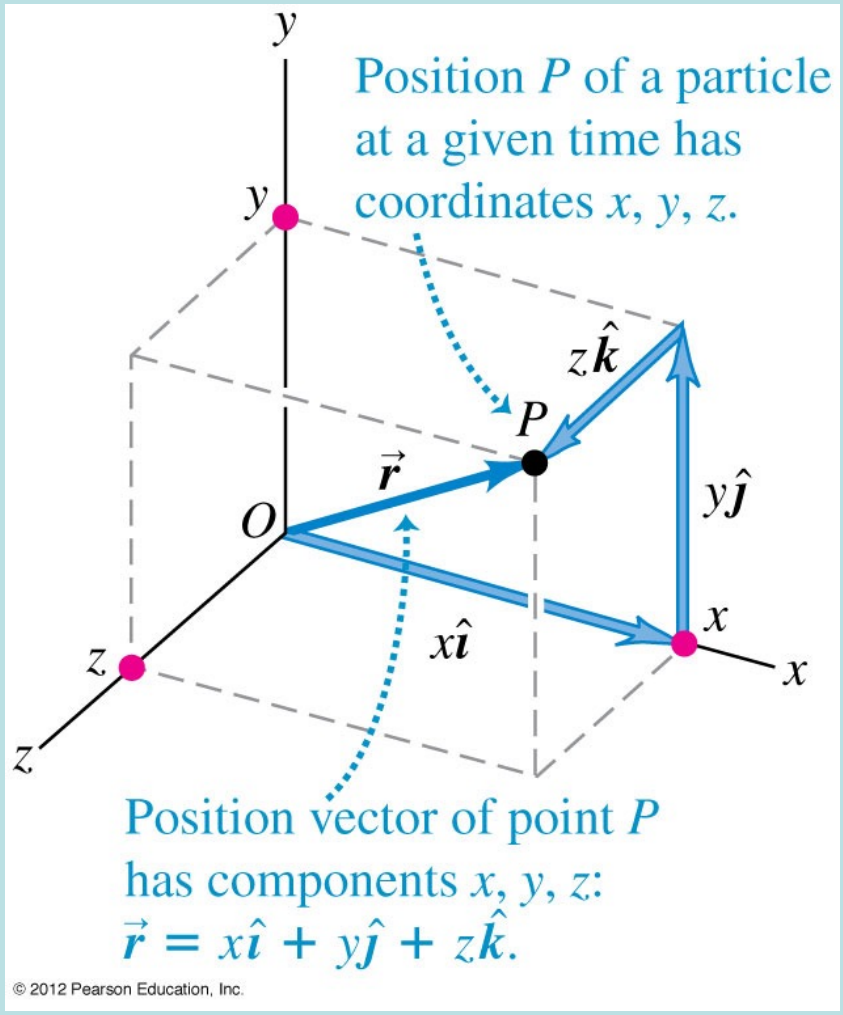
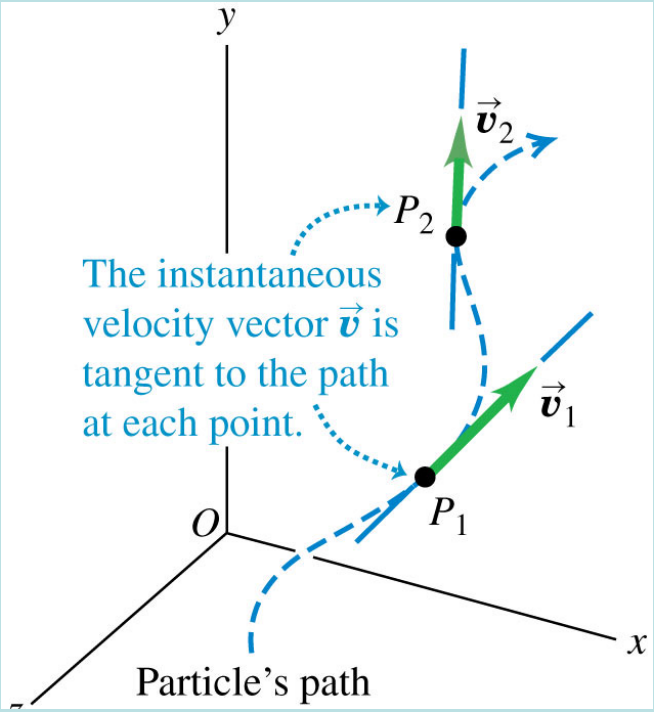


位置是一個向量 $\vec{r} = (x, y, z) = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} r_i \hat{e}_i$$

$\hat{e}_i$ $i = 1,2,3$為座標軸。



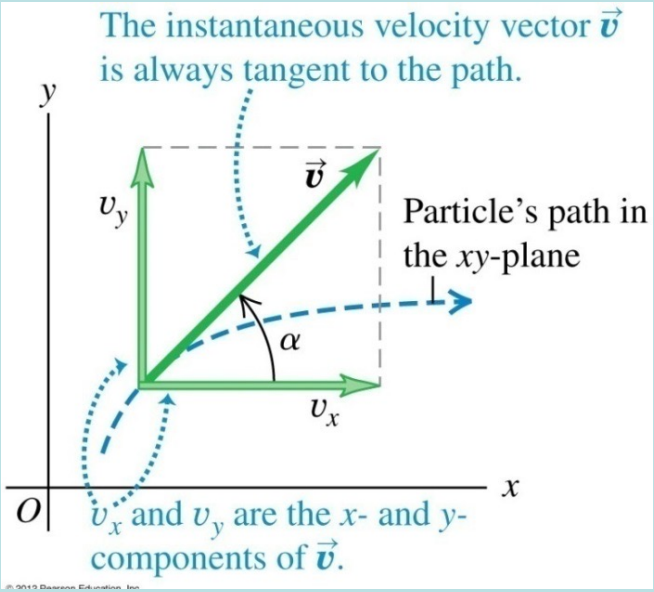
瞬時速度向量Vector，就是位置向量的瞬時變化率。

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t} \right) = \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} \right)$$

$$= \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = (v_x, v_y, v_z)$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt}$$

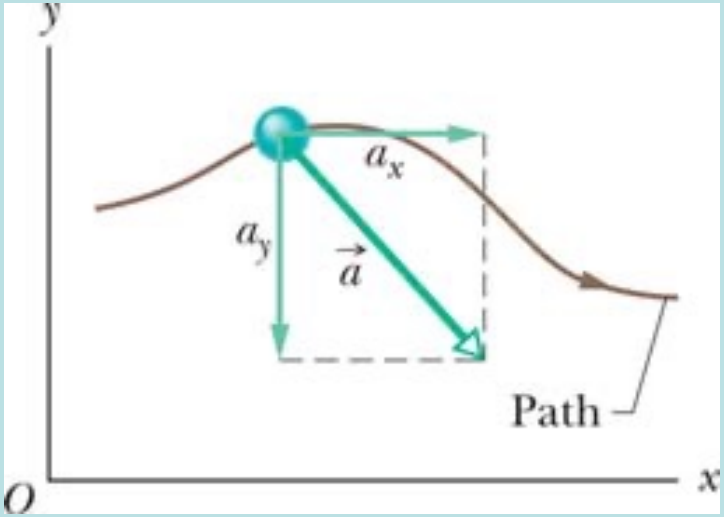


如此定義的速度向量：$\vec{v}$

方向$\hat{v}$是沿著運動的切線方向，

大小v是移動的速率。

加速度向量一樣可以以分量計算：



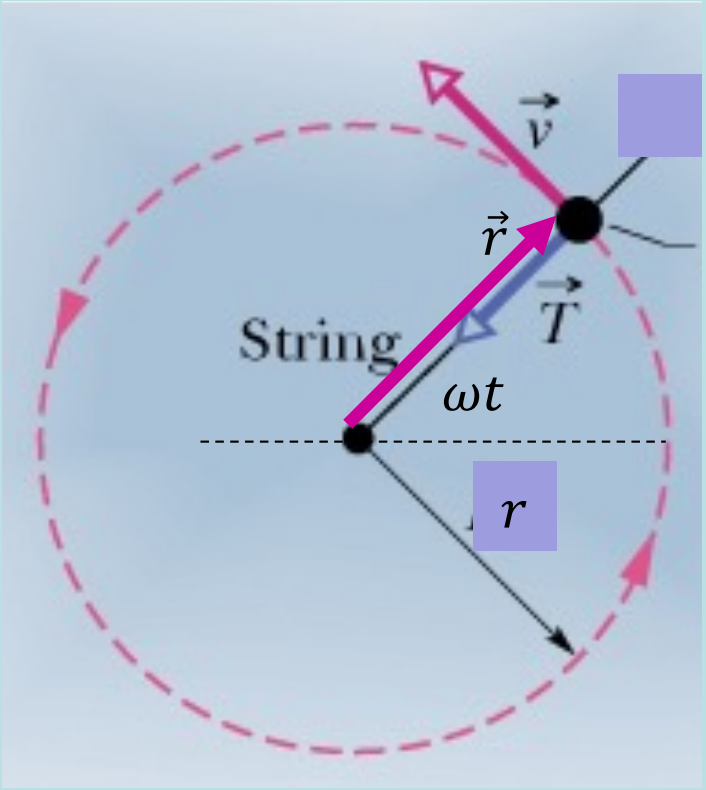
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta v_x}{\Delta t}, \frac{\Delta v_y}{\Delta t}, \frac{\Delta v_z}{\Delta t} \right) = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2} \right)$$

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} \qquad a_z = \frac{d^2z}{dt^2}$$

3.4 • **CALC** The position of a squirrel running in a park is given by $\vec{r} = [(0.280\ \text{m/s})t + (0.0360\ \text{m/s}^2)t^2]\hat{\imath} + (0.0190\ \text{m/s}^3)t^3\hat{\jmath}$. (a) What are $v_x(t)$ and $v_y(t)$, the x- and y-components of the velocity of the squirrel, as functions of time? (b) At $t = 5.00$ s, how far is the squirrel from its initial position? (c) At $t = 5.00$ s, what are the magnitude and direction of the squirrel's velocity?

3.44 •• **CALC** The position of a dragonfly that is flying parallel to the ground is given as a function of time by $\vec{r} = [2.90\ \text{m} + (0.0900\ \text{m/s}^2)t^2]\hat{\imath} - (0.0150\ \text{m/s}^3)t^3\hat{\jmath}$. (a) At what value of t does the velocity vector of the insect make an angle of 30.0° clockwise from the $+x$-axis? (b) At the time calculated in part (a), what are the magnitude and direction of the acceleration vector of the insect?

以等速圓周運動的位置向量$\vec{r}$的分量，直接計算向心加速度向量$\vec{a}$：



等速圓周運動夾角是等速增加！

設ω為角度θ增加的速度：$\theta = \omega t$

ω稱角速度。等速圓運動ω是已知常數。

$\vec{r}$的分量可以寫出！

$$\vec{r} = (r\cos\omega t\,, r\sin\omega t)$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = r\frac{d}{dt}\cos\omega t$$

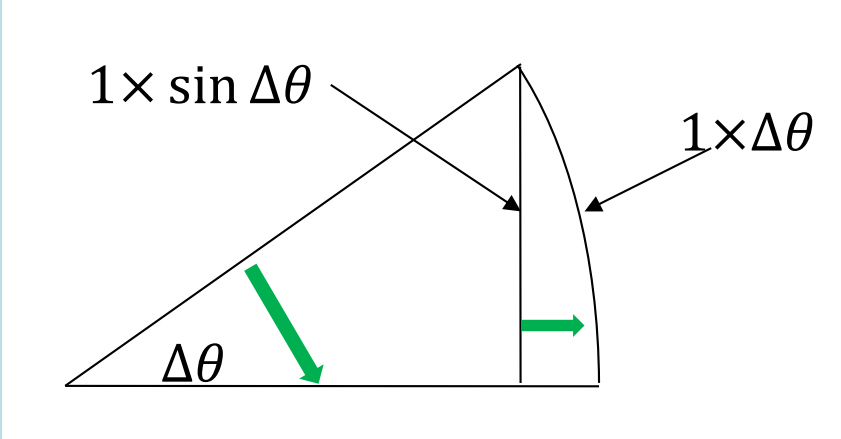
需要三角函數的微分！

三角函數的微分

$$\frac{d}{d\theta}(\sin\theta)=\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\sin(\theta+\Delta\theta)-\sin\theta}{\Delta\theta}=\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\sin\theta\cos\Delta\theta+\sin\Delta\theta\cos\theta-\sin\theta}{\Delta\theta}$$

$\Delta\theta\to 0$　$\cos\Delta\theta\to 1$　第一項與第三項似乎可以抵消：　$=\cos\theta\cdot\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}$

為研究$\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}$，取一半徑為1，弧角為$\Delta\theta$的圓弧，若以徑度角度單位，弧長：$\Delta\theta$。



$\Delta\theta\to 0$　$\sin\Delta\theta\to\Delta\theta$

角度很小時，正弦函數趨近於的弧角大小。

$\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}\to 1$　$\frac{d}{d\theta}(\sin\theta)=\cos\theta$

$$\frac{d}{d\theta}(\sin\theta) = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\sin(\theta+\Delta\theta)-\sin\theta}{\Delta\theta}$$

$$= \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\sin\theta\cos\Delta\theta+\sin\Delta\theta\cos\theta-\sin\theta}{\Delta\theta}$$

$$\cos\Delta\theta \to 1-\frac{1}{2}\Delta\theta^2$$

$$\to \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\sin\theta\left[1-\frac{1}{2}\Delta\theta^2\right]+\Delta\theta\cdot\cos\theta-\sin\theta}{\Delta\theta}$$

$$= \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{-\sin\theta\cdot\frac{1}{2}\Delta\theta^2+\Delta\theta\cdot\cos\theta}{\Delta\theta} = \cos\theta$$

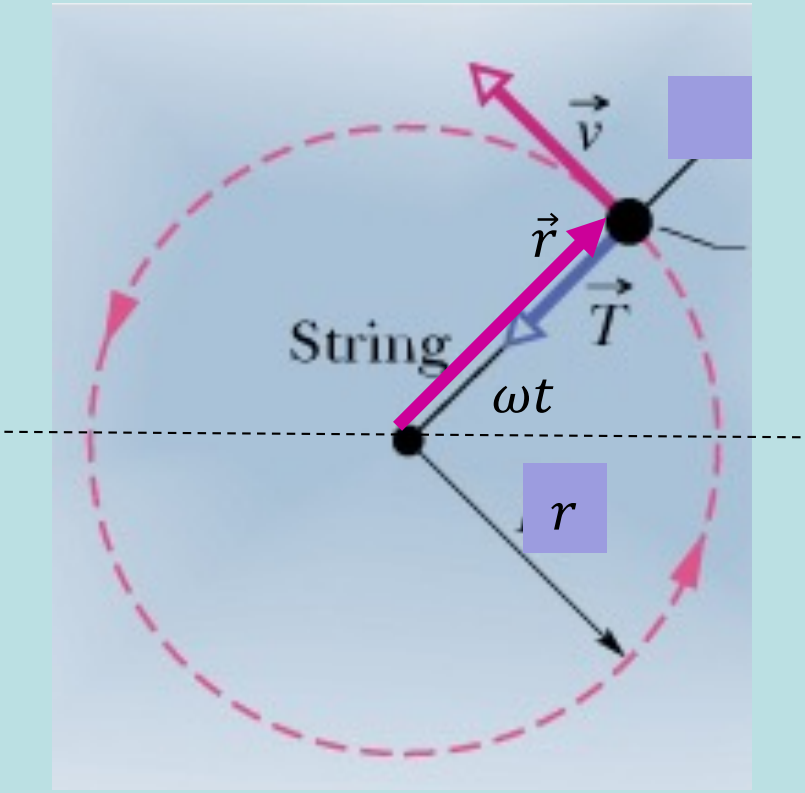
正弦函數的微分是餘弦函數

$$\frac{d}{d\theta}(\sin\theta) = \cos\theta$$

餘弦函數的微分是負的正弦函數

$$\frac{d}{d\theta}(\cos\theta) = -\sin\theta$$

等速圓周運動的加速度



$$\vec{r} = (r\cos\omega t\,, r\sin\omega t) = r\cdot\hat{r}$$

$$\hat{r} = (\cos\omega t\,, \sin\omega t)$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

$\theta = \omega t$ 連鎖率

$$= r\frac{d}{dt}(\cos\omega t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\cos\theta}{\Delta\theta}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta\cos\theta}{\Delta\theta}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = r\frac{d(\cos\theta)}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

$$= -r\sin\theta\frac{d}{dt}(\omega t) = -r\omega\sin\omega t$$

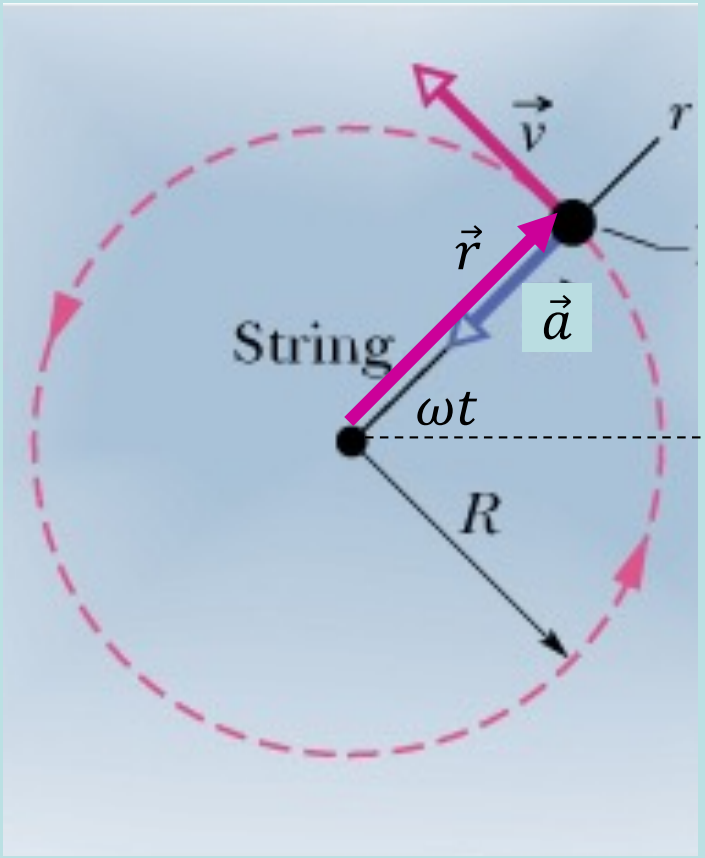
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$$

$$= (-r\omega\sin\omega t\,, r\omega\cos\omega t)$$

$$= r\omega(-\sin\omega t\,, \cos\omega t) = r\omega\hat{v}$$

$v = r\omega$ $\quad \hat{r}\cdot\hat{v} = 0$

等速圓周運動的加速度



$$\vec{v} = (-r\omega \sin \omega t\,, r\omega \cos \omega t)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(-r\omega \frac{d}{dt}(\sin \omega t), r\omega \frac{d}{dt} \cos \omega t\right)$$

$$= (-r\omega \cdot \omega \cos \omega t\,, -r\omega \cdot \omega \cos \omega t)$$

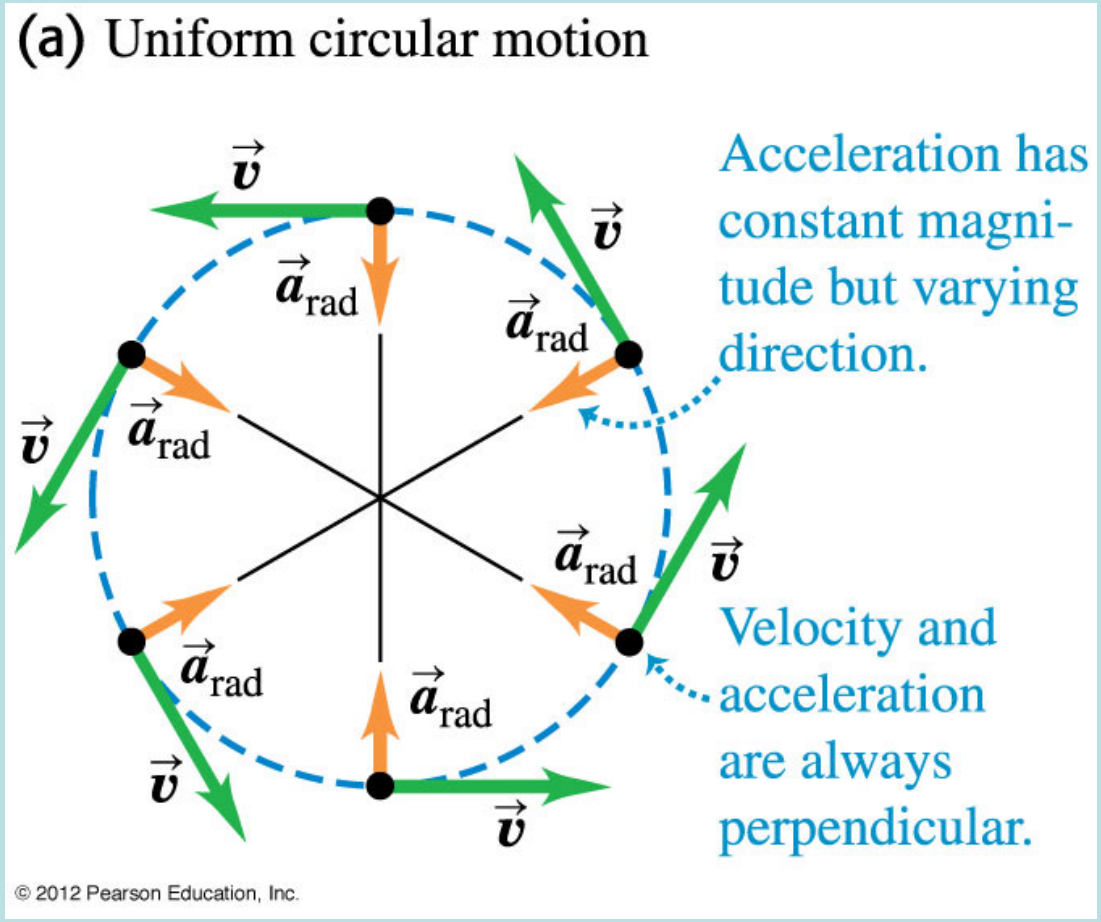
$$= (-r\omega^2 \cos \omega t\,, -r\omega^2 \sin \omega t)$$

$$\vec{a} = -r\omega^2(\cos \omega t\,, \sin \omega t) = -r\omega^2 \hat{r}$$

$$\hat{r} = (\cos \omega t\,, \sin \omega t)$$

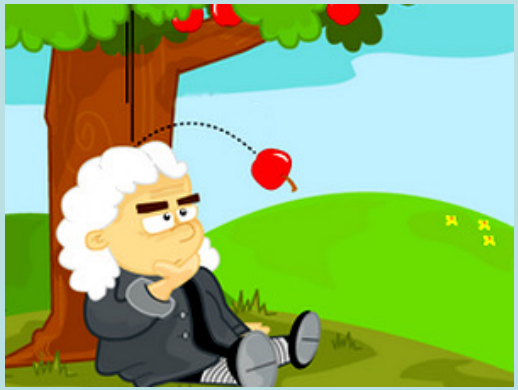
向心加速度指向圓心

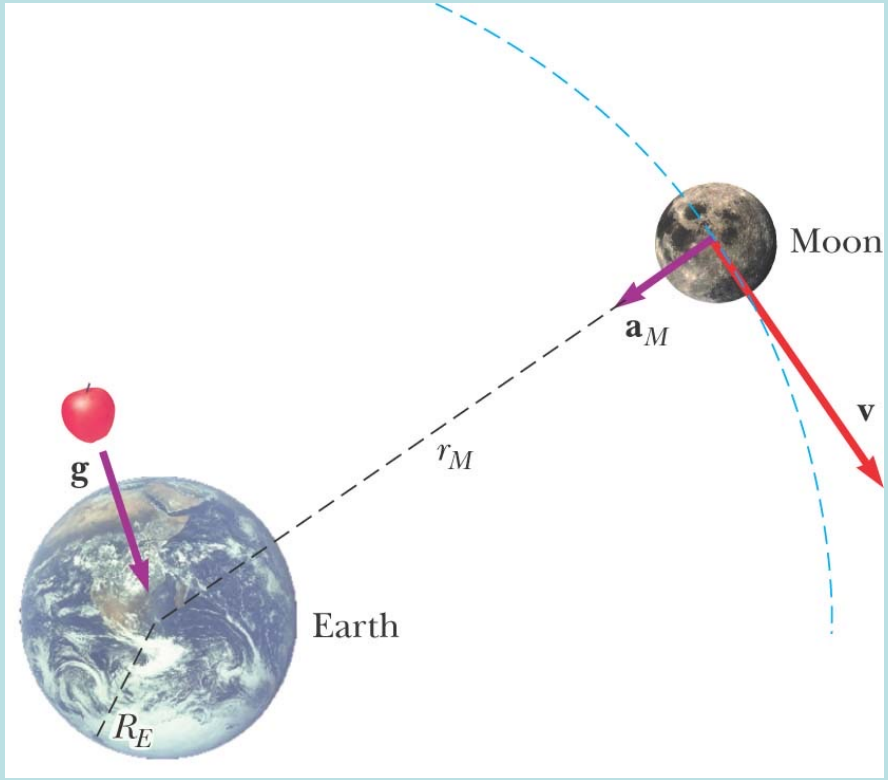
向心加速度大小：$a = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}$

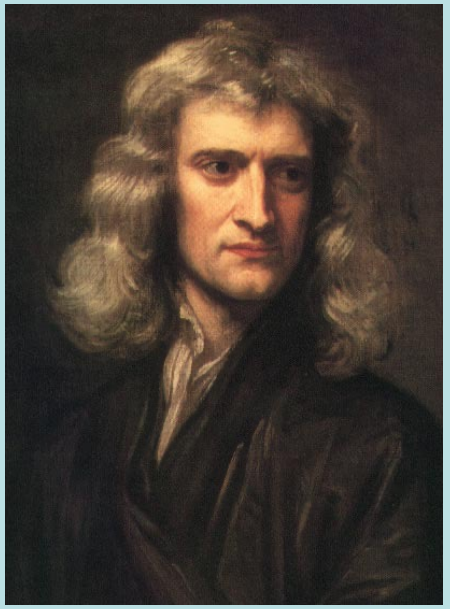




$$a = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}$$







月球的運動也是等加速度運動（以大小而言）！

加速度的方向如同地球上的蘋果也是指向地心！

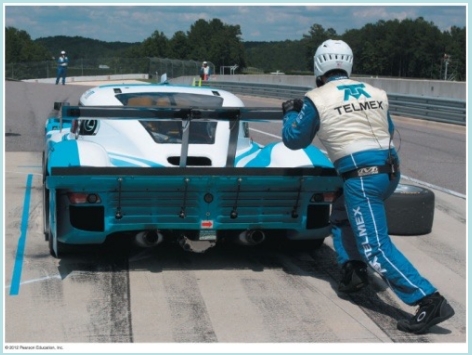
Isaac Newton

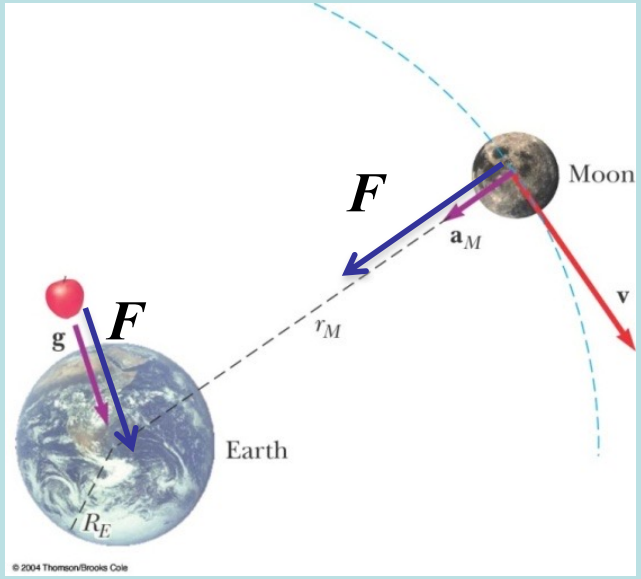
(1642-1727)

Js. Newton

因　　果

地球影響 ⟷ 蘋果加速度





$F \propto a$ 將一物體對另一物體的影響，稱為力 Force

經驗顯示：質量越大越難推動！需要越大的力。

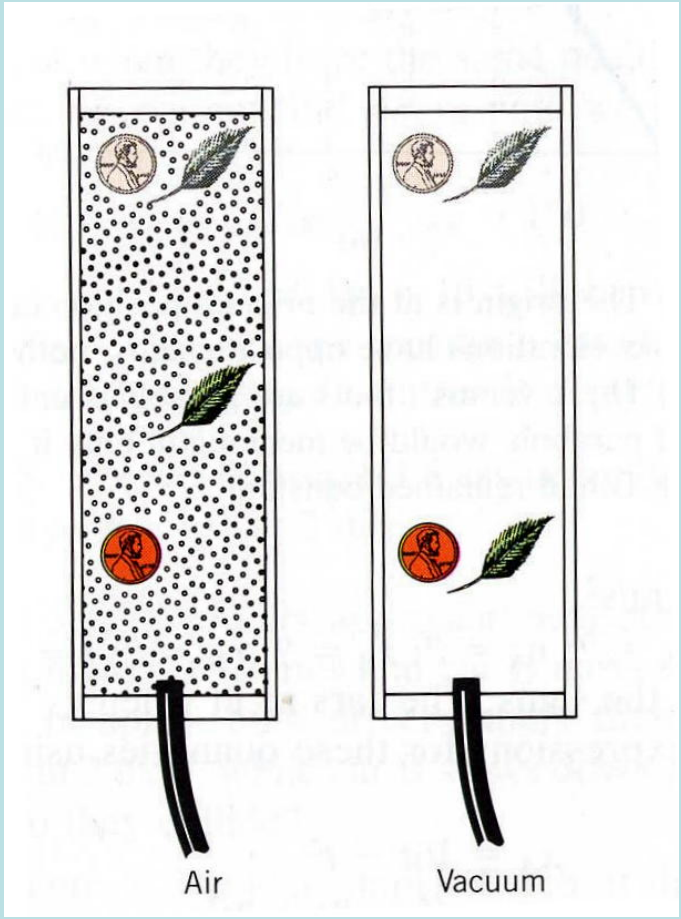
$F = ma$

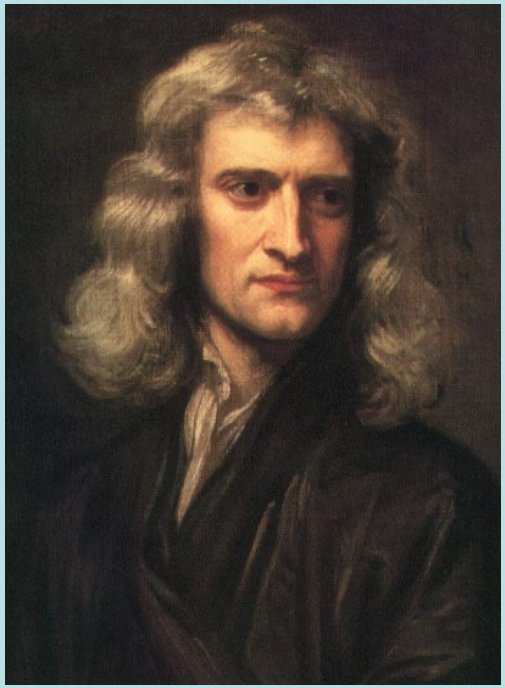
加速度是指向地心，因此力與加速度都有方向性。

$\vec{F} = m\vec{a}$

牛頓運動定律

物體的運動狀態的改變，完全由其所受的力來決定！





過去會說物體在密的、與稀疏的環境運動方式不同！

牛頓就會說，密與疏的環境的影響，一樣可以分析為黏滯力。

物體的運動狀態的改變，完全由其所受的力來決定！



如果我們知道力與位置等物理量的關係： $\vec{F}(\vec{r},\vec{v},\cdots)$

例如萬有引力： $\vec{F}=-G\frac{mM}{r^2}\hat{r}$

將力的公式代入牛頓定律$\vec{F}=m\vec{a}$，就得到位置$\vec{r}$必須滿足的方程式：

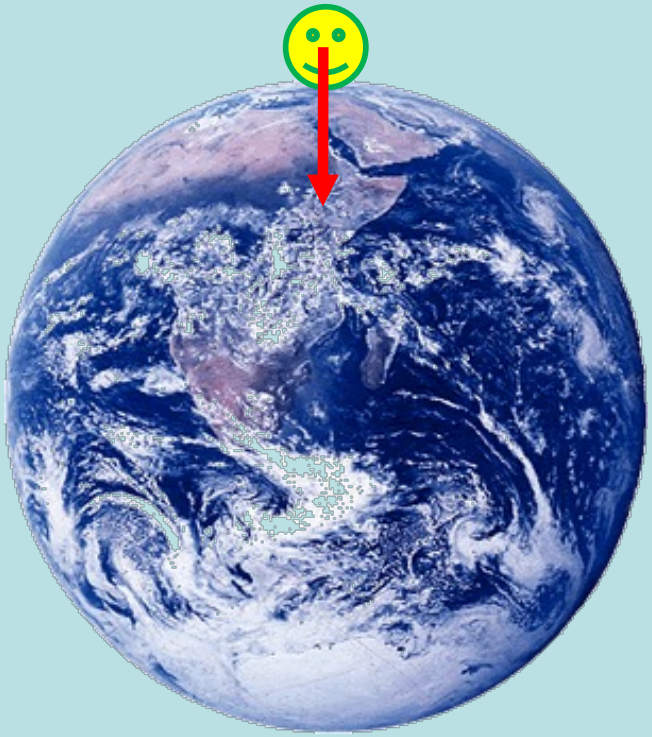
$$\vec{F}\left(\vec{r},\frac{d\vec{r}}{dt},\cdots\right)=m\vec{a}=m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Equation of Motion 運動方程式



運動方程式是一個微分方程式，若能求解，就可預測物體運動的位置。

牛頓定律能預測物體的整個運動軌跡。



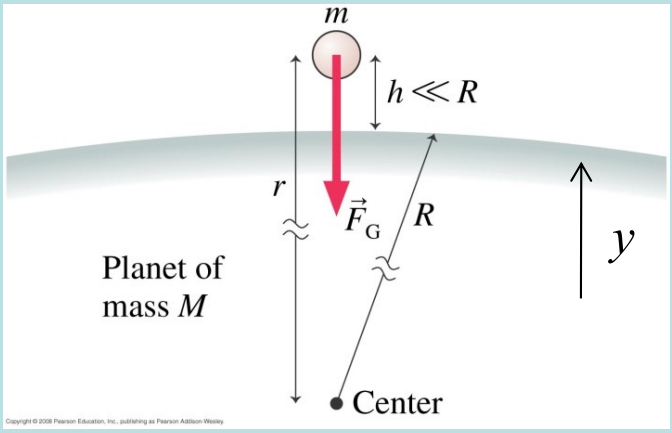
地表附近的運動：

地球對地表上物體的萬有引力，與地心距離平方成反比。

物體高度遠小於地球半徑，與地心距離是一個常數。

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{R^2}\hat{r} = -mg\hat{j}$$

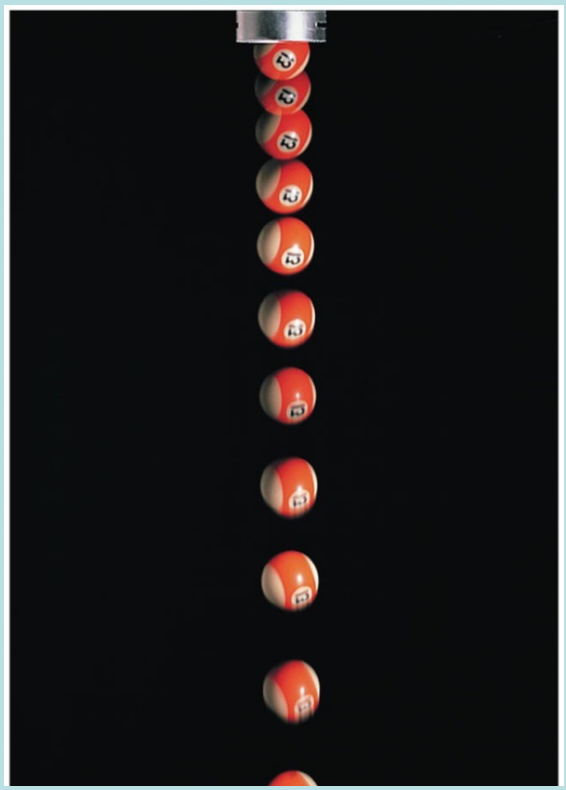
選向上方向為y方向。

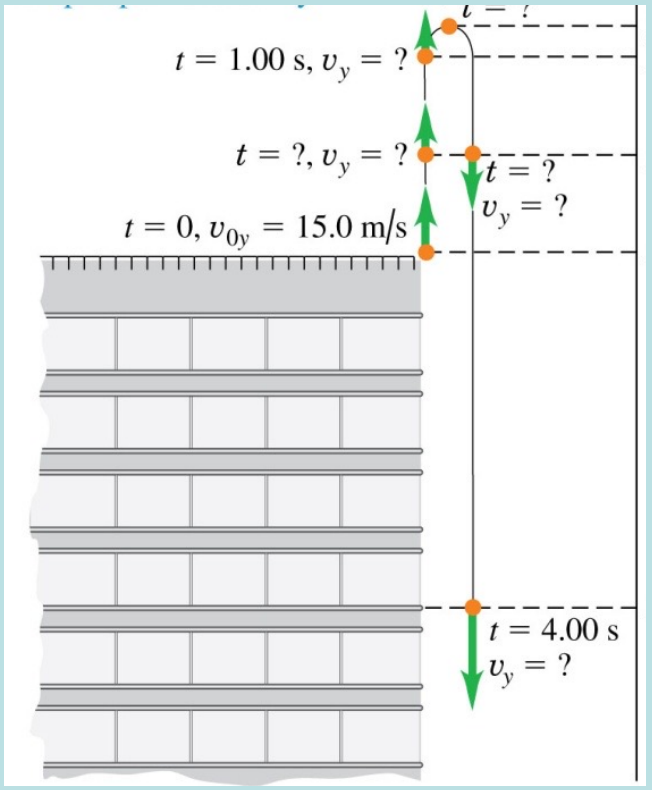


地表上重力大致上與位置無關。

地表附近，物體的加速度是一個常數。

地表附近的自由落體或拋體





$$\vec{F} = -mg\hat{j}$$

$$m\vec{a} = -mg\hat{j}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

地表附近自由落體的運動方程式！這是微分方程式！

解微分方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

$$v = \int_{t_0}^{t} dt'(-g) = -gt + gt_0 = -gt + c_1$$

$$\frac{dy}{dt} = v$$ 引入速度，使微分少一次。

$$\frac{dv}{dt} = -g$$

速度的微分是一個多項式，
因此速度也是一個多項式！

多項式的微分冪次會降一次，
因此速度是時間的線性函數。

$$v = -gt + c_1$$

這裡有一個常數，如果沒有這個常數，
起始速度只能為零。

$$\frac{dy}{dt} = -gt + c_1$$

位置的微分是一個多項式，
因此位置也是一個多項式！

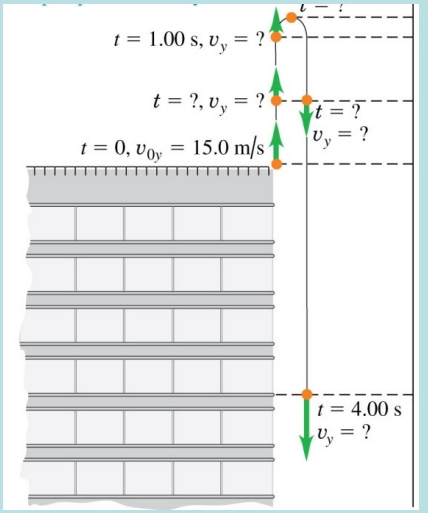
多項式的微分冪次會降一次，
因此位置是時間的二次函數。

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1t + c_0$$

如果沒有這個常數，
起始位置只能為零。

這裡有兩個未知的常數，顯示單靠微分方程式無法決定唯一解！

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1 t + c_0 \qquad v = -gt + c_1$$



微分方程式無法決定唯一解

但我們還未輸入起始的位置與速度，稱為起始條件！

$y(0) = y_0$ $\qquad$ $v(0) = v_0$

無疑地，起始條件會影響運動的軌跡！

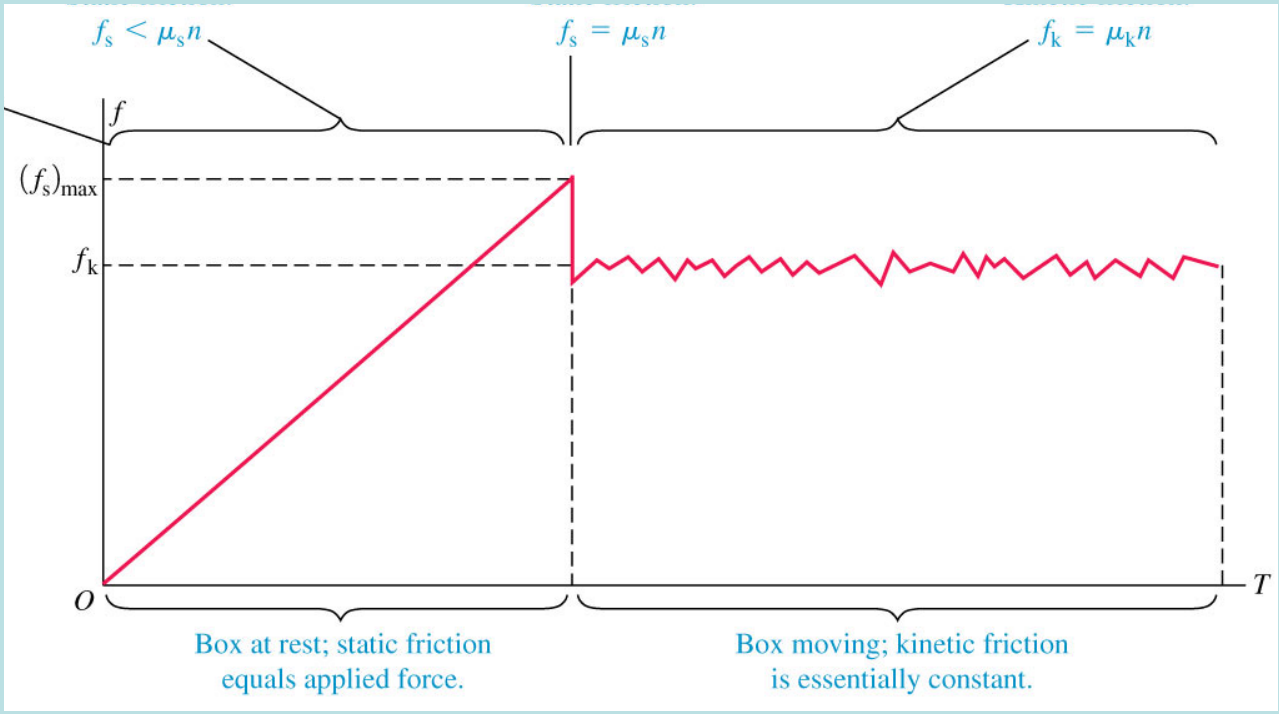
解的表示式中的兩個未定常數c_0, c_1，正好由兩個起始條件來決定：

$y(0) = c_0 = y_0$ $\qquad$ $v(0) = c_1 = v_0$

運動方程式加上兩個起始條件就決定唯一的一個解！

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0$$

要求出物體運動路徑，必須加上初位置初速度兩個起始條件



靜摩擦力大小由物體維持靜止這個條件來決定，

但最大值經測量發現一般都與垂直的正向力成正比。

$f_s < n\mu_s$ μ_s:最大靜摩擦係數

同時，動摩擦力一般來說是一定值，與垂直的正向力成正比：

$f_k = n\mu_k$ μ_k:動摩擦係數

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

力與加速度都是向量！

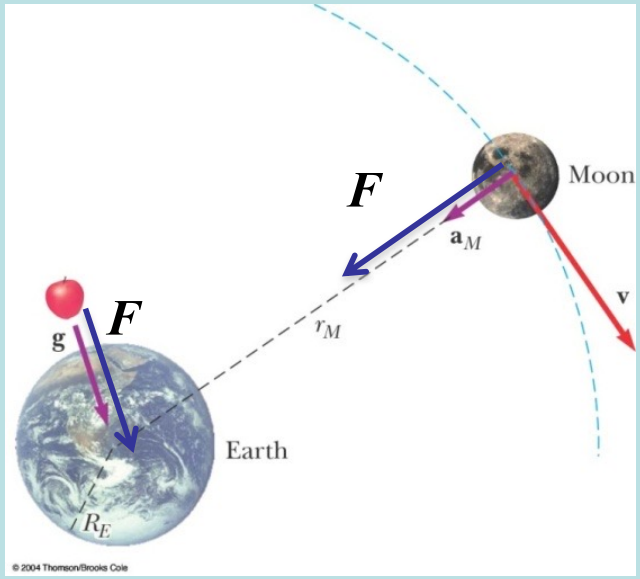
以分量來表示，向量的牛頓運動定律其實是三個方程式：

每一個方向都有一個牛頓運動定律！

$$F_x = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$F_y = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$F_z = m\frac{d^2z}{dt^2}$$



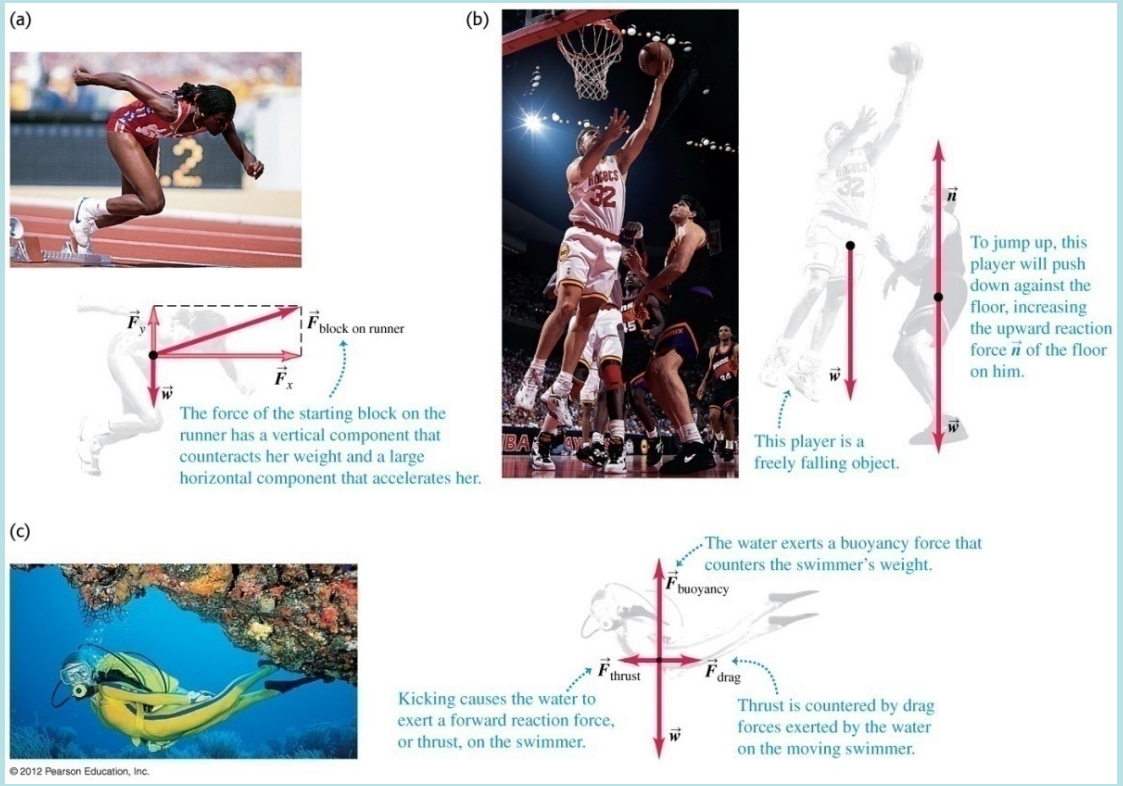
解題訣竅：

將未知的力與加速度以符號代表。

要求每一個有質量的物體，每一個方向都滿足一個牛頓第二定律！

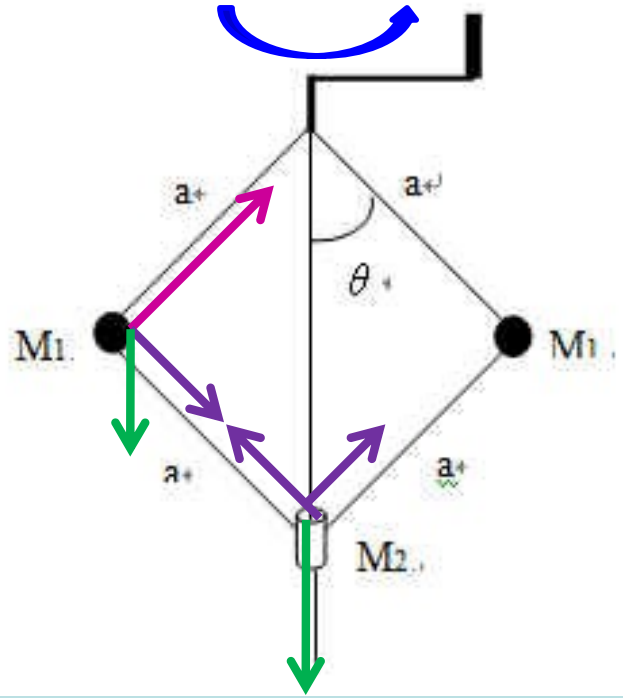
無質量或質量可以忽略者，要求其所受合力必須為零。

聯立方程式，解出未知量。



考慮一轉動裝置(如圖)，裝置啟動時對曲柄施力轉動軸承，再透過支架帶動整個裝置繞 Z 軸旋轉。在裝置內，質點 M_2 只能沿轉動軸上下運動，而質點 M_1 及長度 a 固定的支架，可在垂直平面上移動。假設 $M_2=2M_1$，而支架、曲柄及軸承很輕，質量都可以忽略，同時亦忽略所有軸承的摩擦力。

當旋轉愈來愈快，支架張開的角度θ會愈來愈大，當θ=45°時，我們讓轉動速度維持不再增加，使θ維持在 45°，請問此時裝置中 M_1 的旋轉速度為何。



考慮兩個質點的受力，請注意因支架可在垂直平面移動，支架對質點的施力只能沿支架的方向。M_2 沒有加速度，故其總受力必需為零，在垂直方向總力為零：

$$2\frac{1}{\sqrt{2}}F_1 - M_2 g = 0$$

對質點 M_1 的受力作分析，在垂直方向 M_1 沒有加速度：

$$M_1 g + \frac{1}{\sqrt{2}}F_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}F_2 = 0$$

作用於質點 M_1 水平方向總力必須等於 M_1 的向心加速度乘上 M_1，

$$\frac{1}{\sqrt{2}}F_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}F_2 = M_1\frac{a}{\sqrt{2}}\omega^2$$

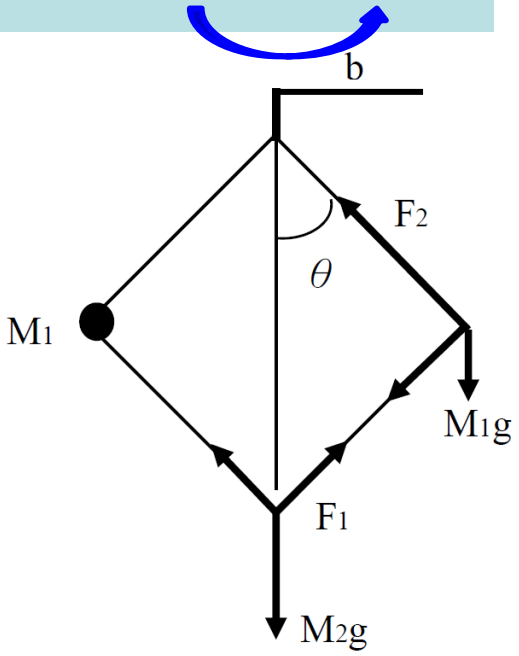
三個未知數正好有三個方程式，因此可以全部解出：

$$F_1 = \sqrt{2}M_1 g$$

$$F_2 = 2\sqrt{2}M_1 g$$

$$M_1\frac{a}{\sqrt{2}}\omega^2 = 3M_1 g$$

$$\omega^2 = 3\sqrt{2}\frac{g}{a}$$



支架張力與重力的合力等於質量乘向心加速度！

合力提供了質量作等速圓周運動所需的向心力！

3. 有A,B兩個方塊，方塊A質量為M_A（尚未知），方塊B質量為$M_B = 1.0\text{kg}$。O點固定於垂直的z軸上，而方塊A以一支架連接於O點，方塊B又以一同樣支架連接於方塊A（如圖所示）。支架與方塊及O點的連接無摩擦，所以支架可以自由改變方向，但兩支架的長度l（尚未知）相等且保持固定，質量可以忽略。使A,B兩方塊及支架以相同角速度繞z軸旋轉，週期為0.5π秒，即角速度$\omega = 4.0\ \text{s}^{-1}$。旋轉時O,A,B三點及支架一直保持在通過$z$軸的鉛直平面上。此時觀察到OA間支架與垂直線的夾角為$\theta = 30°$，AB間支架與垂直線的夾角為$\phi = 45°$。向心加速度公式為：$a = r\omega^2$。

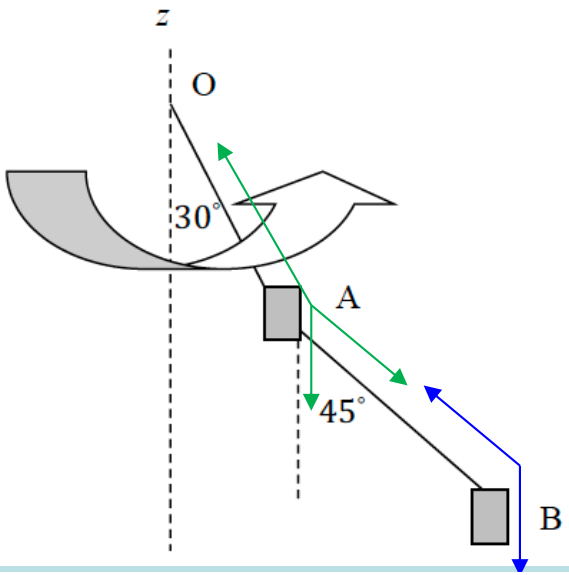
A. 分析方塊B的受力，求支架AB對方塊B的張力T是多少N。(8)

B. 由方塊B向心加速度，計算支架的長度l是多少m。

提示：別忘了支架OA對旋轉半徑的貢獻。 (7)

C. 設OA支架對A的施力為S，分析方塊A的受力，求M_A是多少kg。(10)

$\sqrt{3}\sim1.7, \sqrt{2}\sim1.4$。



解答：

A. 拉力T在垂直方向的投影必須正好抵消B所受的重力：$T\frac{\sqrt{2}}{2} = M_B g$，$T = \sqrt{2}M_B g =$ 13.9 N。

B. 重力無水平分量，因此拉力T在水平方向的分量，必須等於向心加速度乘上質量，

$$T\frac{\sqrt{2}}{2} = M_B\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\right)l\omega^2 = 19.36l$$

$$l = 0.5\ \text{m}$$

A. 設OA支架對A的施力為S，A垂直方向的總受力為零：

$$S\frac{\sqrt{3}}{2} = M_A g + T\frac{\sqrt{2}}{2} = M_A g + M_B g$$

水平方向的總受力必須正好等於向心加速度乘上質量：

$$S\frac{1}{2} - T\frac{\sqrt{2}}{2} = M_A\frac{l}{2}\omega^2$$

$$S\frac{1}{2} = M_A\frac{l}{2}\omega^2 + M_B g$$

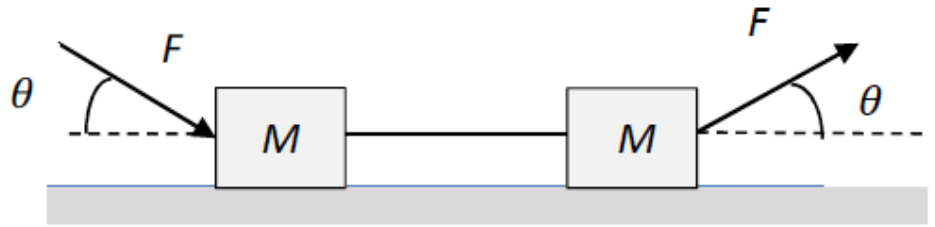
由此二式削去S可得：

$$M_A g + M_B g = M_A\frac{l\sqrt{3}}{2}\omega^2 + \sqrt{3}M_B g$$

$$9.8M_A + 9.8 = 6.9M_A + 17.0$$

$$M_A = 2.5\ \text{kg}$$

在一個桌面上有兩個質量相等的方塊，中間以很輕的繩連接，繩的質量可以忽略。方塊的質量 M 為 3.0 kg，如圖所示。對下圖中左方方塊施以一個斜向下方的推力，此力的方向與水平線的夾角為 $\theta = 30°$，同時對右方方塊亦施以一個斜向上方的拉力，此力的方向與水平線的夾角亦為 $\theta = 30°$，使整個系統在桌面上開始向右運動，兩個力的大小都為 10N。已知在運動時繩是張緊的，因此兩個方塊是一起運動的。兩個方塊與地面之間的動摩擦係數都是 $\mu_k \approx 0.25$。問連接兩方塊的繩上的張力大小是多少 N?(20)



解答：設繩的張力大小為 T。左方方塊滿足的第二運動定律：

$F \times \cos 30° - (F \times \sin 30° + Mg) \times \mu_k + T = Ma$。

右方方塊滿足的第二運動定律：

$F \times \cos 30° - (-F \times \sin 30° + Mg) \times \mu_k - T = Ma$

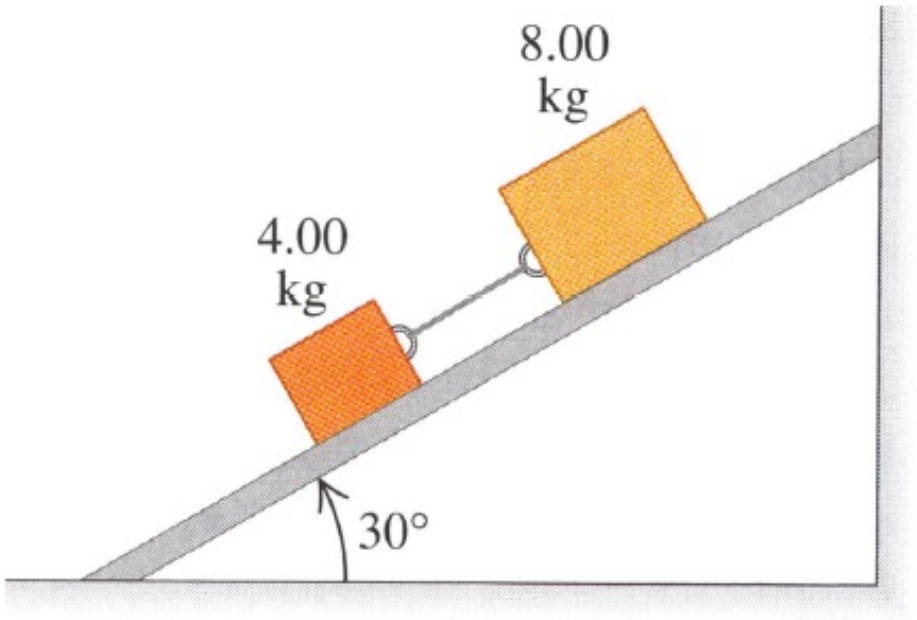
兩式相減即消去未知的加速度：

$(2 \times F \times \sin 30°) \times \mu_k = 2T$

$T = F \times \sin 30° \times \mu_k = 1.25\text{N}$。

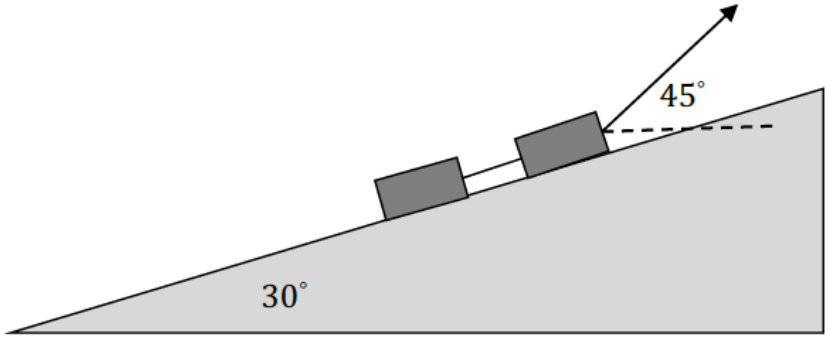
behavior of the block?

5.98 ••• Two blocks with masses 4.00 kg and 8.00 kg are connected by a string and slide down a 30.0° inclined plane (Fig. P5.98). The coefficient of kinetic friction between the



4.00-kg block and the plane is 0.25; that between the 8.00-kg block and the plane is 0.35. (a) Calculate the acceleration of each block. (b) Calculate the tension in the string. (c) What happens if the positions of the blocks are reversed, so the 4.00-kg block is above the 8.00-kg block?

3. 有一固定斜面，斜角為30°，在斜面上有兩個相同的方塊，質量各為1.0kg，中間以一無質量的弦連接，對上方的方塊施以一向上的力，該力方向與水平方向間的夾角為60°，大小為30N。方塊與斜面間的動摩擦係數為$\mu_k = 0.3$。已知方塊組會沿斜面向上移動，且方塊不會翻滾或旋轉，計算方塊間弦上的張力，以及方塊的加速度。$\sin 15° \sim 0.26, \cos 15° \sim 0.97$。



解答：以沿斜面方向及垂直斜面方向的分量來討論，垂直斜面方向方塊都沒有運動，因此合力為零。下方方塊的正向力為$mg\cos 30° = 8.49\text{N}$，動摩擦力為$mg\cos 30°\,\mu_k = 2.55$，上方方塊的正向力為$mg\cos 30° - F\sin 15° = 0.1\text{N}$，動摩擦力為$(mg\cos 30° - F\sin 15°)\mu_k = 0.03$。下方方塊沿斜面方向：

$$T - mg\sin 30° - mg\cos 30°\,\mu_k = ma，$$

$$T - 4.9 - 2.55 = ma$$

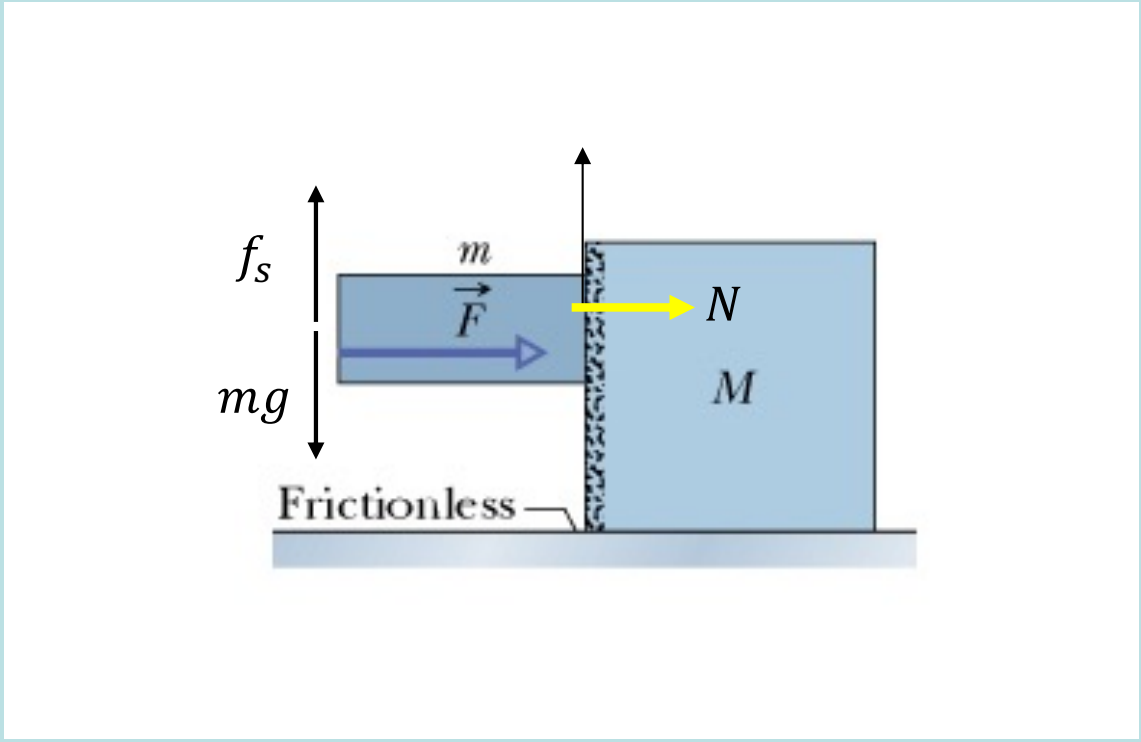
上方方塊沿斜面方向：

$$F\cos 15° - mg\sin 30° - (mg\cos 30° - F\sin 15°)\mu_k - T = ma$$

$$29.0 - 4.9 - 0.03 - T = ma$$

$T = 15.8\text{N}$，$a = 8.3\text{m/s}^2$

施力$\vec{F}$使方塊組向右移動，在何條件下，左方的方塊會維持不向下滑動？



$$a = \frac{F}{M+m}$$

$$N = Ma = \frac{FM}{M+m}$$

左方的方塊會維持不向下滑動

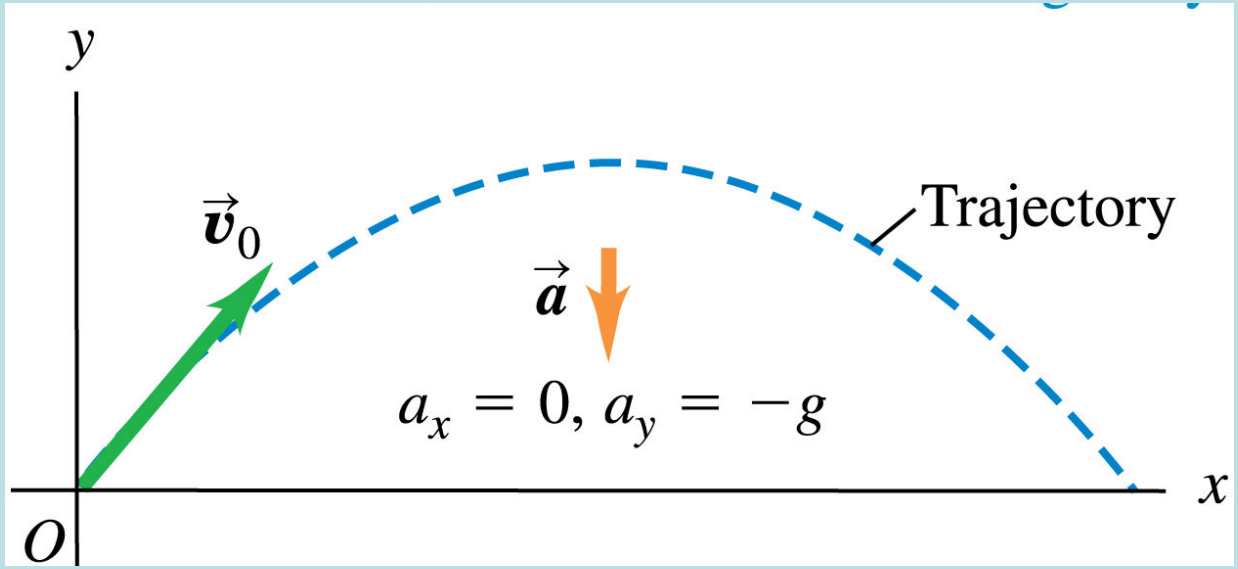
$$f_s = mg$$

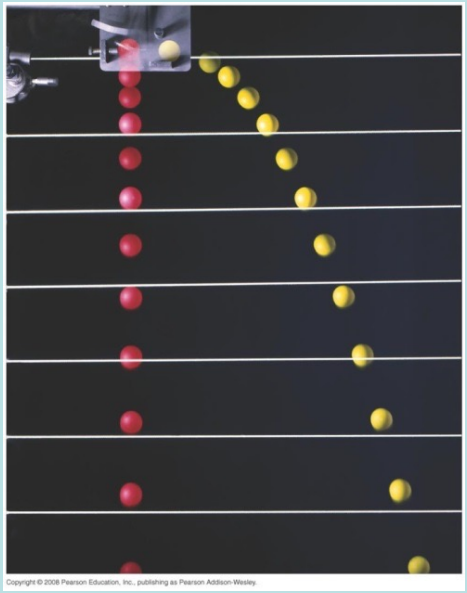
最大靜摩擦力：$N\mu_s$

不滑動條件 $f_s < N\mu_s$

$$mg < \frac{FM}{M+m}\mu_s$$

二維拋體運動





以分量來討論非常方便：

$\vec{F} = m\vec{a} = -mg\hat{j}$

$m\vec{a} = -mg\hat{j}$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

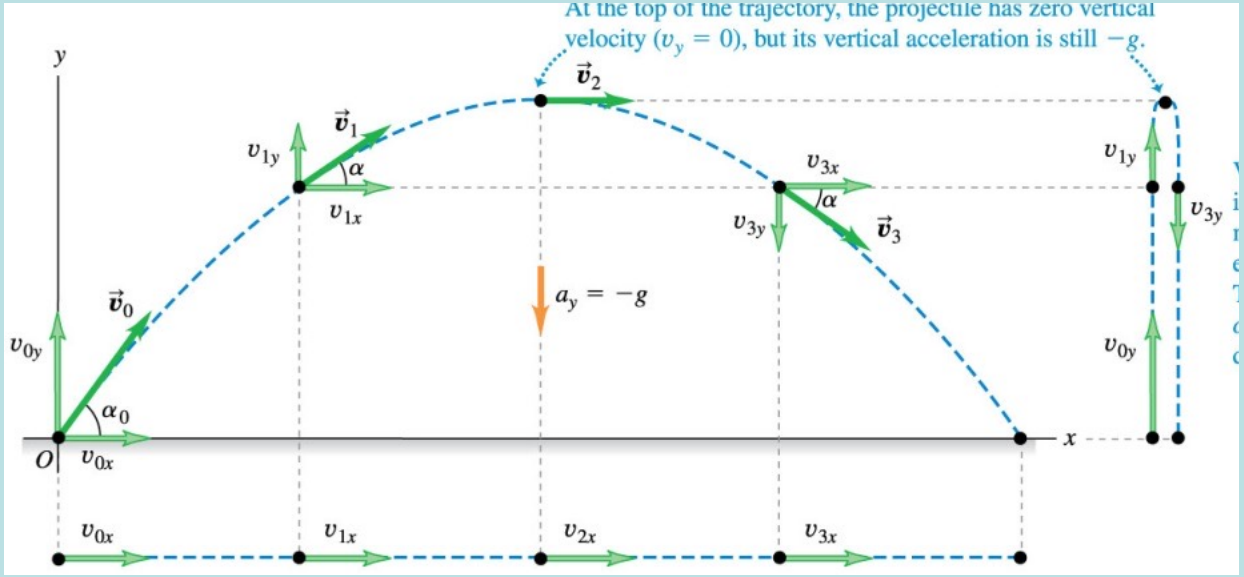
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

垂直與水平方向彼此獨立。因此可以分開求解！

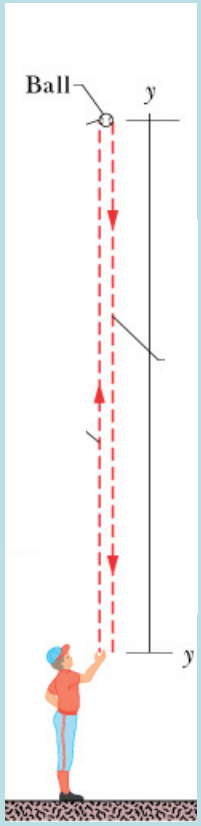
水平方向是等速運動：$\frac{d^2x}{dt^2} = 0$　$v_x = v_{x0}$　$x(t) = v_{x0}t + x_0$



兩者疊加得到拋體運動軌跡：



垂直方向為有初速的自由落體：



$v_y = -gt + v_{y0}$

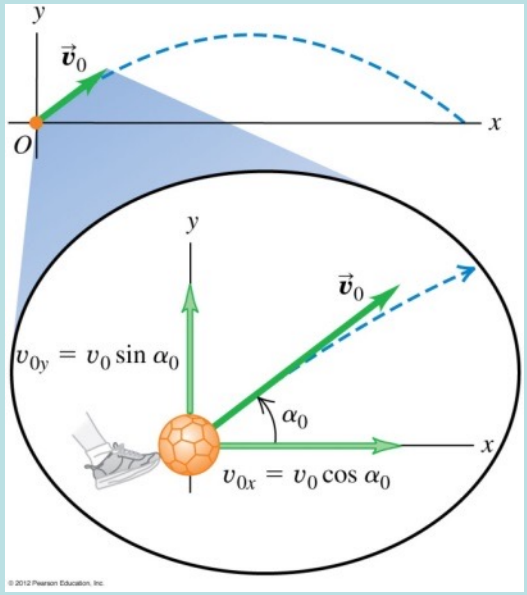
$\frac{d^2y}{dt^2} = -g$　$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{y0}t + y_0$

垂直運動即一自由落體，水平運動即一等速運動。

起始條件：x_0, y_0

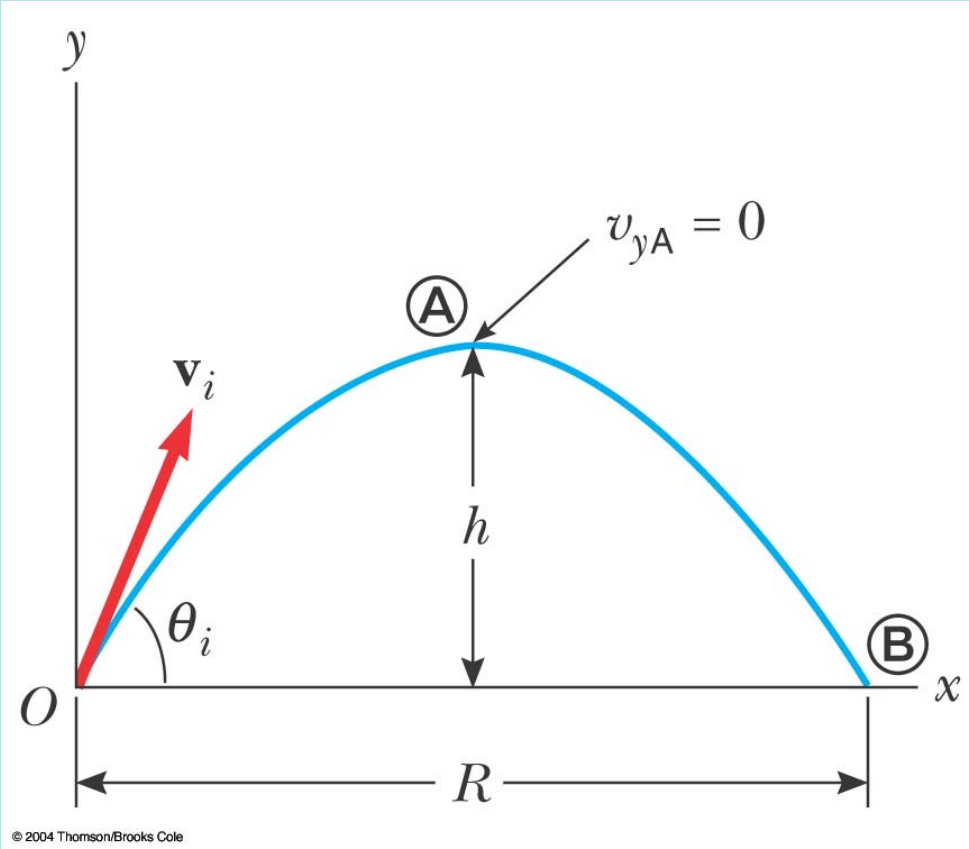
$v_{x0} = v_0 \cos\alpha_0$

$v_{y0} = v_0 \sin\alpha_0$



有了位置函數，所有問題都可以解答：

最高高度與射程 Height and Range



$$x(t) = v_{x0}t + x_0$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{y0}t + y_0$$

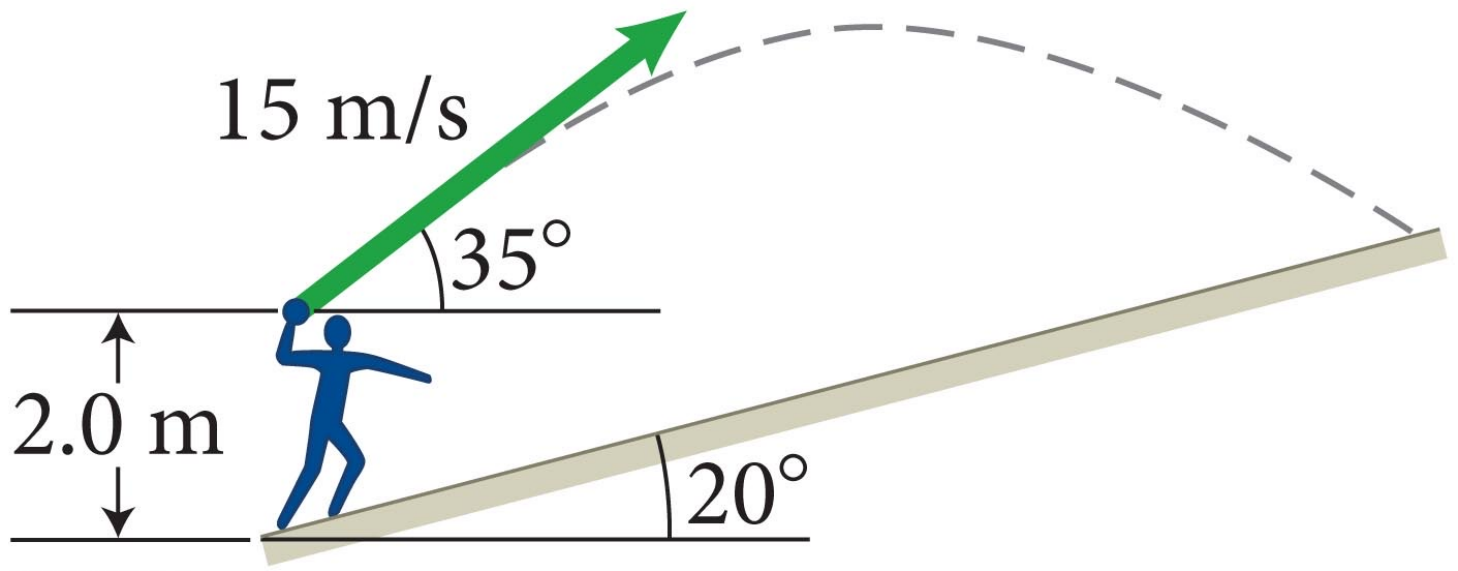
最遠射程發生在 $y = 0$。

最高點發生在 $v_y = 0$。

求出對應時間再代回位置函數。

$$x(t) = v_{x0}t + x_0$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{y0}t + y_0$$



問落地距離。

10.56. The vertical height of the ground rises as the horizontal position moves to the right, according to

$$y_{\text{slope}}(x) = x\tan(\theta_{\text{slope}}) \tag{1}$$

The vertical position of the ball is given by $y(t) = y_{\text{i}} + v_{y,\text{i}}\Delta t + \frac{1}{2}a_y\Delta t^2 = y_{\text{i}} + v_{\text{i}}\sin(\theta)\Delta t - \frac{1}{2}g\Delta t^2$. We wish to relate this to the x direction. Ignoring air resistance the x component of the velocity is constant, so

$$\Delta t = \frac{x}{v_{x,\text{i}}} = \frac{x}{v_{\text{i}}\cos(\theta)}.$$

Inserting this into the equation we obtained from the y direction, we have

$$y(x) = y_{\text{i}} + v_{\text{i}}\sin(\theta)\left(\frac{x}{v_{\text{i}}\cos(\theta)}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_{\text{i}}\cos(\theta)}\right)^2$$

or

$$y(x) = y_{\text{i}} + x\tan(\theta) - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_{\text{i}}\cos(\theta)}\right)^2 \tag{2}$$

The ball will strike the ground when $y(x) = y_{\text{slope}}(x)$. Setting the expressions in equations (1) and (2) equal to each other yields

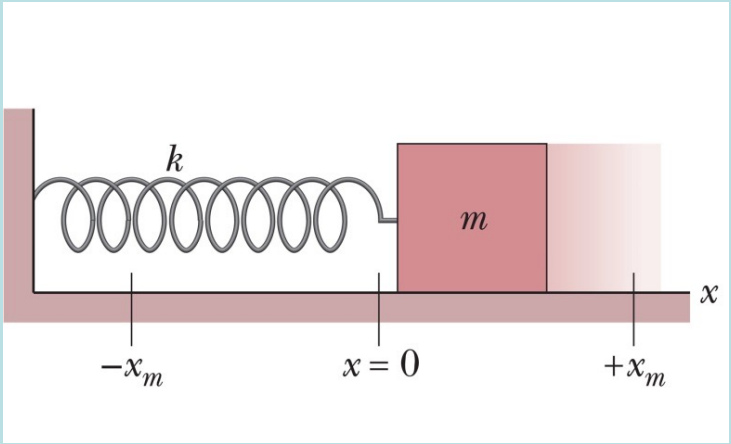
$$\frac{g}{2v_{\text{i}}^2\cos^2(\theta)}x^2 - x(\tan(\theta) - \tan(\theta_{\text{slope}})) - y_{\text{i}} = 0$$

Which can be solved for x using the quadratic formula, to obtain

$$x = -\frac{\cos^2(\theta)}{2g}\left[2v_{\text{i}}^2(\tan(\theta_{\text{slope}}) - \tan(\theta)) - \sqrt{\frac{8gv_{\text{i}}^2}{\cos^2(\theta)} + \left[2v_{\text{i}}^2(\tan(\theta_{\text{slope}}) - \tan(\theta))\right]^2}\right] = 14.6\text{ m}.$$ This is the horizontal distance that the ball travels, but we are asked for the distance d along the incline: $d = \frac{x}{\cos(\theta_{\text{slope}})} = \frac{(14.6\text{ m})}{\cos(20^\circ)} = 16\text{ m}.$

簡諧運動的解

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$



正弦函數與餘弦函數的兩次微分都和負的自己成正比！

因此很容易就找到兩個解 $x_1 = \sin \omega t$ $x_2 = \cos \omega t$

那麼任一線性組合 $x = a \cos \omega t + b \sin \omega t$ 也是解！

我們得到無限多個解！

微分方程式的解需要讓自己挪出足夠的空間，這樣才能滿足起始條件。

$$x = a\cos\omega t + b\sin\omega t$$

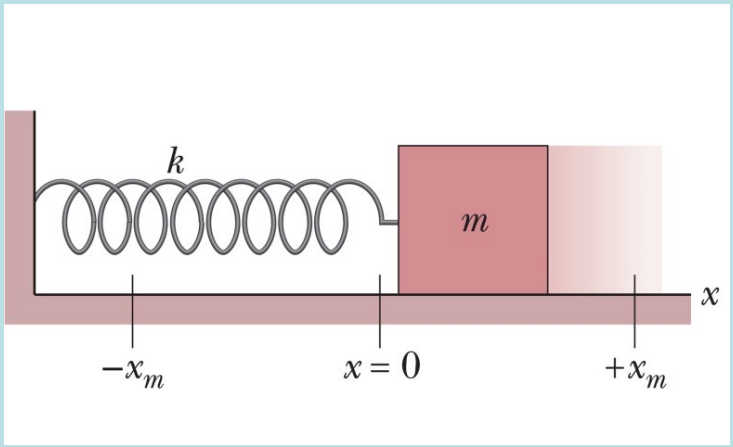
$$v = -\omega a\sin\omega t + \omega b\cos\omega t$$

a, b由起始條件決定

$$x(0) = a = x_0$$

$$v(0) = \omega b = v_0$$

$$b = \frac{v_0}{\omega}$$

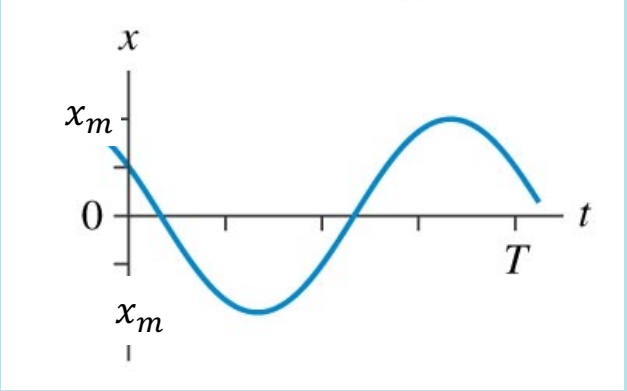


$$x = x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$$

這個函數同時滿足運動方程式以及兩個起始條件，因此是唯一的解！

不用再找了！

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$ 這個式子較適合運動方程式求解。



較容易明瞭其物理意義的表示式是：

$$x = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

這兩個數學式是一樣的，因為：

$$x = x_m \cos(\omega t + \phi) = x_m \cos \phi \cos \omega t - x_m \sin \phi \sin \omega t$$

兩組常數之間的關係：

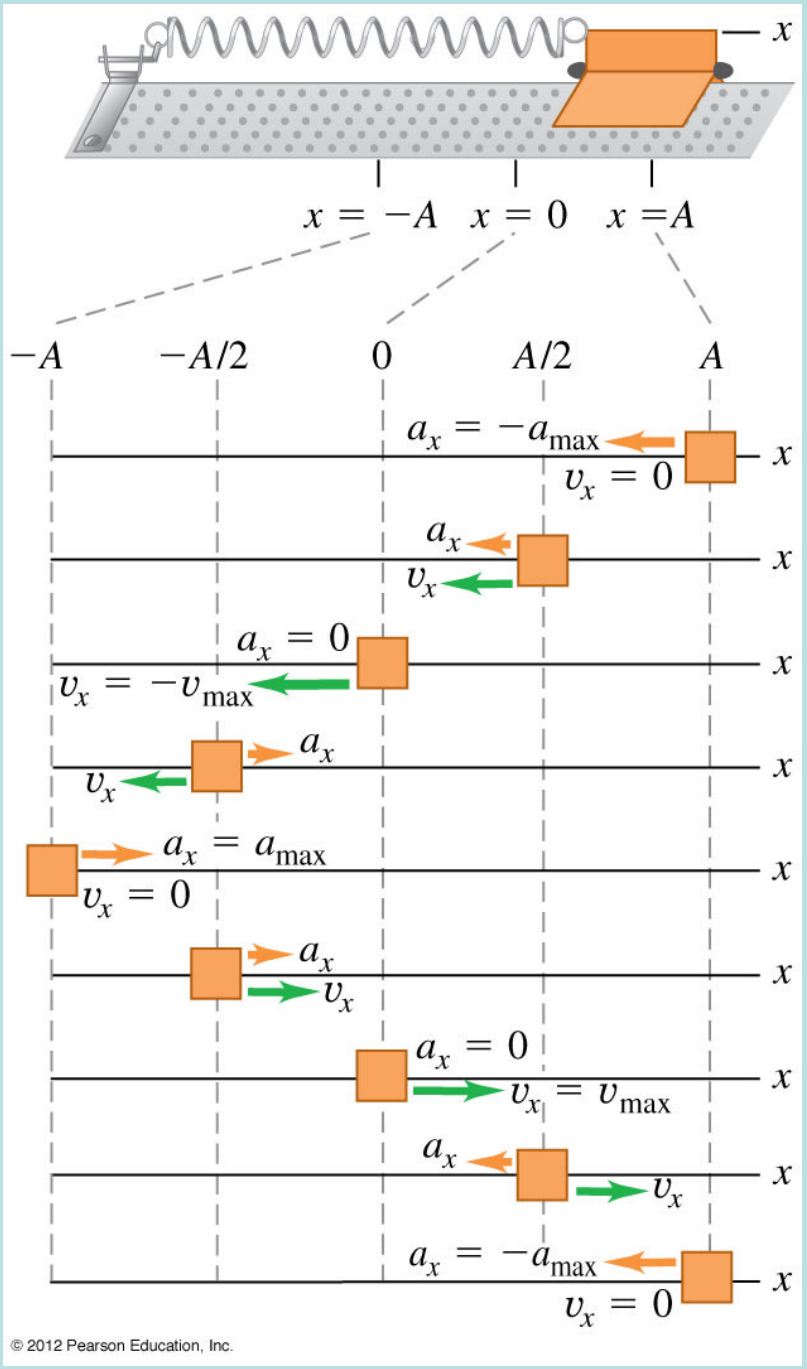
$$x_0 = x_m \cos \phi \, , \frac{v_0}{\omega} = -x_m \sin \phi$$

$$x_m = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$

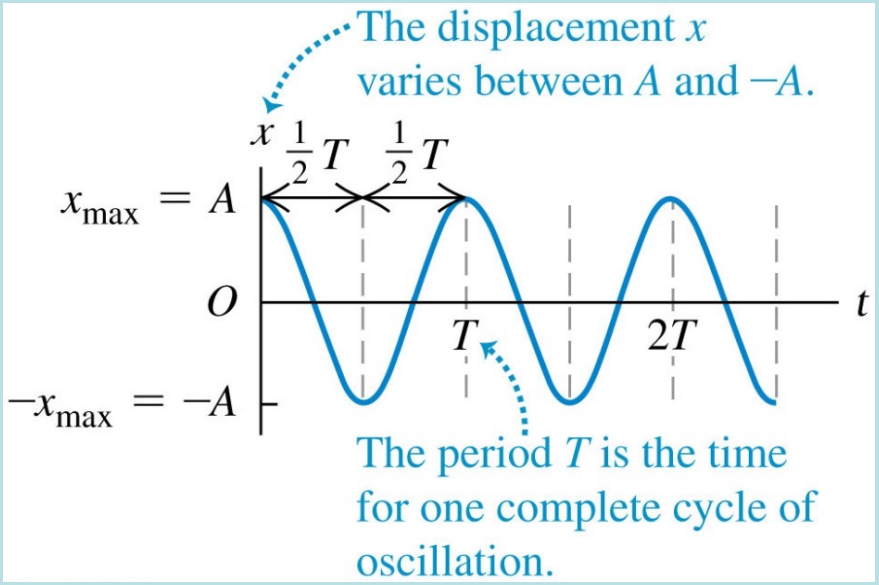
$$\tan \phi = -\frac{v_0}{\omega x_0}$$

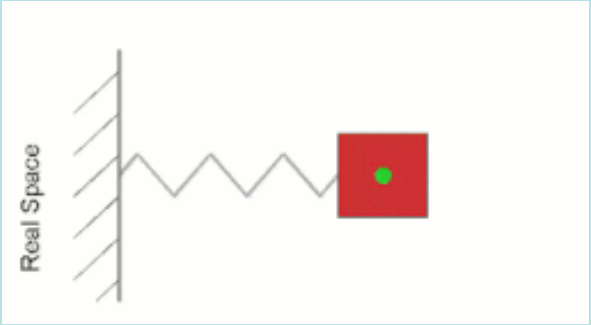
$$x = x_m \cos[\omega(t + t_0)]$$

簡諧運動的解就是時間平移過的一個三角函數！

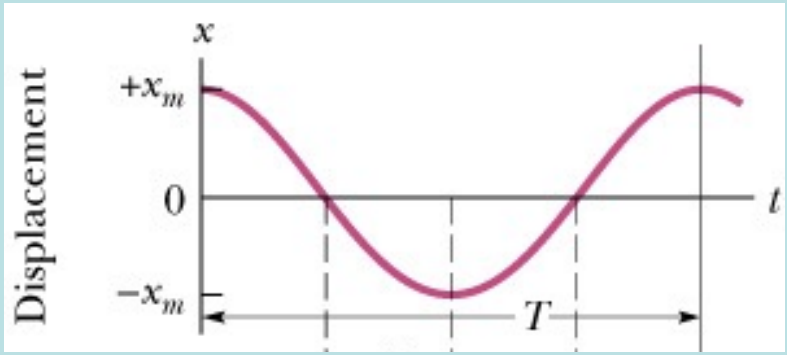


$$x = x_m \cos(\omega t + \phi)$$





$x = x_m \cos(\omega t + \phi)$ 三角函數是一個週期函數。 ω 決定了振盪的週期 T。



$x(t) = x(t+T)$ $\rightarrow \cos(\omega t + \phi) = \cos(\omega t + \omega T + \phi)$

三角函數一個週期後，角度增加2π。 $\omega T = 2\pi$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ω稱為角頻率 Angular Frequency。

簡諧運動的週期 T 等於

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

頻率Frequency: $f = 1/T$ 每秒進行了幾個周期。單位 s^{-1} = Hz。

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

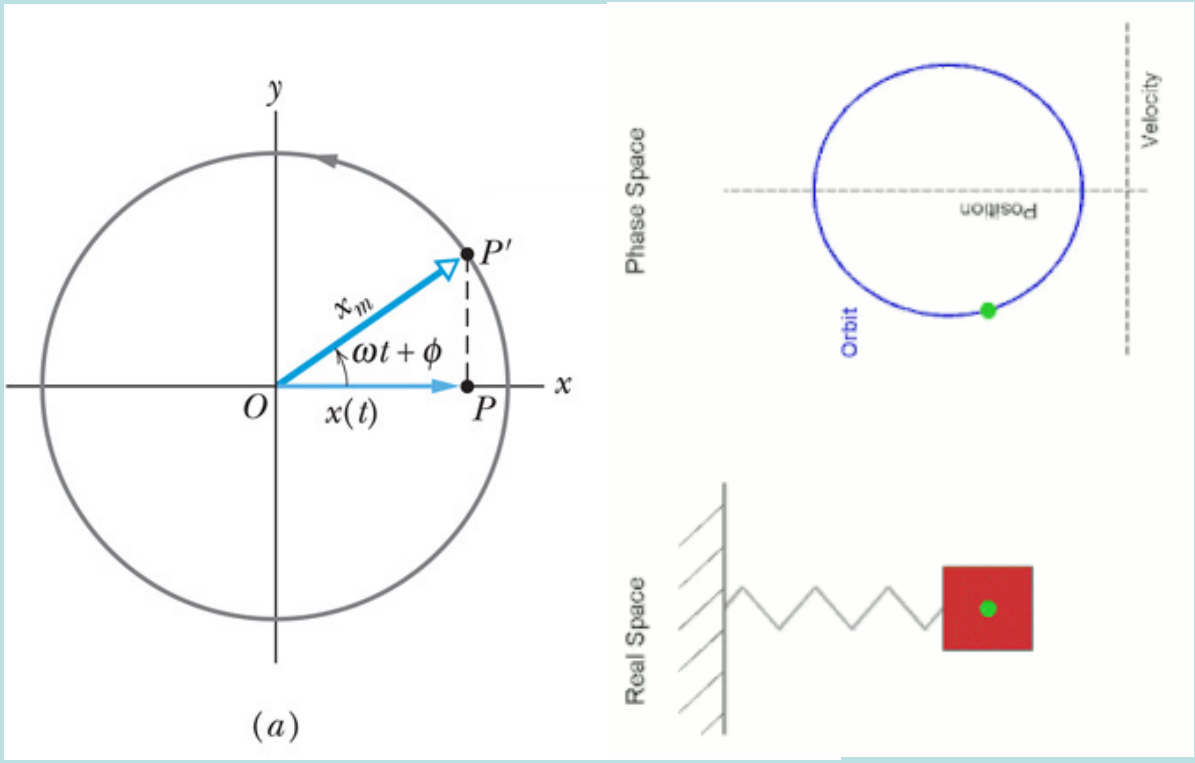
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$x = x_m \cos(\omega t + \phi)$$ $$\omega T = 2\pi$$

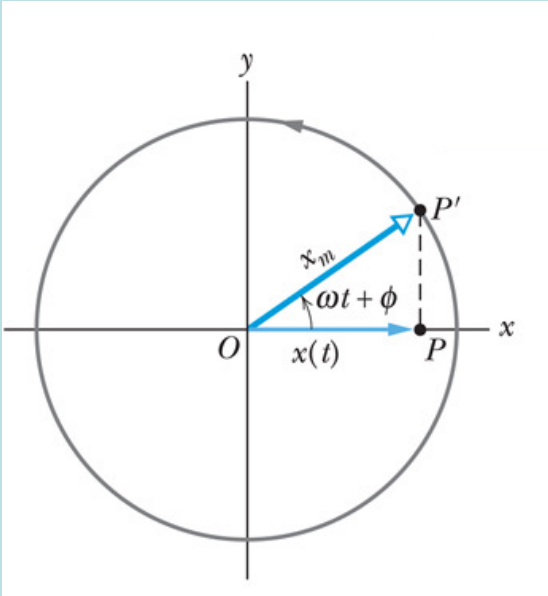
正好是一個半徑為 x_m的 等速圓周運動的水平分量。

此等速圓周運動的速度與加速度的水平分量也好與簡諧運動相等。

一個等速圓周運動位置的水平投影就等於一個簡諧運動。



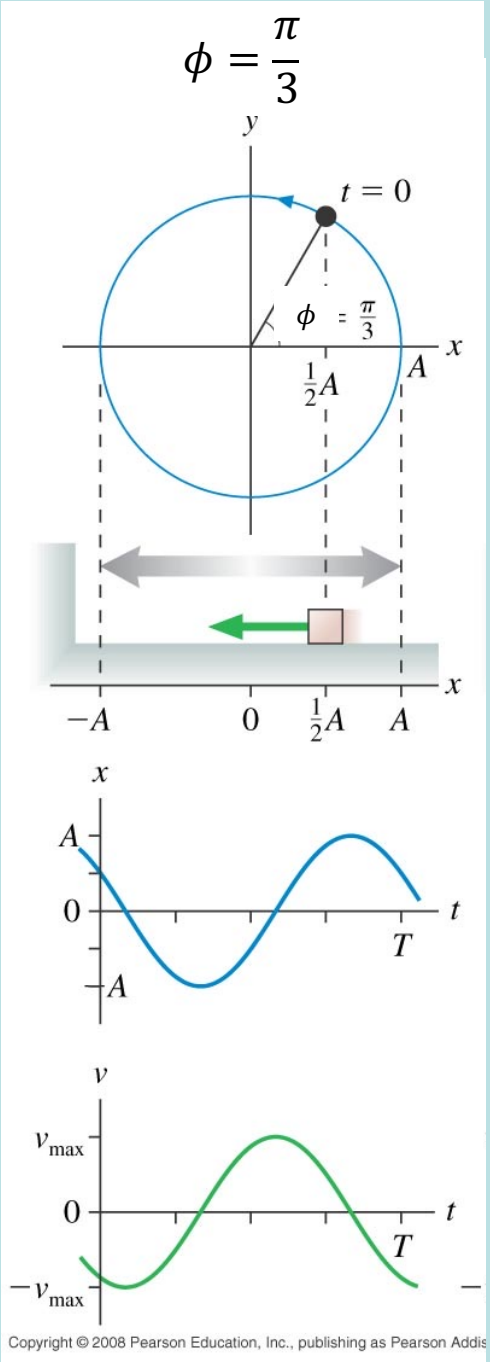
假想圓是一個很好的工具，但不是真的有一個圓！



簡諧運動中的每一位置，會對應圓周上一特定的角度：稱為相角Phase Φ。

簡諧運動的相角是等速增加，以這個意義來說，ω 就是角速度： $\omega t + \phi$

這樣的圖像化思考對許多簡諧運動的計算很有用，



$$x = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

相角是等速增加：$\omega t + \phi$

起始相角就是相常數 ϕ

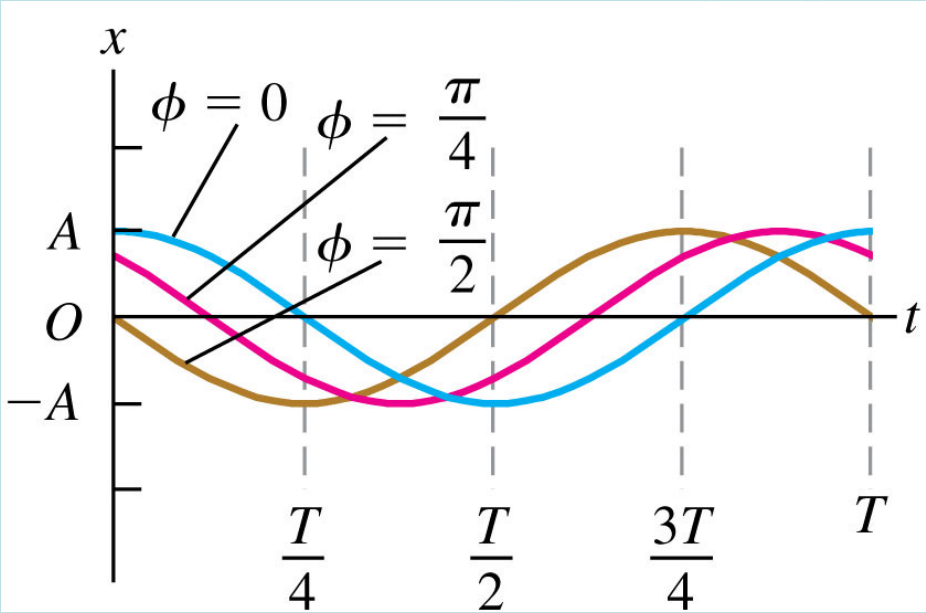
相常數由起始位置與起始速度的比值決定：

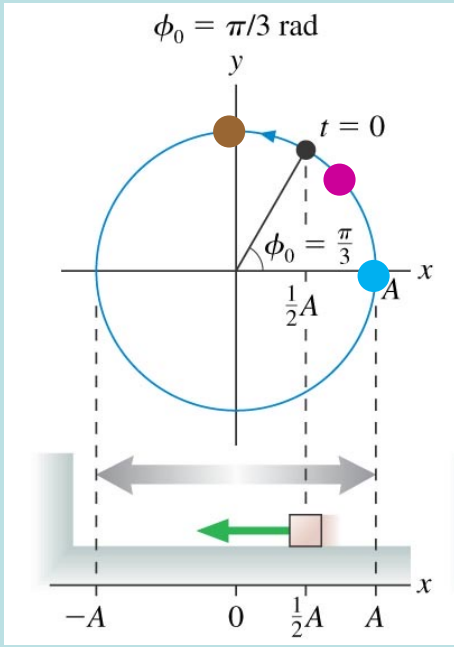
$$\tan\phi = -\frac{v_0}{\omega x_0}$$

左圖的簡諧運動由平衡點與最遠處的中點出發。

$$x = x_m \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}x_m$$

由圖知起始速度不為零。





$\phi = 0$ 是從最大振幅由靜止出發：

$$x = x_m \cos(\omega t)$$

$\phi = \frac{\pi}{2}$ 是從平衡點以最大速度出發：

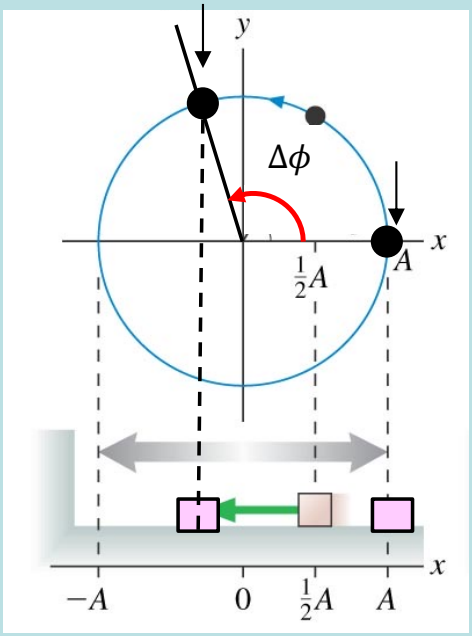
$$x = x_m \sin(\omega t)$$

例如計算從一特定位置移動到另一特定位置所花的時間！

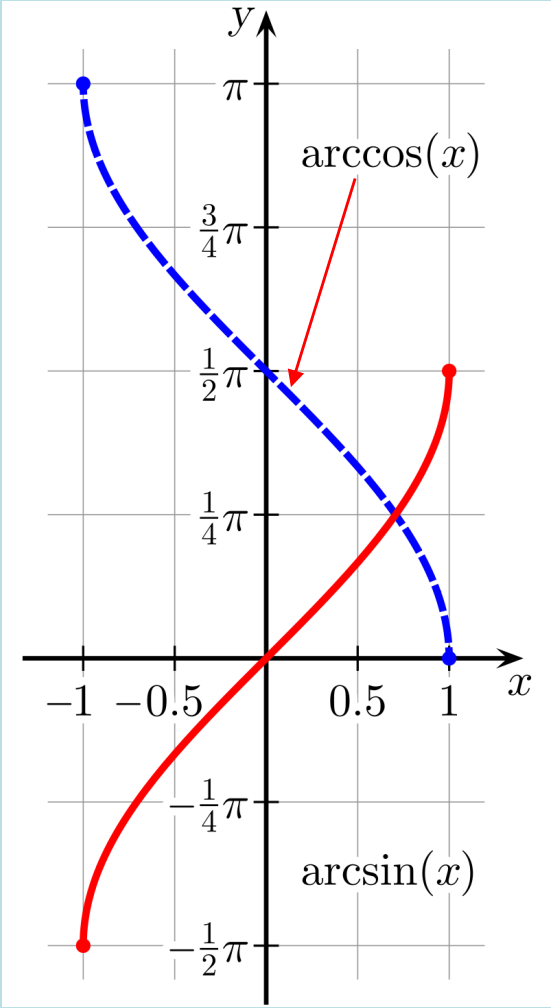
14.66 ••• An object is undergoing SHM with period 0.300 s and amplitude 6.00 cm. At $t = 0$ the object is instantaneously at rest at $x = 6.00$ cm. Calculate the time it takes the object to go from $x = 6.00$ cm to $x = -1.50$ cm.

$\phi = 0$：從最大振幅由靜止出發：

$$x = x_m \cos(\omega t) = 6.0 \cos\left(\frac{2\pi}{0.3} t\right)$$



$$\frac{2\pi}{0.3} t = -\cos^{-1}\frac{1.5}{6.0} \sim 0.6\pi$$



要注意反三角 $\cos^{-1} x$ 函數主值的範圍

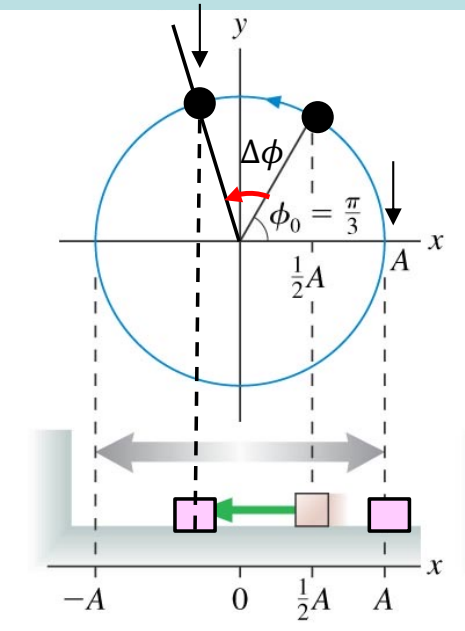
振盪往回的半周期，角度要加π。

計算從一特定位置移動到另一特定位置所花的時間！

先找到前後特定位置對應的相角。

再在假想圓上計算花多少時間可以得到所需的相角差。

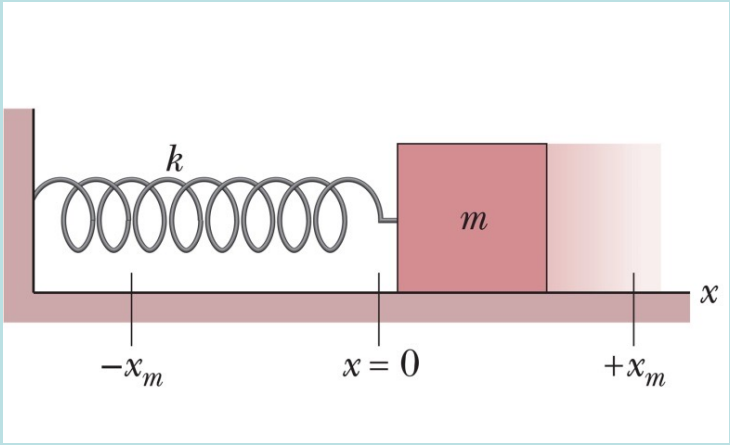
14.66 ••• An object is undergoing SHM with period 0.300 s and amplitude 6.00 cm. At $t = 0$ the object is instantaneously at rest at $x = 6.00$ cm. Calculate the time it takes the object to go from $x = 3.00$ cm to $x = -1.50$ cm.



相角差等於：

$$\Delta\Phi = \cos^{-1}\left(-\frac{1.5}{6.0}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{3.0}{6.0}\right) = 0.6\pi - \frac{1}{3}\pi = 0.27\pi$$

需要時間：$t = \frac{0.27\pi}{\omega}$



$$x = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

一個簡諧運動，有一個特有的內在的振動頻率f！

角頻率ω與振幅及相常數無關，同一個彈簧組，只有一個值。

振幅x_m及相常數ϕ由起始條件決定，

同一個彈簧組，對個別的運動，所取的值可以不同。