習題二

1. 考慮一如下圖所示之裝置，左右兩支架的長度皆為a。兩支架一端固定於頂點，但張角θ可以自由變化。兩支架另一端以彈簧彼此連接，彈簧的原長亦為a，彈力常數為k，在彈簧兩端端點，各固定一個質量M的粒子。彈簧與支架間的夾角亦可自由改變。支架及彈簧的質量可以忽略。

   A. 已知當整個裝置處於靜止狀態時，張角$\theta = 20°$，寫下彈力常數k，以$a, M,$表示的表示式。$\cos 20° \sim 0.94, \sin 20° \sim 0.34$。(10)

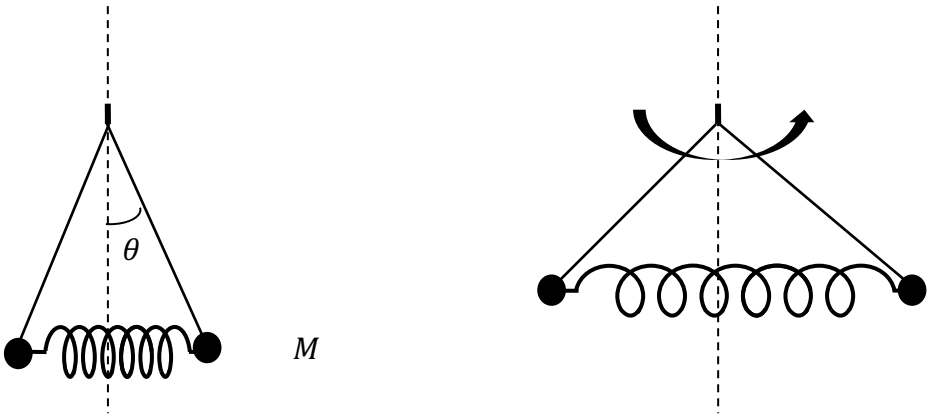
   B. 推動此裝置使其繞通過頂點的鉛直軸（圖中虛線）以等速轉動，發現張角增加至$\theta = 45°$時維持於此角，計算此時裝置中粒子的旋轉速度。以a, M, k表示即可，毋須將答案 A 代入。(10)

解答：A. 此時彈簧處於壓縮狀態，彈力的大小為：$k \cdot (a - 2a \sin 20°) = 0.32ka$，平衡時，彈力與重力的合力必須沿支架方向：

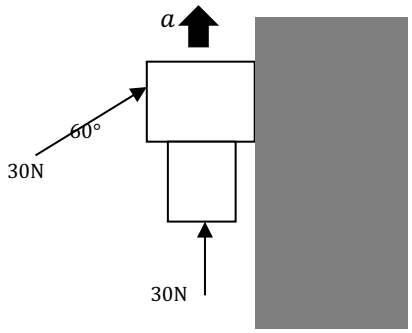
$$\frac{0.32ka}{Mg} = \tan 20° = 0.36$$

$$ka = 1.12Mg$$

B. 當$\theta = 45°$時，注意此時彈簧已成伸長狀態，向內彈力的大小為：$k \cdot (2a \sin 45° - a) = 0.4ka$。支架張力的垂直分量必須與重力抵銷，因此張力大小為：$\sqrt{2}Mg$。張力沿水平分量為Mg，粒子在水平方向總受力為：$Mg + 0.4ka$，此力必須等於質量乘向心加速度：$M\frac{\sqrt{2}v^2}{a}$，經過整理並代入 A 的結果：$v^2 = \frac{a}{\sqrt{2}}\left(g + \frac{0.4ka}{M}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1.45g) \sim ag$。$v \sim \sqrt{ag}$。



2. 考慮一垂直牆面及兩個方塊，上方方塊質量為2.0kg，貼著牆面，下方方塊質量為1.0kg，頂著上方方塊，但未接觸牆面。由下方方塊下方，對此方塊沿鉛直向上的方向施力30N，對上方方塊側面亦施一力，大小為30N，方向與鉛直方向夾角為60°，如圖所示。方塊與牆面之間的動摩擦係數為$\mu_k = 0.5$。已知方塊向上加速移動，一直維持圖中的組合樣態，並未旋轉或翻覆。計算方塊的加速度a，以及上方方塊對下方方塊的施力T。(20)



解答：假設上方方塊對下方方塊的施力為T，下方方塊滿足以下牛頓定律：

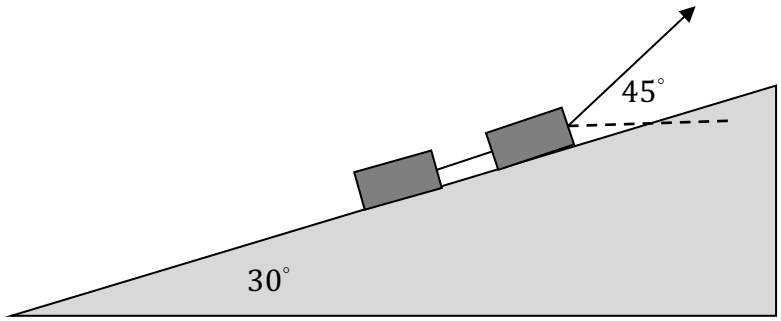
$$30 - T - 1.0g = 1.0a$$
$$20.2 - T = 1.0a$$

對上方方塊側面所施力的水平方向投影，等於方塊對牆面的正向力：$30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$，因此上方方塊會有一向下的動摩擦力：$30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \mu_k = 13.0\text{N}$，上方方塊滿足以下牛頓定律：

$$T + 30 \cdot 0.5 - 2.0g - 13.0 = 2.0a$$
$$T - 17.6 = 2.0a$$

兩式相加可得：$a = 0.87\text{m/s}^2$。相減可得$T = 19.3\text{N}$。

3. 有一固定斜面，斜角為30°，在斜面上有兩個相同的方塊，質量各為1.0kg，中間以一無質量的弦連接，對上方的方塊施以一向上的力，該力方向與水平方向間的夾角為45°，大小為30N。方塊與斜面間的動摩擦係數為$\mu_k = 0.3$。已知方塊組會沿斜面向上移動，且方塊不會翻滾或旋轉，計算方塊間弦上的張力，以及方塊的加速度。$\sin 15° \sim 0.26, \cos 15° \sim 0.97$。



解答：以沿斜面方向及垂直斜面方向的分量來討論，垂直斜面方向方塊都沒有運動，因此合力為零。下方方塊的正向力為$mg\cos 30° = 8.49\text{N}$，動摩擦力為$mg\cos 30°\,\mu_k = 2.55$。外加力與斜面之間的夾角為$45^\circ - 30^\circ = 15°$，因此上方方塊的正向力為$mg\cos 30° - F\sin 15° = 0.69\text{N}$，動摩擦力為$(mg\cos 30° - F\sin 15°)\mu_k = 0.21\text{N}$。下方方塊沿斜面方向：

$$T - mg\sin 30° - mg\cos 30°\,\mu_k = ma，$$

$$T - 4.9 - 2.55 = ma$$

上方方塊沿斜面方向：

$$F\cos 15° - mg\sin 30° - (mg\cos 30° - F\sin 15°)\mu_k - T = ma$$

$$29.0 - 4.9 - 0.21 - T = ma$$

$T = 15.6\text{N}$，$a = 8.2\text{m/s}^2$