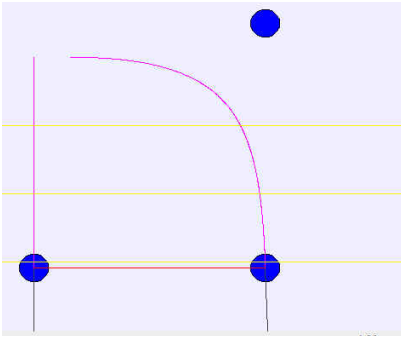
習題 3

1. 考慮一個質量為m的粒子，在有阻力的空氣中，作二維的拋體運動。假設空氣阻力大小與速率成正比，比例常數為 k：$f_d = kv$。訂水平方向為x軸，鉛直向上方向為y軸，將粒子從高空，以初速$v_0 = \left(\frac{mg}{k}, 0\right)$，向$+x$方向拋出。



由課堂上的計算知道，速度可以解出來：

$$v_x = \frac{mg}{k} e^{-\frac{k}{m}t}$$

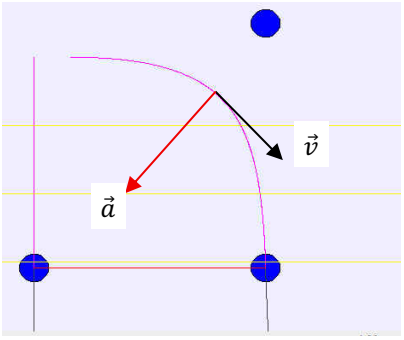
$$v_y = \frac{mg}{k}\left(e^{-\frac{k}{m}t} - 1\right)$$

問在時間是多少時，速度與水平的夾角會是45°？此時粒子的加速度與$+x$軸的夾角若為θ，$\tan\theta$是多少？同時計算此時加速度大小。以上答案以v_0, m, b, t, g表示。 (25)

$$\frac{d}{dx} e^{bx} = be^{bx}$$

解答：

$$v_x = \frac{mg}{k} e^{-\frac{k}{m}t}, v_y = \frac{mg}{k} e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}$$



速度與水平的夾角是45°時(注意向下的v_y是負的)：

$$\frac{-v_y}{v_x}=\frac{1-e^{-\frac{k}{m}t}}{e^{-\frac{k}{m}t}}=1$$

$$e^{-\frac{k}{m}t}=\frac{1}{2}$$

此時$t=\frac{m}{k}\ln 2$。

$$a_x=\frac{d}{dt}v_x=-ge^{-\frac{k}{m}t}=-\frac{1}{2}g,$$

$$a_y=\frac{d}{dt}v_y=-ge^{-\frac{k}{m}t}=-\frac{1}{2}g$$

若以此時粒子的加速度與$+x$軸的夾角θ

$$\tan\theta=\frac{-a_y}{a_x}=-1,\theta\sim\frac{3\pi}{4}$$

若以粒子的加速度與水平$-x$軸的夾角θ，答案寫

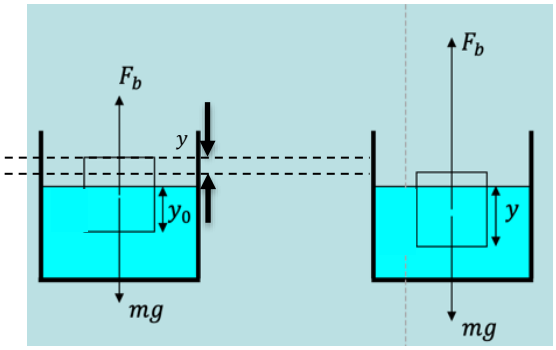
$$\tan\theta=\frac{-a_y}{-a_x}=1,\theta\sim\frac{\pi}{4}$$

亦可。加速度大小$\frac{1}{\sqrt{2}}g$。

2. 一個木塊浮在水面上，將未施外力時的位置設為平衡點，如圖左。木塊可以因被施力下壓或反彈上升，以下壓時的低於平衡點的高度變化為$+y$，反彈高於平衡點的高度為$-y$，也就是以鉛直向下為$+y$方向，如圖右。課堂上已介紹，此方塊（以平衡點為中點）之上下振動為一簡諧運動：

$$y=y_m\cos(\omega t+\phi)$$

已知周期為1.2 s。現在施力將木塊下壓0.10 m後（$y=0.10\text{m}$）自靜止釋放：$\phi=0$。



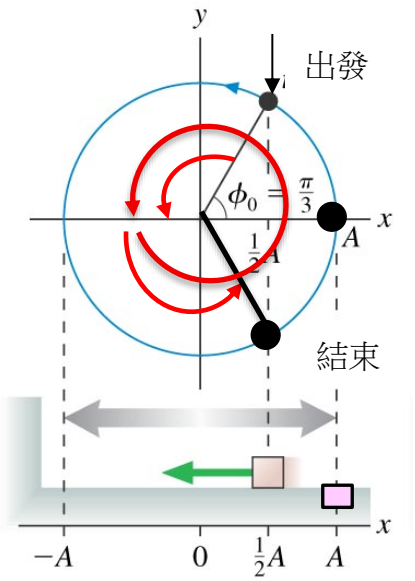
A. 當木塊向上彈高至$y=0.05$ m的時間起算，接下來經過了四次平衡點(每次經過，無論

向上或向下走都算一次)後，緊接著又到達$y = 0.05$ m，此過程($y = 0.05$ m $\rightarrow y = 0.05$ m)經過多少時間 s？(15)

B. 當方塊到達$y = 0.05$ m時，移動速率是多少 m/s？提示：速率是位置微分。(10)

解答：

A. 因為是自靜止釋放，$\phi = 0$，$y = y_m \cos \omega t$，位移$y = 0.05$ m處的相角的餘弦為$\frac{0.05}{0.10} = \frac{1}{2}$，所以可能是$\pm 60^\circ$，這是當木塊向上彈高至$y = 0.05$ m起算，所以相角為60°。經過了四次平衡點後緊接著到達$y = 0.05$ m，此時是由平衡點緊接著到達$y = 0.05$ m，所以相角是-60°，相角總變化為，$240^\circ + 360^\circ = 600^\circ$需時$T \cdot \frac{600}{360} = 2.0$ s。



B. 速度為位移的微分$v = \frac{dy}{dt} = \omega y_m \sin \omega t$，在此$\omega = \frac{2\pi}{T} \sim 5.2$ s^{-1}。在位移$y = 0.05$ m處的相角的餘弦為60°：

$$v = \omega y_m \sin 60^\circ = 0.1 \cdot 5.2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \sim 0.45 \text{ m/s}$$