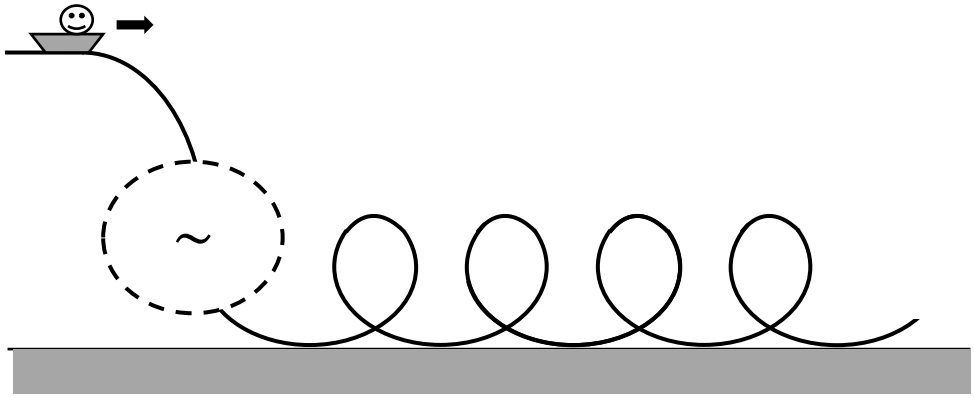
習題四練習用

1. 考慮一有動力的雲霄飛車，進入一段螺旋型的軌道。在此段，軌道繞水平軸旋轉，同時列車開始加速。以水平軸方向為$\hat{z}$軸，鉛直方向為$\hat{x}$軸，列車的位置可以表示為：$x(t) = R\cos\alpha t^2$，$y(t) = R\sin\alpha t^2$，$z(t) = \frac{b}{2}t^2$。

   A. 計算在此段軌道中，列車速度向量$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$的三個分量，及加速度向量$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$的三個分量。(15)

   B. 當列車軌跡投影於$x-y$平面上時(也就是忽略z座標)，平面軌跡$(R\cos\alpha t^2, R\sin\alpha t^2)$作等半徑圓周旋轉，而弧角加速增加。此平面軌跡的加速度向量(a_x, a_y)沿軌跡的切線方向的分量是多少？(10) 垂直切線方向的分量就對應到此時的向心加速度(這不需回答)。

   提示：軌跡切線方向即$x-y$平面上的速度方向$(\hat{v}_x, \hat{v}_y)$，沿軌跡切線方向的分量即二維的加速度向量(a_x, a_y)與速度方向單位向量的內積：$a_x\hat{v}_x + a_y\hat{v}_y$。



解答：Differentiating $x(t)$ twice with respect to *t*, we get

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -2R\alpha t\sin\alpha t^2,$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -2R\alpha\sin\alpha t^2 - 4R\alpha^2 t^2\cos\alpha t^2$$

Differentiating $y(t)$ twice with respect to *t*, we get

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 2R\alpha t\cos\alpha t^2,$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = 2R\alpha\cos\alpha t^2 - 4R\alpha^2 t^2\sin\alpha t^2$$

Differentiating $z(t)$ twice with respect to *t*, we get

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \beta t,$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \beta$$

二維投影速度方向單位向量：$(\hat{v}_x, \hat{v}_y) = (-\sin\alpha t^2, \cos\alpha t^2)$

沿軌道方向的分量即：$a_x\hat{v}_x + a_y\hat{v}_y$

$= 2R\alpha(\sin^2\alpha t^2 + \cos^2\alpha t^2) - 4R\alpha^2 t^2(-\sin\alpha t^2\cos\alpha t^2 + \cos\alpha t^2\sin\alpha t^2)$

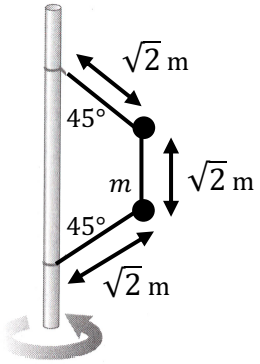
$= 2R\alpha$

投影於$x-y$平面，列車為加速圓周運動，很明顯加速度向量$\vec{a}$投影於$x-y$平面後可以分解為：$2R\alpha\hat{v} - 4R\alpha^2 t^2\hat{r}$，第一項即是上述沿軌道方向的分量，第二項即垂直軌道方向的向心加速度。

2. 一質量為1.0 kg的粒子(圖中上方之圓點)，及一質量為m的粒子(圖中下方之圓點)，以三條等長~$\sqrt{2}$ m的弦，以下圖方式連結於一垂直的鐵棒上。可以選擇m，使弦與粒子一起持續繞鐵棒以~1.0 s的週期等速旋轉，且旋轉過程中，弦與粒子保持在一旋轉的垂直平面上。已知所有弦一直維持拉長狀態(弦有彈力，因此弦對粒子的施力是朝縮短弦長的方向)。上方弦與鐵棒的夾角為45°，下方弦與鐵棒的夾角亦為45°。從上而下，設弦的張力分別為$T_{1,2,3}$。

A. 計算兩粒子間的弦的張力T_2，(15)

B. 以及質量m的大小。(10)



解答：

每一個粒子的每一個方向都有一個牛頓第二定律：上方粒子的水平方向：

$$T_1\frac{1}{\sqrt{2}}=1.0\frac{\left(\frac{2\pi\cdot 1}{1.0}\right)^2}{1.0}$$

由此式即可解出$T_1=4\sqrt{2}\pi^2$。

上方粒子的垂直方向：

$$T_1\frac{1}{\sqrt{2}}-T_2-1.0\,g=0$$

由此式即可解出兩粒子間的弦的張力$T_2=4\pi^2-9.8$。

下方粒子的水平方向：

$$T_3\frac{1}{\sqrt{2}}=m\frac{\left(\frac{2\pi\cdot 1.0}{1}\right)^2}{1.0}$$

由此式可以寫下$T_3=m4\sqrt{2}\pi^2$。

下方粒子的垂直方向：

$$T_2-T_3\frac{1}{\sqrt{2}}-mg=0$$

$$4\pi^2-9.8-m4\pi^2-mg=0$$

$$m=\frac{4\pi^2-9.8}{4\pi^2+9.8}\sim 0.6\text{ kg}$$

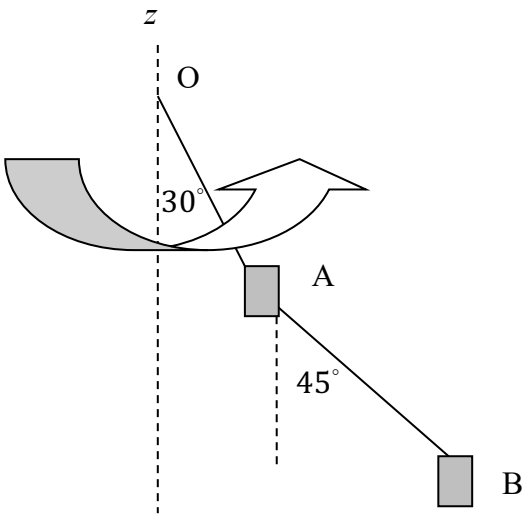
3. 有A,B兩個方塊，方塊A質量為M_A（尚未知），方塊B質量為$M_{\mathrm{B}}=1.0\mathrm{kg}$。O點固定於垂直的z軸上，而方塊A以一支架連接於O點，方塊B又以一同樣支架連接於方塊A（如圖所示）。支架與方塊及O點的連接無摩擦，所以支架可

以自由改變方向，但兩支架的長度 l（尚未知）相等且保持固定，質量可以忽略。使A,B兩方塊及支架以相同角速度繞 z 軸旋轉，週期為0.5π秒，即角速度$\omega = 4.0\ \mathrm{s}^{-1}$。旋轉時O,A,B三點及支架一直保持在通過$z$軸的鉛直平面上。此時觀察到OA間支架與垂直線的夾角為$\theta = 30°$，AB間支架與垂直線的夾角為$\phi = 45°$。向心加速度公式為：$a = r\omega^2$。

A. 分析方塊B的受力，求支架AB對方塊B的張力T是多少N。(8)

B. 由方塊B向心加速度，計算支架的長度l是多少m。
提示：別忘了支架OA對旋轉半徑的貢獻。 (7)

C. 設OA支架對A的施力為S，分析方塊A的受力，求M_A是多少kg。(10)
$\sqrt{3}\sim 1.7, \sqrt{2}\sim 1.4$。



解答：

A. 拉力T在垂直方向的投影必須正好抵消B所受的重力：$T\frac{\sqrt{2}}{2} = M_B g$，$T = \sqrt{2}M_B g = 13.9$ N。

B. 重力無水平分量，因此拉力T在水平方向的分量，必須等於向心加速度乘上質量，

$$T\frac{\sqrt{2}}{2} = M_B\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\right)l\omega^2 = 19.36l$$

$$l = 0.5\ \mathrm{m}$$

A. 設OA支架對A的施力為S，A垂直方向的總受力為零：

$$S\frac{\sqrt{3}}{2} = M_A g + T\frac{\sqrt{2}}{2} = M_A g + M_B g$$

水平方向的總受力必須正好等於向心加速度乘上質量：

$$S\frac{1}{2} - T\frac{\sqrt{2}}{2} = M_A \frac{l}{2}\omega^2$$

$$S\frac{1}{2} = M_A \frac{l}{2}\omega^2 + M_B g$$

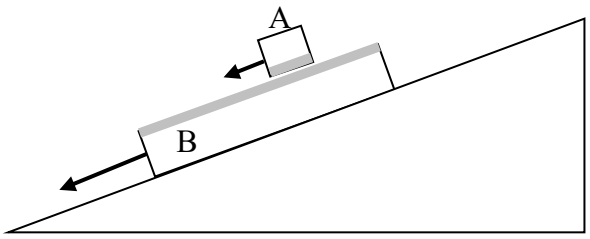
由此二式削去S可得：

$$M_A g + M_B g = M_A \frac{l\sqrt{3}}{2}\omega^2 + \sqrt{3}M_B g$$

$$9.8M_A + 9.8 = 6.9M_A + 17.0$$

$$M_A = 2.5 \text{ kg}$$

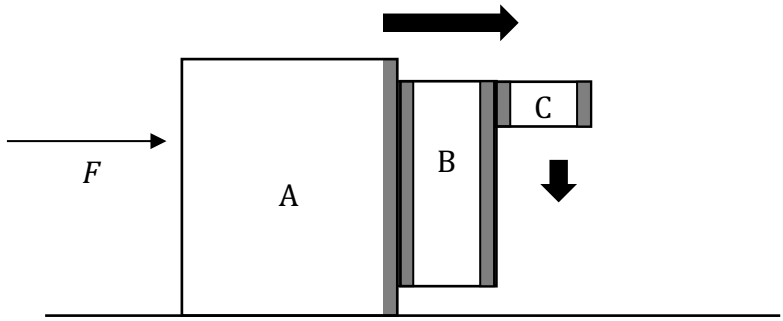
4. 將一個質量為m_1的方塊 A 置於一質量為$m_2(m_1 < m_2)$的厚板 B 上，再整個放置於一斜面上，如圖所示。假設方塊 A 與厚板 B 之間接觸面的動摩擦係數為μ_k，而厚板 B 與斜面間的摩擦可以忽略。斜面的斜角為θ。給 B 一個起始速度下滑之後，因 A 下滑速度較慢，因此 A 相對於 B 向上移動。在出發後很短的瞬間，A 與 B 相對於斜面的加速度各是多少？(25)



解答：以平行斜面為 x，垂直斜面為 y。設方塊 A 與厚板 B 間接觸面的正向力為N。N即等於 A 的重力在 y 方向的分力：$N = m_1 g\cos\theta$，因為 A 相對於 B 向上移動，A 所受的動摩擦力是向下：x 方向受力為$m_1 g\sin\theta + \mu_k m_1 g\cos\theta$，因此 A 加速度等於：$g\sin\theta + \mu_k g\cos\theta$。

因反作用力與作用力相等，因此沿斜面方向，B 也會受到來自 A 相同大小、方向相反的動摩擦力，在 y 方向總受力：$m_2 g \sin\theta - \mu_k m_1 g \cos\theta$。因此 B 加速度等於：$g \sin\theta - \frac{m_1}{m_2}\mu_k g \cos\theta$。

5. 在水平桌面上有一方塊 A（質量m_{A}），右邊接觸一方塊 B（質量m_{B}），B 的右邊再接觸一方塊 C（質量m_{C}）。水平桌面與方塊之間的摩擦力可以忽略，方塊 B 與方塊 C 之間的接觸面的動摩擦係數為μ_k。已知，若以F的力水平施於方塊 A 的左邊，三個方塊會一起在水平面上加速運動，而方塊 B 相對於方塊 A 是靜止的，方塊 C 相對於方塊 B 是向下移動的，如圖所示。問方塊的水平加速度是多少？方塊 B 與方塊 C 之間的接觸面的正向力是多少？方塊 C 的垂直加速度是多少？方塊 A 與方塊 B 之間的接觸面的摩擦力是多少？以上述代號作答。(25)



解答：方塊的水平加速度

$$a = \frac{F}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}} + m_{\mathrm{C}}}$$

方塊 B 的水平受力等於其與方塊 C 之間的接觸面的正向力，因此此正向力等於

$$N = m_{\mathrm{C}} a = \frac{m_{\mathrm{C}} F}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}} + m_{\mathrm{C}}}$$

由此正向力可以算出方塊 BC 間接觸面的動摩擦力：$N\mu_k$。

方塊 C 在垂直方向受此摩擦力與重力，因此垂直加速度為：

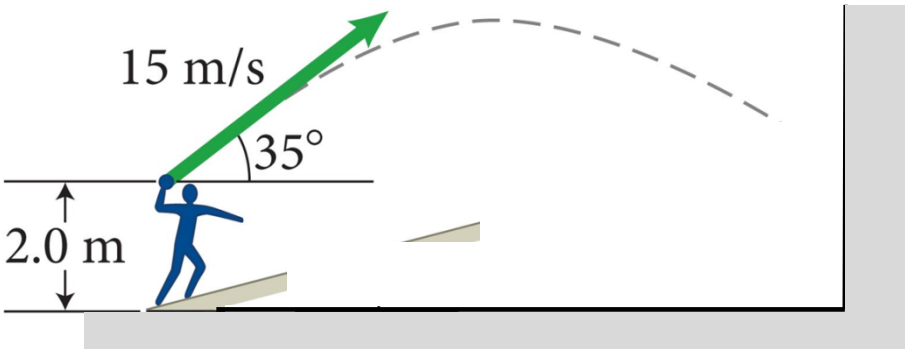
$$g-\frac{N\mu_k}{m_{\mathrm{C}}}=g-\frac{F\mu_k}{m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}+m_{\mathrm{C}}}$$

方塊 B 在垂直方向沒有移動，因此力抵消。方塊 AB 間接觸面的靜摩擦力，等於重力，加方塊 BC 間接觸面的動摩擦力：

$$m_{\mathrm{B}}g+\frac{m_{\mathrm{C}}F\mu_k}{m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}+m_{\mathrm{C}}}$$

6. 考慮在地表以初速15m/s，與水平夾角35°，拋出一球，拋出時球的高度為2.0m。不考慮阻力，距離出發點水平距離20m處有一垂直牆面。當球撞擊牆面時，計算離地高度是多少m，此時速率大小是多少？

$\cos 35°\sim 0.8, \sin 35°\sim 0.6$。(20)



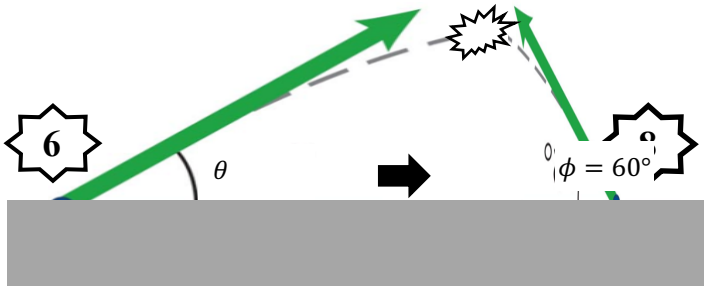
解答：水平與垂直的初速分別為：$v_{x0}=15\cos 35°\sim 12\mathrm{m/s}$，$v_{y0}=15\sin 35°\sim 9.0\mathrm{m/s}$，因為水平方向為等速運動，當球撞擊牆面時，時間為$t=\frac{20}{12}\sim 1.67\mathrm{s}$，因此高度為：$h=2.0+9.0\cdot t-\frac{1}{2}gt^2\sim 3.4\mathrm{m}$。此時水平與垂直的速度分量分別為：$v_x=12\mathrm{m/s}$，$v_y=9.0\mathrm{m/s}-gt=-7.4\mathrm{m/s}$，$v\sim 14.1\mathrm{m/s}$。

7. 考慮在某軍事演習場，第六師的軍隊與第八師的軍隊駐紮相距D進行對抗，演習場地面為水平。第六師派出一組前鋒突擊部隊，快速前進接近第八師。第八師以初速v_1，與水平夾角$\phi=60°$，發射一迫擊砲彈，攻擊該突擊的前鋒部隊。第六師已事先預料到第八師會如此攻擊，只待迫擊砲彈發射，就從駐地的砲兵，發射一榴彈砲攔截。為簡化計算，假設此榴彈砲彈幾乎與迫擊

砲同時發射，初速為$v_2 = 2v_1$。假設空氣阻力，可以忽略，迫擊砲彈及榴彈砲彈都沒有自己的動力。兩個砲彈的初速度、兩軍的間距以及鉛直方向都在同一平面上。

A. 若要成功攔截，榴彈砲的水平夾角必須是θ，計算$\sin\theta$。(10)

B. 設兩砲彈發射時時間為零，計算攔截時的時間t。以上皆以v_1, D表示。若無計算機則以爲化簡前的表示式回答即可。(15)



解答：若要成功攔截，兩砲彈必須於某時具有相同的高度：

$$v_1 \sin 60° \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 = v_2 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

因此$v_1 \sin 60° = v_2 \sin\theta$，

$$\sin\theta \sim \frac{v_1}{v_2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

若要成功攔截，兩砲彈在此時的水平射程和必需等於兩軍距離：

$$D = v_1 \cos 60° \cdot t + 2v_1 \cos\theta \cdot t = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{8}\right) v_1 t \sim 0.95 v_1 t$$

$$t = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{8}\right)^{-1} \frac{D}{v_1} \sim 1.05 \frac{D}{v_1}$$

8. 一個方塊，繫於水平放置的彈簧上，彈簧另一端固定。此方塊在水平無摩擦的平面上作簡諧運動，已知振幅為10 cm，周期為1.25 s。以平衡點的位置設

為原點：$x = 0$。問在此簡諧運動中，從$x = -5.0$ cm移動到$x = 5.0$ cm，最短需要時間多少 s？(20)

解答：位移$x = 5.0$ cm處的相角為$\pm\cos^{-1}\left(\frac{5}{10}\right) = \pm 60°$，位移$x = -5.0$ cm處的相角為$180° \pm \cos^{-1}\left(\frac{5}{10}\right) = 180° \pm 60° = 240° \text{or} 120°$。從位移$x = -5.0$ cm移動到位移$x = 5.0$ cm，最短時間事發生在相角由$240°$ 增加到$-60°$ 即$300°$ 。相角差為$60°$，需時$T \times \frac{60}{360} = 0.21\text{s}$ 。