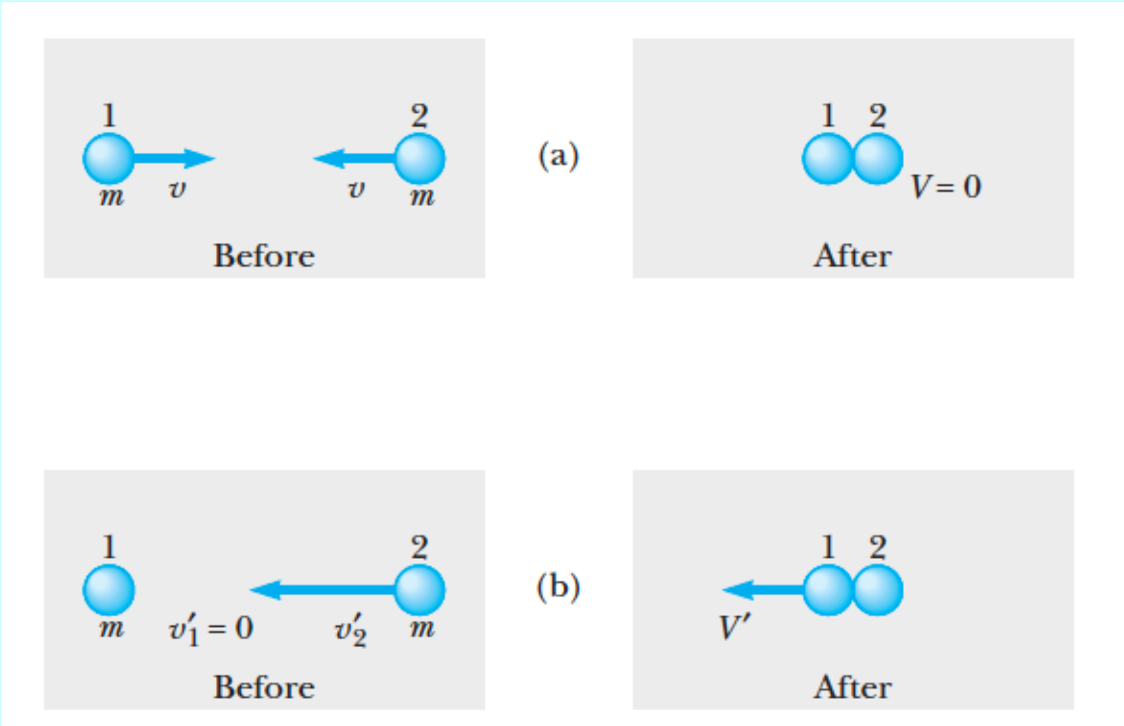
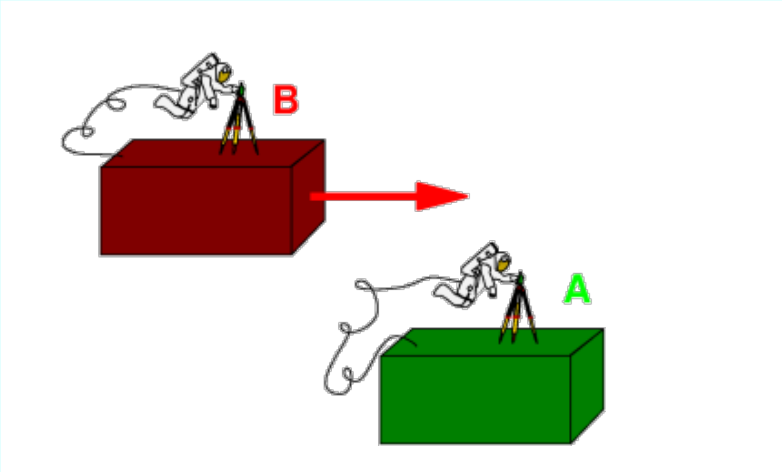
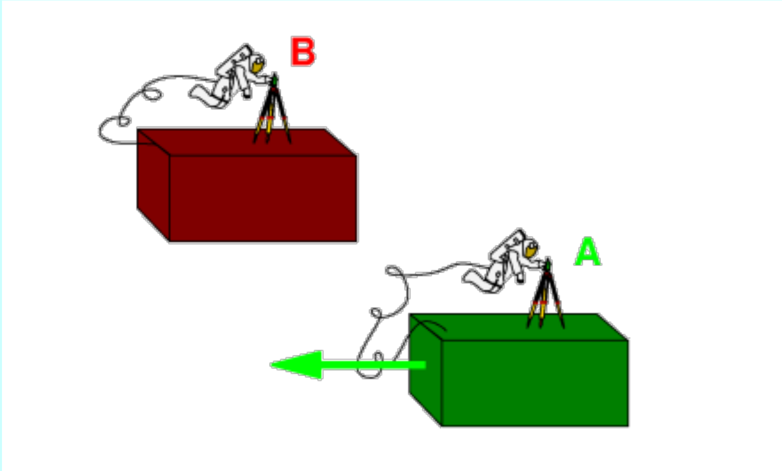
動量與能量

動量與能量守恆定律滿不滿足相對性原則？







相對性原則 The Principle of Relativity

速度是相對的。

覺得自己是如右圖靜止的實驗者B，由實驗結果歸納的物理定律，

與在左圖中靜止的A所歸納的物理定律應該一模一樣！

符合這個條件的物理定律才是正確的物理定律。

因此，相對性原則成為物理定律是否正確的一個新的檢驗標準！

所有還沒檢驗過的都要拿來確認一下！

生長屬性		野生 魚/蝦		野生 貝/頭足海鮮		人工養殖 魚/蝦	
供貨來源		江醫師の魚舖子	一般市售	江醫師の魚舖子	一般市售	江醫師の魚舖子	一般市售
檢驗項目	重金屬5項	V	X	V	X	V	3-5種
	漂白劑	V	X	V	X	V	X
	增色劑	V	X	V	X	V	X
	甲醛	V	X	V	X	V	X
	防腐劑11項	V	X	V	X	V	X
	戴奧辛17項	V	X	V	X	V	X
	多氯聯苯12項	V	X	V	X	V	X
	藥殘190項					V	23種
	農藥216項					V	2種
	三聚氰胺					V	?
	三聚氰酸					V	X
	總計	共計48項	共計0項	共計48項	共計0項	共計456項	共計30項
檢驗方式		逐批檢驗	X	逐批檢驗	X	逐批檢驗	抽驗
處理方式		HACCP	X	HACCP	X	HACCP	?
包裝方式		真空包裝	一般	真空包裝	一般	真空包裝	一般
儲藏方式		-40℃急速冷凍	?	-40℃急速冷凍	?	-40℃急速冷凍	?
運送方式		全程冷凍鏈	?	全程冷凍鏈	?	全程冷凍鏈	?

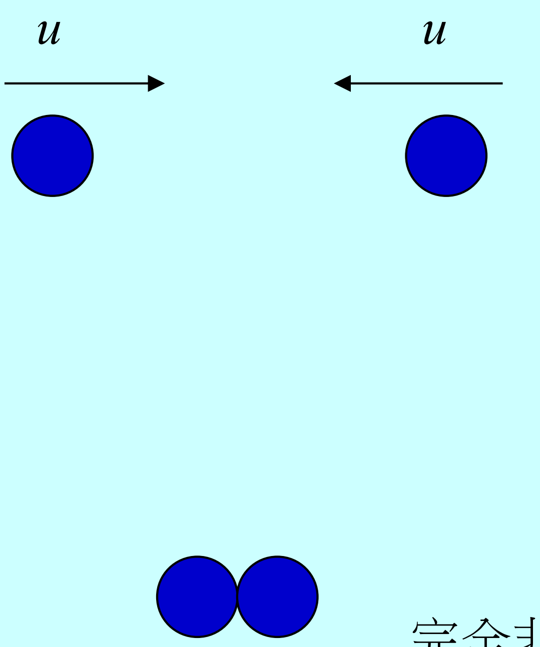
檢驗的標準為何？

動量與能量守恆定律在羅倫茲變換下會不會變？

動量與能量守恆定律滿不滿足相對性原則？

Is Momentum Conservation Law invaraint under Lorentz transformation?

牛頓版動量守恆 $\vec{P} = m\vec{v}$



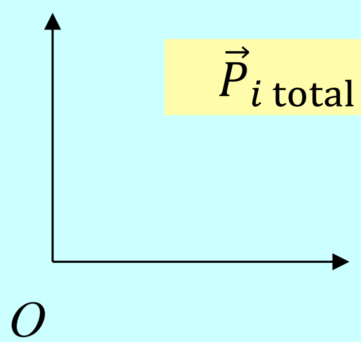
0

$=$

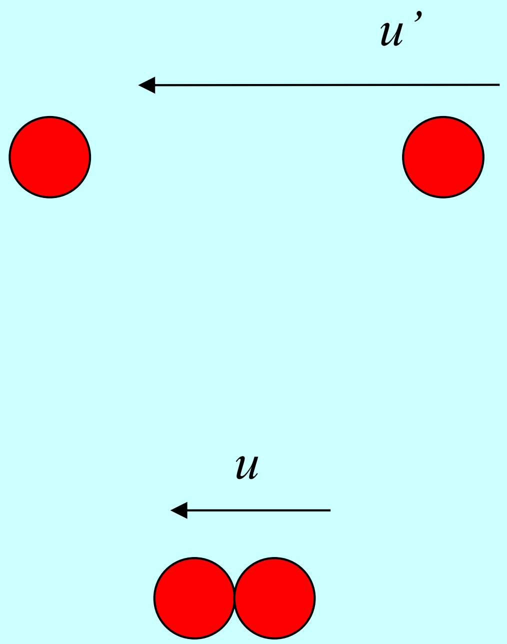
0

完全非彈性碰撞

Complete inelastic collision



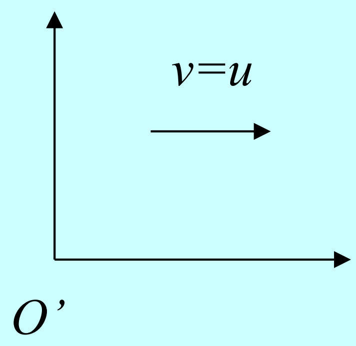
$\vec{P}_{i\text{ total}} = \vec{P}_{f\text{ total}}$



$mu' = m \cdot 2u$

$=$

$2m \cdot u$



$\vec{P}'_{i\text{ total}} = \vec{P}'_{f\text{ total}}$

牛頓版的動量守恆遵守伽利略變換下的相對性原則

但？如果考慮相對性效應.....

$$u' = \frac{u+u}{1+\frac{u^2}{c^2}} \neq 2u$$

u u

0

u' ？

$mu' \neq m \cdot 2u$

$=$

$\neq$

0

u

$2m \cdot u$

完全非彈性碰撞

$\vec{P}_{i\,\text{total}} = \vec{P}_{f\,\text{total}}$

$v=u$

$\vec{P}'_{i\,\text{total}} \neq \vec{P}'_{f\,\text{total}}$

O'

O 動量守恆定律在左方是正確，但在右方就不正確，反之亦然

動量守恆定律在羅倫茲轉換後就不像動量守恆了！

看來動量得重新定義，使動量守恆定律在羅倫茲轉換前後都是正確的！

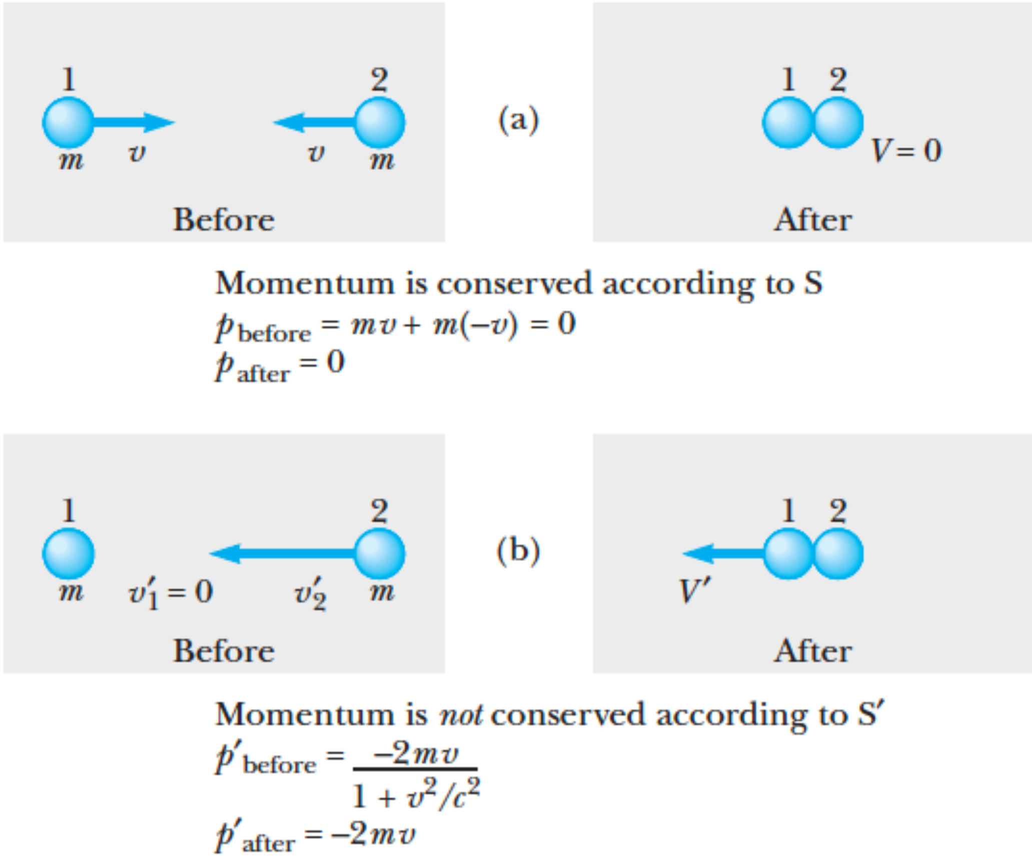


Figure 2.1 (a) An inelastic collision between two equal clay lumps as seen by an observer in frame S. (b) The same collision viewed from a frame S′ that is moving to the right with speed v with respect to S.

相對論的動量：

$$p_x = \frac{mu_x}{\sqrt{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)}} = \gamma m u_x$$

$u \ll c$ 時, $\gamma \to 1$, 因此 $p_x \to m u_x$ 　接近牛頓的定義

相對論的能量：

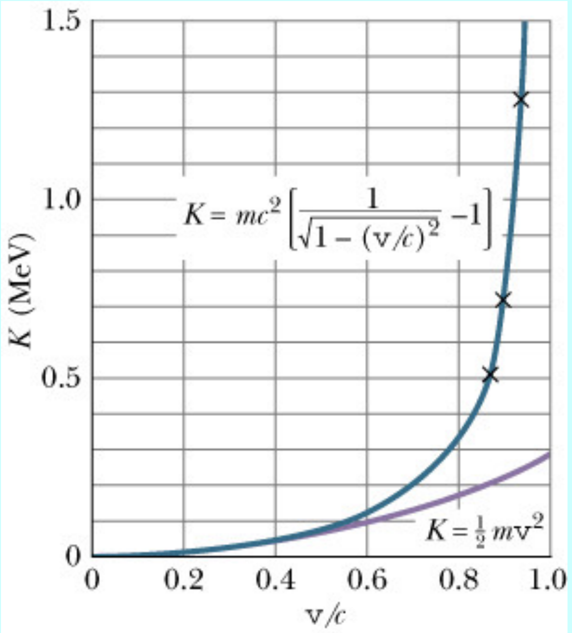
$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}} = \gamma mc^2$$

靜止能量 　動能

當 $u \ll c$

$$p_0 = \frac{mc}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}} = mc\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \sim mc\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{u^2}{c^2}\right] = mc + \frac{m}{2c}u^2$$

動能的牛頓定義 $\frac{1}{2}mv^2$ 是不正確的！



相對論修改了能量的形式，

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

如此定義的動能才滿足動能守恆定律

（牛頓定義下的動能 $\frac{1}{2}mv^2$ 在高速時即不守恆）

但在速度遠小於光速時，相對論的動能會趨近牛頓力學中的動能 $\frac{1}{2}mv^2$ 。

當速度等於光速 $v = c$ 時，物體的能量是無限大，因此我們無法將物體的速度加大超過光速。

當物體靜止時，它的質量對應一個不為零的能量 $E = mc^2$

EXAMPLE 2.6

Show that use of the relativistic definition of momentum

$$p = \frac{mu}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}}$$

leads to momentum conservation in both S and S′ for the inelastic collision shown in Figure 2.1.

Solution In frame S:

$$p_{\text{before}} = \gamma mv + \gamma m(-v) = 0$$

$$p_{\text{after}} = \gamma MV = (\gamma M)(0) = 0$$

Hence, momentum is conserved in S. Note that we have used M as the mass of the two combined masses after the collision and allowed for the possibility in relativity that M is not necessarily equal to $2m$.

In frame S′:

$$p'_{\text{before}} = \gamma m v_1' + \gamma m v_2' = \frac{(m)(0)}{\sqrt{1 - (0)^2/c^2}}$$

$$+ \frac{m}{\{\sqrt{1 - [-2v/1 + (v^2/c^2)]^2}\}(1/c^2)} \times \left(\frac{-2v}{1 + v^2/c^2}\right)$$

After some algebra, we find

$$\frac{m}{\{\sqrt{1 - [2v/1 + (v^2/c^2)]^2}\}(1/c^2)} = \frac{m(1 + v^2/c^2)}{(1 - v^2/c^2)}$$

and we obtain

$$p'_{\text{before}} = \frac{m(1 + v^2/c^2)}{(1 - v^2/c^2)}\left(\frac{-2v}{1 + v^2/c^2}\right) = \frac{-2mv}{(1 - v^2/c^2)}$$

$$p'_{\text{after}} = \gamma MV' = \frac{M(-v)}{\sqrt{1 - [(-v)^2/c^2]}} = \frac{-Mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

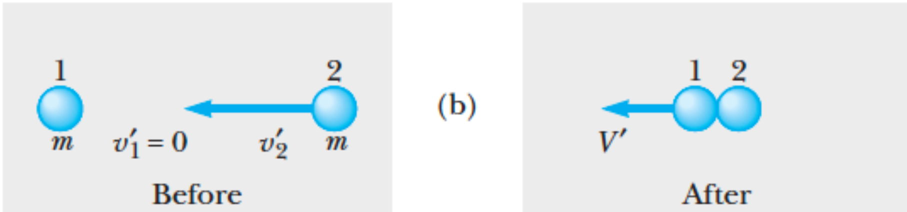
使用這兩個新的定義，計算之後，

動量守恆在兩個觀察者看起來都是對的。

Momentum is conserved according to S

$p_{\text{before}} = mv + m(-v) = 0$

$p_{\text{after}} = 0$



Momentum is *not* conserved according to S′

$p'_{\text{before}} = \dfrac{-2mv}{1 + v^2/c^2}$

$p'_{\text{after}} = -2mv$

To show that momentum is conserved in S′, we use the fact that M is not simply equal to $2m$ in relativity. As shown, the combined mass, M, formed from the collision of two particles, each of mass m moving toward each other with speed v, is greater than $2m$. This occurs because of the equivalence of mass and energy, that is, the kinetic energy of the incident particles shows up in relativity theory as a tiny increase in mass, which can actually be measured as thermal energy. Thus, from Equation 2.13, which results from imposing the conservation of mass–energy, we have

$$M = \frac{2m}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

Substituting this result for M into p'_{after}, we obtain

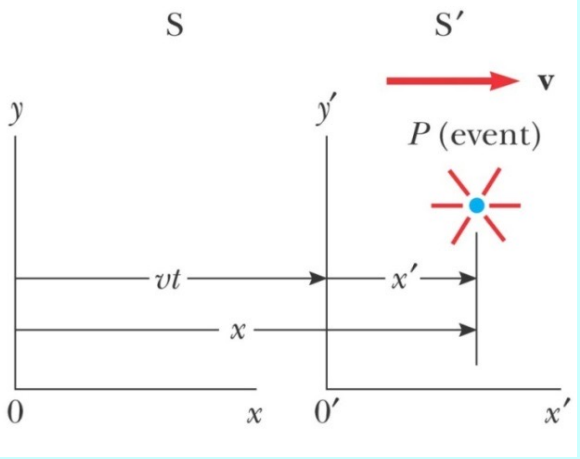
$$\begin{aligned} p'_{\text{after}} &= \frac{2m}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \frac{-v}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \\ &= \frac{-2mv}{1 - (v^2/c^2)} = p'_{\text{before}} \end{aligned}$$

Hence, momentum is conserved in both S and S′, provided that we use the correct relativistic definition of momentum, $p = \gamma mu$, and assume the conservation of mass–energy.

新的動量與能量定義，還有一個比較優雅、但稍微抽象的推導：

如果要求光速恆定：

兩個相對運動的觀察者所測量到的時間與空間滿足一個固定的關係：



$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

羅倫茲變換

Lorentz Transformation

羅倫茲變換

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

變換後的時間不只與變換前的時間有關，也跟空間有關

時間與空間不能分開來討論

為了討論方便，應該把時空一起記載！

$$(t, x, y, z)$$

四個分量的物件　4-vector

Hermann Minkowski

將時間t乘上常數c，使其單位變成空間分量相同，

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, x, y, z) \equiv x^\mu, \mu = 0,1,2,3$$

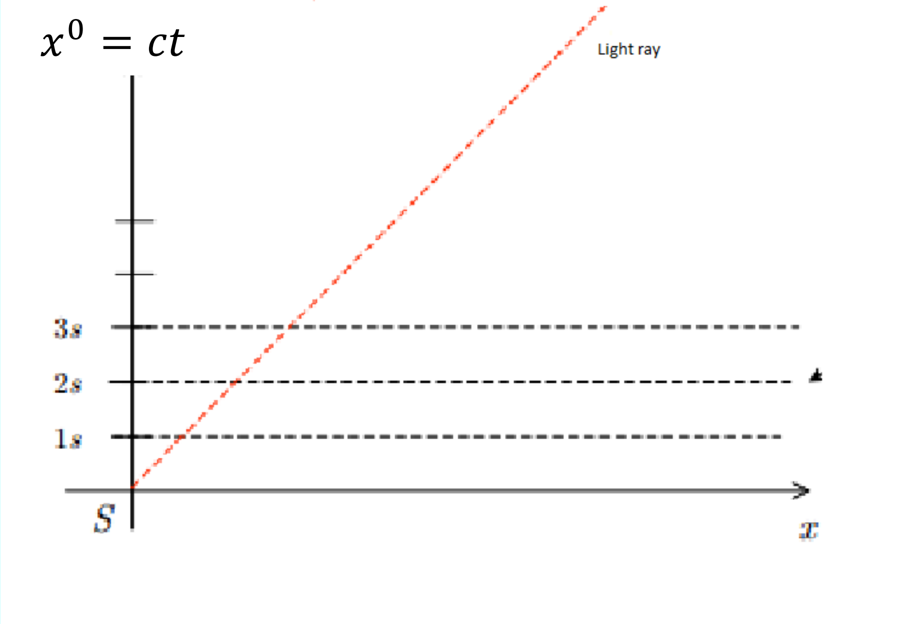
把ct看成4-vector的一個向量分量 。

忽略y, z座標： $(x^0, x^1) \equiv (ct, x)$

將$x^0 = ct$當成空間分量與其他分量x畫在一起，這稱為時空圖！

同時的事件就落在一條條的水平線上。

原點所發出的光的路徑則在對角線上。

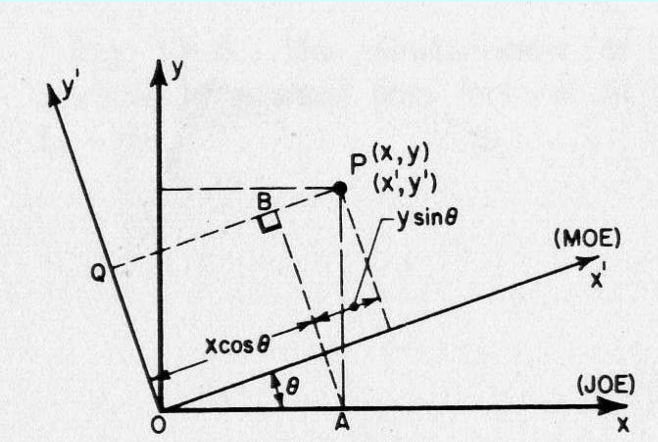


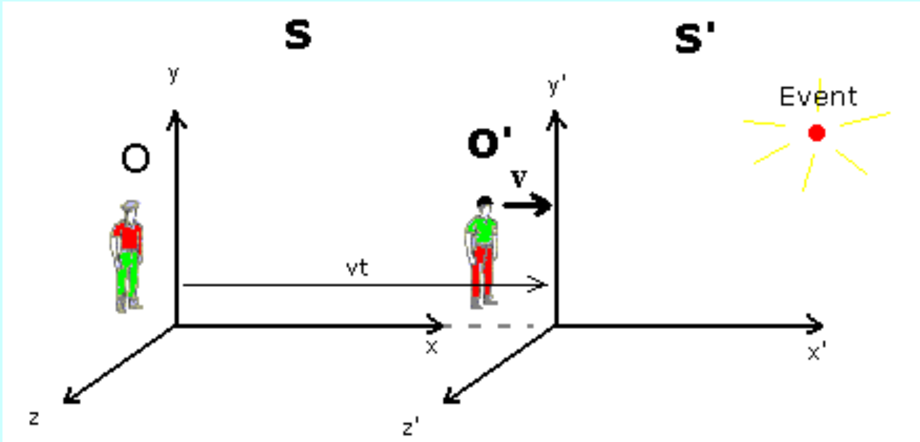
這樣寫，可以看更清楚：羅倫茲變換是一個時間與空間座標的線性變換。

時空分量在羅倫茲變換後的$(x^{0\prime}, x^{1\prime})$，是原來分量$(x^0, x^1)$的線性組合。

最典型的線性變換，就是座標軸旋轉變換。

選擇一組新的正交座標軸後，向量的分量也會是原來分量的線性組合。





$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$

$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$$

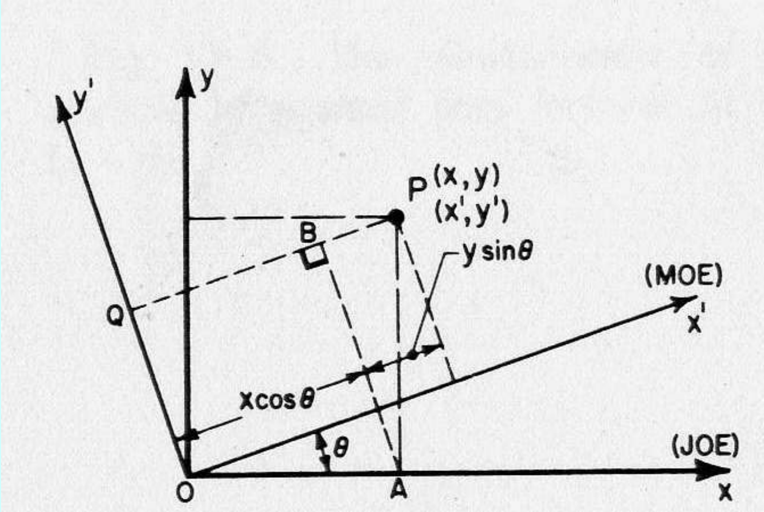
$$x^{1\prime} = \gamma\left(x^1 - \frac{v}{c}x^0\right)$$

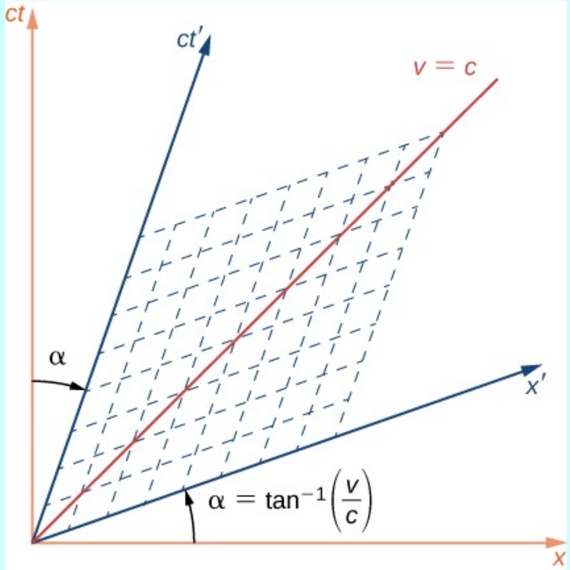
$$x^{0\prime} = \gamma\left(-\frac{v}{c}x^1 + x^0\right)$$

$$(x^0, x^1) \equiv (ct, x)$$

兩者很像！

羅倫茲變換可以看成一個時間與空間座標軸的重新選擇。





$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$

$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$$

$$x^{1\prime} = \gamma\left(x^1 - \frac{v}{c}x^0\right)$$

$$x^{0\prime} = \gamma\left(-\frac{v}{c}x^1 + x^0\right)$$

羅倫茲變換可以看成一個時間與空間座標軸的重新選擇。

只是時間與空間座標軸的選擇在幾何上有點非典型，如右圖。

這是為了光速恆定。原點發出的光的路徑在對角線上，

若要維持對角線在變換後還是對角線，時間與空間軸只能這樣選！

旋轉變換與羅倫茲變換的相似處還不只如此！

旋轉變換

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$

$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$$

羅倫茲變換

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

向量長度在旋轉軸旋轉下不變

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$$

類似的分量組合在羅倫茲轉換下也是不變的。

$$c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2$$

注意空間座標與時間的貢獻是反號的！

$$c^2t'^2 - x'^2 = \gamma^2\left[c^2\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)^2 - (x - vt)^2\right]$$

$$= \gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)[c^2t^2 - x^2] = c^2t^2 - x^2$$

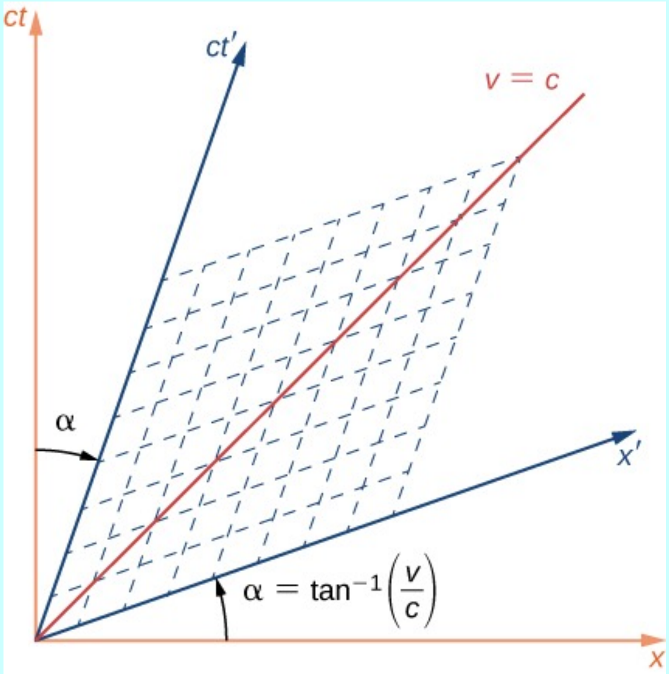
$$\gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 1$$

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 = (x^{0\prime})^2 - (x^{1\prime})^2$$

$c^2t^2 - x^2 \equiv c^2\tau^2$ 這個空間座標與時間的組合，就稱為Proper Time。

它的重要性是：τ對所有慣性觀察者來說，測量結果都相等。

$$c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2 \qquad \tau = \tau' \qquad \Delta\tau = \Delta\tau'$$



可以說羅倫茲變換就是保持這個組合不變的變換：$c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2$

原點發出的光的路徑在對角線上，$c^2t^2 - x^2 = c^2\tau^2 = 0$

在新的時空座標，$\tau = \tau'$不變。

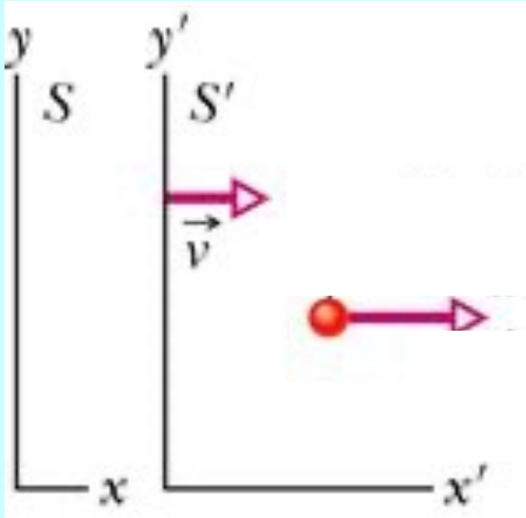
以新的時空座標，光的路徑滿足： $c^2\tau'^2 = c^2t'^2 - x'^2 = 0$

光的路徑也還在對角線上，因此光速是守恆的。

τ的物理意義：

如果這是一個粒子的位移與時間間隔的測量：

τ的變化$\Delta\tau$就與時間間隔Δt成正比。



$$c^2\Delta\tau^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 = c^2\,\Delta t^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)$$

$$\Delta\tau = \Delta t\sqrt{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)} = \frac{\Delta t}{\gamma}$$

設想一個時鐘隨著粒子移動，在它看來，粒子$u = 0$。

$u = 0$時，$\Delta\tau = \Delta t$。因此Proper time τ是隨著粒子移動的時鐘量到的時間。

牛頓的動量守恆定律不滿足相對性原則！

牛頓的動量守恆定律必須修正！

如何修正？問題的所在是： $p_x = mu_x = m\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$

分子Δx與分母Δt在羅倫茲變換下，都會變換為原來分量的線性組合

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$$

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right)$$

因此牛頓動量的變換公式很複雜，是非線性的組合（就是速度加成公式），

$$p'_x = mu'_x = \frac{mu_x - mv}{1 - \dfrac{u_x v}{c^2}} = \frac{p_x - mv}{1 - \dfrac{p_x v}{mc^2}}$$

如果我們在動量的定義中，以不變量τ取代時間t，

$$p_x = m\frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \rightarrow m\frac{\Delta x}{\Delta \tau}$$

如此還可以將一個動量推廣為兩個動量：

$$(p^0, p^1) = m\left(c\frac{\Delta t}{\Delta \tau}, \frac{\Delta x}{\Delta \tau}\right)$$

我們會發現p^0就是能量。

因為τ對所有慣性觀察者來說，測量結果都相等。 $\Delta\tau = \Delta\tau'$

這兩個動量在羅倫茲變換後也會是變換前的線性組合，如同時間空間座標：

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$$

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right)$$

$$\Delta\tau = \Delta\tau'$$

$$p^{1\prime} = \gamma\left(p^1 - \frac{v}{c}p^0\right)$$

$$p^{0\prime} = \gamma\left(p^0 - \frac{v}{c}p^1\right)$$

動量(p^0, p^1)在羅倫茲變換前後的關係，與時空是一樣的。

變換後的動量，是變換前“兩個動量”的線性組合。

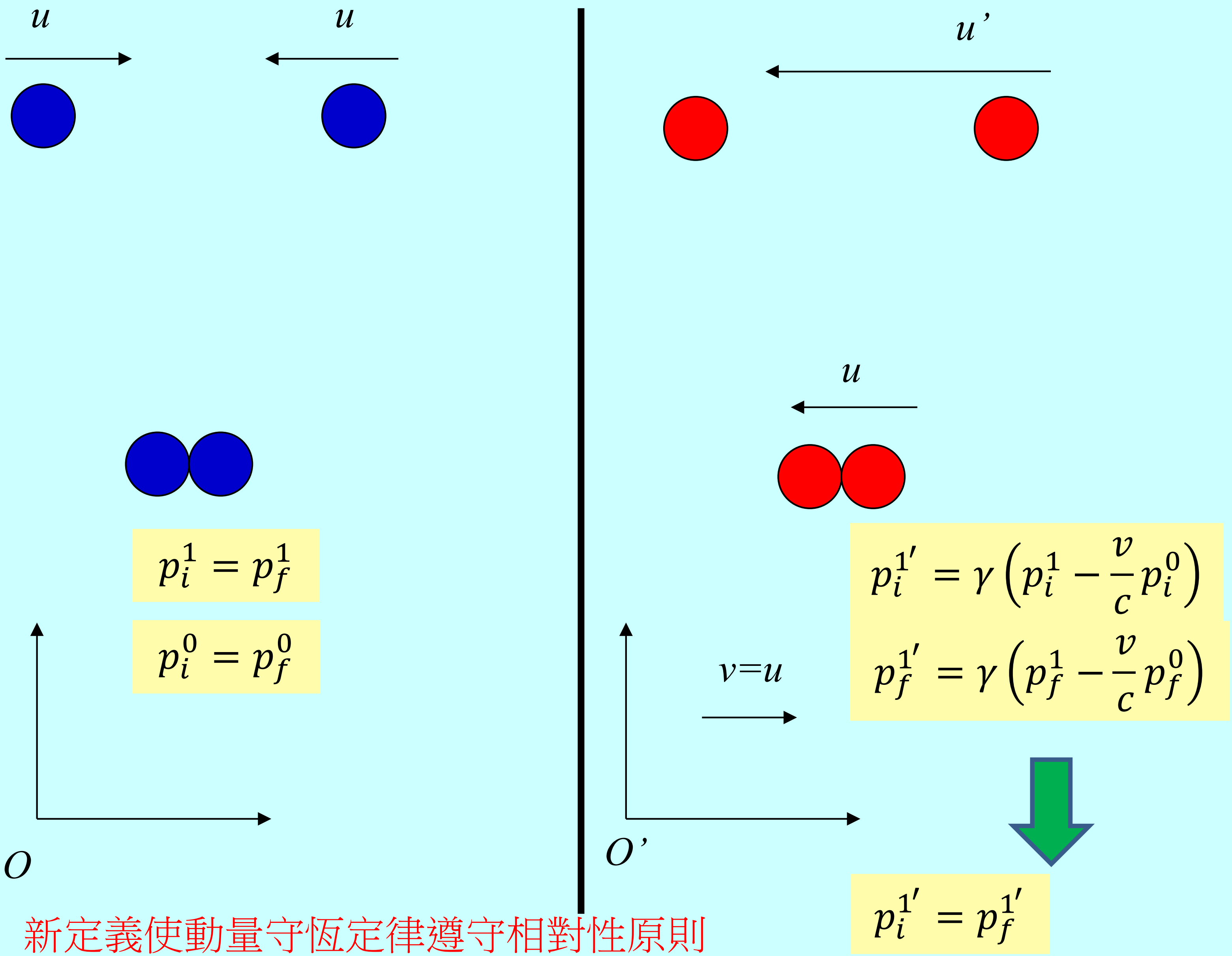
將此結果運用於前述粒子碰撞實驗中，變換前後的粒子總動量滿足：

$$p_{\text{total}}^{1\prime} = \gamma\left(p_{\text{total}}^{1} - \frac{v}{c}\,p_{\text{total}}^{0}\right) \qquad p_{\text{total}}^{0\prime} = \gamma\left(p_{\text{total}}^{0} - \frac{v}{c}\,p_{\text{total}}^{1}\right)$$

如果變換前， p^1及p^0在碰撞中都守恆，自然保證變換後p'^1在碰撞中也守恆。

$$\Delta p_{\text{total}}^{1} = \Delta p_{\text{total}}^{0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta p_{\text{total}}^{1\prime} = 0 \qquad \Delta p_{\text{total}}^{0\prime} = 0$$

動量守恆定律對一個觀察者是對的，那對所有觀察者也都是對的。



$$p_i^1 = p_f^1$$

$$p_i^0 = p_f^0$$

$$p_i^{1\prime} = \gamma\left(p_i^1 - \frac{v}{c}p_i^0\right)$$

$$p_f^{1\prime} = \gamma\left(p_f^1 - \frac{v}{c}p_f^0\right)$$

$$p_i^{1\prime} = p_f^{1\prime}$$

新定義使動量守恆定律遵守相對性原則

新的定義下的動量若守恆，在羅倫茲變換後保證一定守恆。
而且在任何情況下都對，不只限於前述非彈性碰撞。
動量守恆定律通過了檢驗。

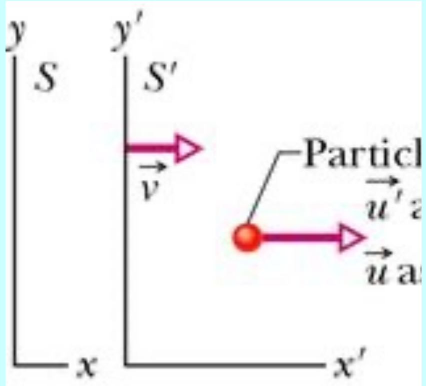
生長屬性		野生 魚/蝦		野生 貝/頭足海鮮		人工養殖 魚/蝦	
供貨來源		江醫師の魚舖子	一般市售	江醫師の魚舖子	一般市售	江醫師の魚舖子	一般市售
檢驗項目	重金屬5項	V	X	V	X	V	3-5種
	漂白劑	V	X	V	X	V	X
	增色劑	V	X	V	X	V	X
	甲醛	V	X	V	X	V	X
	防腐劑11項	V	X	V	X	V	X
	戴奧辛17項	V	X	V	X	V	X
	多氯聯苯12項	V	X	V	X	V	X
	藥殘190項					V	23種
	農藥216項					V	2種
	三聚氰胺					V	?
	三聚氰酸					V	X
	總計	共計48項	共計0項	共計48項	共計0項	共計456項	共計30項
檢驗方式		逐批檢驗	X	逐批檢驗	X	逐批檢驗	抽驗
處理方式		HACCP	X	HACCP	X	HACCP	?
包裝方式		真空包裝	一般	真空包裝	一般	真空包裝	一般
儲藏方式		-40℃急速冷凍	?	-40℃急速冷凍	?	-40℃急速冷凍	?
運送方式		全程冷凍鏈	?	全程冷凍鏈	?	全程冷凍鏈	?

$$p_x = m\frac{\Delta x}{\Delta \tau}$$

新的定義

如果此時空是一個粒子的時空位置變化的測量：

Proper time 的變化與時間成正比。



$$c^2\Delta\tau^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 = c^2\,\Delta t^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)$$

$$\Delta\tau = \Delta t\sqrt{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)} = \frac{\Delta t}{\gamma}$$

設想一個時鐘隨著粒子移動，在它看來，粒子$u = 0$。

$u = 0$時，$\Delta\tau = \Delta t$ 。因此Proper time τ是隨著粒子移動的時鐘量到的時間。

$$p_x = m\frac{dx}{d\tau} = m\gamma\frac{dx}{dt} = m\gamma u_x$$

$$p_x = \frac{mu_x}{\sqrt{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}} = \gamma m u_x$$

$u \ll c, p^1 \rightarrow mu_x$ 接近牛頓的定義

守恆律多了一個：p^0 守恆定律：

$$p_0 = m\frac{cdt}{d\tau} = mc\gamma$$

p^0是什麼？由速度極小的情況去找牛頓力學中的對應。

當 $u \ll c$

靜止能量 動能

$$p_0 = \frac{mc}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}} = mc\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \sim mc\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{u^2}{c^2}\right] = mc + \frac{m}{2c}u^2$$

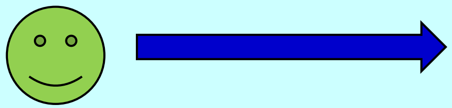
因此，新的守恒律其實是能量守恆定律

$$p_0 = \frac{E}{c}$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}} = \gamma mc^2$$

$$p^{\mu} = (p^0, p^1, p^2, p^3) = \left(\frac{E}{c}, p^x, p^y, p^z\right)$$ $$p_x = \gamma m u_x$$ $$E = \gamma m c^2$$

動量守恆與能量守恆便整合成一個定律：4 momentum conservation。



基本粒子的速度： $$v = \frac{pc^2}{E}$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \rightarrow E = mc^2$$

靜止的物體因為其質量，能量亦不為零

這個公式暗示了能量與質量可以彼此互相轉換。

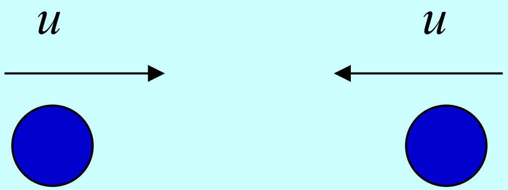
$$E = mc^2 + K$$

質量的減少可能變為動能的增加！

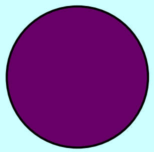
質量是能量的一種形式，能量守恆蘊含質量可以轉換為其他形式的能量，

其他形式的能量亦可轉換為質量，質量不再守恆。Mass is not conserved.

完全非彈性碰撞的質量就不守恆！



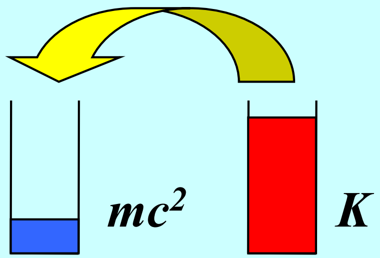
$$p^0_{i\ \text{total}} = \frac{2mc}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

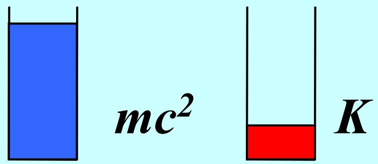


$$p^0_{f\ \text{total}} = \frac{E}{c} = Mc$$

$$M = \frac{2m}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}} \neq 2m$$

質量不守恆，入射粒子的動能轉換成質量。





$$(p^0, p^1, p^2, p^3) \equiv m\left(c\frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}\right) = \left(\frac{E}{c}, p^x, p^y, p^z\right)$$

動量與能量形成如時空一樣的一組4-vector！ $(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, x, y, z)$

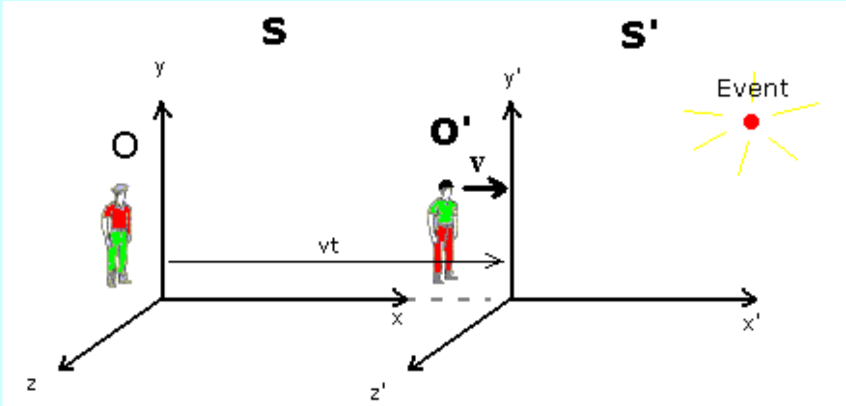
這有前例可循：位移是向量，時間差是純量。兩者的商：速度就是向量。

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

動量與能量的羅倫茲變換就如時空一樣！

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$$

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right)$$



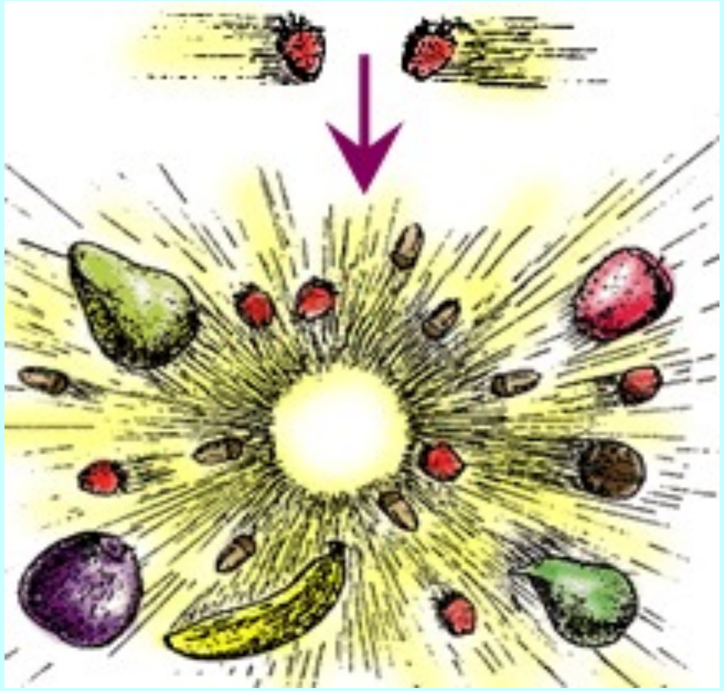
$$p'_x = \gamma\left(p_x - \frac{v}{c^2}\cdot E\right)$$

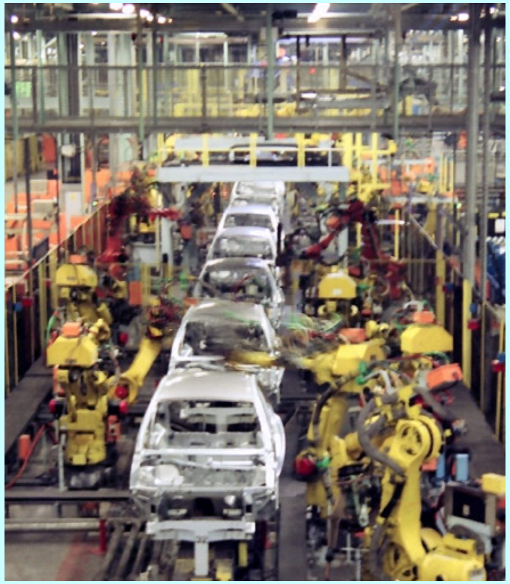
$$E' = \gamma(E - v\cdot p_x)$$

$$p'_{y,z} = p_{y,z}$$

如同時間與空間的分別只是表面的，

動量與能量的分別也只是表面的。



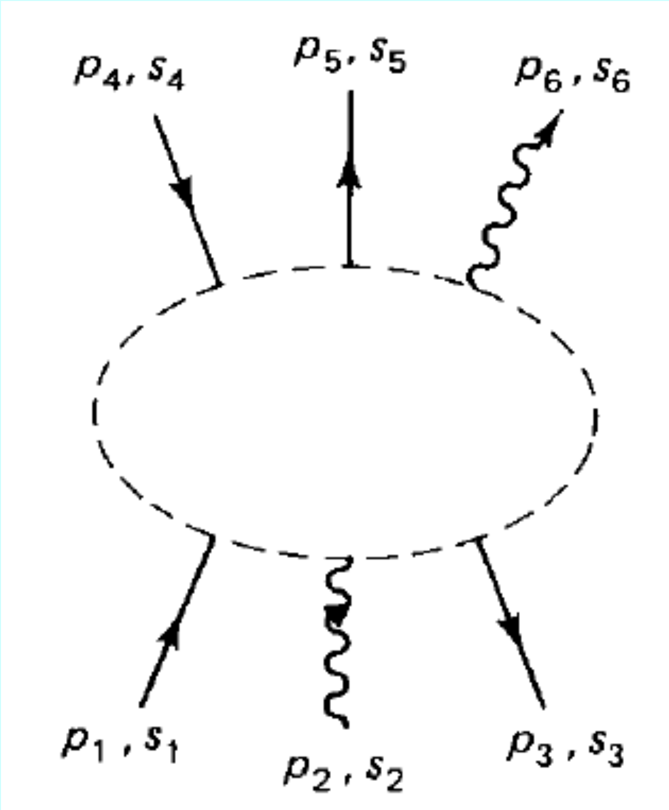


$E = mc^2$

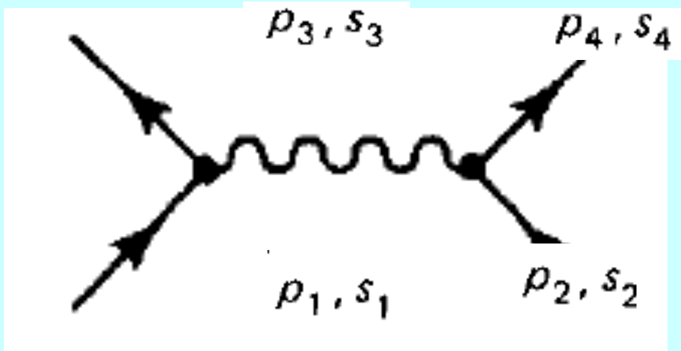
能量可以轉換為質量，產生新的粒子！

Colliders are New Particle factories.

4 momenta 是在實驗中對基本粒子的標準測量！



Electron-electron scattering ($e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$)



4 momentum p^μ的長度p^2是甚麼呢？

$$p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) = \left(\frac{E}{c}, p^x, p^y, p^z\right)$$

$$p^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - p_x^2 = \left(\frac{mc}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}\right)^2 - \left(\frac{mu}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}\right)^2 = \frac{m(c^2-u^2)}{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2} = m^2c^2$$

$$p^2 = m^2\left[\left(\frac{cdt}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2\right] = m^2c^2$$

$$c^2d\tau^2 = c^2dt^2 - dx^2$$

$$p^2 = p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - |\vec{p}|^2 = m^2c^2$$

$$p^2 = m^2c^2$$

質量是一個粒子四維動量的長度，是一個羅倫茲不變量。

因此質量是粒子的最重要的特徵！

Mass is the invaraint of 4-momentum as 4-vector.

每一個基本粒子的 4 momentum都必須滿足以下的 on-shell條件

$$p^2 = \frac{E^2}{c^2} - |\vec{p}|^2 = m^2c^2$$

$$E = c\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2c^2}$$

能量與3維動量大小並非獨立的變數。

動量越大，能量就越大。The larger the 3-momentum, the larger the energy.

$$E = mc^2$$

為方便起見，在計算過程中，取一個單位系統使 $c = 1$

如此能量、動量、質量就有一樣的單位，一般取為能量單位 eV。

等到計算結束再依單位加入適當的c（以及$\hbar$）。

LEPTONS

e

$J = \frac{1}{2}$

Mass $m = (548.57990943 \pm 0.00000023) \times 10^{-6}$ u

Mass $m = 0.510998910 \pm 0.000000013$ MeV

$\left|m_{e^+} - m_{e^-}\right|/m < 8 \times 10^{-9}$, CL = 90%

$\left|q_{e^+} + q_{e^-}\right|/e < 4 \times 10^{-8}$

Magnetic moment anomaly

$(g-2)/2 = (1159.65218073 \pm 0.00000028) \times 10^{-6}$

$(g_{e^+} - g_{e^-}) \,/\, g_{\text{average}} = (-0.5 \pm 2.1) \times 10^{-12}$

Electric dipole moment $d = (0.07 \pm 0.07) \times 10^{-26}$ $e\,$cm

Mean life $\tau > 4.6 \times 10^{26}$ yr, CL = 90% [a]

μ

$J = \frac{1}{2}$

Mass $m = 0.1134289256 \pm 0.0000000029$ u

Mass $m = 105.658367 \pm 0.000004$ MeV

N BARYONS
$(S = 0,\ I = 1/2)$

$p,\ N^+ = uud;\quad n,\ N^0 = udd$

p

$I(J^P) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$

Mass $m = 1.00727646677 \pm 0.00000000010$ u

Mass $m = 938.272013 \pm 0.000023$ MeV [a]

W

$J = 1$

Charge $= \pm 1\ e$

Mass $m = 80.399 \pm 0.023$ GeV

Z

$J = 1$

Charge $= 0$

Mass $m = 91.1876 \pm 0.0021$ GeV [d]

注意光子是以光速 c 前進：

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \xrightarrow[v\to c]{} \infty$$

除非 $m = 0$

事實上從馬克斯威爾方程式可推得電磁波的能量與動量密度成正比：

$$E = |\vec{p}|c$$

$$p^2 = \frac{E^2}{c^2} - |\vec{p}|^2 = 0$$

因此光子質量為零，Massless

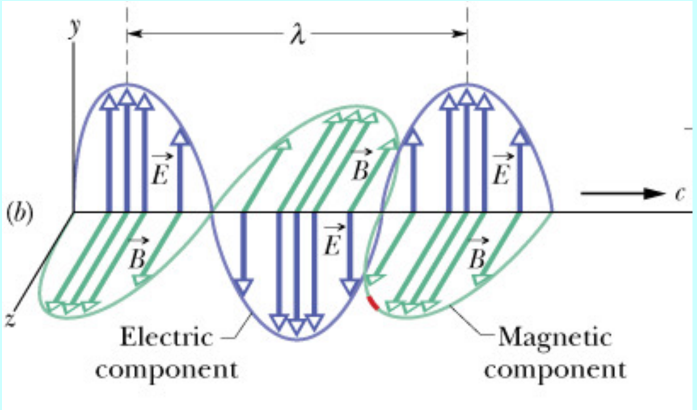
無質量的粒子必定以光速前進。

從光子的波性來看：

$$E = \hbar\omega$$

$$p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$$

$$\frac{\omega}{k} = c$$



$$E = |\vec{p}|c$$

$$p^2 = \frac{E^2}{c^2} - |\vec{p}|^2 = \frac{\hbar^2\omega^2}{c^2} - \hbar^2 k^2 = 0$$

Dispersion Relation

從其他有質量的粒子的波性來看：

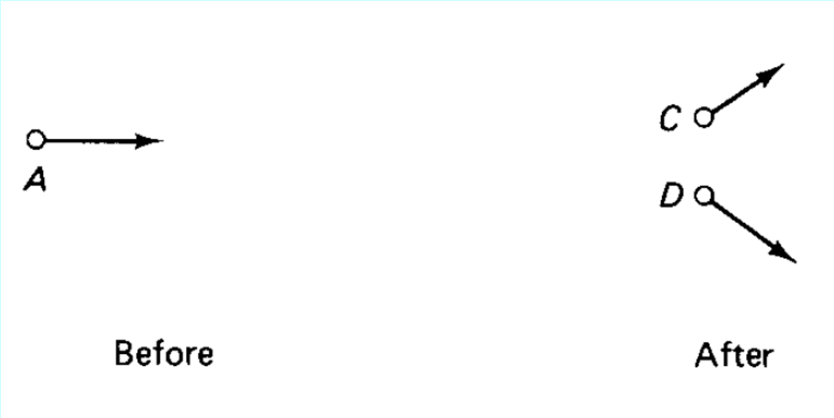
$$E = \hbar\omega$$

$$p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$$

$$p^2 = \frac{E^2}{c^2} - |\vec{p}|^2 = \frac{\hbar^2\omega^2}{c^2} - \hbar^2 k^2 = m^2 c^2$$

Dispersion Relation

粒子物理的反應必須滿足 4 momentum Conservation



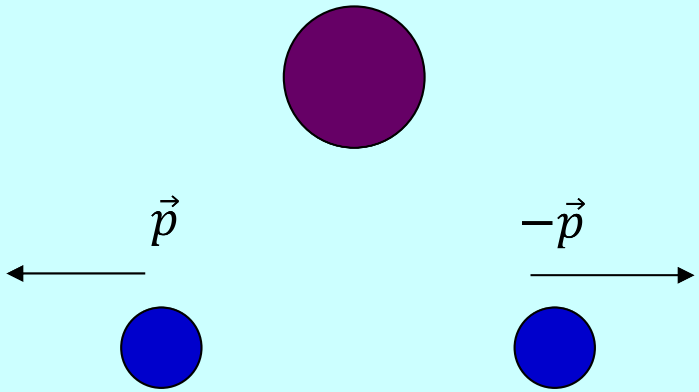
$A \to C + D$

2 body Decay 二體衰變

1. Energy is conserved, $E_A = E_C + E_D$
2. Momentum is conserved $\vec{p}_A = \vec{p}_C + \vec{p}_D$

動量守恆與能量守恆便整合成一個定律： $p_A^\mu = p_C^\mu + p_D^\mu$

產物相同時的二體衰變 $A \rightarrow B + B$，選擇A靜止座標系，這就是$B + B$的質心坐標系。



$$\vec{p}_{i\ \mathrm{total}} = \vec{p}_{f\ \mathrm{total}} = 0$$

$$p^0_{\mathrm{I\ total}} = Mc$$

$$p^0_{f\mathrm{total}} = 2\frac{E_f}{c} = \frac{2mc}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

由能量守恆可以得出產物粒子的能量

$$2E_f = Mc^2$$

產物粒子的能量與動量大小都是固定的值，可以計算出來！

$$E_f = \frac{1}{2}Mc^2$$

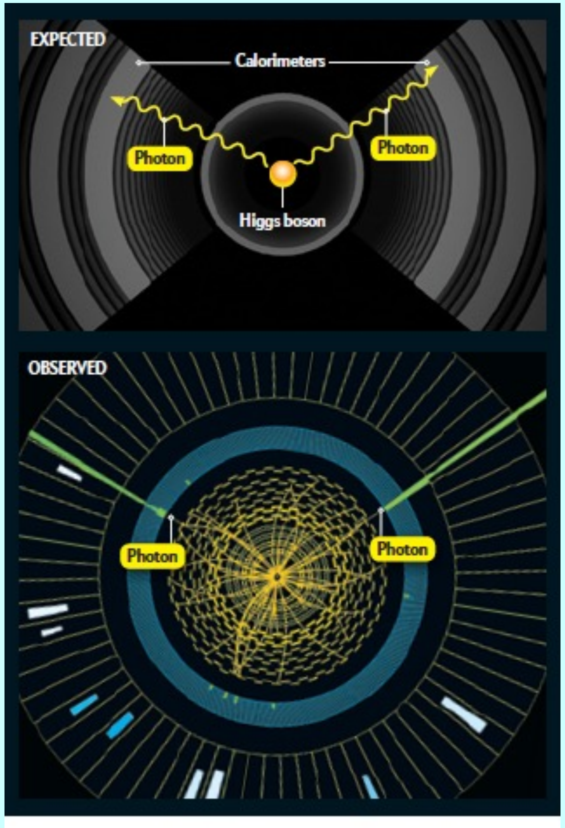
$$\frac{E^2}{c^2} - |\vec{p}|^2 = m^2c^2$$

$$|\vec{p}|^2 = \frac{M^2c^2}{4} - m^2c^2$$

$$M = \frac{2m}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

$M > 2m$ 衰變產物的總質量必須小於衰變粒子的質量!

If the decaying particle is moving, could we find a condition for product energies?



$$H \rightarrow \gamma + \gamma$$

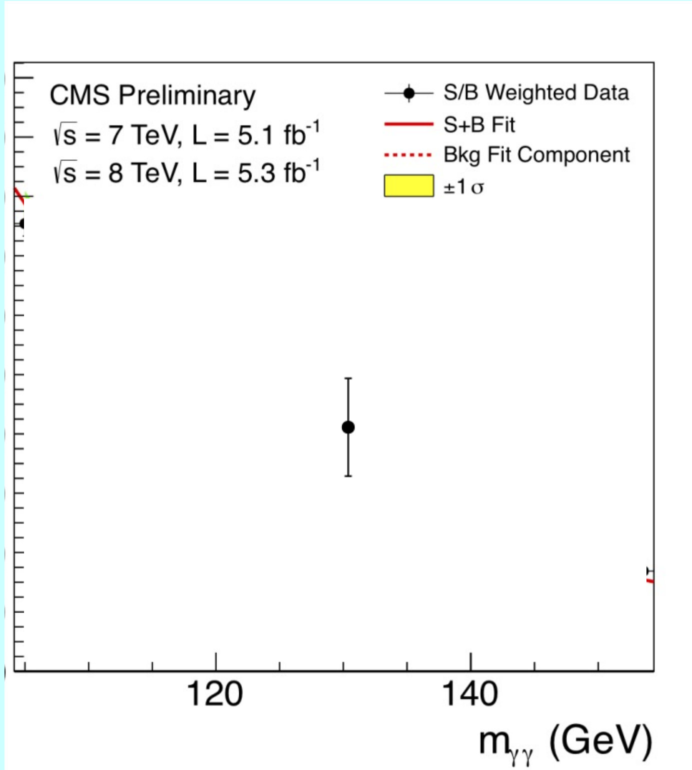
就是一個二體衰變，但希格斯粒子通常是在運動的！

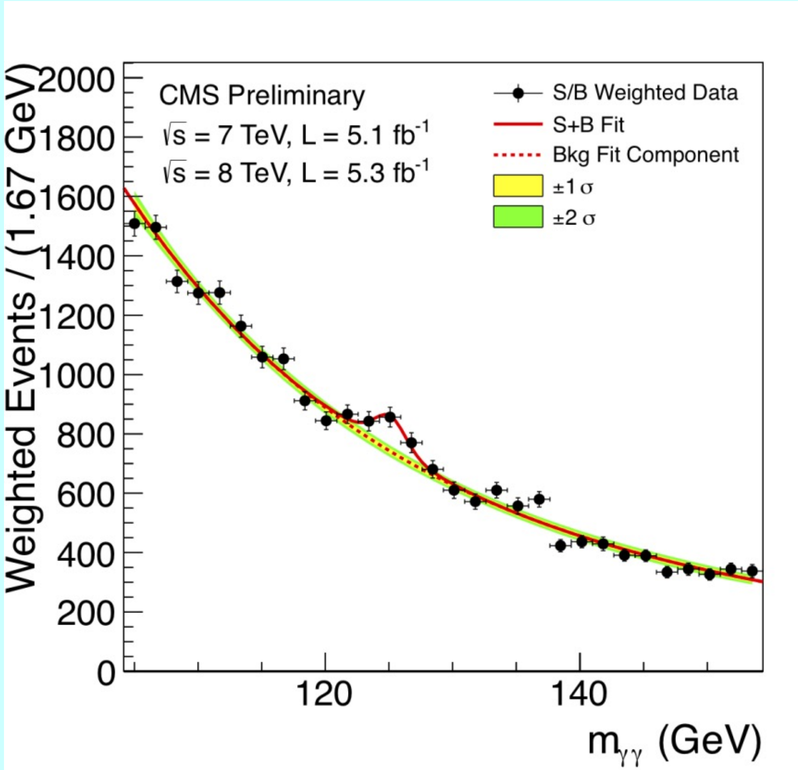
$$p_H = p_{\gamma_1} + p_{\gamma_2}$$

在希格斯的靜止系統或光子的質心系統 in COM frame $E_{\gamma\gamma} = M_H c^2$

將觀測到的兩光子事件數目對此兩光子質心系統的總能量 $m_{\gamma\gamma}$ 作圖：

發生次數



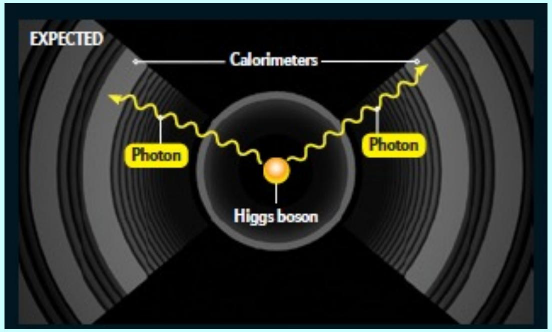


兩光子質心系統的總能量

如果這兩個光子是由希格斯粒子衰變產生，則 $m_{\gamma\gamma} = m_H c^2$

圖上應該只有一個點（如圖左）

對移動中的希格斯粒子所衰變出的兩個光子：



Could we have a condition in any frame?

$$p_H^\mu = p_{\gamma_1}^\mu + p_{\gamma_2}^\mu$$

Momentum Conservation is correct in any frame!

$$p_H^2 = \left(p_{\gamma_1} + p_{\gamma_2}\right)^2$$

Inner porducts are invariant, independent of frames.

$$M_H^2 c^2 = p_{\gamma_1}^2 + p_{\gamma_2}^2 + 2p_{\gamma_1} \cdot p_{\gamma_2} = 0 + 0 + \frac{2E_{\gamma_1}E_{\gamma_2}}{c^2} - 2\vec{p}_{\gamma_1} \cdot \vec{p}_{\gamma_2} = \frac{2E_{\gamma_1}E_{\gamma_2}}{c^2} - 2E_{\gamma_1}E_{\gamma_2}\cos\theta$$

Decay prodcut energy depends on the angle.

產物不同時的二體衰變 $A \to B + C$

A pion at rest decays into a muon plus a neutrino (Fig. 3.5). Question: What is the speed of the muon? Speed is usually inconvenient to use.

What is the momentum of the muon?

$$\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$$

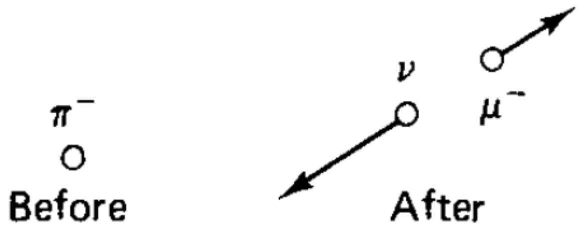


Figure 3.5 Decay of the charged pion (Example 3.3).

Solution. Conservation of energy requires $E_\pi = E_\mu + E_\nu$. Conservation of momentum gives $\mathbf{p}_\pi = \mathbf{p}_\mu + \mathbf{p}_\nu$; but $\mathbf{p}_\pi = 0$, so $\mathbf{p}_\mu = -\mathbf{p}_\nu$. Thus the muon and the neutrino fly off back-to-back, with equal and opposite momenta.

$\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ 選擇π的靜止座標系，這就是$\mu + \nu$的質心COM坐標系：

由動量守恆，可得μ, ν的三維動量大小相等，方向相反：

由能量守恆可得： $E_\pi = E_\mu + E_\nu$

這些能量都可以用三維動量大小來表示:

Suggestion 1. To get the energy of a particle, when you know its momentum (or vice versa), use the invariant

$$E = c\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2c^2} \tag{3.49}$$

In the present case, then: $E_\pi = m_\pi c^2$

$$E_\mu = c\sqrt{\left|\vec{p}_\mu\right|^2 + m_\mu^2 c^2}$$

$$E_\nu = c|\vec{p}_\nu| = c\left|\vec{p}_\mu\right|$$

Putting these into the equation for conservation of energy, we have

$$m_\pi c^2 = c\sqrt{\left|\vec{p}_\mu\right|^2 + m_\mu^2 c^2} + c\left|\vec{p}_\mu\right|$$

or

$$\left(m_\pi c - \left|\vec{p}_\mu\right|\right)^2 = \left|\vec{p}_\mu\right|^2 + m_\mu^2 c^2$$

Solving for $|\mathbf{p}_\mu|$, we find

$$|\mathbf{p}_\mu| = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} c$$

Meanwhile, the energy of the muon [from eq. (3.49)] is

$$E_\mu = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi} c^2$$

Once we know the energy and momentum of a particle, it is easy to find its velocity. If $E = \gamma mc^2$ and $\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v}$, dividing gives

$$\mathbf{p}/E = \mathbf{v}/c^2$$

產物粒子的能量與動量大小都是固定的值，可以計算出來！

Suggestion 2. If you know the energy and momentum of a particle, and you want to determine its velocity, use

$$\mathbf{v} = \mathbf{p}c^2/E \tag{3.50}$$

So the answer to our problem is

$$v_\mu = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{m_\pi^2 + m_\mu^2} c$$

Putting in the actual masses, I get $v_\mu = 0.271c$.

Suggestion 3. Use four-vector notation, and exploit the invariant dot product.

$$p^2 = \frac{E^2}{c^2} - |\vec{p}|^2 = m^2c^2$$

And Remember that for any real particles:

$$p_\pi = p_\mu + p_\nu, \quad \text{or} \quad p_\nu = p_\pi - p_\mu$$

Taking the scalar product of each side with itself, we obtain

$$p_\nu^2 = p_\pi^2 + p_\mu^2 - 2p_\pi \cdot p_\mu$$

But

$$0 = m_\pi^2c^2 + p_\mu^2c^2 + \frac{2E_\pi E_\mu}{c^2} - 2\vec{p}_\pi \cdot \vec{p}_\mu$$

Condition for any frame

In COM

$$p_\nu^2 = 0; \qquad p_\pi^2 = m_\pi^2c^2, \qquad p_\mu^2 = m_\mu^2c^2; \quad \text{and} \quad p_\pi \cdot p_\mu = \frac{E_\pi}{c}\frac{E_\mu}{c} = m_\pi E_\mu$$

Therefore

$$0 = m_\pi^2c^2 + m_\mu^2c^2 - 2m_\pi E_\mu$$

from which E_μ follows immediately. By the same token

$$p_\mu = p_\pi - p_\nu$$

Squaring yields

$$m_\mu^2c^2 = m_\pi^2c^2 - 2m_\pi E_\nu$$

But $E_\nu = |\mathbf{p}_\nu|c = |\mathbf{p}_\mu|c$, so

$$2m_\pi|\mathbf{p}_\mu| = (m_\pi^2 - m_\mu^2)c$$

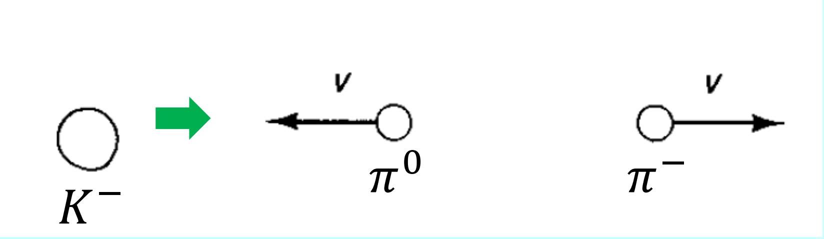
台灣聯合大學系統 111 學年度碩士班招生考試試題

2. A K^+ meson at rest can decay into pions through the channel: $K^+ \to \pi^+ + \pi^0$. Following the decay, the π^+ meson will further decay into a μ^+ meson and a neutrino. Let rest masses of K^+、π^+、π^0 and μ^+ meson be m_K、m_{π^+}、m_{π^0} and m_{μ^+}, and ignore the rest mass of the neutrino. Denote $\gamma_{\pi^+} = 1/\sqrt{1-(v_{\pi^+}/c)^2}$ and $\gamma^*_{\mu^+} = 1/\sqrt{1-(v_{\mu^+}/c)^2}$, where v_{π^+} is the speed of π^+ in the rest frame of K^+ and where v_{μ^+} is the speed of μ^+ in the rest frame of π^+. Answer the following questions (express your answers in terms of m_K、m_{π^+}、m_{π^0}、m_{μ^+}、γ_{π^+} and $\gamma^*_{\mu^+}$):

(a) (7%) Find the energy of π^+ in the rest frame of K^+.

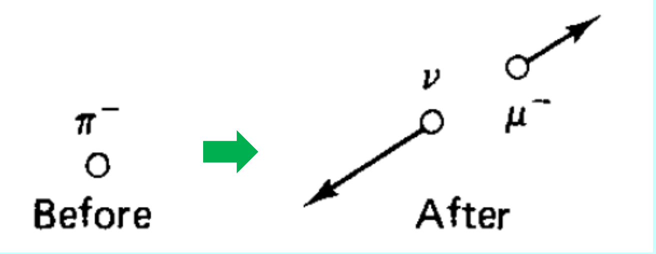
(b) (3%) Find the energy of μ^+ in the rest frame of π^+.

(c) (10%) Find the maximum and minimum energies of μ^+ in the rest frame of K^+



設π^-與π^0質量接近

ν^0質量為零。



台灣聯合大學系統 111 學年度碩士班招生考試試題

ignore the rest mass of the neutrino. Denote $\gamma_{\pi^+} = 1/\sqrt{1-(v_{\pi^+}/c)^2}$ and $\gamma^*_{\mu^+} = 1/\sqrt{1-(v_{\mu^+}/c)^2}$, where v_{π^+} is the speed of π^+ in the rest frame of K^+ and where v_{μ^+} is the speed of μ^+ in the rest frame of π^+. Answer the following questions (express your answers in terms of m_K、m_{π^+}、m_{π^0}、m_{μ^+}、γ_{π^+} and $\gamma^*_{\mu^+}$):

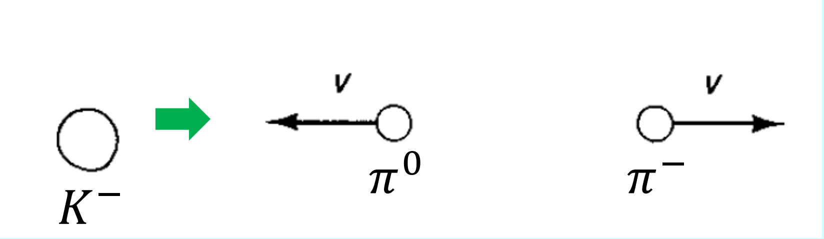
(a) (7%) Find the energy of π^+ in the rest frame of K^+.

(b) (3%) Find the energy of μ^+ in the rest frame of π^+.

(c) (10%) Find the maximum and minimum energies of μ^+ in the rest frame of K^+

設π^-與π^0質量接近

K^-衰變就是第一種產物質量相同的情況



$$E_\pi = \frac{1}{2}M_K c^2$$

由此式還可以算出π的動量與速度：

$$\frac{1}{2}M_K c^2 = \frac{c}{2}\sqrt{|\vec{p}|^2 + m_\pi^2 c^2}$$

$$|\vec{p}|^2 = \frac{M_K^2 c^2}{4} - m_\pi^2 c^2$$

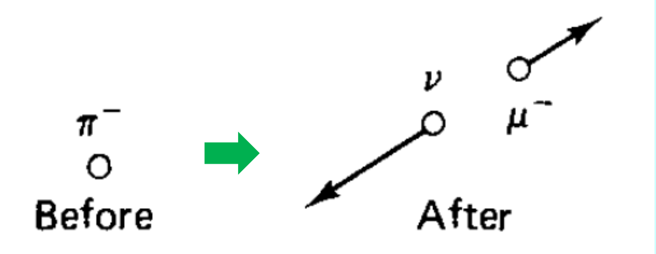
$$E_\pi = \frac{1}{2}M_K c^2 = \frac{m_\pi c^2}{\sqrt{1-\frac{v_\pi^2}{c^2}}}$$

$$M = \frac{m_\pi}{\sqrt{1-\frac{v_\pi^2}{c^2}}}$$

(b) (3%) Find the energy of μ^+ in the rest frame of π^+.

ν^0質量為零。

在π的靜止座標，就是第二種，產物一質量為零的情況：



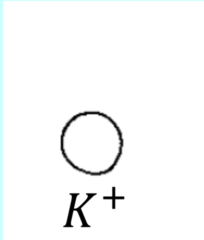
$$|\mathbf{p}_\mu| = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} c$$

$$E_\mu = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi} c^2$$

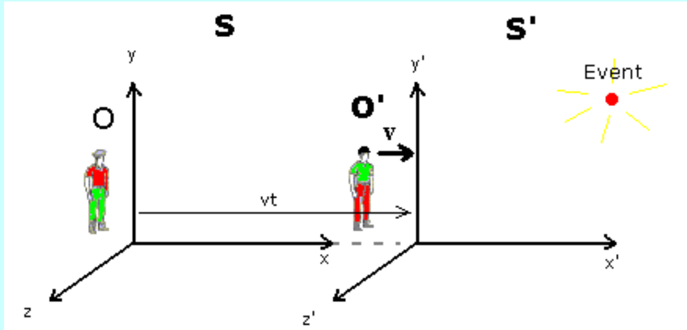
二體衰變中，產物的能量與動量都固定！

(b) (3%) Find the energy of μ^+ in the rest frame of π^+.

(c) (10%) Find the maximum and minimum energies of μ^+ in the rest frame of K^+



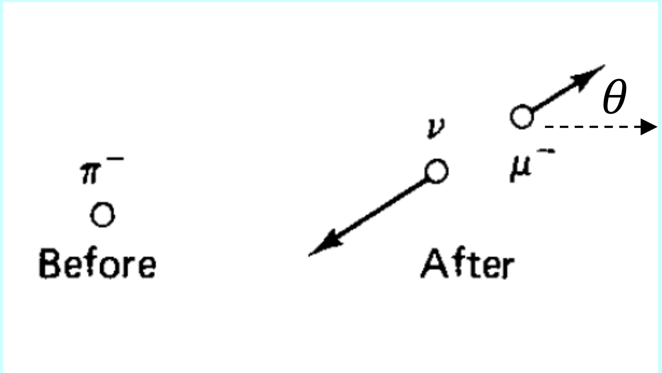
$-v_\pi$



$$p'_x = \gamma\left(p_x - \frac{v}{c^2}\cdot E\right)$$

$$E' = \gamma(E - v\cdot p_x)$$

$$p'_{y,z} = p_{y,z}$$



K的靜止座標相對於π的靜止座標，是以速度$-v_\pi$移動。

K的靜止座標內μ的能量，利用羅倫茲變換就等於：

$$E' = \gamma(E - v\cdot p_x) = \gamma_\pi\left(E_\mu + v_\pi\left|\vec{p}_\mu\right|\cos\theta\right)$$

二體衰變能量與動量都固定，因此此式只有角度可變！

最大值與最小值就在 $\cos\theta = \pm 1$。

$$|\mathbf{p}_\mu| = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi}c$$

$$E_\mu = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi}c^2$$