倫位能，
使能量會因原子核距離的靠近而減少。

對稱態的確可以形成束縛態

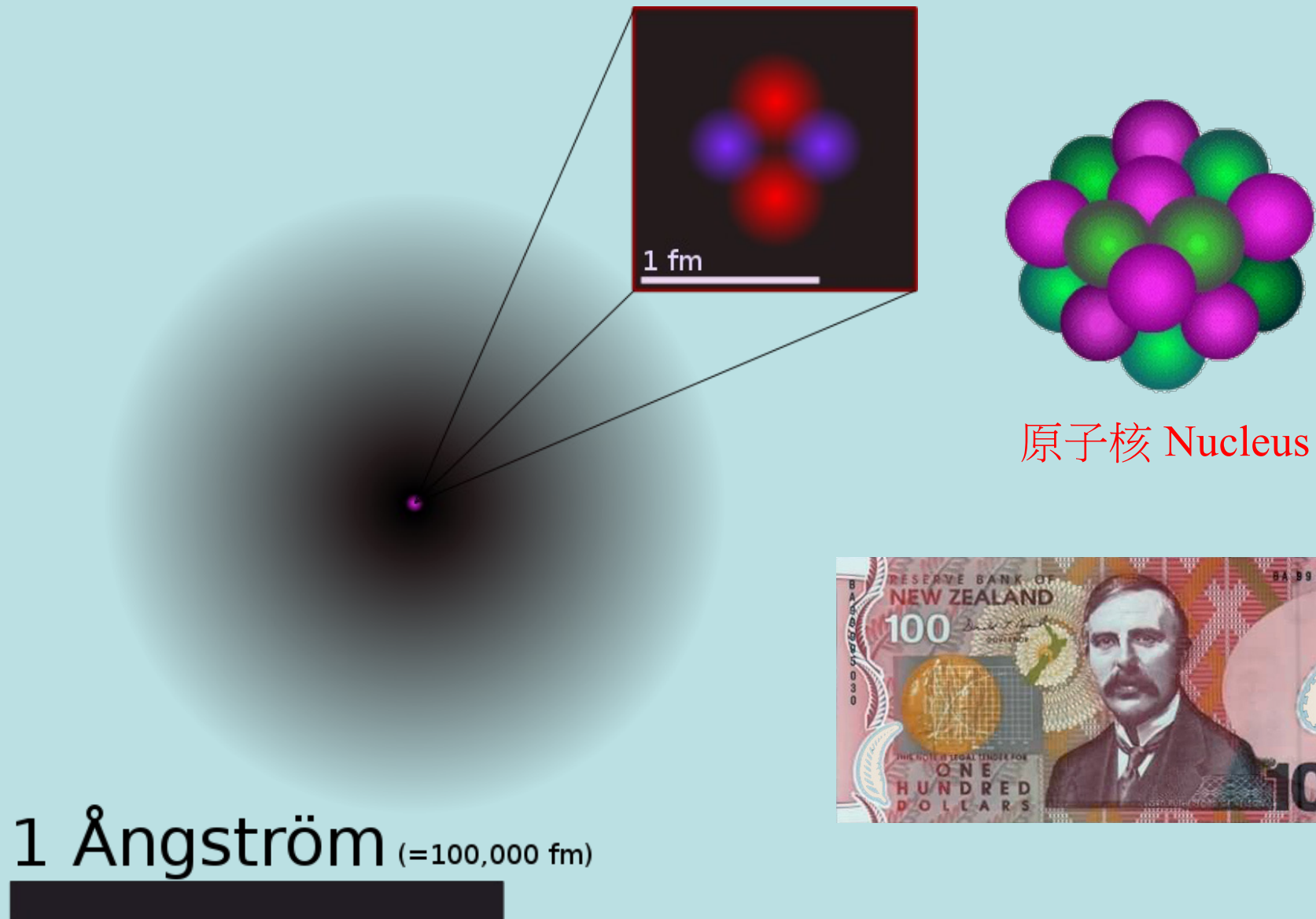
分子軌道 Molecule Orbits σ -bond

許多自然界的粒子都是束縛態



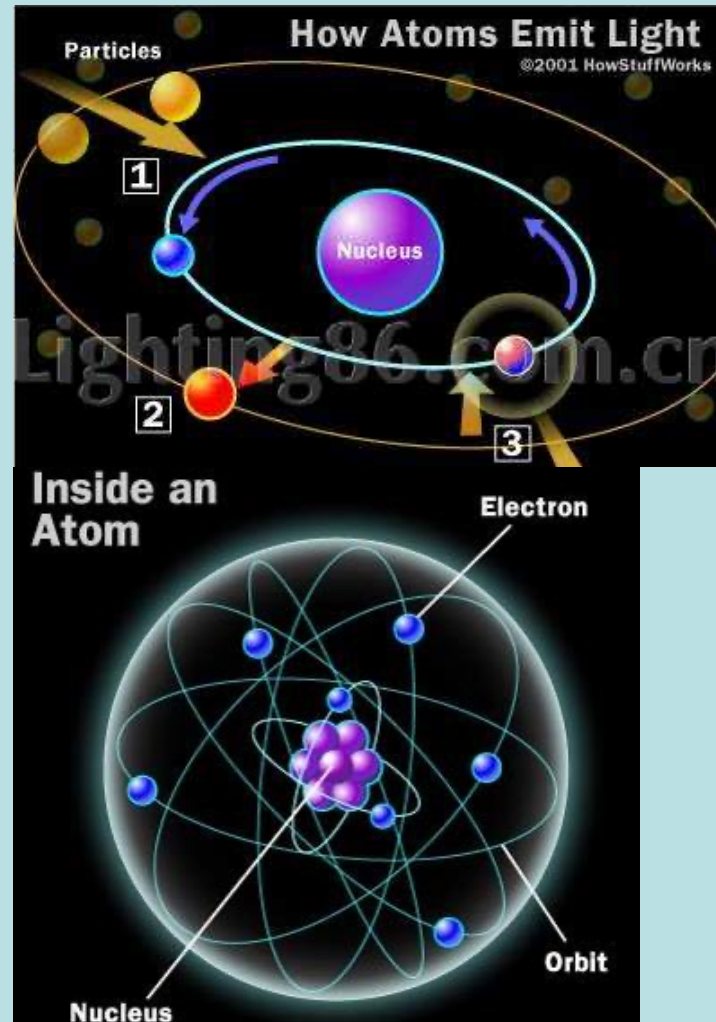
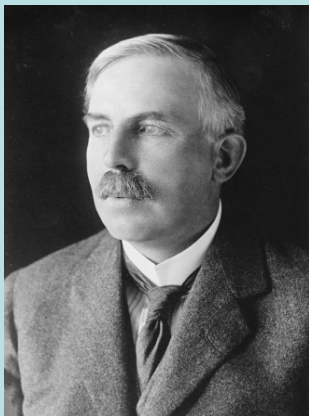
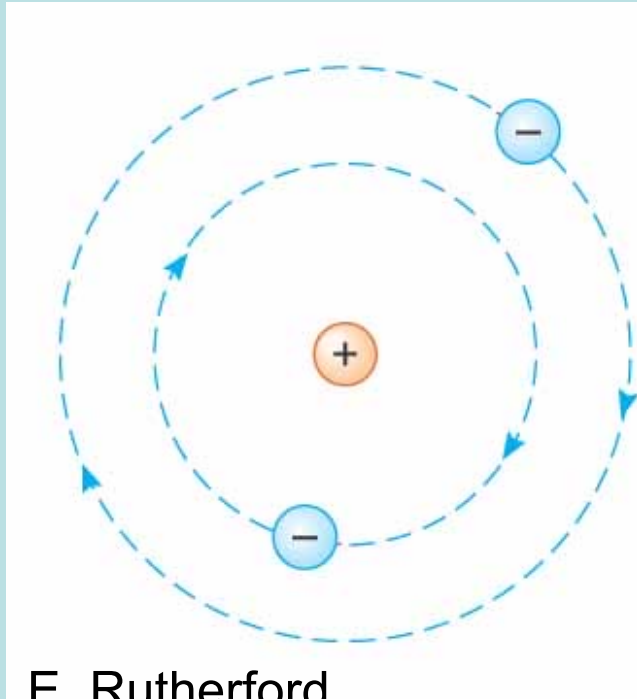
And if the protons and neutrons were a centimeter in diameter;
Then the electrons and quarks would be less than the diameter of a hair; and
The entire atom's diameter would be greater than the length of 30 football fields!

原子內的正電與大部分的質量集中於極小的原子核



電子在一個很重的帶正電的原子核旁如何維持穩定狀態？

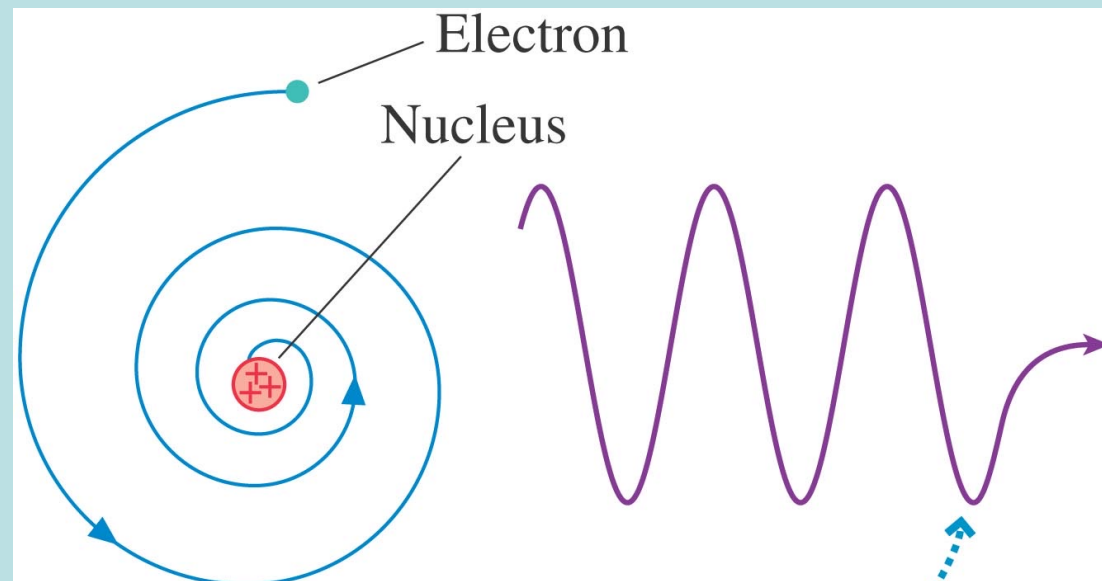
電子可以繞著原子核轉動：



But, this is not right!

光帶走能量！

電子很快就會跌入原子核之中！



這個太陽系般的原子模型並不穩定！

原子的結構有大問題。

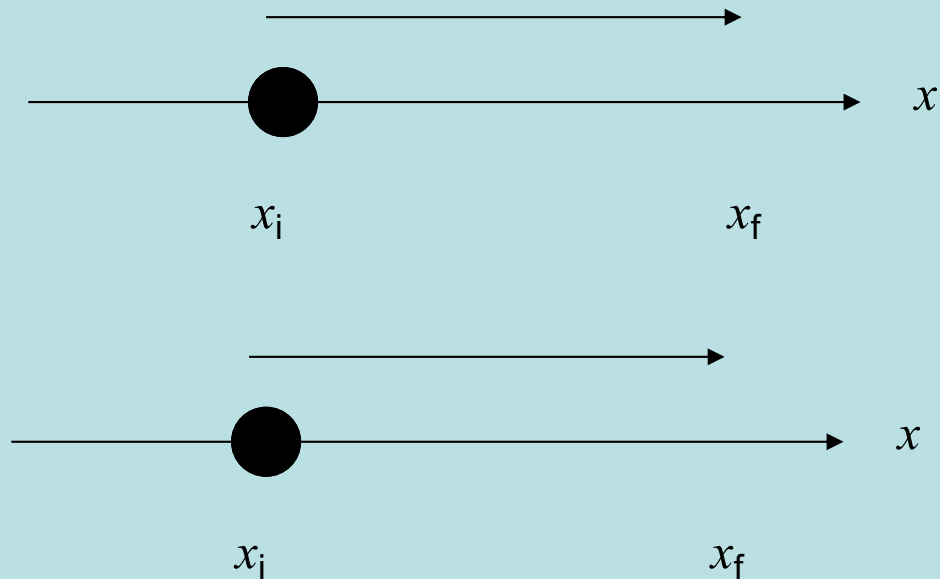


功 W 是一個過程的物理量。



位能 U 則是屬於狀態的物理量！

力學中的功



功 W 是一個過程的物理量。

原則上可能與過程的細節相關！

但對一維的力，功只與前後狀態有關！

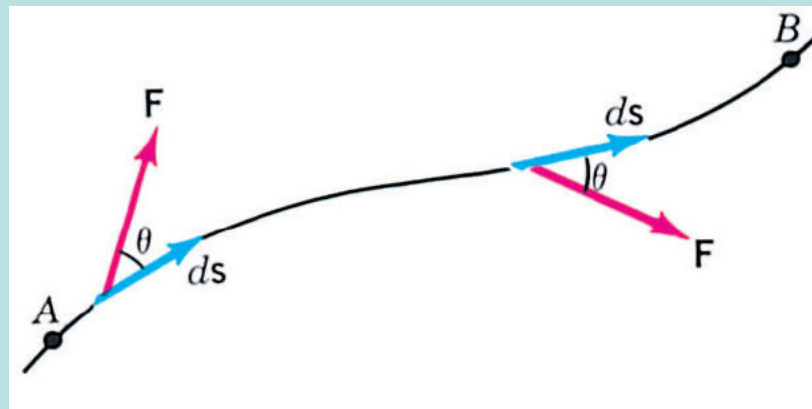
在此特殊情況下，一個過程的功恰好是一個物理量的前後差：

$$W = -\Delta U \quad \text{位能 } U \text{ 則是屬於狀態的物理量！}$$

3D 空間的功

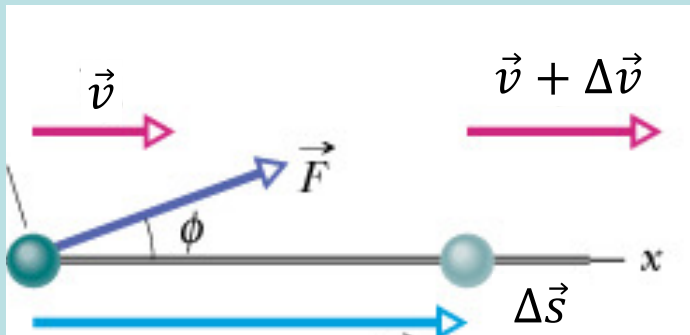
$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_j} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

沿某一路徑



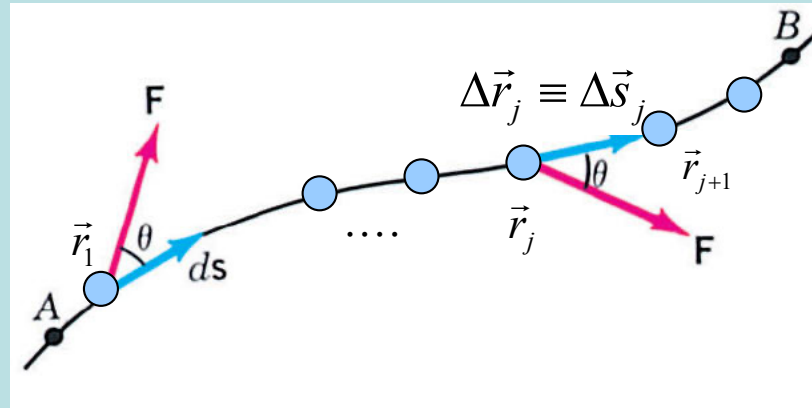
研究 $K = \frac{1}{2}mv^2$ 動能在運動過程中的變化。

考慮一個無限小的過程：



$$\begin{aligned}\Delta \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) &= \frac{1}{2} m (\vec{v} + \Delta \vec{v}) \cdot (\vec{v} + \Delta \vec{v}) - \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} \approx m \Delta \vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= m \Delta \vec{v} \cdot \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} = m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \cdot \Delta \vec{s} = m \vec{a} \cdot \Delta \vec{s} = \vec{F} \cdot \Delta \vec{s} \equiv W\end{aligned}$$

功是力向量與位移向量的內積！



$$\Delta\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \vec{F} \cdot \Delta\vec{s} \equiv W$$

將無限多無限小的過程組合起來，即成為一個有限的過程：

$$\left(\frac{1}{2}mv^2\right)_f - \left(\frac{1}{2}mv^2\right)_i = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta s \rightarrow 0}} \sum_{j=0}^N \Delta W_j \equiv \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta s \rightarrow 0}} \sum_{j=0}^N (\vec{F}_j \cdot \Delta\vec{s}_j) \equiv \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = W_{i \rightarrow f}$$

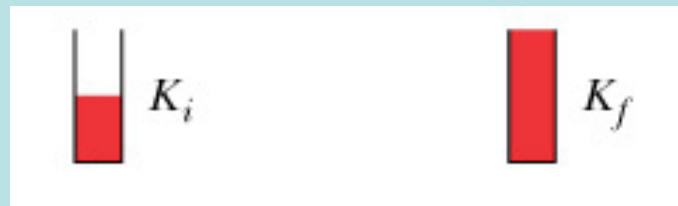
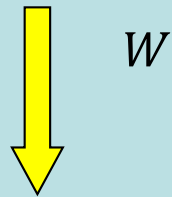
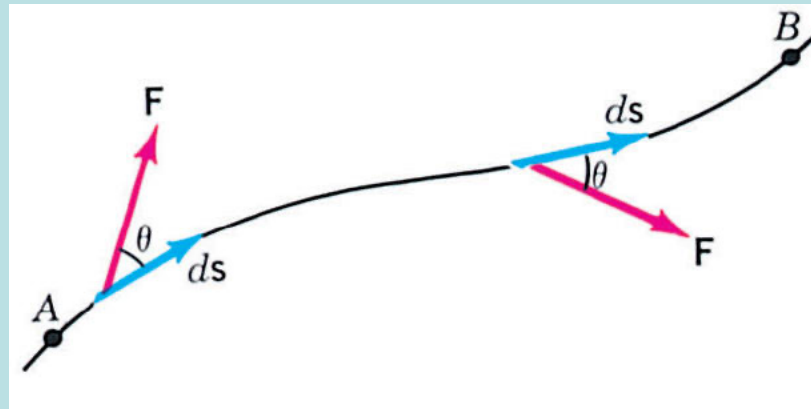
向量的線積分

$$W = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta s \rightarrow 0}} \sum_{j=0}^N (F_j \cdot \Delta x_j) = \int_{x_i}^{x_f} F(x) \cdot dx$$

單變數函數的一般積分

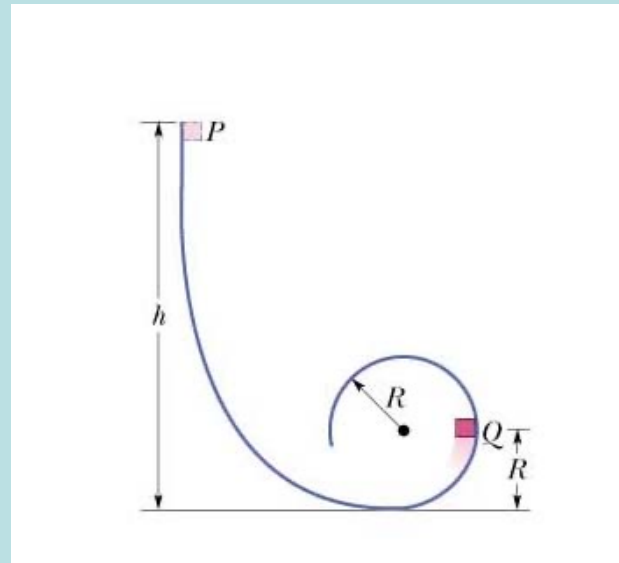
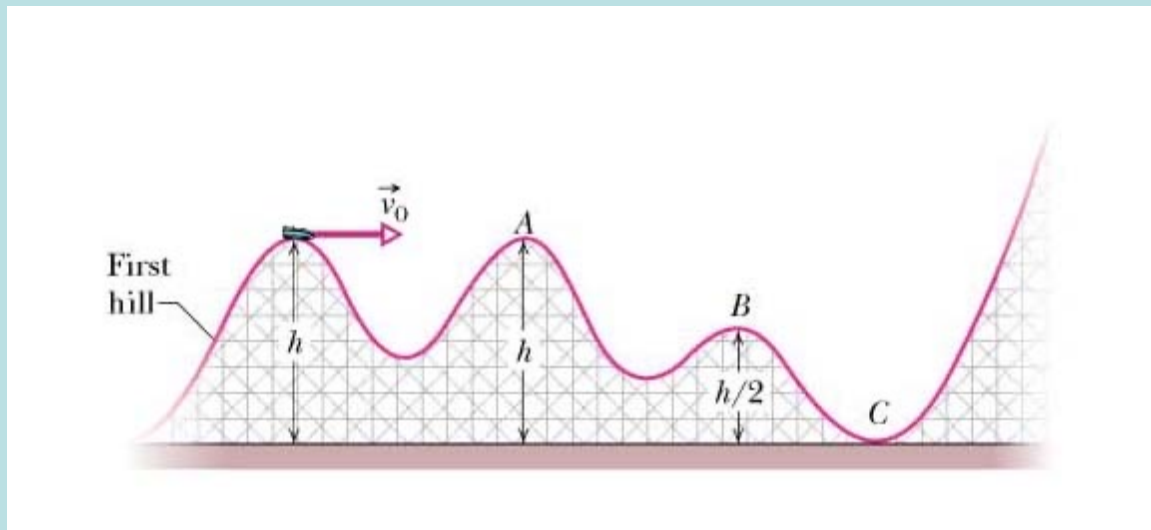
3D空間的功與動能

$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$



功造成動能的變化

正向力與位移垂直，因此完全不作功



因正向力未知，以牛頓定律計算會相當困難

以能量守恆來討論，正向力根本不會出現在問題中。

$$U(x) = - \int_c^x F(x') \cdot dx'$$

1D 空間的位能

3D 空間的位能

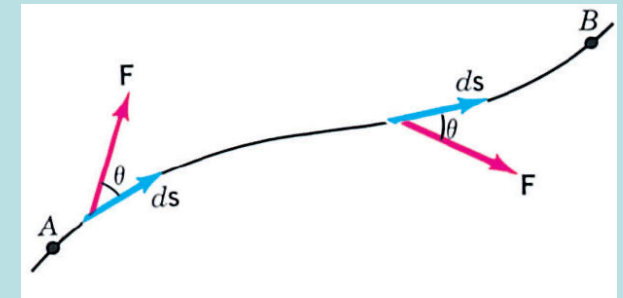
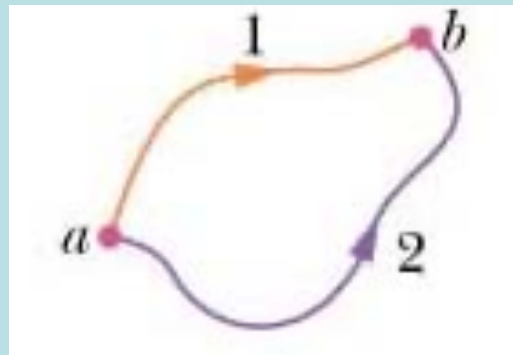
猜測：位能是由參考點 $\vec{c}$ 運動到 $\vec{r}$ 的過程中，此力所作的功負號：

$$U = - \int_{\vec{c}}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{s}?$$

但在2D以上的空間，有很多條路徑可以從起點運動到末點。

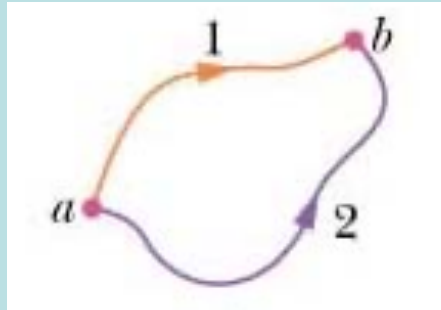
所以功的計算原則上必須標明沿哪一條路徑。

畢竟，功 W 是一個過程的物理量。



$$W_1 = \int_{a \text{ 1路徑}}^b \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{s}$$

$$W_2 = \int_{a \text{ 2路徑}}^b \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{s}$$



$$U = - \int_{\vec{c}}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{s} ?$$

$$W_1 = \int_{a \text{ 1路徑}}^b \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{s}$$

$$W_2 = \int_{a \text{ 2路徑}}^b \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{s}$$

$$W = -\Delta U = -U(\vec{b}) + U(\vec{a}) \text{ 只和前後點位置有關}$$

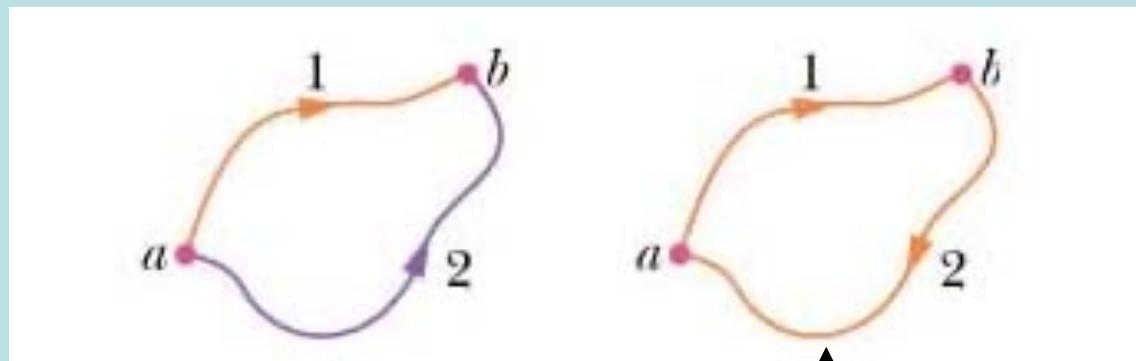
位能若只是一個空間位置的性質，位能差必須與路徑無關。

位能的定義要能夠成立，功必定與路徑無關！

對任意兩條路徑： $W_1 = W_2$ 位能存在的必要條件

滿足此條件的力稱為保守力，可以以位能描述。

這個條件可以寫成另一個形式



若是位能定義要唯一



$$W_1 = W_2$$

對任意兩路徑

將倒行的路徑 2 與路徑 1 組成一封閉路徑！

$$W_1 - W_2 = 0 = \oint \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

沿任一條封閉路徑，力所作的功必為零！

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

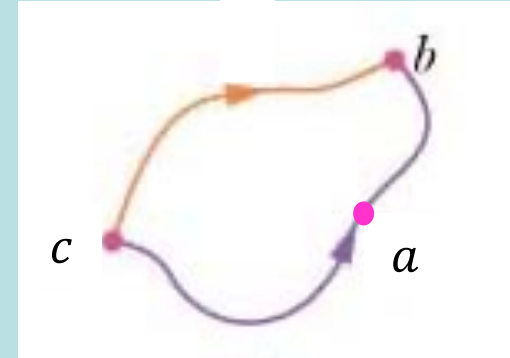
保守力條件

保守力才能定義位能！

如果 $\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$

可以設一個參考點 $\vec{c}$ 使得 $U(\vec{c}) = 0$ 。定義位能為：

$$U(\vec{r}) - U(\vec{c}) = U(\vec{r}) = - \int_{\vec{c}}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$



$$\Delta U = U(\vec{b}) - U(\vec{a}) = \int_{\vec{c}}^{\vec{b}} \vec{F} \cdot d\vec{s} - \int_{\vec{c}}^{\vec{a}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\vec{c}}^{\vec{b}} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{\vec{a}}^{\vec{c}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = W$$

功可以寫成一個物理量 U 的前後差，保守力條件為位能存在的充分條件：

位能 $U(\vec{r})$ 就是由參考點 $\vec{c}$ 沿任一路徑運動到 $\vec{r}$ 的過程中，此力所作的功的負數。

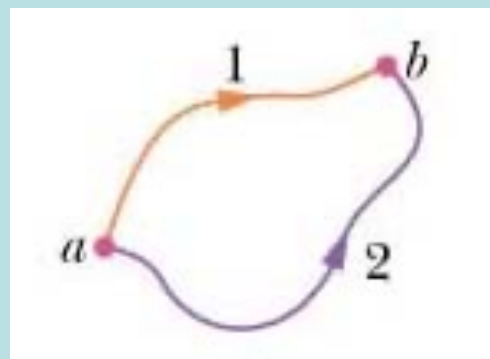
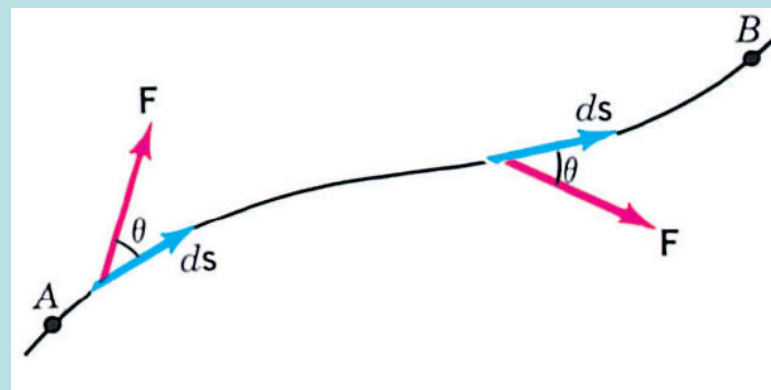
$K + U$ 守恆



如此，位能差可如此定義：

$$\Delta U = U(\vec{b}) - U(\vec{a}) \equiv -W = - \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

此定義與計算功的路徑無關。

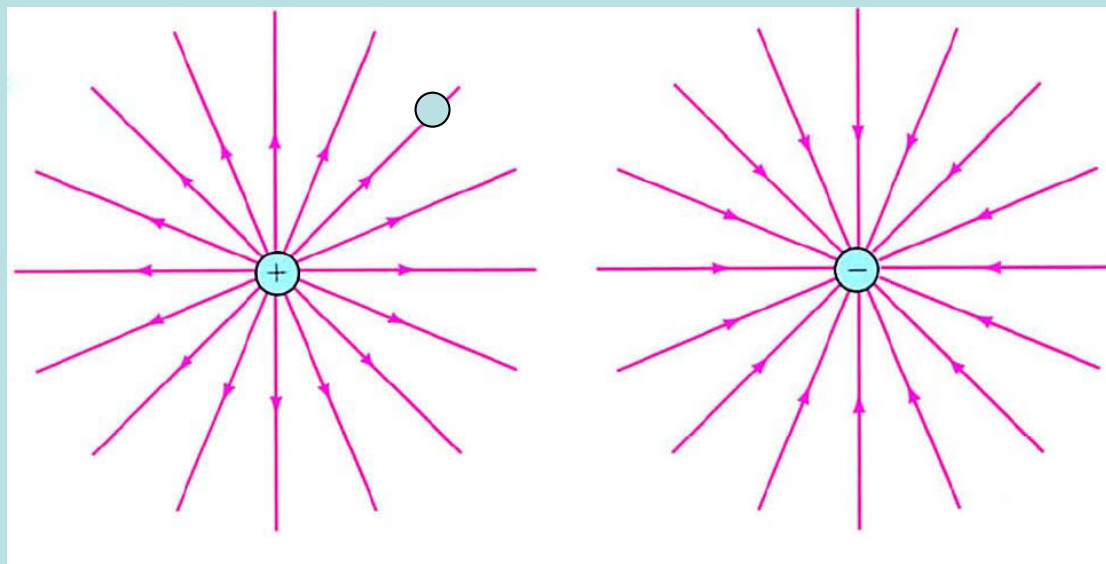




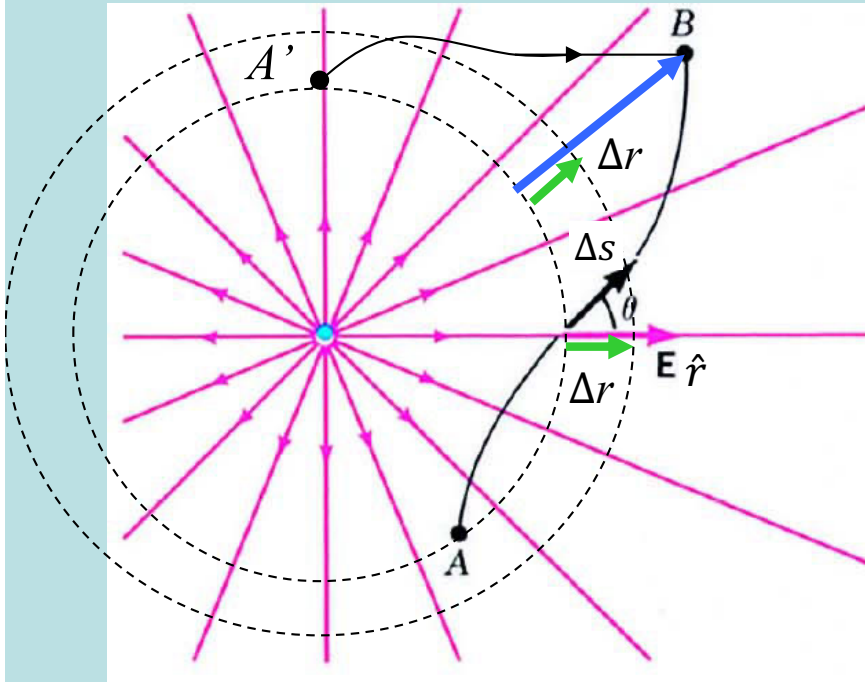
$$W = \oint F(x)dx = \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx = 0$$

一維運動中。由位置決定的力是保守力！

靜電力是不是保守力？



考慮一固定電荷 Q 旁一可運動的小電荷 q



$$W = \int \vec{F}_E \cdot d\vec{s}$$

$$\vec{F}_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \hat{r}$$

$$= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r_i^2} \hat{r}_j \cdot \Delta\vec{s} = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r_i^2} \Delta r_i$$

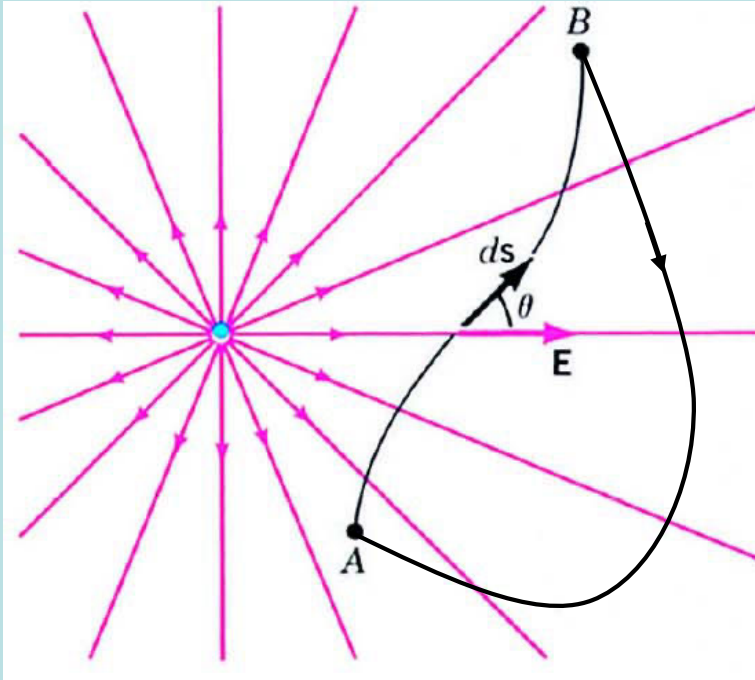
垂直於 r 的運動不作功 $\hat{r} \cdot \Delta\vec{s} = \Delta r$

沿此路徑所作功與完全沿徑向的路徑相等！

$$= \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \cdot dr$$

$$= -\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \quad \text{與 } A、B \text{ 的方向無關}$$

從A出發再回到A，形成一封閉曲線。



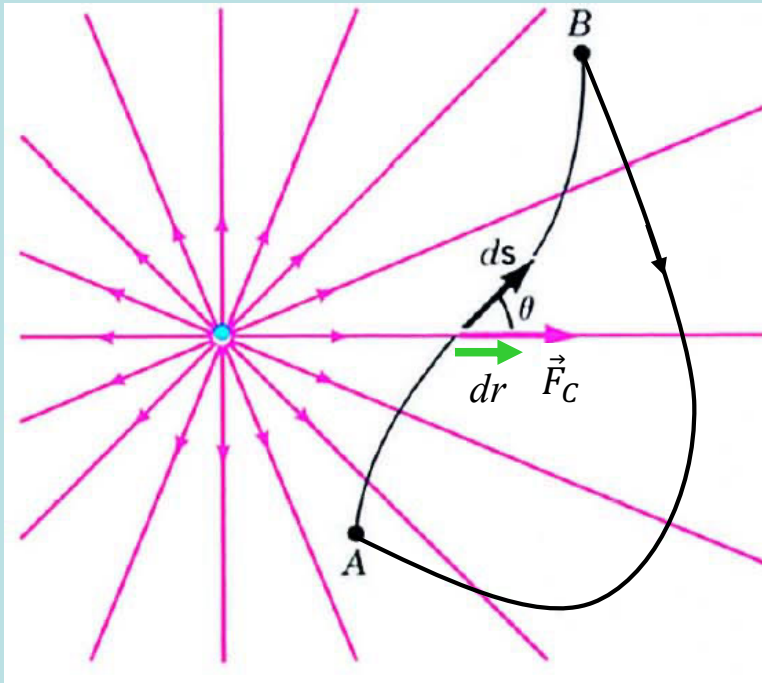
$$\oint \vec{F}_E \cdot d\vec{s} = -\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_A} \right) = 0$$

沿任一封閉曲線，庫倫靜電力所作的功必為零！

靜電力為保守力，可以定義電位能

同樣的證明適用於任何中心力，

中心力是力的方向沿著半徑 r 方向，大小由距離決定



$$\vec{F}_C = f(r) \cdot \hat{r}$$

$$W = \int \vec{F}_C \cdot d\vec{s} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} f(r) \cdot (\hat{r} \cdot d\vec{s}) = \int_{r_i}^{r_f} f(r) \cdot dr$$

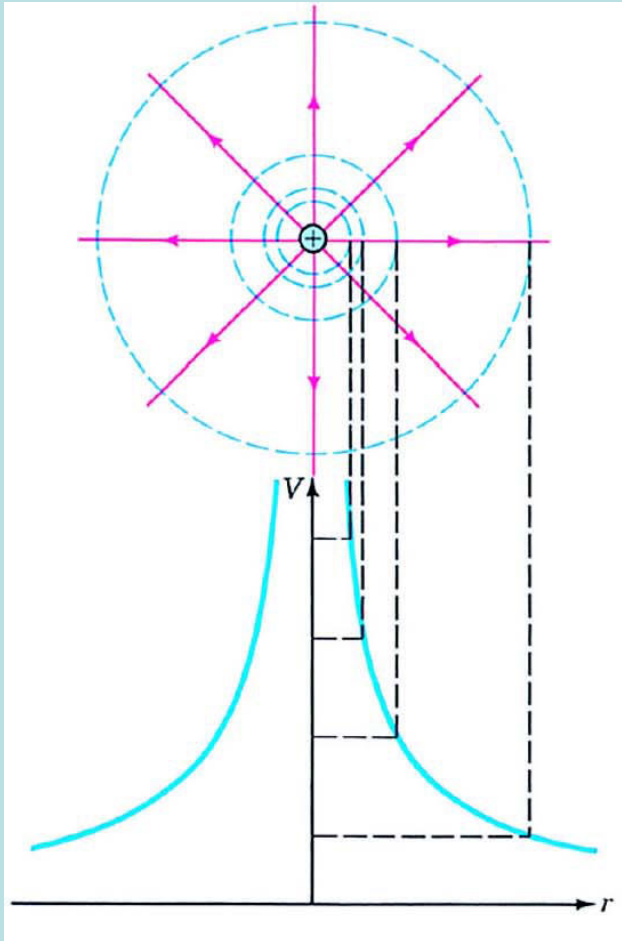
三維的中心力所作的功等同於沿 r 方向一維的力

從A出發再回到A，形成一封閉曲線：

$$\oint \vec{F}_C \cdot d\vec{s} = \int_{r_i}^{r_i} f(r) \cdot dr = 0$$

任何中心力（原子力、萬有引力）都是保守力！都可定義位能。

電位能



$$U(\vec{r}) = - \int_{\vec{c}}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_{r_c}^r \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \cdot dr = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_c} \right)$$

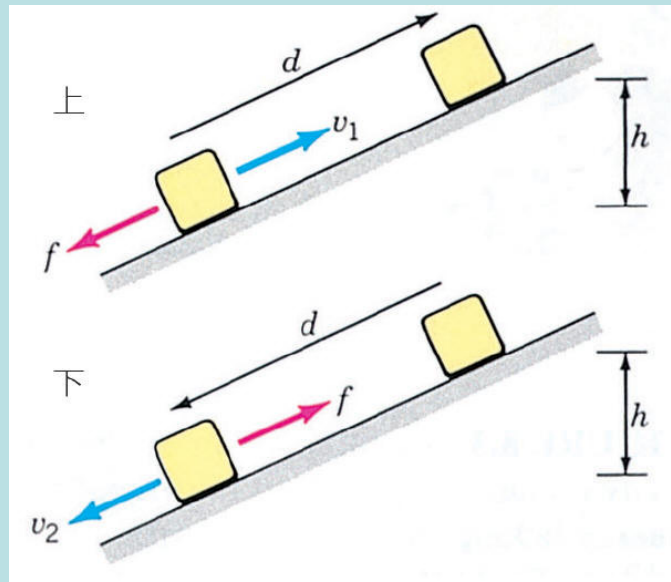
選擇 $U(\infty) = U(c) = 0$

$$U(\vec{r}) = - \int_{\vec{c}}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r}$$

摩擦力是否是保守力？

動摩擦力大小是常數，但方向與速度有關

$W = -f_k d$ 動摩擦力與位移永遠反向，所作必為負功



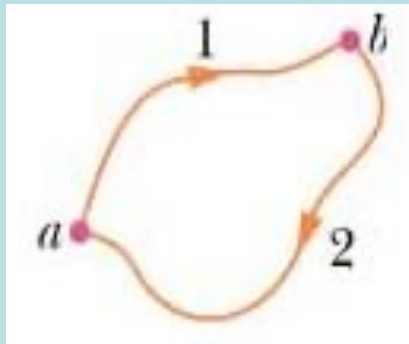
將方塊在斜面上移到高處後，再移回到原位

$W_f = -f_k d - f_k d = -2f_k d$ 摩擦力不是保守力

相對地，同樣過程中，重力所作的功為零。

$W_g = -mgh + mgh = 0$

在三度空間中也是如此：



$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = -f_k \oint d\vec{s} = -f_k S \neq 0$$

S 是封閉路徑的全長。

摩擦力不是保守力

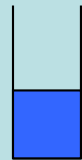
將粒子與保守力的施力者視為一個系統，所施的力可以位能處理。

非保守力所作的功無法寫成一個位能的前後差，只能以功來處理

$W_{\text{非保守}}$



$$W_{\text{非保守}} = -W_{\text{保守}} + W = \Delta U + \Delta K = \Delta E_{\text{mech}}$$



U_i



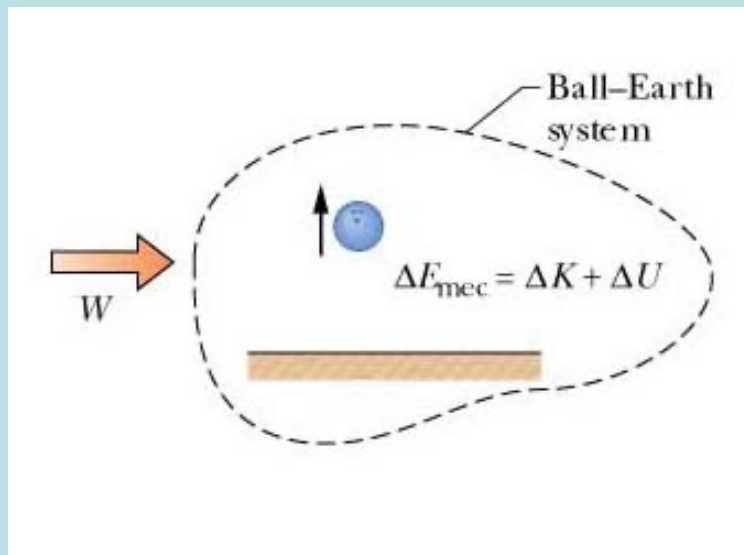
K_i



U_f



K_f

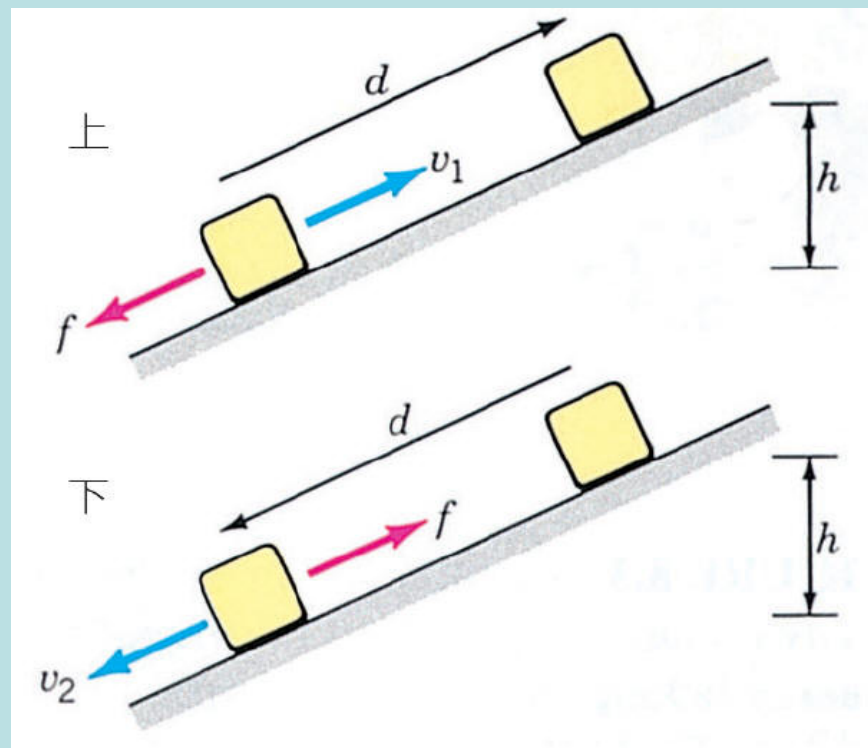


推廣後的功與動能原理

機械能並不守恆。

非保守力的功等於機械能的變化。

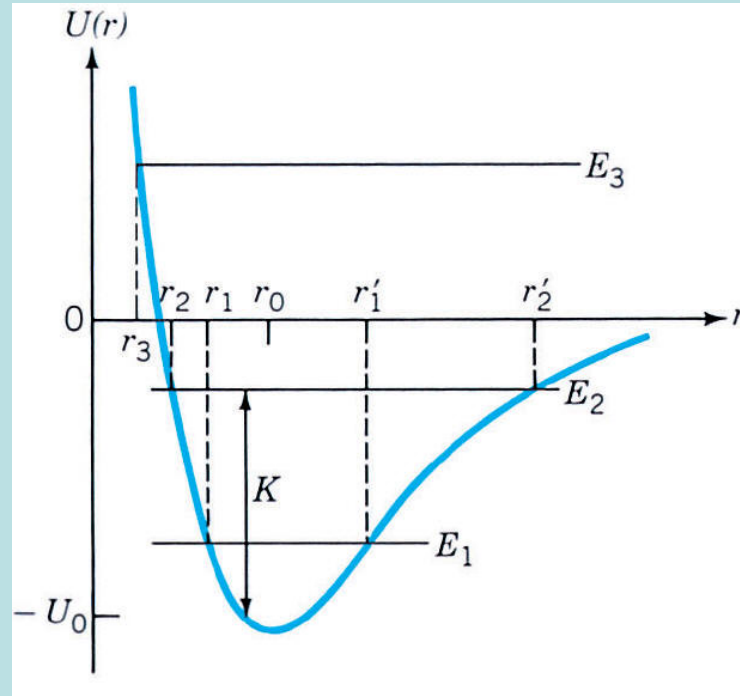
將摩擦力視為外力



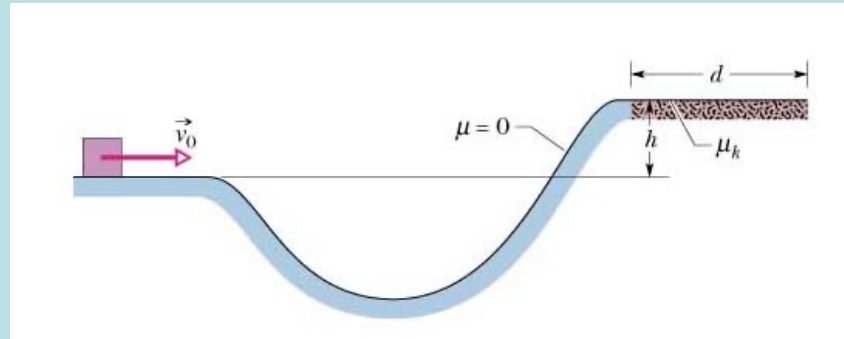
$$W = -f_k d = \Delta(K + U) = \Delta E_{\text{mech}}$$



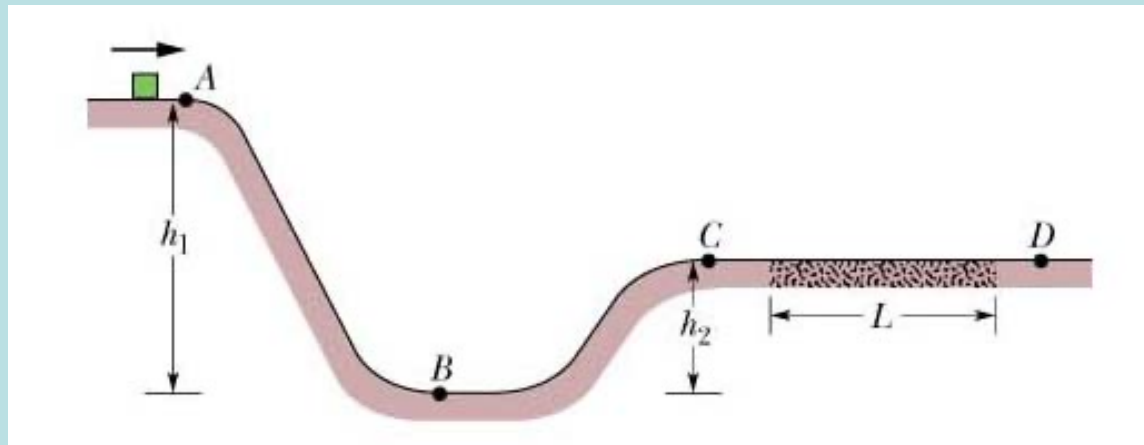
Copyright © 2008 Pearson Education, Inc., publishing as Pearson Addison-Wesley.



位能可以自然轉為動能，摩擦力會慢慢消耗機械能。
自然界有一個傾向趨向最低位能處！



$$W = -f_k d = \Delta(K + U) = \Delta E_{\text{mech}}$$



有摩擦，似乎機械能就不守恒！

但有摩擦，溫度會增加！

焦耳的實驗發現：

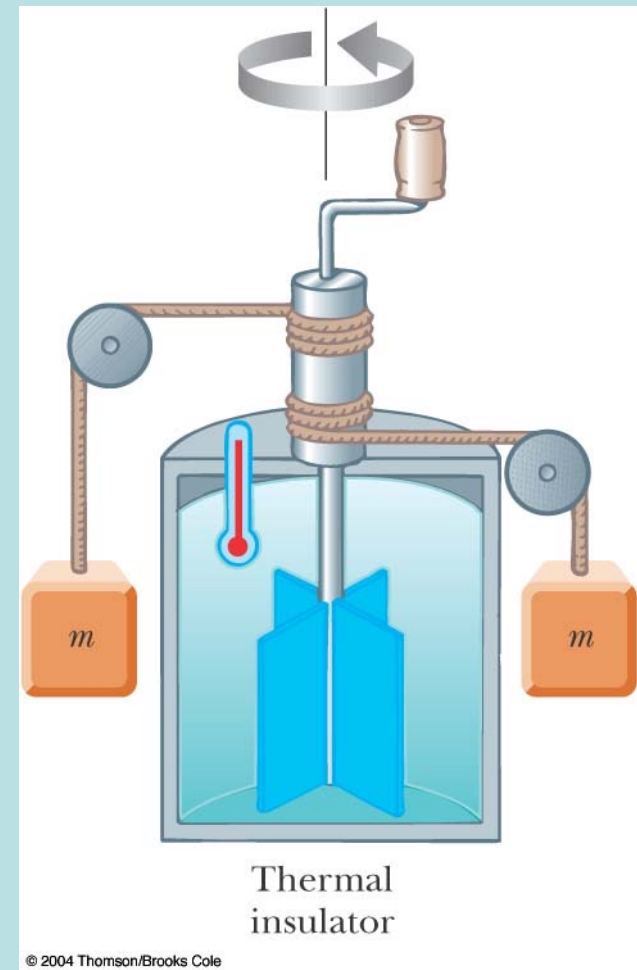
摩擦力所作的功等於熱量，

物體吸收熱量後，熱量正比於溫度差：

$$W_{\text{friction}} = Q = mc(T_f - T_i) = mcT_f - mcT_i$$

原來，摩擦力的功也可以寫成一個物理量的前後差！

只是這個物理量與位置無關，而是與溫度有關！



如果將溫度考慮進來，

摩擦作的功，也如位能，可以寫成一個物理量在前後狀態的改變！

此物理量顯然與外在運動狀態無關，定義為內能：

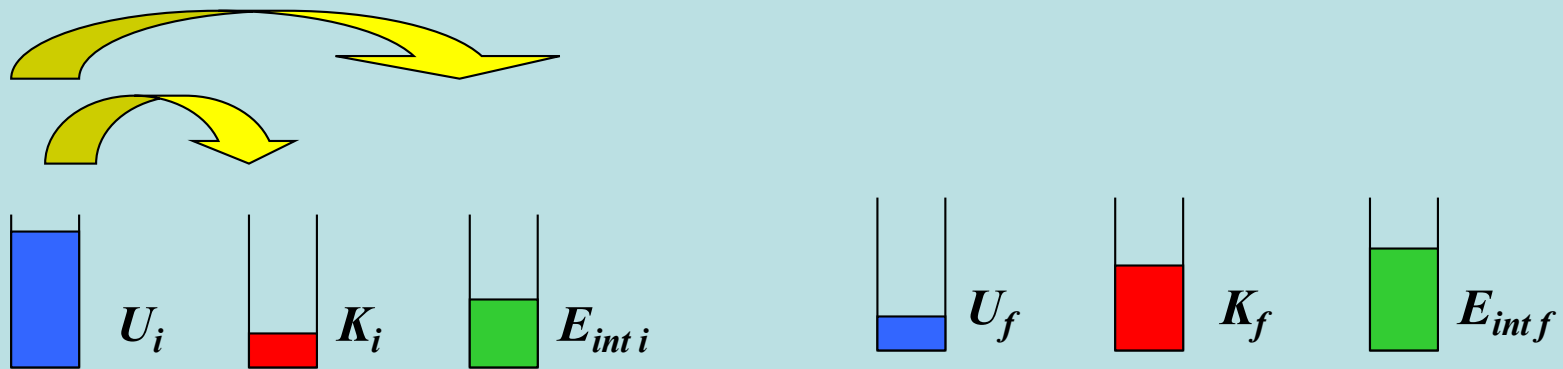
$$f_k d = mc(T_f - T_i) = mcT_f - mcT_i = \Delta E_{\text{int}}$$

$E_{\text{int}}(T)$ 內能是溫度的函數

$$-f_k d = -\Delta E_{\text{int}} = \Delta(K + U)$$

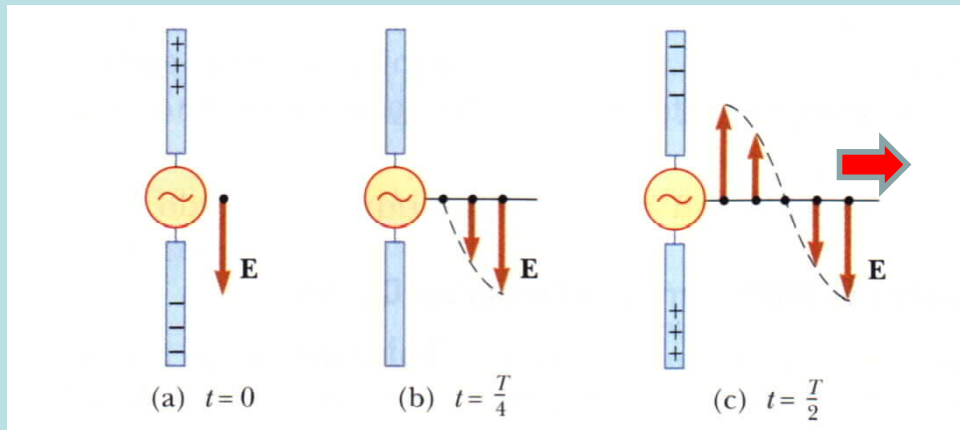
$\Delta(K + U + E_{\text{int}}) = 0$ $K + U + E_{\text{int}}$ 依舊是守恆量

機械能如果被擴展到包括內能，能量還是會守恆！



$$\Delta(K + U + E_{\text{int}}) = 0$$

每次遇到新的現象，能量似乎就不守恆，
 但仔細研究就會發現減少的部分一樣可以寫成一個物理量的前後差，
 將此物理量設成新的能量形式，加入新的能量形式，能量依舊守恆！



$P > \langle I^2 \rangle_{\text{avg}} \cdot R$ P 是外加功率。 $\langle I^2 \rangle \cdot R$ 電阻消耗的功率，似乎能量不守恆。

電磁學理論可以計算出兩者的差：

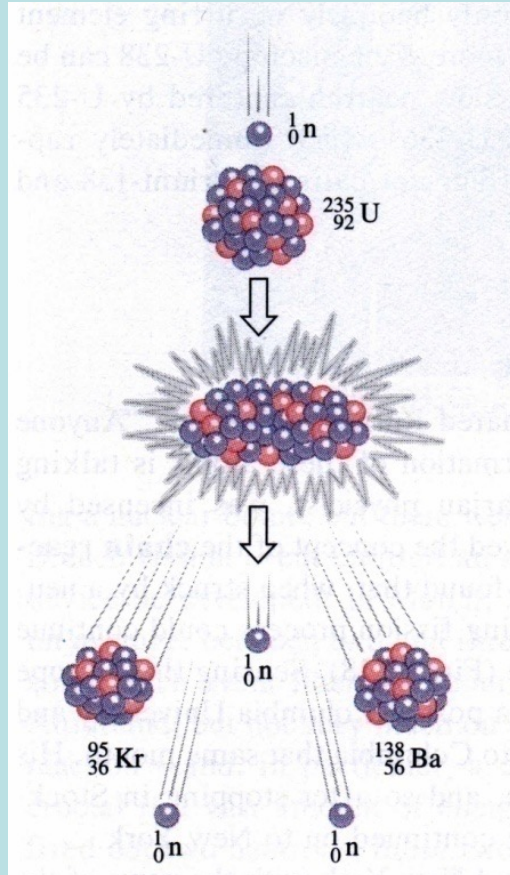
$$P - \langle I^2 \rangle \cdot R = \langle \epsilon_0 E^2 \rangle \cdot c$$

能量流量 = 能量密度 $\times$ 流速

電磁波帶走的能量

加上電磁波帶走的能量，總能量依舊守恆。

質能守恆



原子核分裂時，末動能顯然大於起始動能。

似乎能量憑空增加了。但原子核的總質量也有變化。

相對論修改了能量的形式：

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$E \equiv mc^2 + K \sim mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \dots$$

質量是帶著能量的，實驗顯示：

$$K_f - K_i \sim \Delta m \cdot c^2 = m_f c^2 - m_i c^2$$

能量 $E = mc^2 + K$ 依舊是一個守恆量。

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

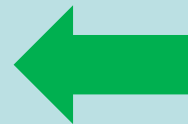
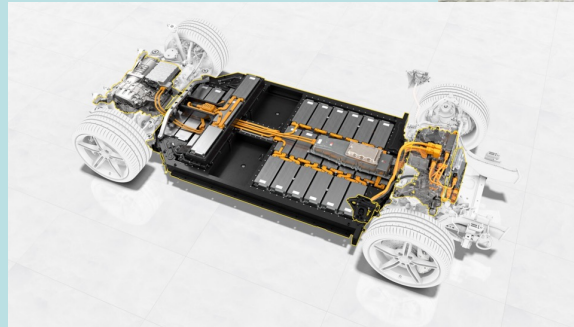
靜止的物體因為其質量，能量亦不為零
能量與質量可以彼此互相轉換。

$$E \equiv mc^2 + K$$



質量的減少可能變為動能的增加！

質量是能量的一種形式，能量守恆蘊含質量可以轉換為其他形式的能量，
其他形式的能量亦可轉換為質量，質量不再守恆。

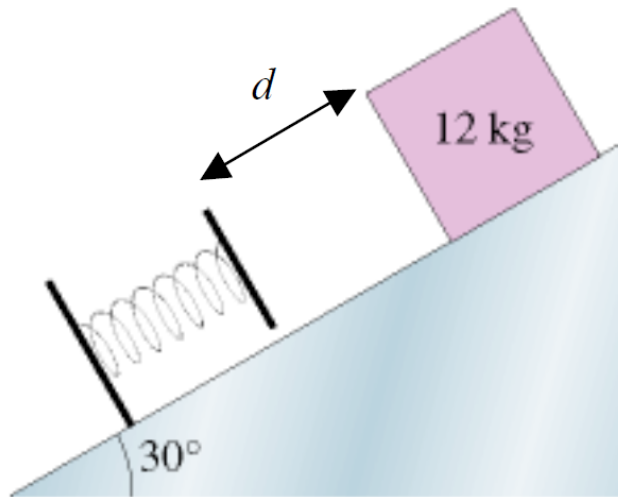


能量的具體特徵是能驅動。

能量可以來回在許多形式之間轉換、儲存、傳輸。



2. 一質量為 12 kg 的方塊，沿一 30° 角的斜面自靜止狀態滑下，滑行距離 d 之後接觸一個彈簧，此彈簧的彈力係數 k 為 2000 N/m。



接觸彈簧後，此方塊繼續向前下滑行距離 $x = 0.27$ m 後才停止。請問距離 d 是多少 m？(10)

停止時，重力位能的減少應該等於彈力位能：

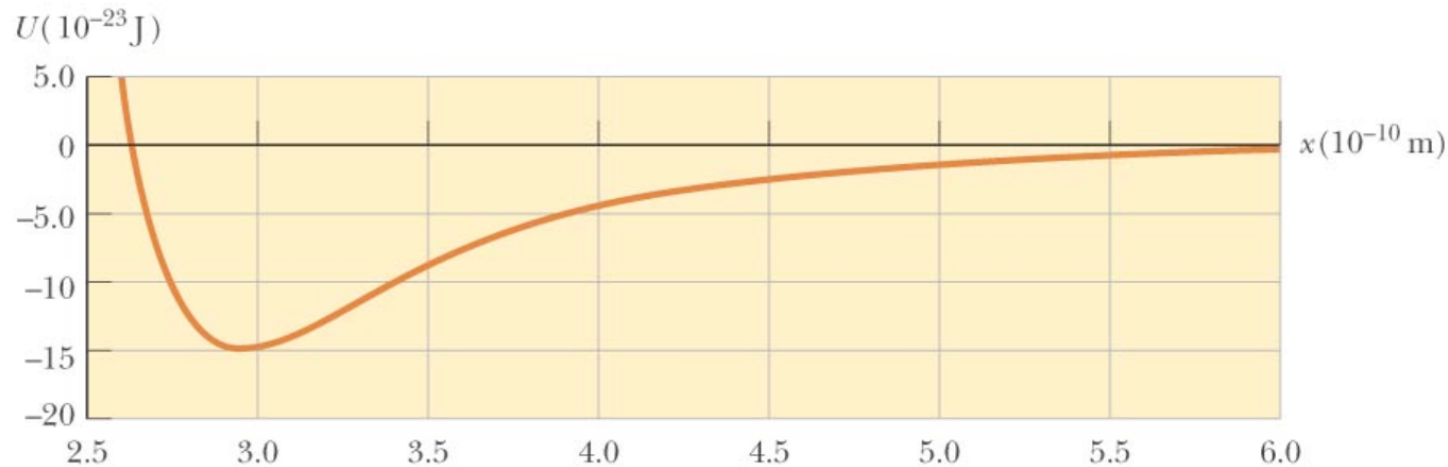
$$12 \times g \times (0.27 + d) / 2 = 2000 \times 0.27^2 / 2$$

$$d = 0.97 \text{ m}$$

1. 未構成鍵結的電中性原子彼此之間也會有一個原子力，已知此力的大小只跟兩原子之間的距離 x 有關。此力的位能可以以如下的 Lennard-Jones Potential 來近似：

$$U(x) = 4\varepsilon \left[\left(\frac{\sigma}{x} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x} \right)^6 \right]$$

其中 ε, σ 是正常數。考慮某一對原子，此兩常數為： $\sigma = 2.63 \times 10^{-10} \text{ m}$ ， $\varepsilon = 1.51 \times 10^{-22} \text{ J}$ 。



- A. 將兩個原子一起放在 x 軸上，為討論方便起見，其中一個固定在原點。它對另一個原子的作用力，有一平衡點，問在此平衡點處兩者的距離 x_0 為多少 m ？(8)
- B. 將此原子從距離為 $2.5 \times 10^{-10} \text{ m}$ 處自靜止釋放，當它到達距離 $4.5 \times 10^{-10} \text{ m}$ 時，動能是多少 J ？(7)
- C. 若重新將此原子從距離為 $2.75 \times 10^{-10} \text{ m}$ 處自靜止釋放，兩個原子的最大距離會是多少 m ？(5)

1. 在平衡點處，力為零： $F = -\frac{dU}{dx} = 4\varepsilon \left[12 \left(\frac{\sigma^{12}}{x^{13}} \right) - 6 \left(\frac{\sigma^6}{x^7} \right) \right]$ ，力為零：

$$\left[12 \left(\frac{\sigma^{12}}{x^{13}} \right) - 6 \left(\frac{\sigma^6}{x^7} \right) \right] = 0, \quad x_0^6 = 2\sigma^6, \quad x_0 = \sqrt[6]{2}\sigma = 2.95 \times 10^{-10} \text{ m}。$$

在距離為 $2.5 \times 10^{-10} \text{ m}$ 處，位能及總機械能（動能為零）為

$$U = E = 4\varepsilon \left[\left(\frac{2.63}{2.5} \right)^{12} - \left(\frac{2.63}{2.5} \right)^6 \right] = 2.91 \times 10^{-22} \text{ J}，\text{到達距離 } 4.5 \times 10^{-10} \text{ m} \text{ 時，位}$$

$$\text{能是 } U = 4\varepsilon \left[\left(\frac{2.63}{4.5} \right)^{12} - \left(\frac{2.63}{4.5} \right)^6 \right] = -0.23 \times 10^{-22} \text{ J}，\text{兩者的差即是動能：}$$

$$K = E - U = 3.14 \times 10^{-22} \text{ J}。$$

這點是一個 turning point，另一個 turning point 在位能與其相等處，設其位置為 $x \times 10^{-10} \text{ m}$ 。

$$U = 4\varepsilon \left[\left(\frac{2.63}{x} \right)^{12} - \left(\frac{2.63}{x} \right)^6 \right] = 4\varepsilon \left[\left(\frac{2.63}{2.75} \right)^{12} - \left(\frac{2.63}{2.75} \right)^6 \right]$$

$$\left(\frac{2.63}{x} \right)^{12} - \left(\frac{2.63}{x} \right)^6 = -0.180, \quad \left(\frac{2.63}{x} \right)^6 = \frac{1 - \sqrt{1 - 0.72}}{2} = 0.23, \quad x = 3.35。故其$$

位置為 $3.35 \times 10^{-10} \text{ m}$ 。