普物期中考

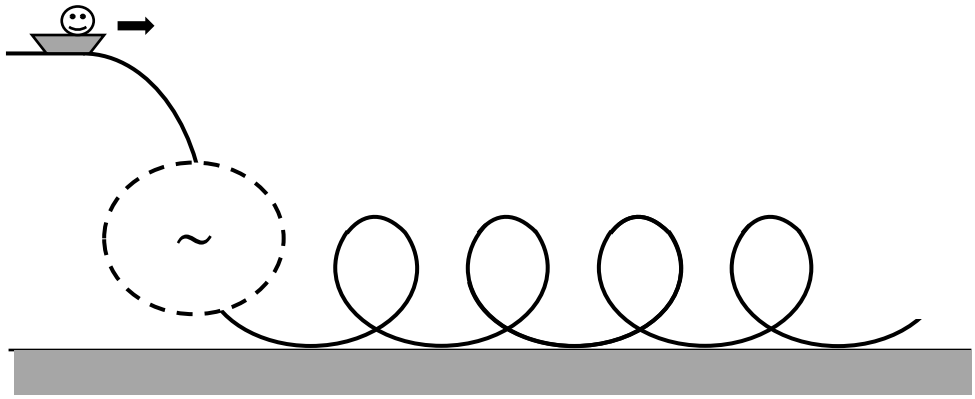
Nov 2026

1. 考慮一有動力的雲霄飛車，進入一段螺旋型的軌道。在此段，軌道繞水平軸旋轉並沿軸移動，列車同時開始加速。以水平軸方向為$\hat{z}$軸，鉛直方向為$\hat{x}$軸，列車的位置可以表示為：

$$x(t) = R\cos\frac{\alpha}{2}t^2, y(t) = R\sin\frac{\alpha}{2}t^2, z(t) = \frac{b}{2}t^2$$

A. 計算在此段軌道中，列車速度向量$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$的三個分量，及加速度向量$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$的三個分量。(10)

B. 速度方向的單位向量，就是軌道的切線方向：$\hat{v} = \frac{1}{|\vec{v}|}(v_x, v_y, v_z)$。寫下$\hat{v}$的表示式。計算加速度沿軌道切線方向的投影：$\vec{a}\cdot\hat{v}$。（這就是在沿軌道運動的加速）。(10)



解答：Differentiating $x(t)$ twice with respect to *t*, we get

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -R\alpha t\sin\frac{\alpha}{2}t^2,$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -R\alpha\sin\frac{\alpha}{2}t^2 - R\alpha^2t^2\cos\frac{\alpha}{2}t^2$$

Differentiating $y(t)$ twice with respect to *t*, we get

$$v_y = \frac{dy}{dt} = R\alpha t\cos\frac{\alpha}{2}t^2,$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = R\alpha\cos\frac{\alpha}{2}t^2 - R\alpha^2t^2\sin\frac{\alpha}{2}t^2$$

Differentiating $z(t)$ twice with respect to *t*, we get

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \beta t,$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \beta$$

因此：$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = \left(-R\alpha t \sin\frac{\alpha}{2}t^2, R\alpha t \cos\frac{\alpha}{2}t^2, \beta t\right)$

$$\vec{a} = \left(-R\alpha \sin\frac{\alpha}{2}t^2 - R\alpha^2 t^2 \cos\frac{\alpha}{2}t^2, R\alpha \cos\frac{\alpha}{2}t^2 - R\alpha^2 t^2 \sin\frac{\alpha}{2}t^2, \beta\right)$$

速度方向的單位向量，就是軌道的切線方向：

$$\hat{v} = \frac{1}{|\vec{v}|}(v_x, v_y, v_z) = \frac{1}{t\sqrt{R^2\alpha^2 + \beta^2}}\left(-R\alpha t \sin\frac{\alpha}{2}t^2, R\alpha t \cos\frac{\alpha}{2}t^2, \beta t\right)$$

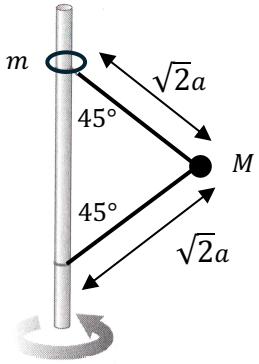
加速度沿軌道切線方向的投影：

$$\vec{a} \cdot \hat{v} = \frac{1}{t\sqrt{R^2\alpha^2 + \beta^2}}[R^2\alpha^2 t + \beta^2 t] = \sqrt{R^2\alpha^2 + \beta^2}$$

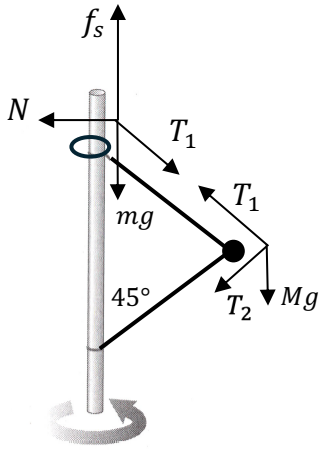
2. 一質量為M的粒子(圖中之圓點)，以兩條等長$\sim\sqrt{2}a$的弦，以下圖方式連結於一垂直的鐵棒上，上方弦(張力T_1)及下方弦(張力T_2)與鐵棒的夾角皆為$45°$。上方弦以一質量為m的圓環套住鐵棒，假設環可以無摩擦地繞鐵棒旋轉，但會受一沿鐵棒方向的靜摩擦力f_s，鐵棒對環也會施一垂直於鐵棒的正向力N。弦與粒子一起持續繞鐵棒以$\omega = \frac{2\pi}{T}$的角速度等速旋轉，且旋轉過程中，弦與粒子保持在一旋轉的垂直平面上。已知所有弦一直維持拉長狀態(張力是朝縮短弦長的方向)。

   A. 計算上方弦的張力T_1。(10)

   B. 計算環所受沿鐵棒方向的靜摩擦力f_s。(10)



解答：



每一個粒子的每一個方向都有一個牛頓第二定律：粒子的水平方向：

$$T_1\frac{1}{\sqrt{2}}+T_2\frac{1}{\sqrt{2}}=Ma\omega^2$$

上方粒子的垂直方向：

$$T_1\frac{1}{\sqrt{2}}-T_2\frac{1}{\sqrt{2}}-Mg=0$$

由此式即可解出兩粒子間的弦的張力$T_1=\sqrt{2}Mg+\sqrt{2}Ma\omega^2$。

環的水平方向：

$$T_1\frac{1}{\sqrt{2}}=N$$

由此式可以寫下$N=mg+Ma\omega^2$。

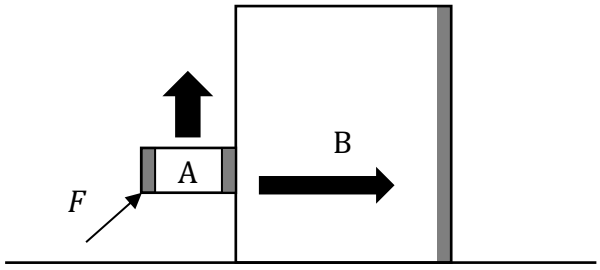
下方粒子的垂直方向：

$$f_s-T_1\frac{1}{\sqrt{2}}-mg=0$$

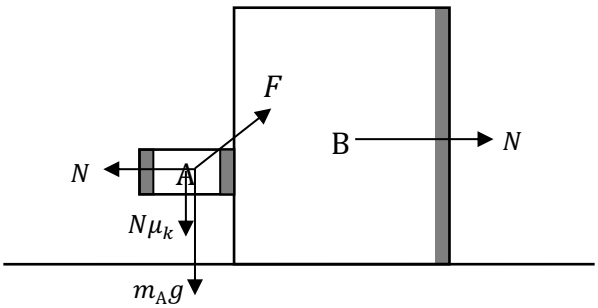
$$f_s = Mg + Ma\omega^2 + mg$$

3. 在水平桌面上有一方塊 B（質量$m_{\mathrm{B}} = 5m$），左邊接觸一懸空方塊 A（質量$m_{\mathrm{A}} = m$）。水平桌面與方塊之間的摩擦力可以忽略，方塊 A 與方塊 B 之間的接觸面的動摩擦係數為$\mu_k = 0.2$。若以大小為F的力，以與水平夾$45°$角的方向施於方塊 A 的左邊，兩個方塊會一起在水平面上加速運動$a_{A\parallel} = a_{B\parallel}$，同時方塊 A 相對於方塊 B 向上以$a_{A\perp}$加速移動，如圖所示。方塊 A 與方塊 B 之間的接觸面的正向力設為N。

   計算N、方塊 A 的垂直加速度$a_{A\perp}$、及水平加速度$a_{A\parallel}$。以上述代號m, F, g作答。(20) 提示：除了垂直的動摩擦與水平的N有關，但水平與垂直方向的加速可以分開考慮。



解答：



$$a_{A\parallel} = a_{B\parallel}$$

方塊 A 的水平方向運動方程式：

$$F\frac{1}{\sqrt{2}} - N = m_{\mathrm{A}} a_{A\parallel}$$

方塊 A 的垂直方向運動方程式：

$$F\frac{1}{\sqrt{2}} - m_{\mathrm{A}} g - N\mu_k = m_{\mathrm{A}} a_{A\perp}$$

方塊 B 的水平受力等於其與方塊 A 之間的接觸面的正向力，方塊 B 的水平方向運動方程式:

$$N = m_{\mathrm{B}} a_{B\parallel} = m_{\mathrm{B}} a_{A\parallel}$$

將第三式代入第一式：

$$F\frac{1}{\sqrt{2}} = (m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}) a_{A\parallel}$$

$$a_{A\parallel} = \frac{F}{6\sqrt{2} m_{\mathrm{A}}}$$

$$N = \frac{5}{6}\frac{F}{\sqrt{2}}$$

代入第二式：

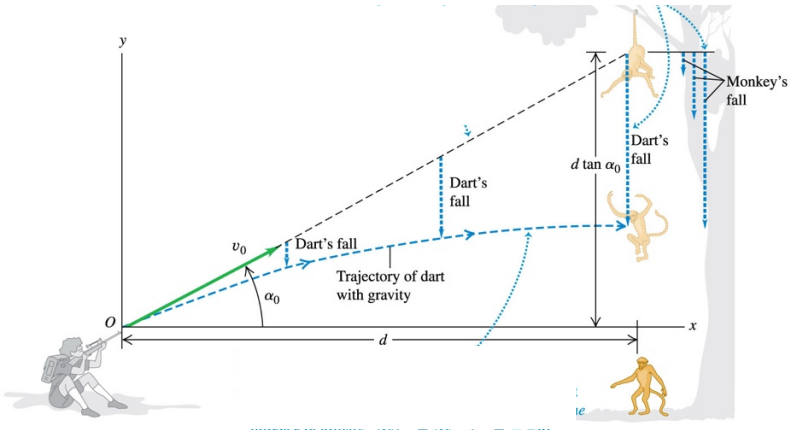
$$F\frac{1}{\sqrt{2}} - m_{\mathrm{A}} g - \frac{m_{\mathrm{B}}}{(m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}})} F\frac{1}{\sqrt{2}}\mu_k = F\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}} - m_{\mathrm{B}}\mu_k}{(m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}})} - m_{\mathrm{A}} g = m_{\mathrm{A}} a_{A\perp}$$

$$a_{A\perp} = \frac{F}{\sqrt{2}}\frac{5}{m_{\mathrm{A}} 6} - g$$

4. 上課提過一個小孩瞄準樹上猴子，射出一拋體的例子。小孩與樹的水平距離為d，猴子在樹上的高度為$d/\sqrt{3}$。小孩以初速v，與水平夾角$\alpha_0 = 30°$的方向，對準樹上猴子發射一拋體，猴子在拋體發射當下立即鬆手，以自由落體下墜。假設空氣阻力，可以忽略，已知拋體一定會射中目標。

   A. 計算拋體擊中目標的時間。(10)

   B. 計算拋體擊中目標時的高度距地面高度。如果要確保在猴子落地前擊中，拋體的初速v必須滿足什麼條件？以上皆以v, d, g表示。 (10)



解答：水平方向，拋體以等速移動，擊中目標時$t = \frac{d}{\sqrt{3}v/2}$。此時目標的高度為

$$h = \frac{d}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{d}{\sqrt{3}} - g\frac{2d^2}{3v^2}$$

此高度要大於零：

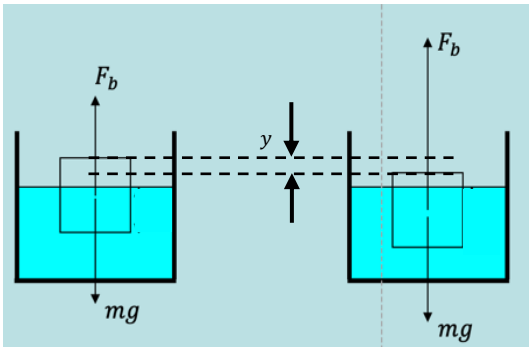
$$v^2 > \frac{2gd}{\sqrt{3}}$$

$$v > \frac{\sqrt{2gd}}{\sqrt[4]{3}}$$

5. 一個木塊浮在水面上，將未施外力時的位置設為平衡點，如圖左。木塊可以因被施力下壓或反彈上升，以下壓時的低於平衡點的高度變化為$+y$，反彈高於平衡點的高度為$-y$，也就是以鉛直向下為$+y$方向，如圖右。課堂上已介紹，此方塊（以平衡點為中點）之上下振動為一簡諧運動：

$$y = y_m \cos(\omega t + \phi)$$

已知周期為1.2 s。現在施力將木塊下壓0.10 m後（$y = 0.10\text{m}$）自靜止釋放：$\phi = 0$。



A. 當木塊向上彈高至$y = 0.10\frac{1}{\sqrt{2}}$~0.07 m的時間起算，下一次又到達$y =$ 0.07 m，此過程($y = 0.07$ m $\rightarrow y = 0.07$ m)經過多少時間 s？(15)

B. 當方塊到達$y = 0.07$ m時，移動速率是多少 m/s？提示：速率是位置微分。(10)

解答：

A. 因為是自靜止釋放，$\phi = 0$，$y = y_m \cos \omega t$，位移$y = 0.07$ m處的相角的餘弦為$\frac{0.07}{0.10} = \frac{1}{\sqrt{2}}$，所以是$45^\circ$，經過兩次平衡點後緊接著到達$y = 0.07$ m，所以相角是315°，相角總變化為270°需時$T \cdot \frac{270}{360} = 0.9$ s。

B. 速度為位移的微分$v = \frac{dy}{dt} = \omega y_m \sin \omega t$，在此$\omega = \frac{2\pi}{T}$~$5.0\ \mathrm{s}^{-1}$。在位移$y = 0.05$ m處的相角的餘弦為60°：

$$v = \omega y_m \sin 45^\circ = 0.1 \cdot 5.0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \sim 0.35\ \mathrm{m/s}$$