能量 Energy　守恆量 Conservation

抽象的物理開始對生活與文明產生巨大的具體影響。











能量速飲





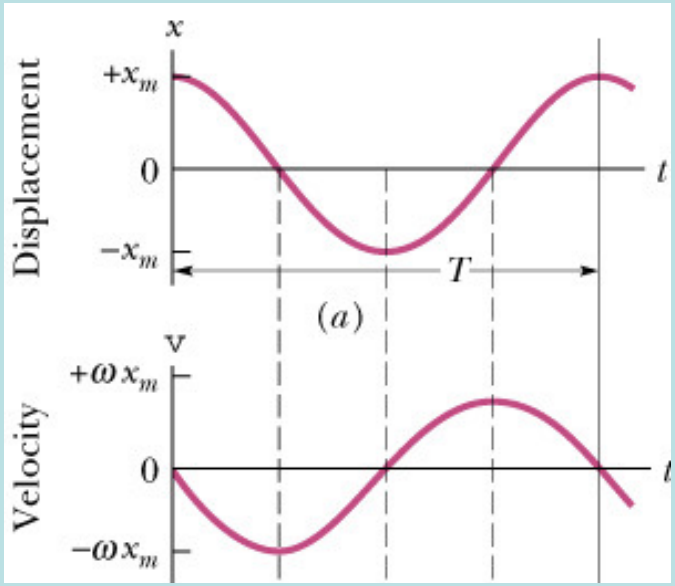
能源

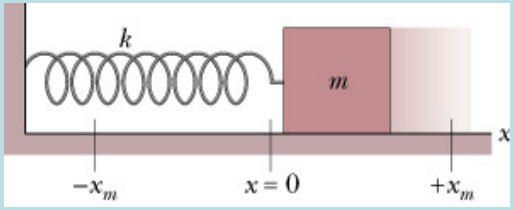


能量可以以許多不同方式儲存，擁有能量者能利用它產生運動！

不同儲存方式的能量可以非常容易地彼此轉換，因為能量是一個守恆量！

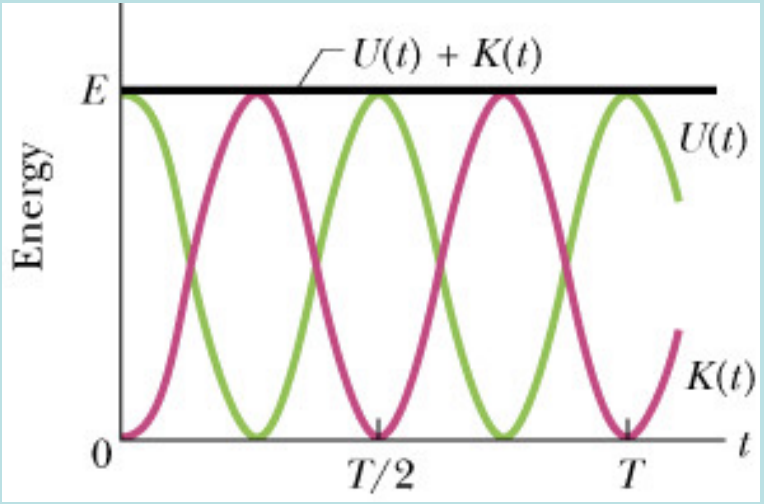
彈簧的簡諧運動





$$x = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$v = -\sqrt{\frac{k}{m}}\, x_m \sin(\omega t + \phi)$$



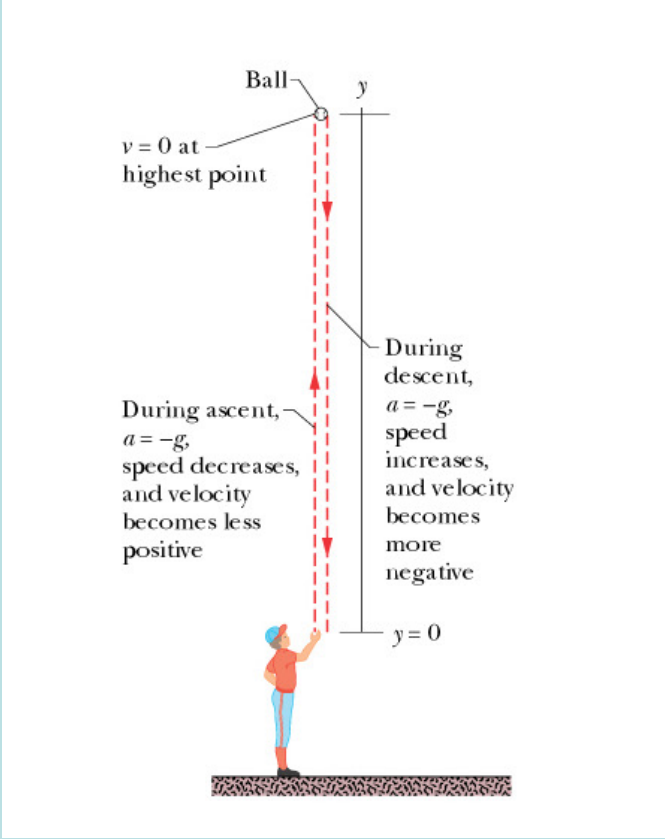
$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx_m^2 = \text{constant}$$

與時間無關的守恆量

運動 K 動能

位置 U 重力位能

彈簧的簡諧運動過程中有一個與時間無關的守恆量



自由拋體

$$v^2 = 2g(y - y_0) + v_0^2$$

$$mgy + \frac{1}{2}mv^2 = mgy_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \text{constant}$$

守恆量

運動K，動能，這部分與簡諧運動相同！

位置 U 彈力位能

自由拋體運動過程中也有一個與時間無關的守恆量

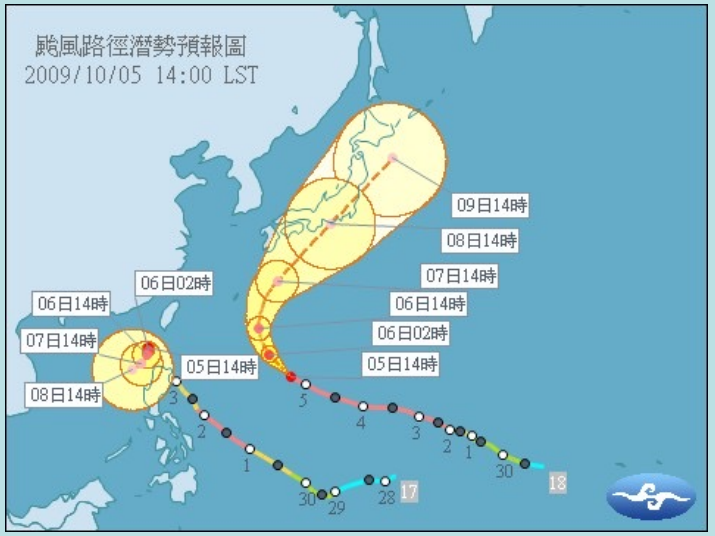


物體在特定位置上，存在某種潛在能力可以轉化為運動，稱為位能 Potential.

牛頓定律加上力的描述給定運動方程式 Equation of Motion，加上起使條件(起始位置與速度），便能決定此系統未來任一時間的狀態！

$$\vec{F}\left(\vec{r},\frac{d\vec{r}}{dt},\cdots\right)=m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$



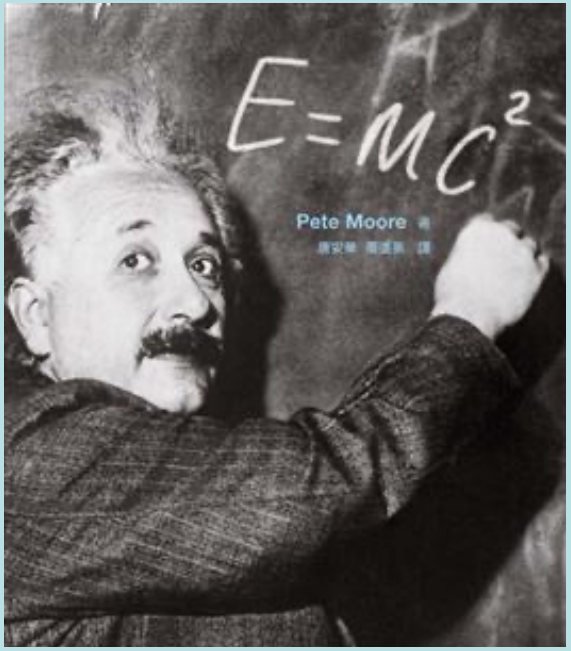


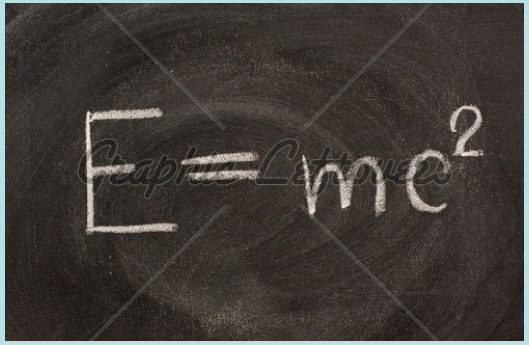
不是所有的問題都可以被運動方程式解決了嗎？

守恆量的適用範圍超越運動方程式。

牛頓力學在物體速度接近光速時，必須考慮相對論修正，
但能量守恆在相對論中還是對的！

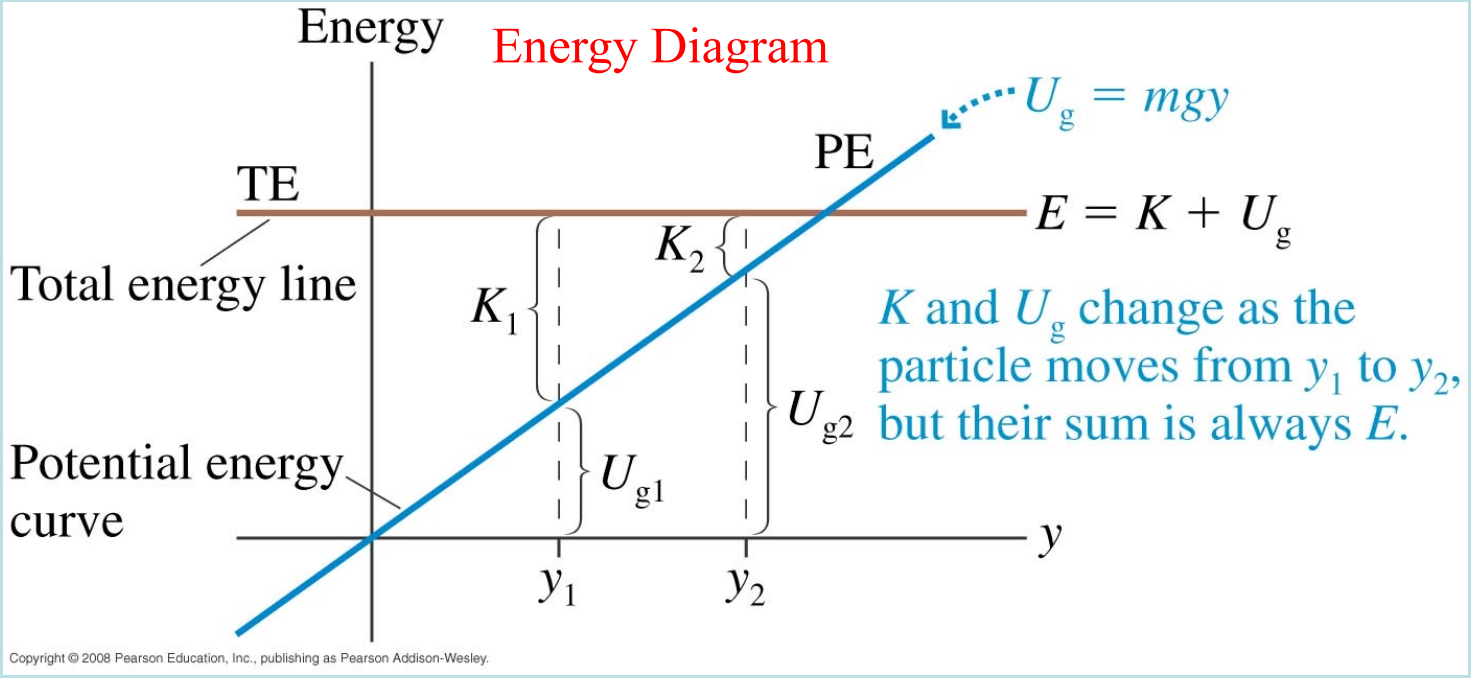








運動方程式不容易解，守恆量可以提供另類的資訊。



將自由拋體的位能$U = mgy$對位置y作圖。

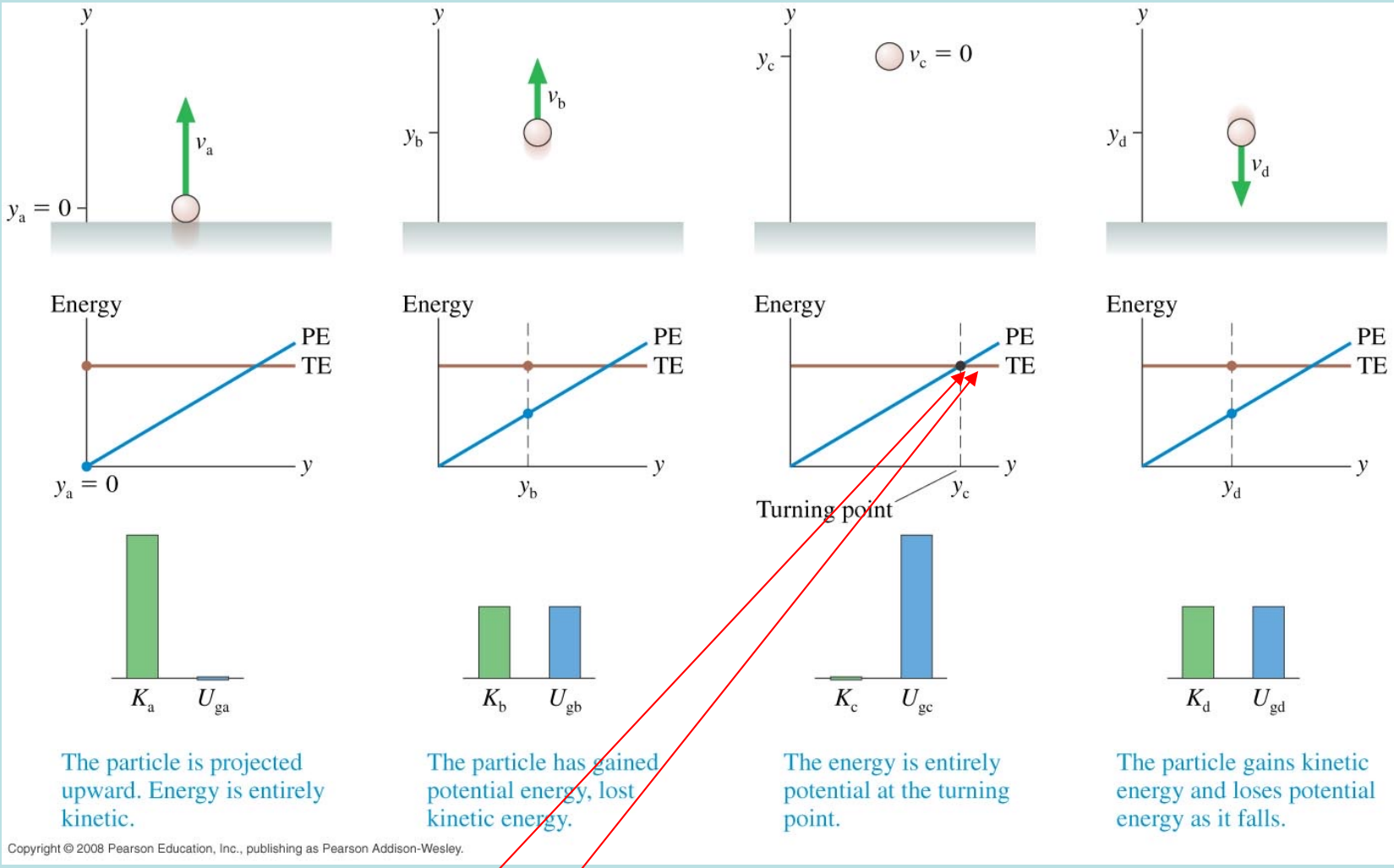
守恆的E與位置無關，因此在圖上是水平線，其值等同由起始條件給出。

運動過程中任意位置y的動能$K = \frac{1}{2}mv^2$即是水平線與位能線的差：

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = E - U(y) = E - mgy$$

$$v = \sqrt{\frac{2\,(E - mgy)}{m}}$$

因此速度與位置的關係可以立刻得到。



Copyright © 2008 Pearson Education, Inc., publishing as Pearson Addison-Wesley.

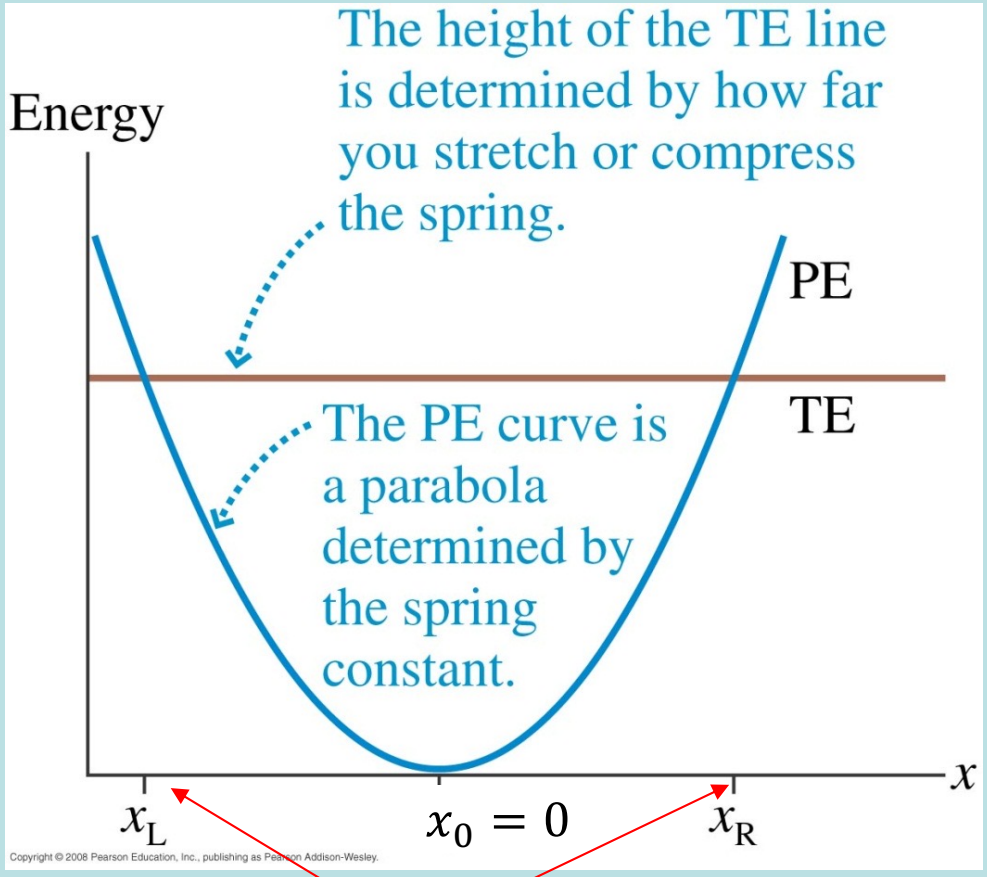
Turning point 折返點: 位能線與總能線交會處。

若粒子通過折返點，位能將大於總能量，動能將為負。

因此粒子無法通過折返點，在此，粒子會轉向。

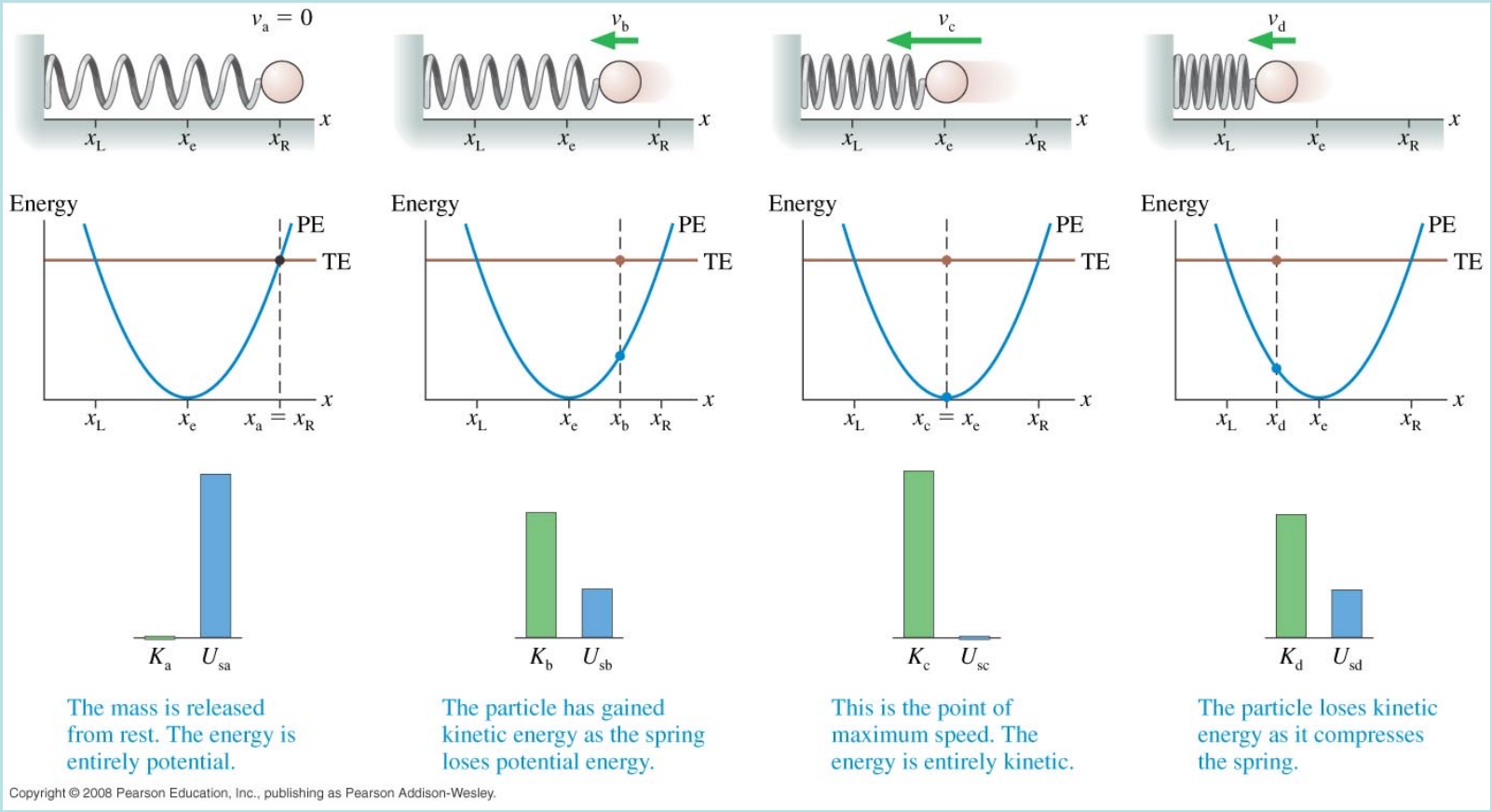
同樣的思考也可以運用在彈簧的運動！

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$



若粒子通過折返點，位能將大於總能量，動能將為負。

簡諧運動兩端都有turning point，運動就被拘限在一個範圍內，稱束縛態。



Copyright © 2008 Pearson Education, Inc., publishing as Pearson Addison-Wesley.

運動過程中任意位置y的動能 $K = \frac{1}{2}mv^2$ 即是水平線與位能線的差：

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = E - \frac{1}{2}kx^2$$

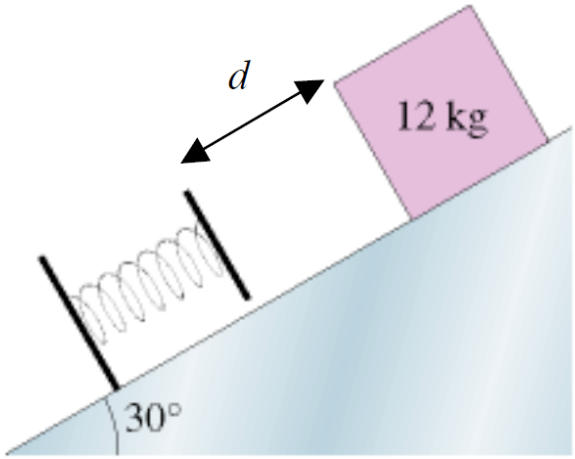
因此速度與位置的關係可以立刻得到。

運動方程式給出運動物理量（位置，速度）與時間的關係！

守恆律則排除時間，得出運動物理量(速度與位置)彼此之間的關係！

如果同時考慮重力位能與彈力位能：壓縮的過程兩者會一起變化。

2. 一質量為 12 kg 的方塊，沿一 30°角的斜面自靜止狀態滑下，滑行距離 d 之後接觸一個彈簧，此彈簧的彈力係數 k 為 2000 N/m。

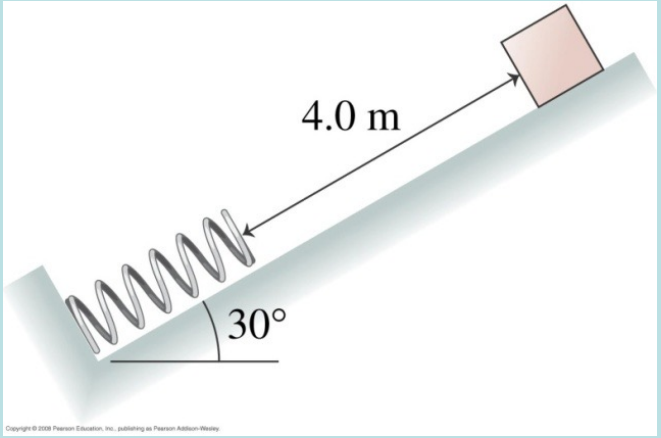


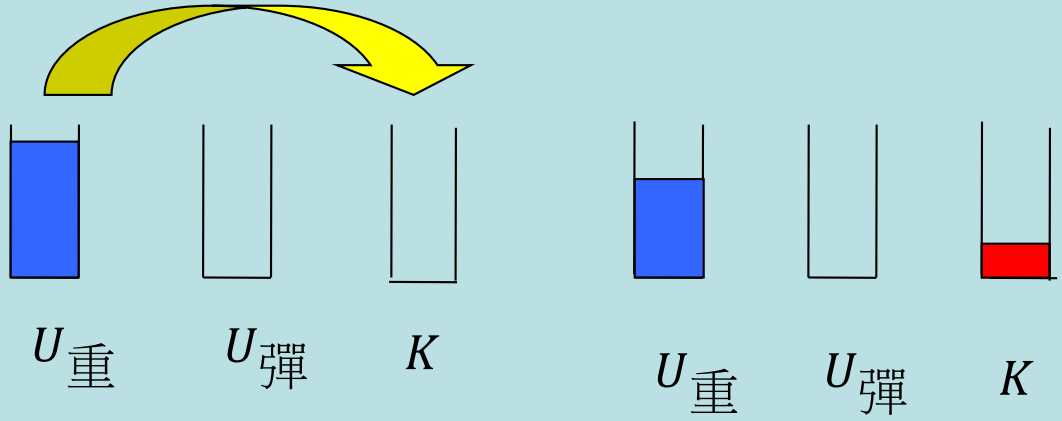
接觸彈簧後，此方塊繼續向前下滑行距離 $x = 0.27$ m 後才停止。請問距離 d 是多少 m？(10)

2. 停止時，重力位能的減少應該等於彈力位能：

$$12 \times g \times (0.27 + d)/2 = 2000 \times 0.27^2/2$$

$$d = 0.97 \text{ m}$$

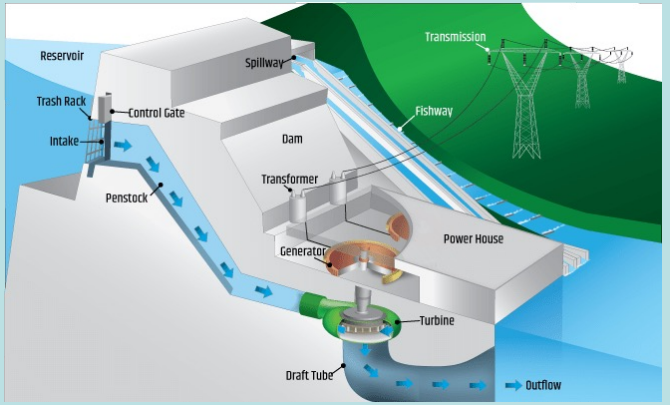


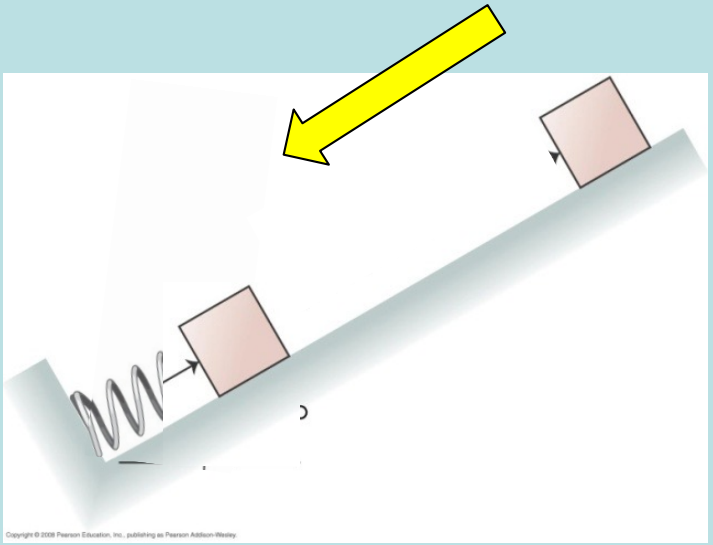


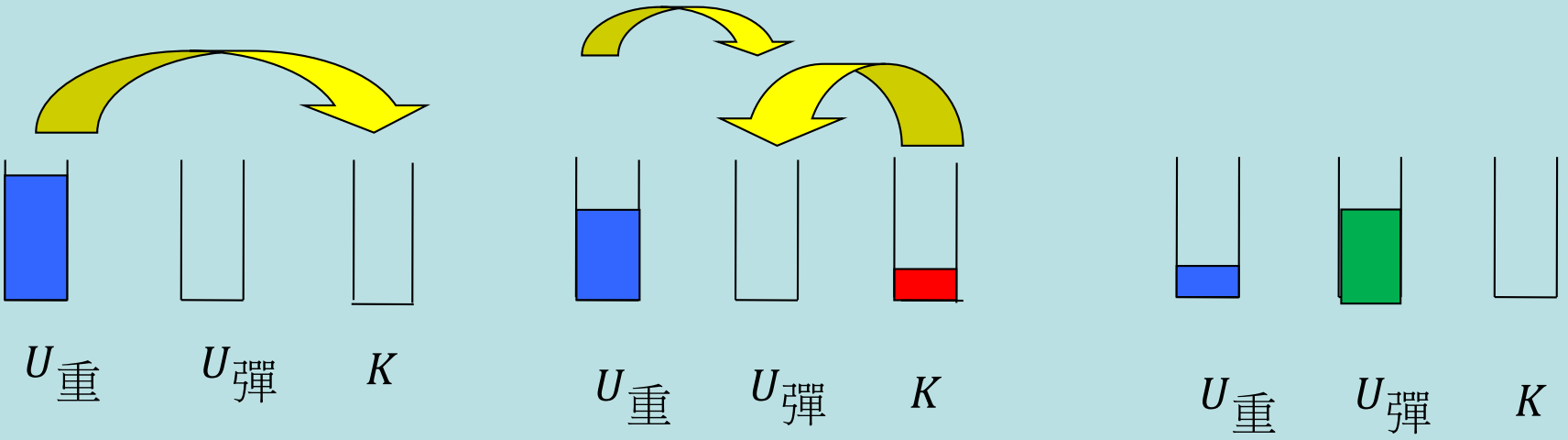
能量的具體特徵是能驅動，使吸收能量的物體運動。



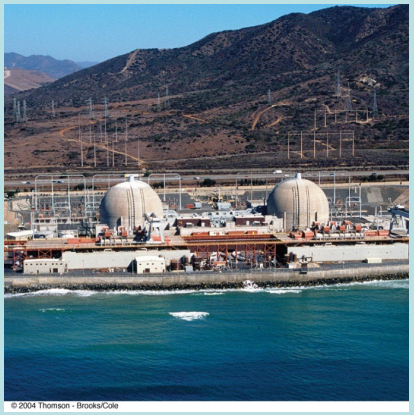






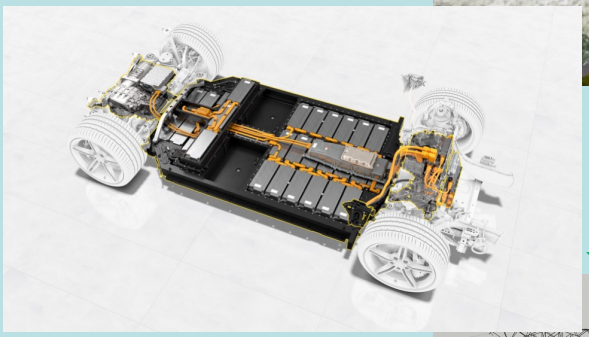


另一個重要特徵：能量可以來回在許多形式之間轉換，總能量守恆。













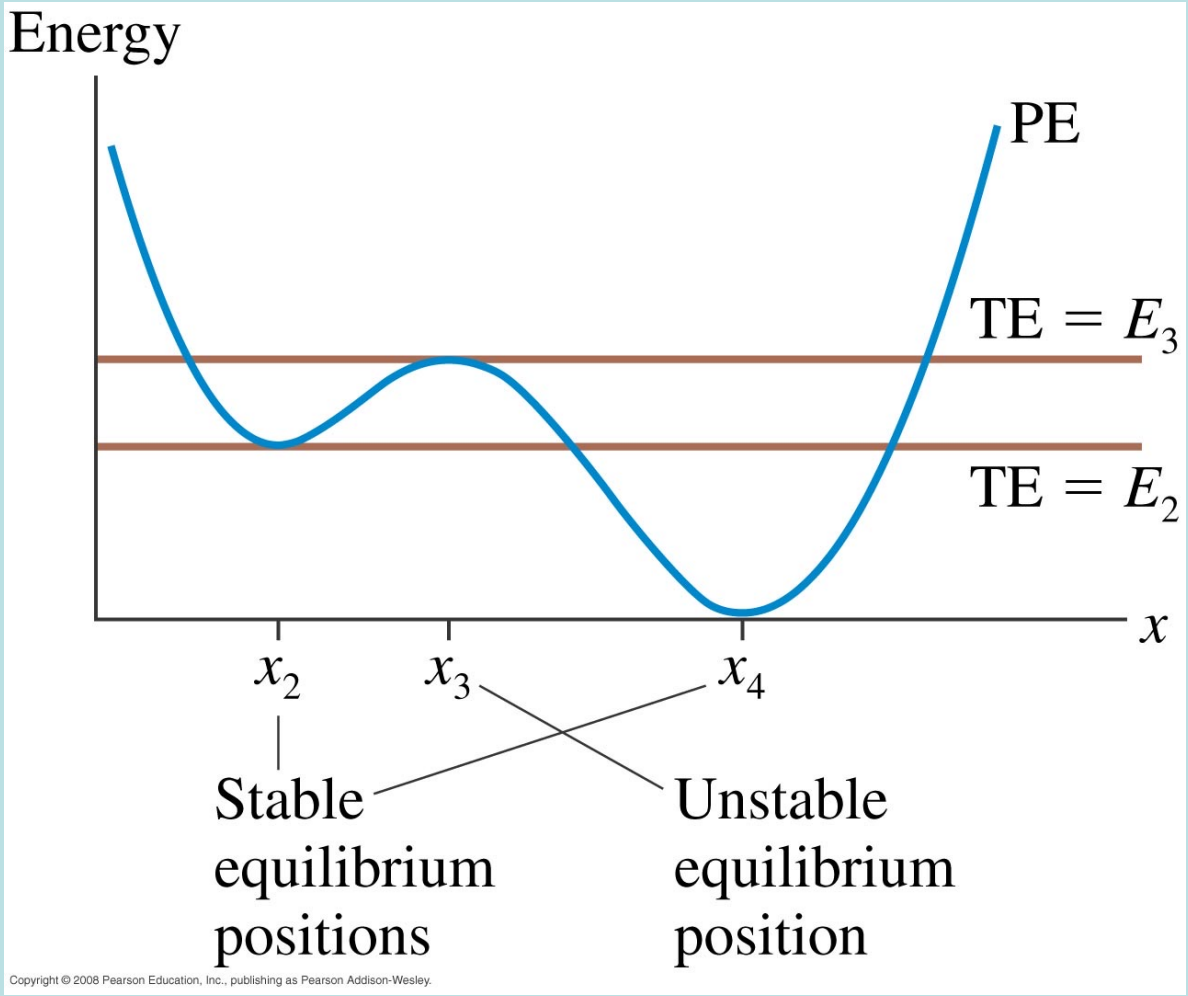


能量的具體特徵是能驅動。

能量可以來回在許多形式之間轉換、儲存、傳輸。

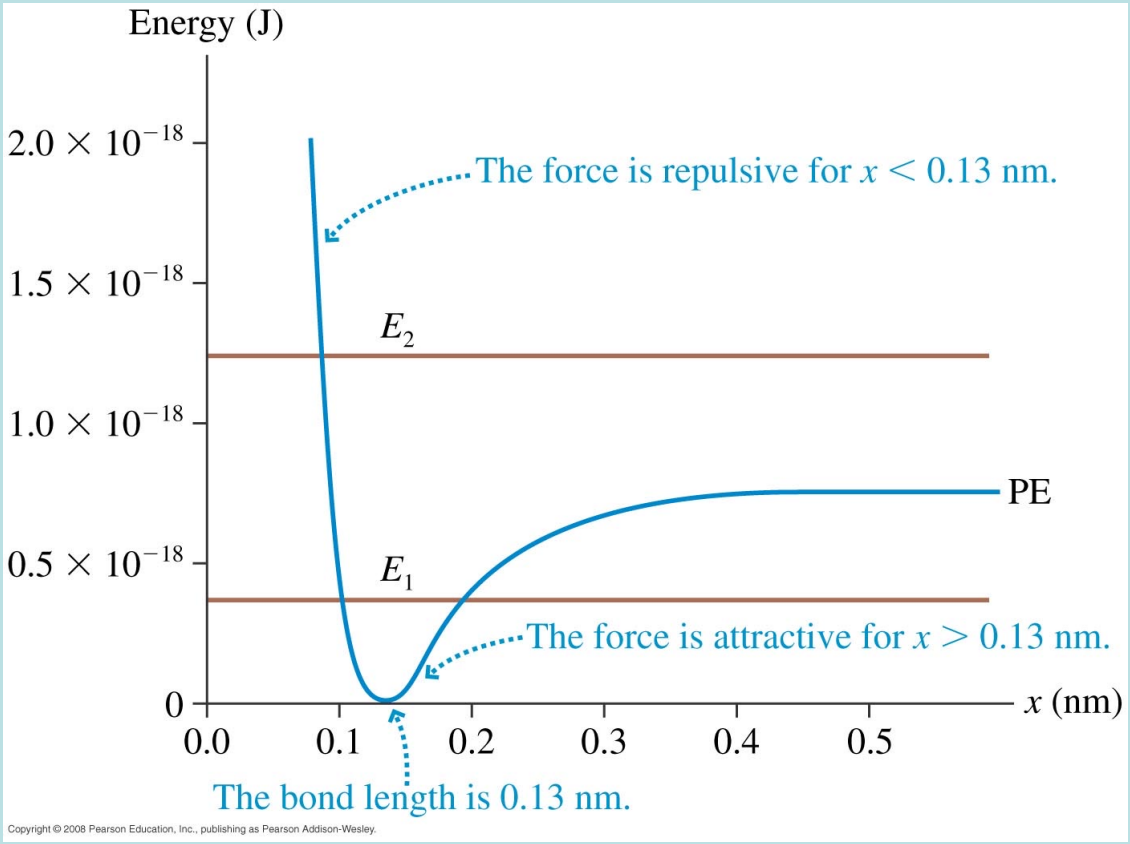
其它的力是不是也有這樣的位能Potential Energy U呢？

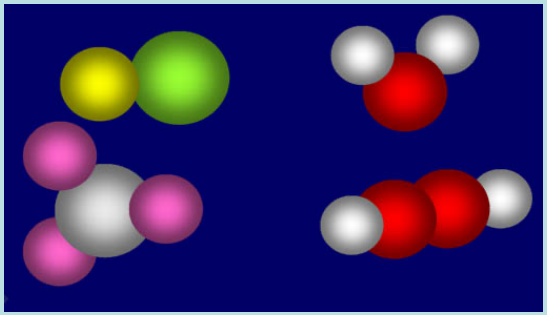
在何種條件下，其它的力也有這樣的位能U呢？

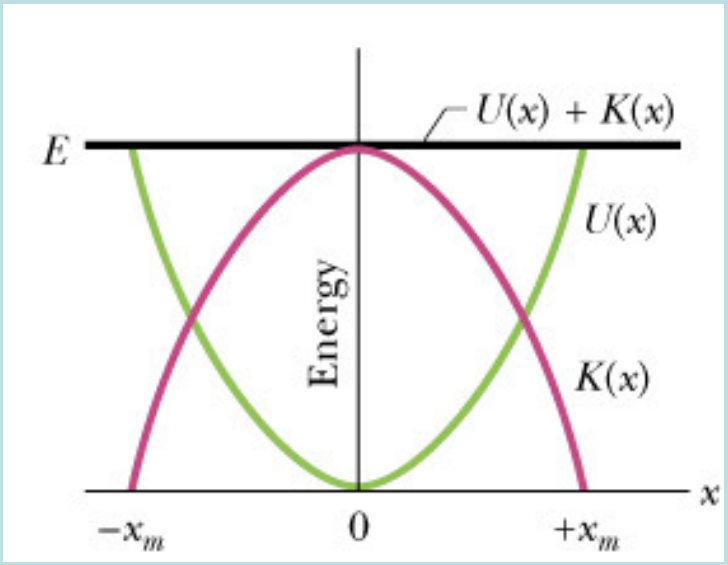


兩個粒子間的力是否能束縛它們形成束縛態 bound state，

以位能來思考是最簡單的方法！



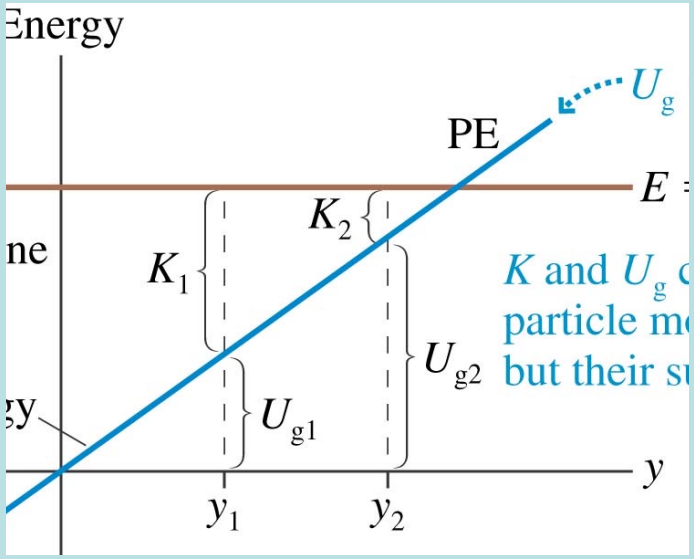




彈簧

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \text{constant}$$ ⟶ 守恆量

位置 U　　運動 K



自由拋體

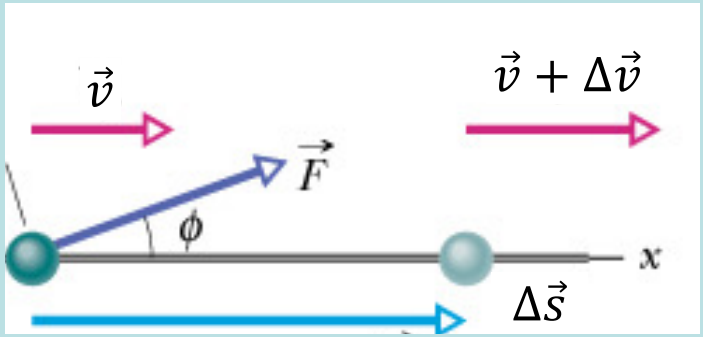
$$mgy + \frac{1}{2}mv^2 = \text{constant}$$ ⟶ 守恆量

位置 U　　運動 K

在這兩個例子中，同時出現的動能Kinetic Energy K 的表示式是相同：$K = \frac{1}{2}mv^2$

研究 $K = \frac{1}{2}mv^2$ 動能在運動過程中的變化。動能改變因速度改變。

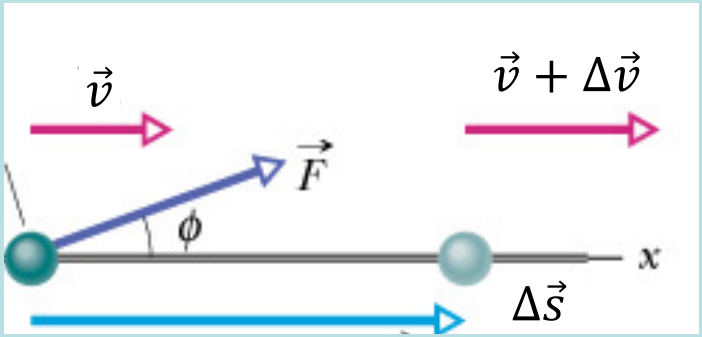
考慮一個粒子受力改變速度、$\Delta\vec{s}$無限小但尚未趨近於零的過程：



$\Delta\vec{v} \ll \vec{v}$

$$\Delta\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}m(\vec{v}+\Delta\vec{v})\cdot(\vec{v}+\Delta\vec{v}) - \frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v} = m\Delta\vec{v}\cdot\vec{v} + \frac{1}{2}m\Delta\vec{v}\cdot\Delta\vec{v}$$

$$\approx m\Delta\vec{v}\cdot\vec{v} = m\Delta\vec{v}\cdot\frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t} = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\cdot\Delta\vec{s} = m\vec{a}\cdot\Delta\vec{s} = \vec{F}\cdot\Delta\vec{s} \equiv W$$

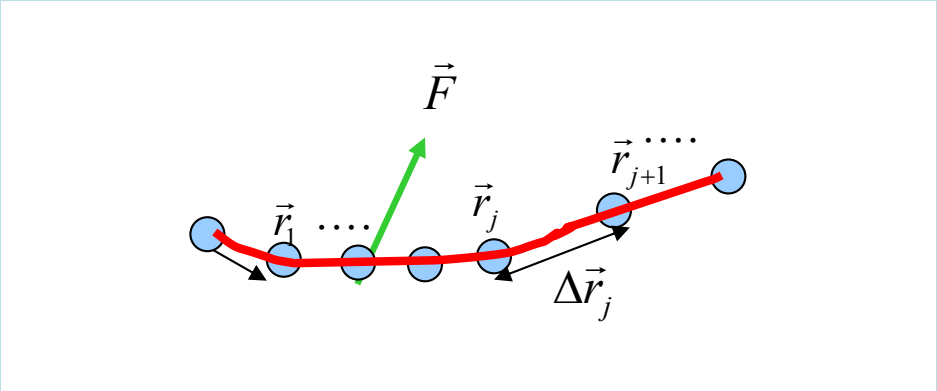


功 Work 造成粒子動能的變化

$$\Delta\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \vec{F} \cdot \Delta\vec{s} \equiv W$$

以上的式子只對無限小的運動過程適用

但將無限多無限小的過程組合起來，即成為一個有限的過程：



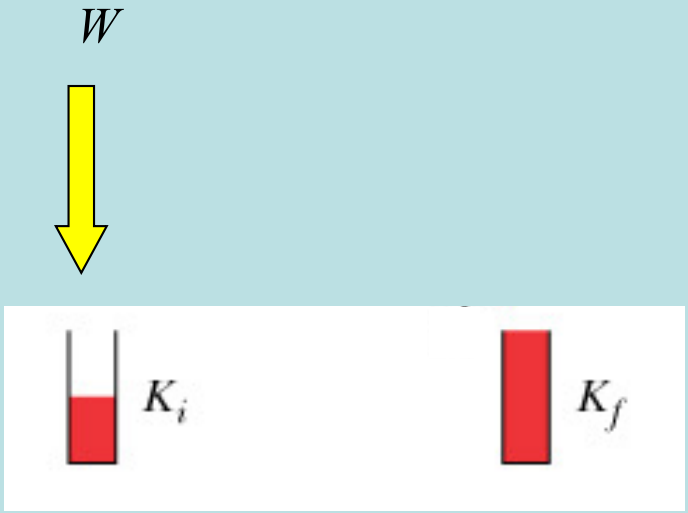
對每一段無限小的過程動能變化都等於力所作的功：

$$\Delta\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \vec{F}\cdot\Delta\vec{s} \equiv W$$

動能的總變化等於無限多段無限小的過程的動能變化的總和：

$$K_f - K_i = \left(\frac{1}{2}mv^2\right)_f - \left(\frac{1}{2}mv^2\right)_i = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta s\to 0}} \sum_{j=0}^{N} \left[\Delta_j\left(\frac{1}{2}mv^2\right)\right] = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta s\to 0}} \sum_{j=0}^{N} \left(\vec{F}_j\cdot\Delta\vec{s}_j\right) = W_{i\to f}$$

動能的總變化就等於沿著運動的路徑力所作的功的總和。

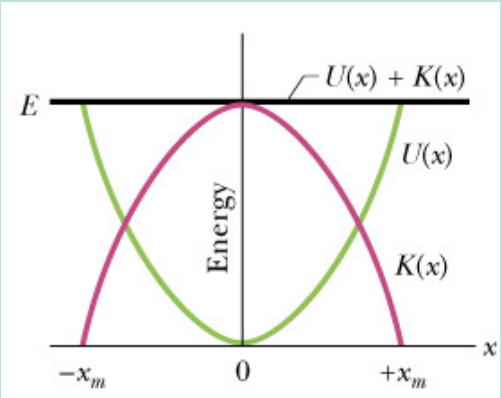


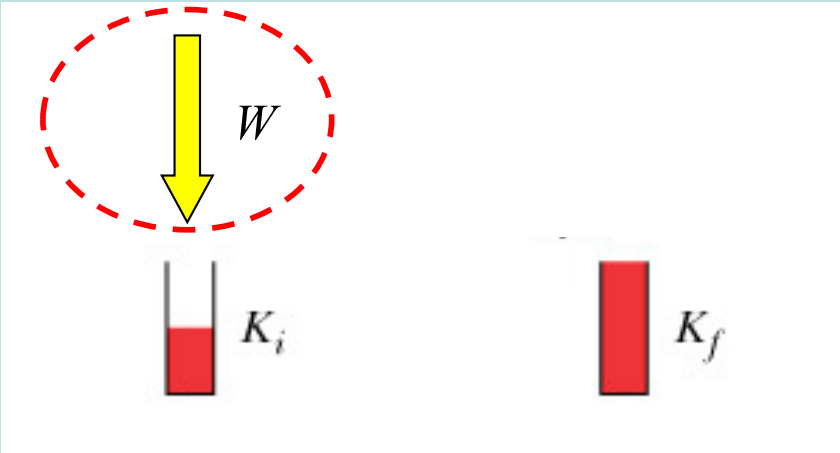
$$\left(\frac{1}{2}mv^2\right)_f - \left(\frac{1}{2}mv^2\right)_i = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta s\to 0}} \sum_{j=0}^{N} \left(\vec{F}_j \cdot \Delta\vec{s}_j\right) = W_{i\to f}$$

功等於動能變化，稱為功與動能原理。

$$\Delta K = W$$

其它的力是不是也如彈力有一位能U ，使得U與K的和是守恒量？

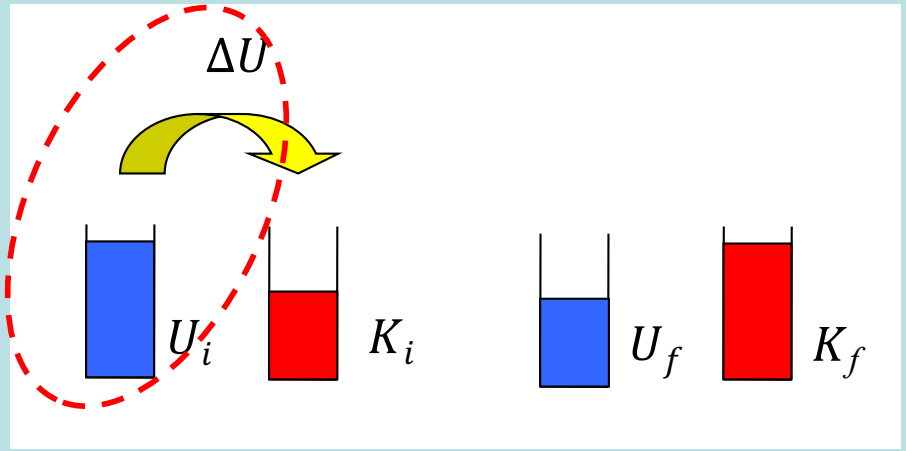




如果有這樣的位能U存在，K的變化與U的變化必須互相抵消：

$\Delta K = -\Delta U$ ？

而已知K的變化等於功： $\Delta K = W$



那麼任一段運動的功都等於U的前後變化：

$W = -\Delta U = -(U_f - U_i)$ ？

如此就不需要考慮外來的功W，而以施力與受力間、內在U的變化，取代即可。

先決條件是在任何運動過程中，此力所作的功必須寫成一個物理性質的前後差。



功是對於運動過程定義的量，此量不一定可以寫成一個物理性質的前後差。

例如兩地之間的里程、就無法寫成一個量的前後差，里程與選的路徑有關。

$$W = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta s\to 0}} \sum_{j=0}^{N} \left(\vec{F}_j \cdot \Delta\vec{s}_j\right)$$

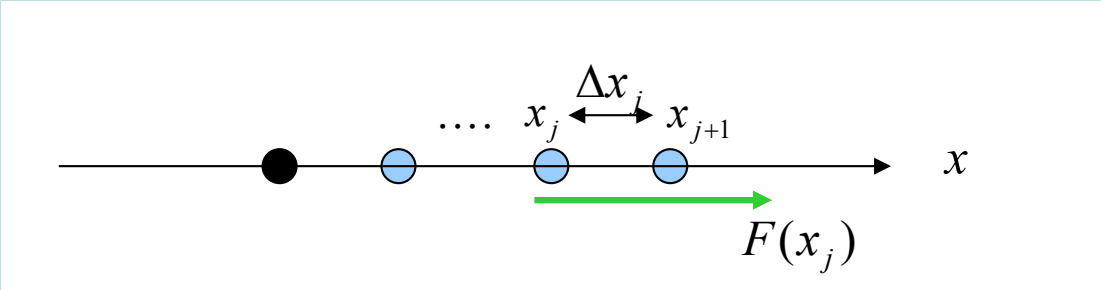
功可不可以寫成一個物理量的前後差？

先考慮一維運動：力與運動的方向在同一個軸上。

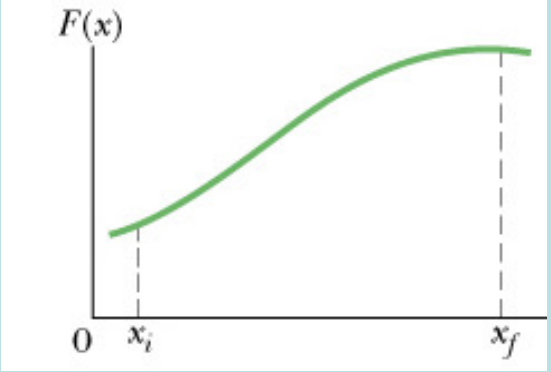


考慮外力只與位置有關，$F \to F(x)$

以下適用於原子力、靜電力、萬有引力。其實在物理中是蠻大的範圍了

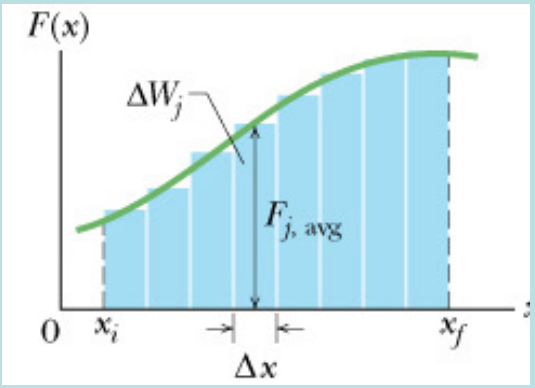


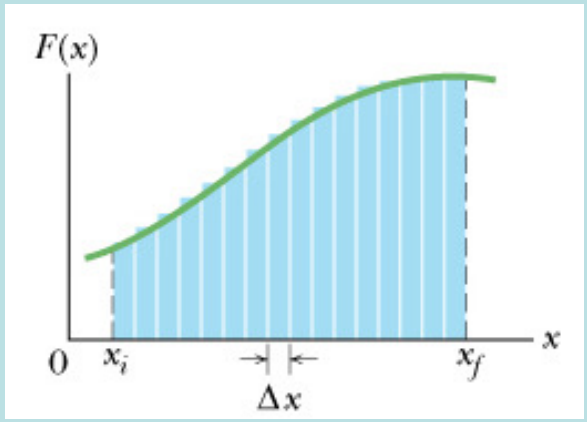
將此$F(x)$力函數對位置作圖：

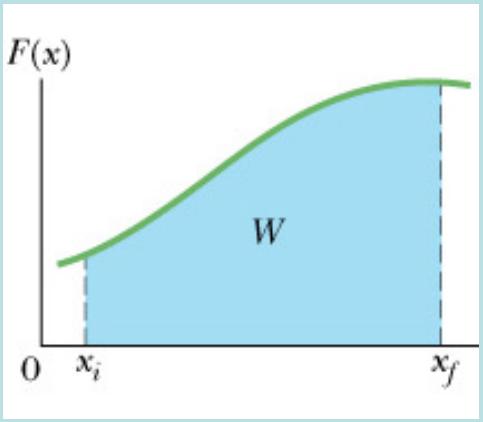


$$W = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta s\to 0}} \sum_{j=0}^{N} (F_j \cdot \Delta x_j)$$

在此圖上，功有一幾何意義：





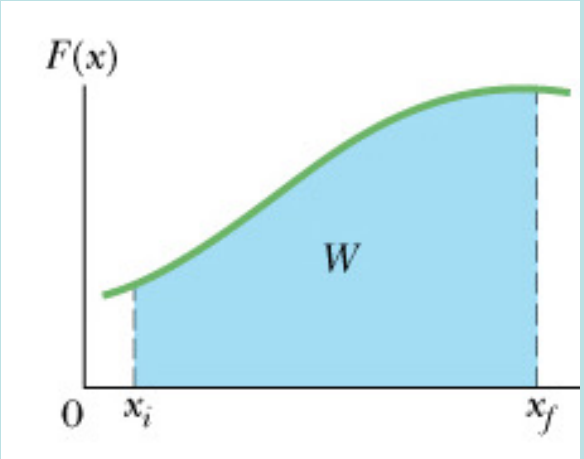


功就是力曲線下、介於起點x_i與末點x_f之間的面積，即是$F(x)$的積分

功是力函數曲線下介於起點x_i與末點x_f之間的面積：

這就定義為$F(x)$對x的定積分definite integral：

$$W = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta s\to 0}} \sum_{j=0}^{N} (F_j \cdot \Delta x_j) = \int_{x_i}^{x_f} F(x) \cdot dx$$

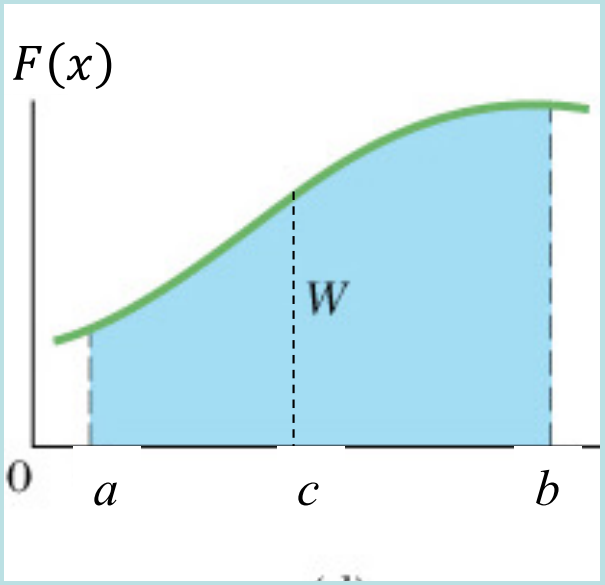


定積分是一個計算出來的數。

兩個定理：

$$\int_b^a F(x') \cdot dx' = -\int_a^b F(x') \cdot dx', \qquad b > a$$

$$\int_a^b F(x') \cdot dx' = \int_a^c F(x') \cdot dx' + \int_c^b F(x') \cdot dx'$$



$$\int_{x_i}^{x_f} F(x') \cdot dx'$$

定積分值只與函數及端點值有關。

若讓積分的一個端點可以自由變化，訂為x，而將函數的變數稱為x'。

x'只是另一個連續變數的名字，並不是導數。

就得到一個以端點值x為變數的函數$G(x)$，稱為不定積分Indefinite Integral。

$$G(x) = \int_{x_i}^{x} F(x') \cdot dx'$$

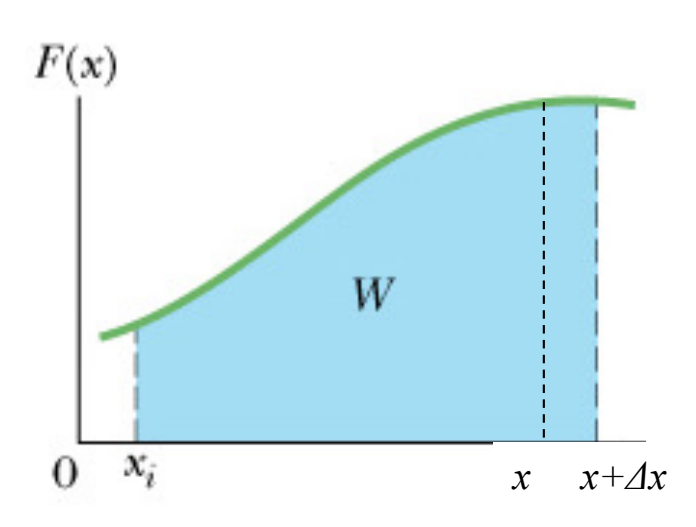
$$\int \quad F(x) \rightarrow G(x)$$

積分是一個由函數得到另一個函數的運算。

微積分基本定理

微分與積分是反運算

$$G(x) = \int_{x_i}^{x} F(x') \cdot dx' \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx} G(x) = F(x)$$



$$\frac{d}{dx} G(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{G(x+\Delta x) - G(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_{x_i}^{x+\Delta x} F(x')\,dx' - \int_{x_i}^{x} F(x')\,dx'}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_{x}^{x+\Delta x} F(x')\,dx'}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x)\Delta x}{\Delta x} = F(x)$$

微分與積分是反運算，那麼積分的計算就是微分的反向運算！

所以要算積分時，最方便的辦法不是由定義出發去計算，

而是去猜一個函數，使它的微分就是你要積的函數F。

如果有一個函數 H ，它的微分等於你要積分的函數 F：

$H'(x) = F(x)$ 這樣的函數H稱為函數F的反微分，就大約是F的不定積分：

例如：x^n的反微分可以是 $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$

$$\int_a^x dx' \cdot F(x') \sim H(x)$$

然而，你可以在函數H上加一個常數，依舊是反微分。

$(H(x) + c)' = H'(x) = F(x)$

反微分有無限多個，

但因為同一個函數的任兩個反微分的微分的差為零！

因此任兩個反微分的差只是一個常數！

例如：所有x^n的反微分都可以寫成 $\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$

最重要的積分公式：

根據微積分基本定理，F的積分是F的一個反微分。

如果你能猜到任一個F的反微分H ，你離積分就只差一個常數。

$$\int_a^x dx' \cdot F(x') = H(x) + c$$

幸運的是常數 c 可以很容易求出：

只要將積分的起始端點a代入積分式的終點，值必為零，c可以計算：

$$\int_a^a dx' \cdot F(x') = 0 = H(a) + c$$

$$c = -H(a)$$

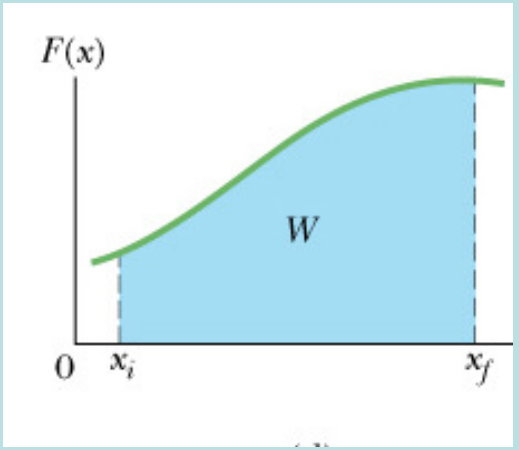
因此可以寫下最後的公式：

$$\int_a^x dx' \cdot F(x') = H(x')\Big|_a^x = H(x) - H(a)$$

此式對任一個反微分 H 都對！

積分的計算：猜到任一個 F 的反微分 H

$$\int_a^x dx' \cdot F(x') = H(x')\Big|_a^x = H(x) - H(a)$$



$$\int_{x_i}^x dx' \cdot x'^n = \frac{1}{n+1} x'^{n+1}\Big|_{x_i}^x = \frac{1}{n+1} x^{n+1} - \frac{1}{n+1} x_i^{n+1}$$

$$\int_{x_i}^{x} dx' \cdot e^{ax'} = \frac{1}{a} e^{ax'} \Big|_{x_i}^{x} = \frac{1}{a} e^{ax} - \frac{1}{a} e^{ax_i}$$

$$\int_{x_i}^{x} dx' \cdot \sin \omega x' = -\frac{1}{\omega} \cos \omega x' \Big|_{x_i}^{x} = -\frac{1}{\omega} \cos \omega x + \frac{1}{\omega} \cos \omega x_i$$

功W可不可以寫成一個物理量的前後差？



F的任一反微分函數

$$W = \int_{x_i}^{x_f} dx' \cdot F(x') = H(x_f) - H(x_i) = \Delta H$$

功是力的不定積分。

根據微積分基本定理，積分一定可以寫成反微分H函數的前後差！

功W一定可以寫成一個物理量的前後差！位能$(U \equiv -H)$一定存在！

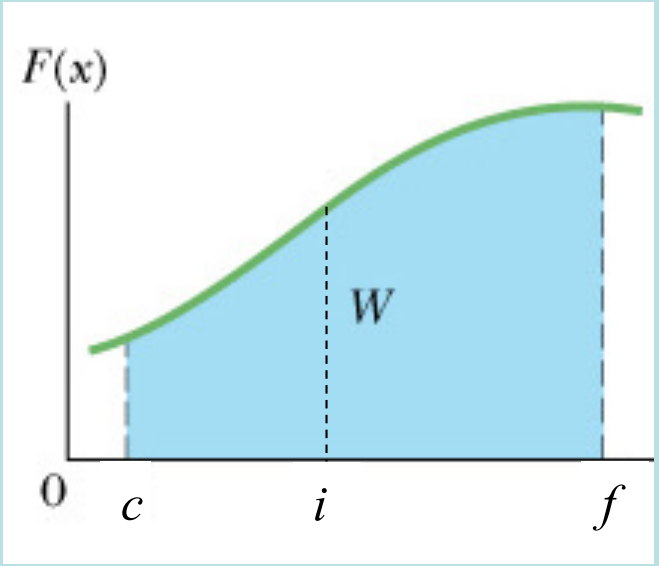
$$\Delta U = U(x_f) - U(x_i) = -W = -\int_{x_i}^{x_f} dx' \cdot F(x')$$

位能差洽為此力 F 從起點運動到末點所作功的負號。

另一個更有用的推導：

可以另找一個起點c ，將力函數的積分，拆成由c出發的定積分的前後差：

$$W = \int_{x_i}^{x_f} dx'\, F(x') = \int_{c}^{x_f} dx'\, F(x') - \int_{c}^{x_i} dx'\, F(x')$$



於是功已經自動寫成此積分函數的前後差！

根據功與動能原理，功又是動能的前後差，

$$= K_f - K_i = W$$

將與運動前後有關的量分別移到左右兩邊：

$$K_f - \int_{c}^{x_f} dx'\, F(x') = K_i - \int_{c}^{x_i} dx'\, F(x')$$

定義位能 $$U(x) \equiv -\int_{c}^{x} dx'\, F(x')$$

$$K_f + U(x_f) = K_i + U(x_i)$$

$K + U$ 守恆

$$U(x_f) = U(x_i) - W = U(x_i) - \int_{x_i}^{x_f} dx' \cdot F(x')$$

可以取積分下界x_i為位能為零的位置c：$U(c) = 0$

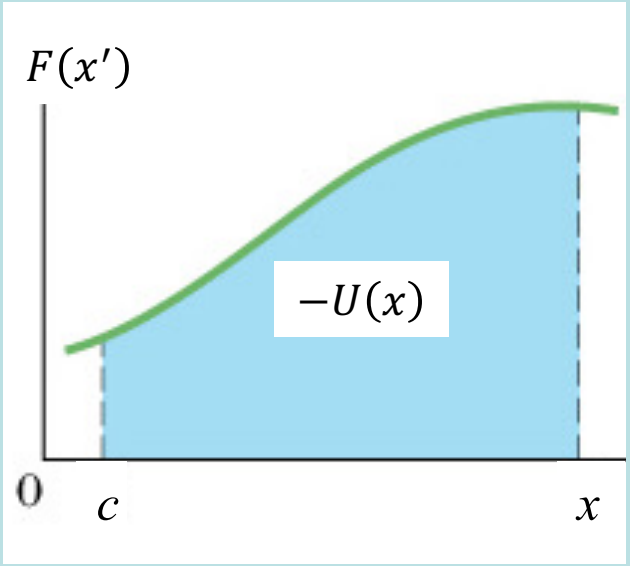
$$U(x) \equiv -\int_{c}^{x} dx'\, F(x')$$

但c的值可以任意，可見位能的值並不是唯一。

只有位能差有物理效應，絕對的位能值沒有效應。

位能為零的位置c可任意選取，不影響結果。





在一維運動，如果外力只與位置有關， $F \to F(x)$

$$U(x) \equiv -\int_{c}^{x} dx'\, F(x')$$

這是普遍適用的表示式！

位能U即是由某起點c出發到達x，此力所作的功的負數！

$K + U$ 動能與位能的和，稱為機械能，機械能是守恆的！

可以說位能的變化，轉換成了動能的變化。

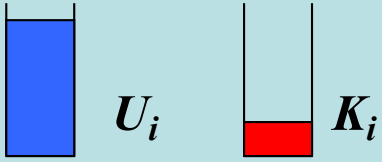
物體在特定位置上是具有潛在能力可以轉化為運動。



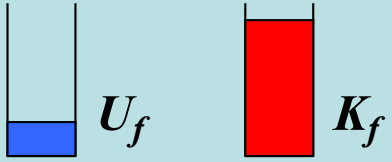


如此就不需要考慮外來的功W，而以施力與受力間、內在U的變化，取代即可。

$W = -\Delta U$



$\Delta K + \Delta U = 0$



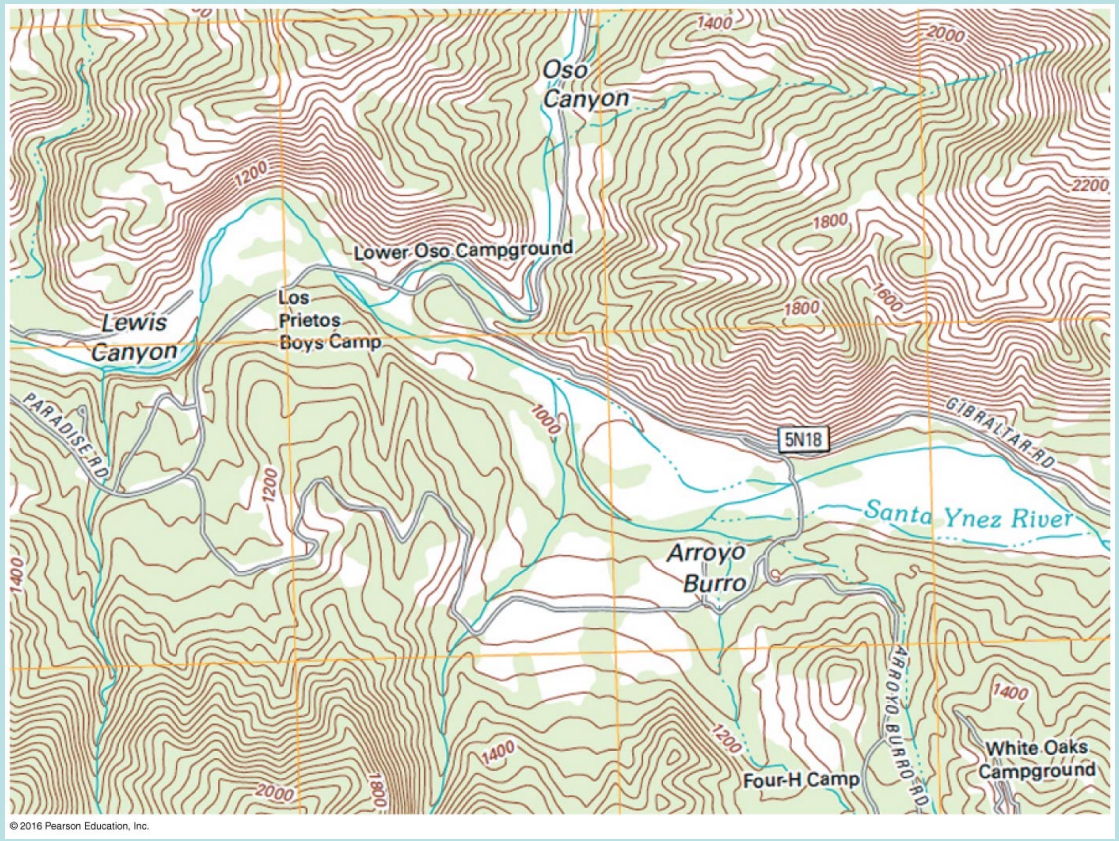
機械能守恆 $E_{\text{Mech}} \equiv K + U$

功與動能原理就可以機械能守恆定律取代！更加好用！

$$U(x) \equiv -\int_{c}^{x} dx' \, F(x')$$

位能由位置決定，每一個座標對應一個位能值。

如同地圖上的高度標示一樣！測量(計算)一次就能重複使用！

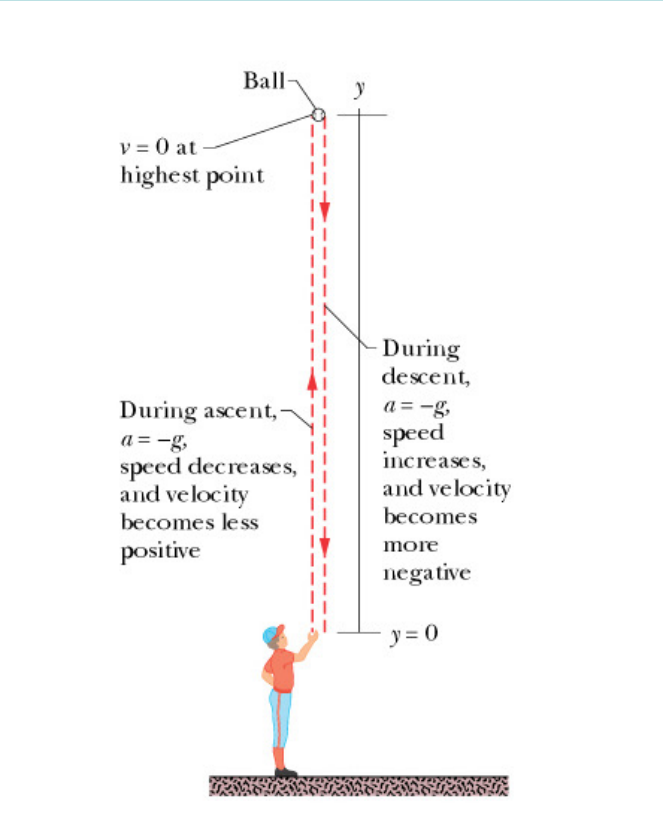




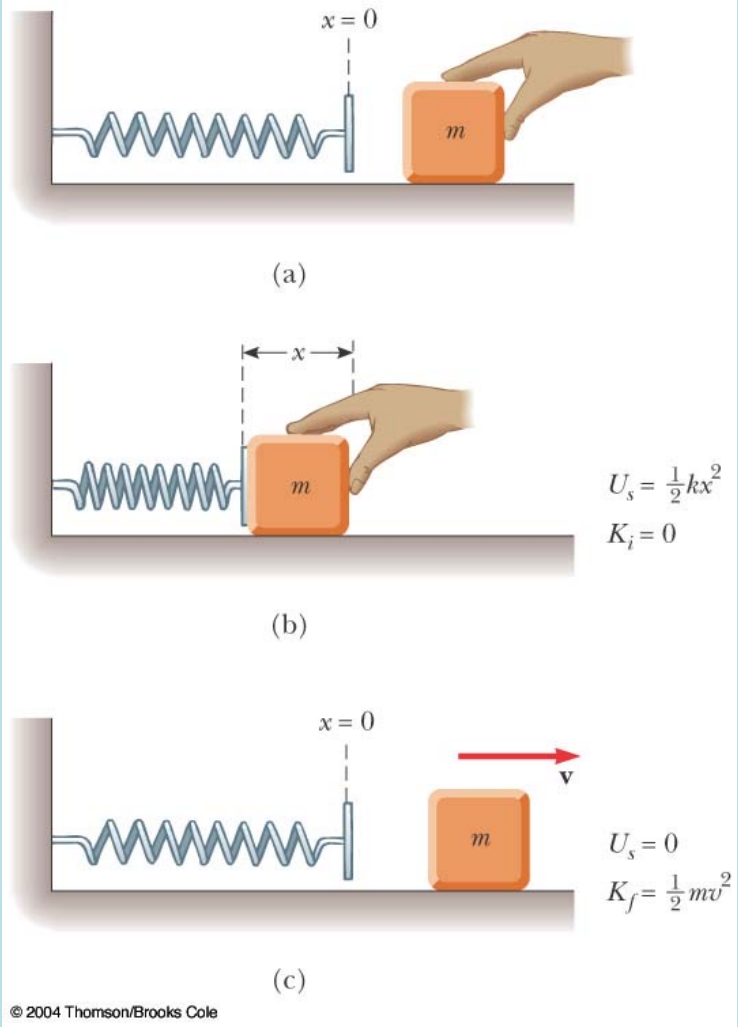
重力位能

取 $U(0) = 0$

$$U(y) = -\int_0^y (-mg) \cdot dy' = mgy$$



$$\int_{x_i}^{x} dx' \cdot x'^n = \frac{1}{n+1} x'^{n+1} \Big|_{x_i}^{x} = \frac{1}{n+1} x^{n+1} - \frac{1}{n+1} x_i^{n+1}$$



彈力位能

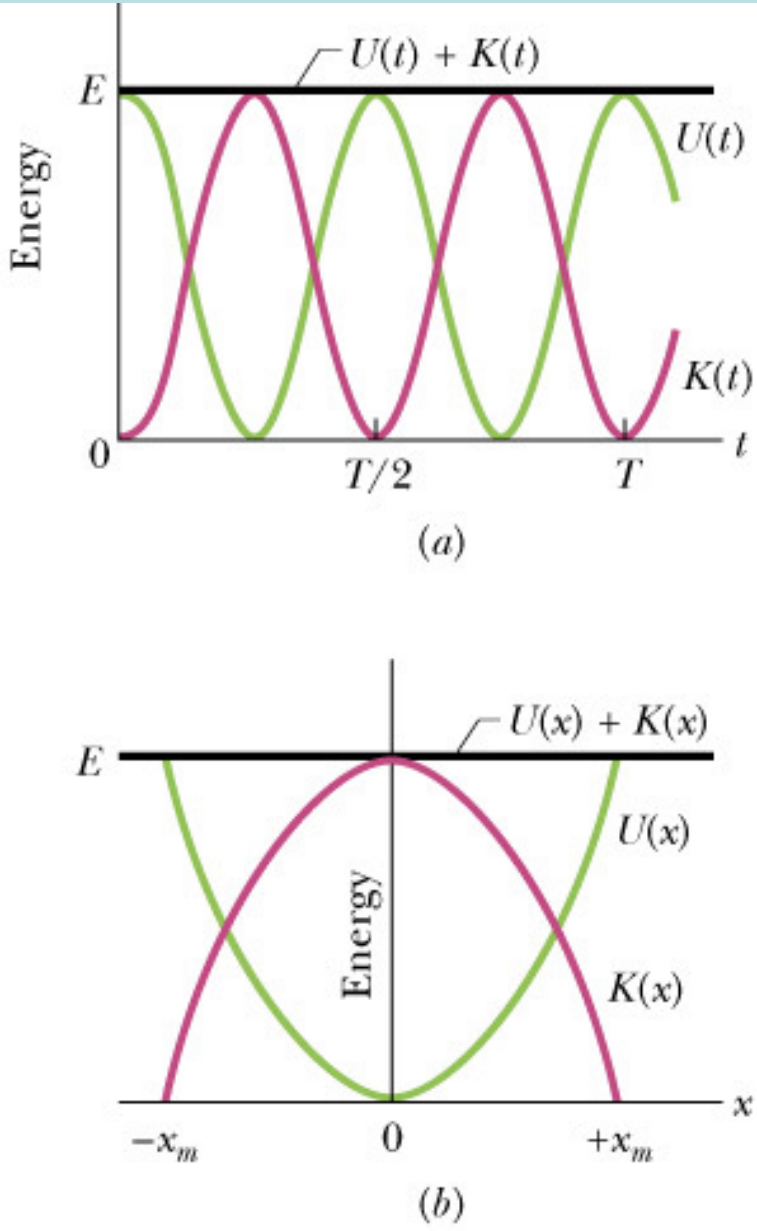
Elastic Potential Energy

取 $U(0) = 0$

$$U(x) = -\int_0^x (-kx') \cdot dx' = \frac{1}{2}kx^2$$



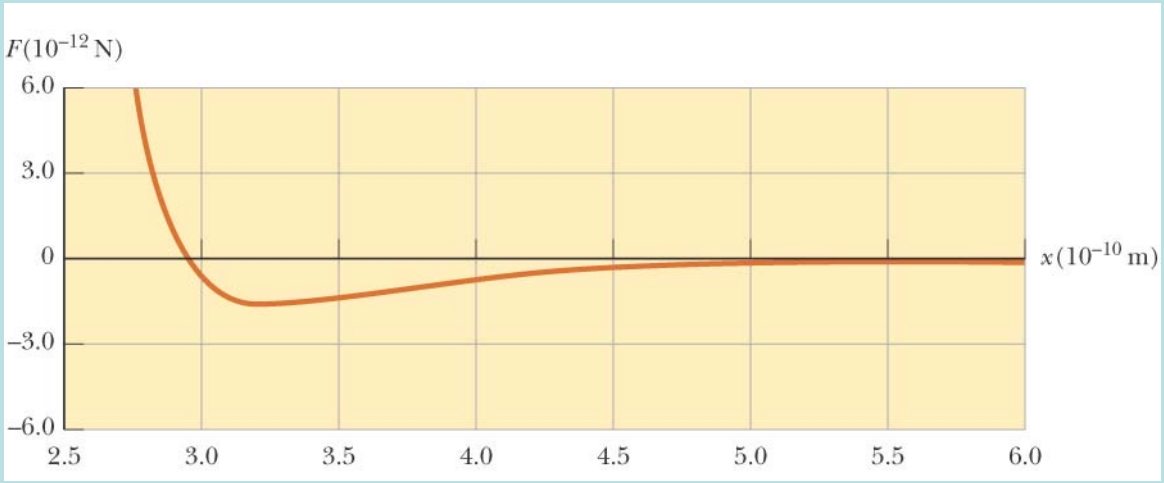
$$\int_{x_i}^{x} dx' \cdot x'^n = \frac{1}{n+1}x^{n+1} - \frac{1}{n+1}x_i^{n+1}$$

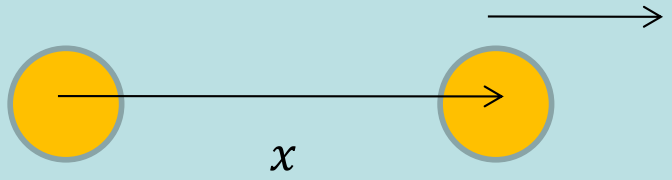


守恒量

$$\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}mv^2=\text{constant}$$

原子力：固定一個原子，使另一個原子在一維x軸上受力運動：





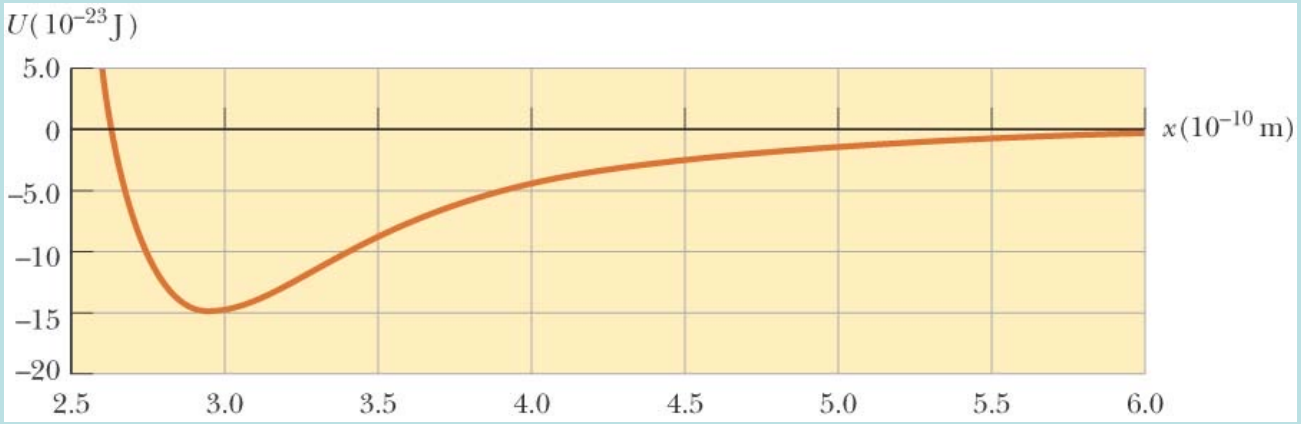
$$F(x)\sim\frac{\varepsilon}{\sigma}\left[12\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{13}-6\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{7}\right]$$

實驗結果

$$U(x)=-\int_{\infty}^{x}dx'\frac{\varepsilon}{\sigma}\left[12\left(\frac{\sigma}{x'}\right)^{13}-6\left(\frac{\sigma}{x'}\right)^{7}\right]=\varepsilon\left[\left(\frac{\sigma}{x'}\right)^{12}-\left(\frac{\sigma}{x'}\right)^{6}\right]\Bigg|_{\infty}^{x}=\varepsilon\left[\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{12}-\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{6}\right]$$

$c=\infty$

$$U(x)=\varepsilon\left[\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{12}-\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{6}\right]$$ 原子力位能



$\sigma=0.263$ nm

$\varepsilon=1.51\times10^{-22}$ J

由位能求力

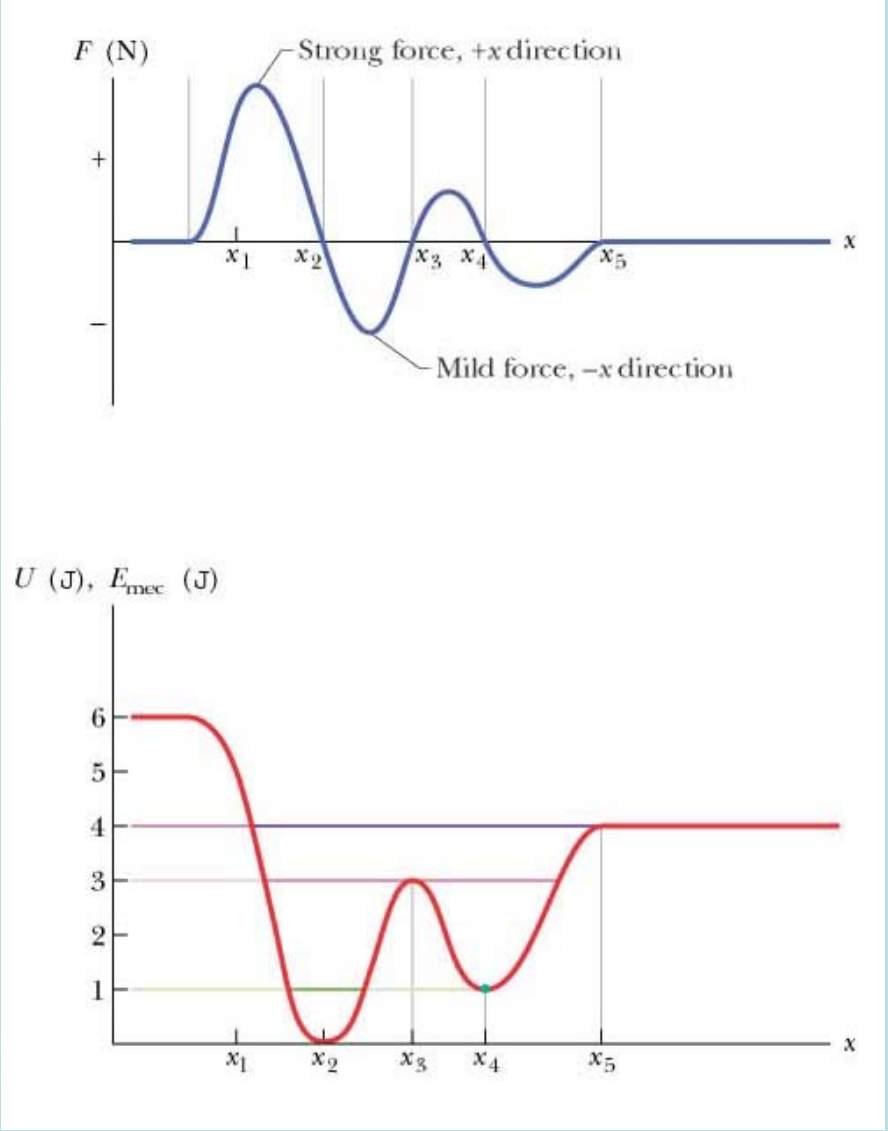
$$U(x) = -\int_{c}^{x} dx'\, F(x')$$

位能函數是力的積分的負號

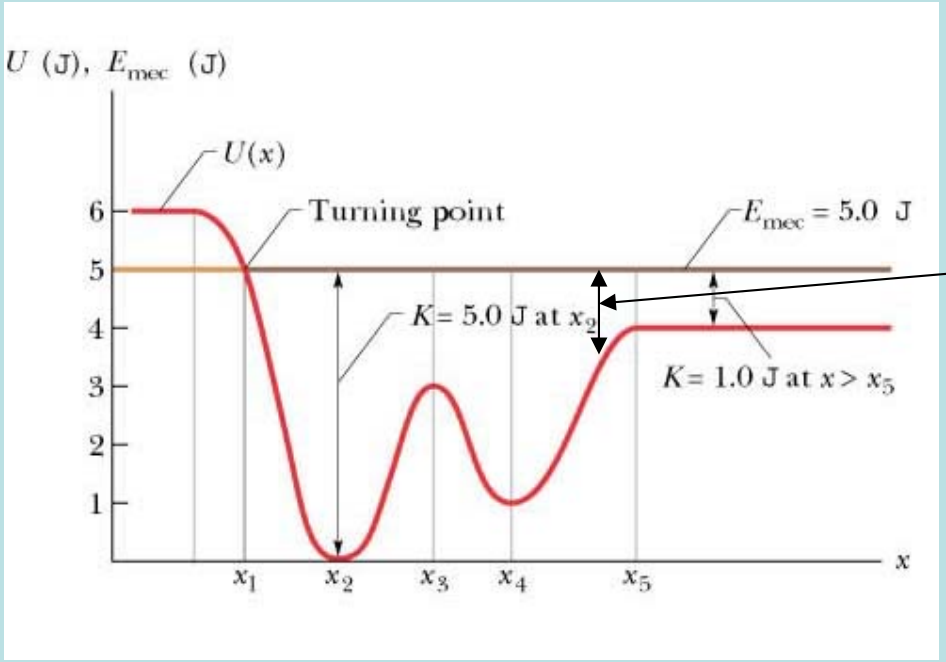
$$F = -\frac{dU}{dx}$$

力是位能函數的微分的負號。

力是位能函數曲線切線斜率的負號。



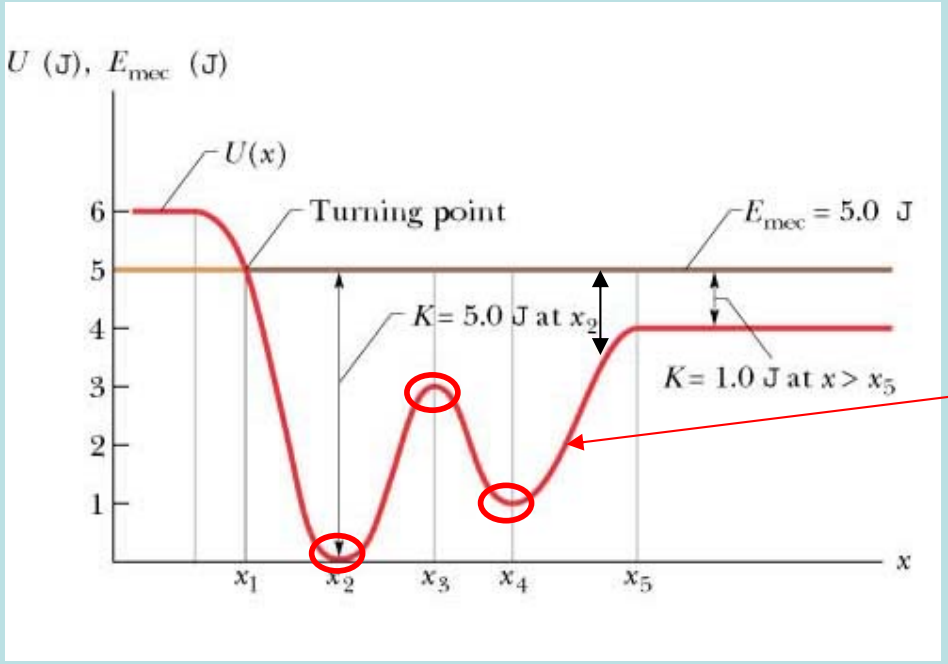
有了位能函數，加上起始的總能量，即可求出在任一位置的速率！

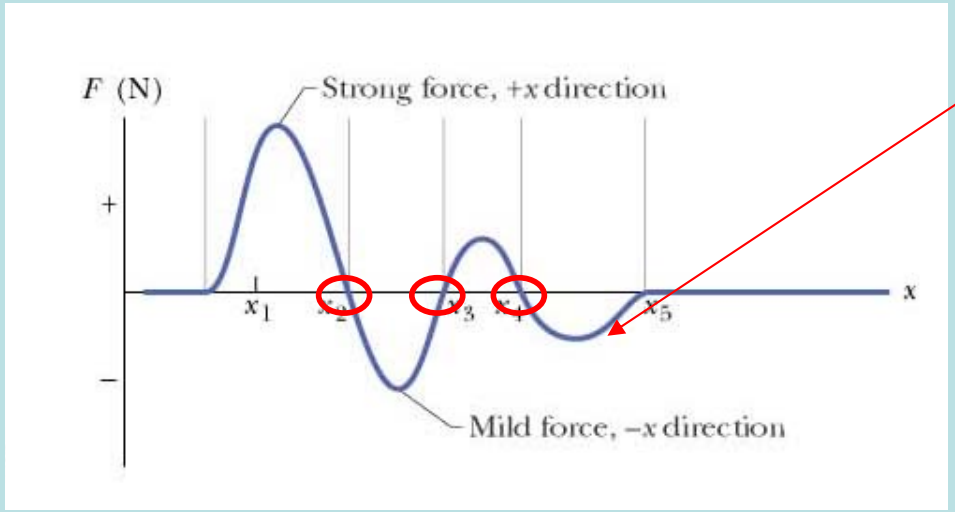


$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x) = E_0$$

動能就是兩線的間隔

$$v = \sqrt{\frac{2[E_0 - U(x)]}{m}}$$





可從力考慮。粒子由無限遠向$-x$方向運動。

位能的正斜率即力為負，加速度為負。

此段落粒子向$-x$方向運動速度增加。

力常有平衡點 Equilibrium Point $x_{2,3,4}$。

$$F(x_{2,3,4}) = -\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x_{2,3,4}} = 0$$

粒子在此處不受力。

位能在平衡點是極值！

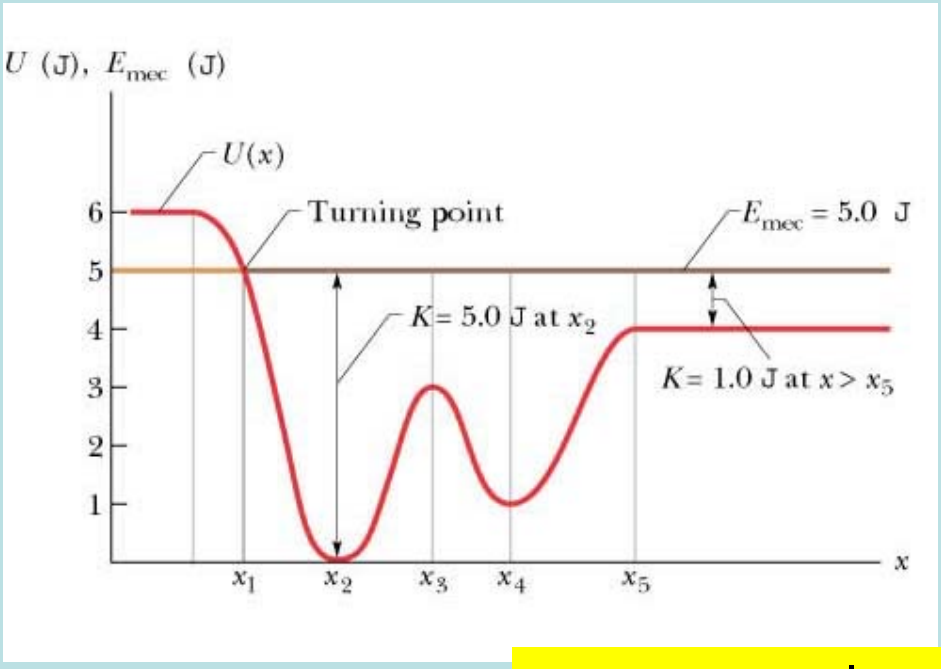
平衡點位置是位能的特徵。

粒子由無限遠向$-x$方向運動到達x_1，就停了下來。

$$v = \sqrt{\frac{2[E - U(x_1)]}{m}}$$ 粒子無法進入位能大於機械能的區域 $U > E$

否則動能就是負值，或說在此區域機械能將永遠無法守恆。

$U(x_1) = E$ x_1就成為折返點。粒子無法進入超越折返點的區域。



平衡點是位能的特徵。 $$F(x_2) = -\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x_2} = 0$$

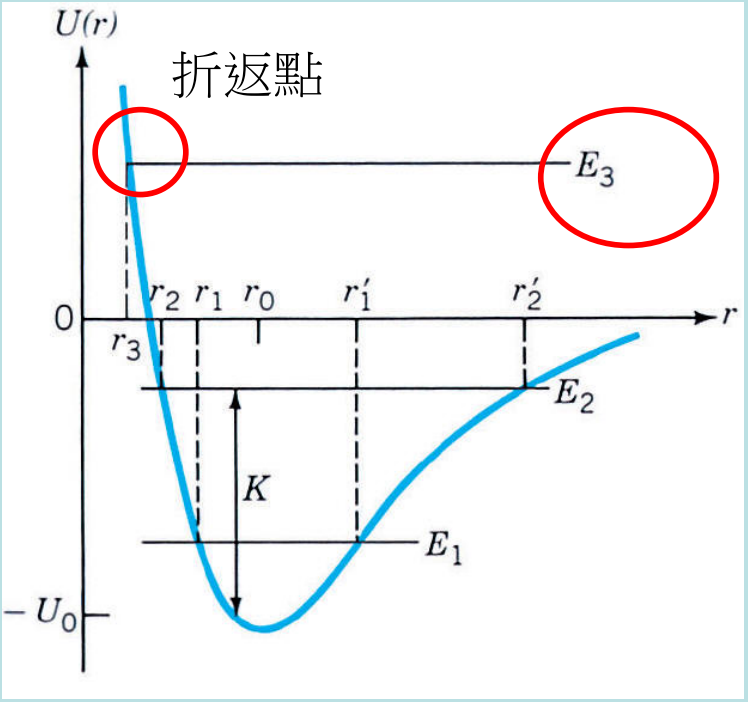
$U(x_1) = E$ x_1折返點位置則與機械能及位能都有關。

$U(x_1) = E$ x_1折返點位置與機械能及位能都有關。

折返點可以讓我們將一個位能中、粒子的一維運動，分成兩種：

自由態：運動範圍並沒有被限制於一個區域內，粒子有零或一個折返點。

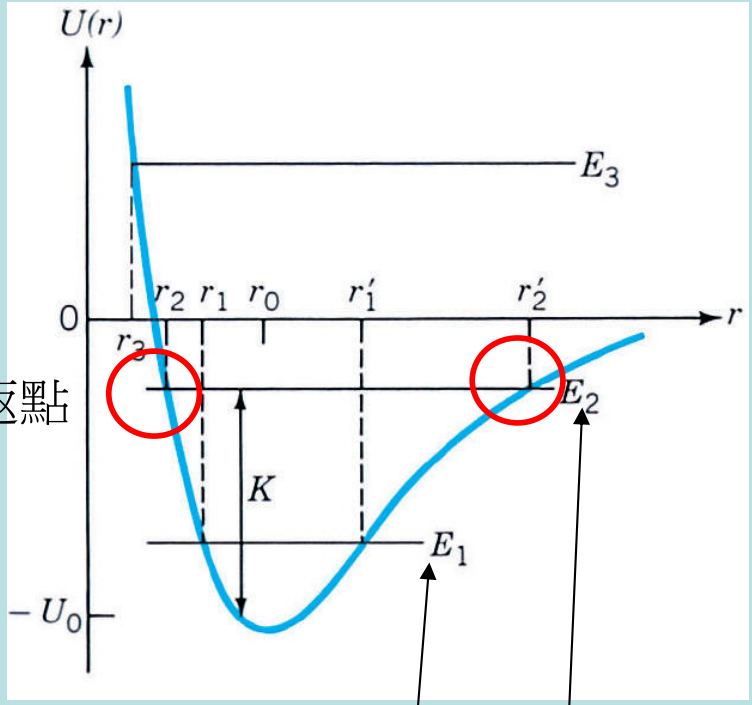
特徵是：這種情況下，機械能必須大於無限遠處的位能。



束縛態 Bound State：運動範圍被限制於一個區域內，

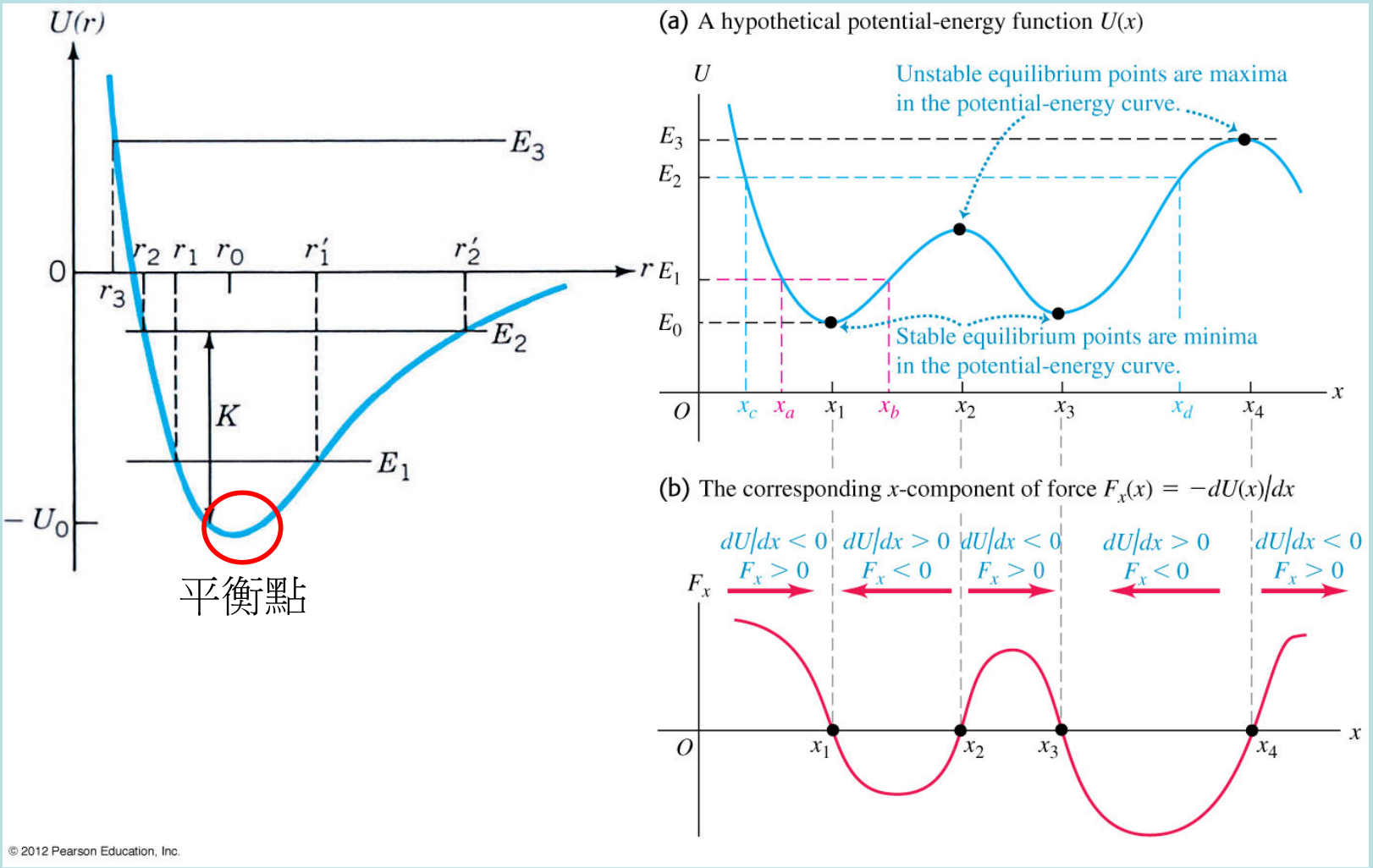
兩端都有 turning point，所以只能拘限在這兩點之間運動。

這種情況，機械能必須小於無限遠處的位能

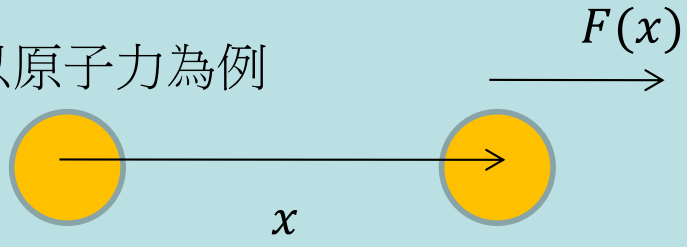


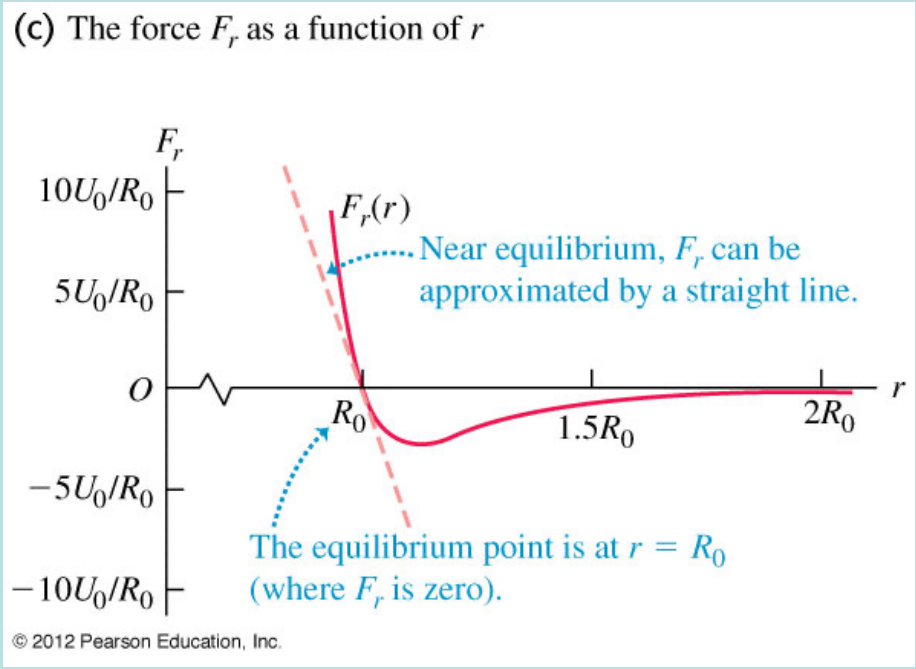
一般來說是否被束縛及範圍會和機械能有關。

在兩個折返點之間，束縛態的運動範圍內一定至少有一個平衡點。



以原子力為例



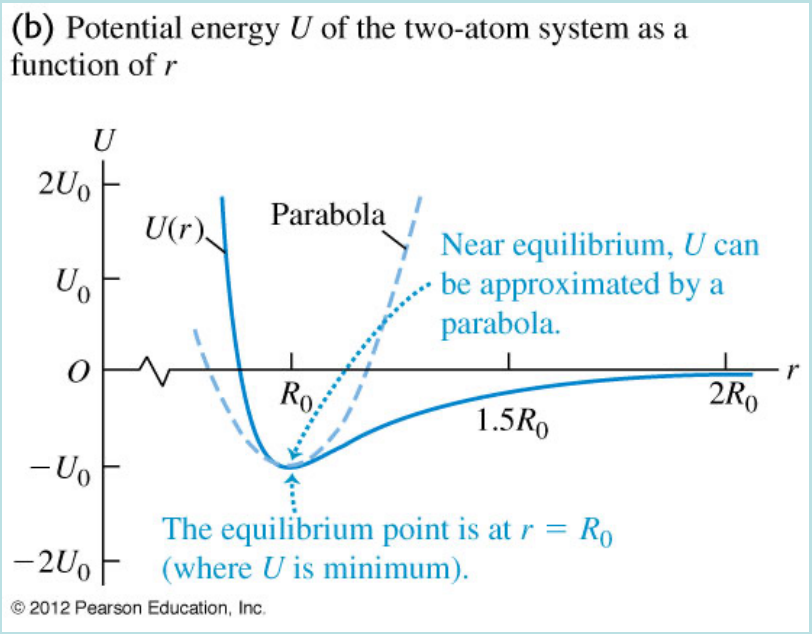


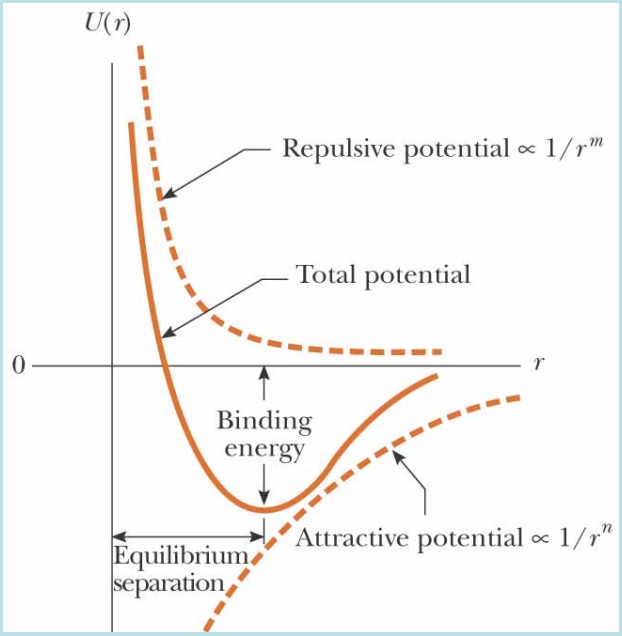
$$F(x) = 4\frac{\varepsilon}{\sigma}\left[12\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{13} - 6\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{7}\right]$$

原子力在遠距時是負的吸引力，近距時是正的排斥力，

由負轉正必定經過零，所以遠近之間必定有一個力為零的平衡點。

在平衡點附近，原子力近似於一直線。





在平衡點附近不遠處震盪的束縛態，他所感覺的位能近似於一拋物線，

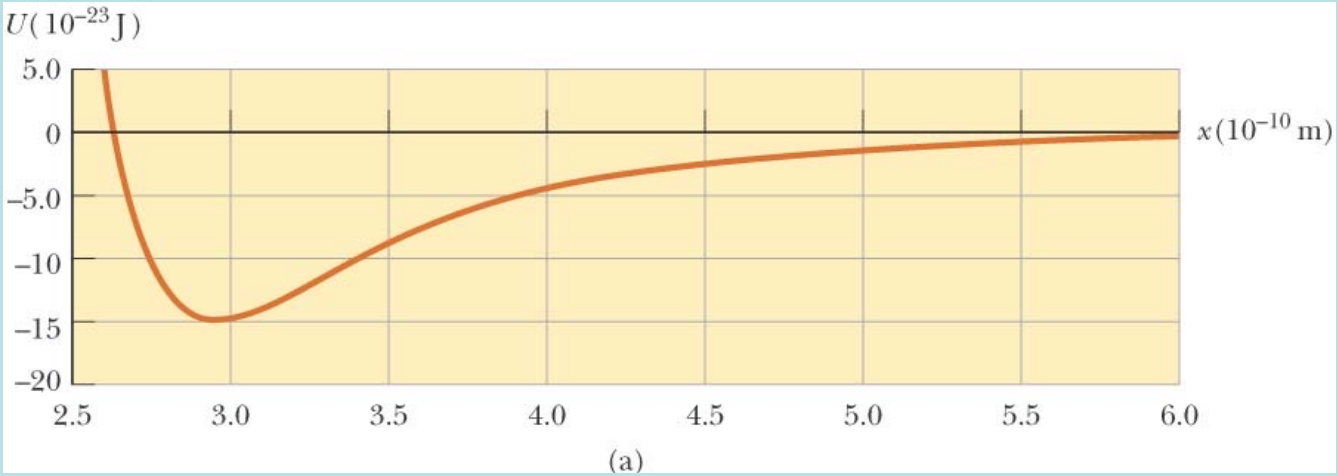
因此近似於一個以平衡點為中心的簡諧運動！

簡諧運動的能量一般會慢慢在束縛範圍被熱消耗掉，

最後束縛態的兩粒子大致就停在平衡點。

束縛能：拆散束縛態所需的能量，平衡點位能與無限遠處位能的差！

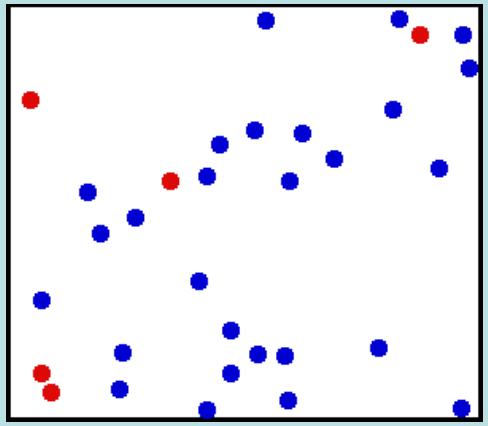
束縛能越大，束縛態越穩定不容易拆散。



但原子力無法形成束縛態 $U(x) = 4\varepsilon\left[\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x}\right)^{6}\right]$

原子力可形成束縛態，但束縛能只有約 0.001eV，

而室溫時熱擾動能量 $kT \sim 0.02\text{eV}$，束縛態會被熱拆散。



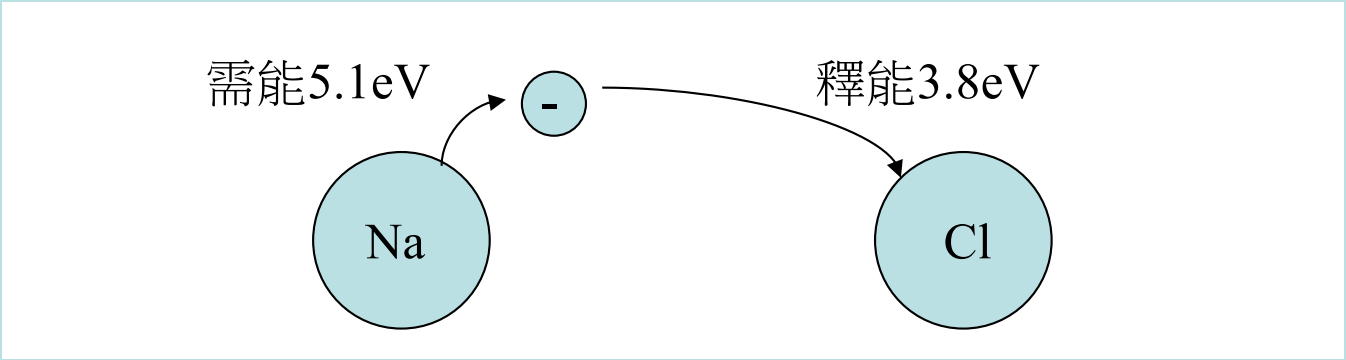
要形成束縛態，必須增加平衡態附近的谷深，即在近距離減低能量。

加大粒子靠近時的吸引力！

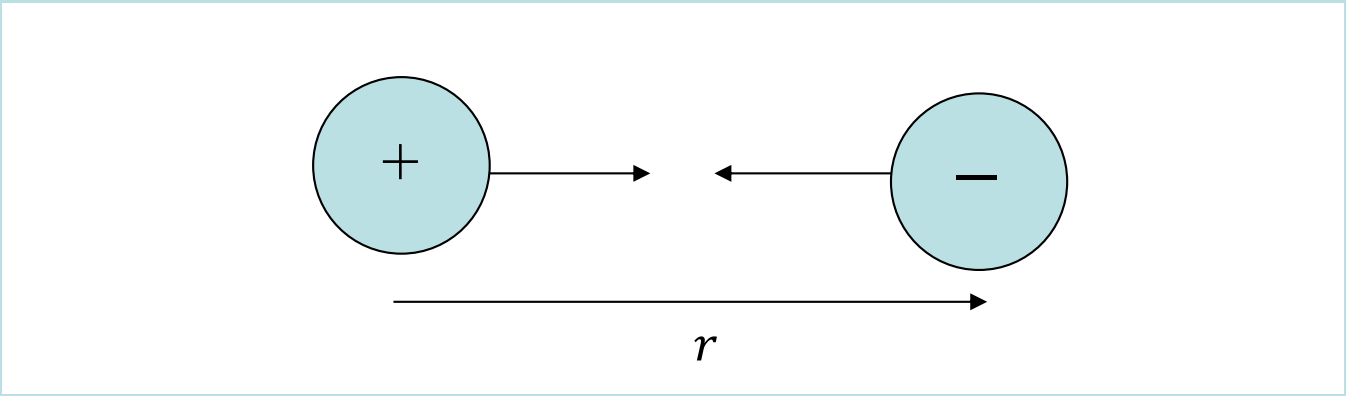
離子束縛態

以靜電力加大吸引力：兩原子可以交換電子後，形成正負兩個離子。

形成離子需要耗能，但兩個相反電荷的離子彼此相吸，靠近時會降低能量。

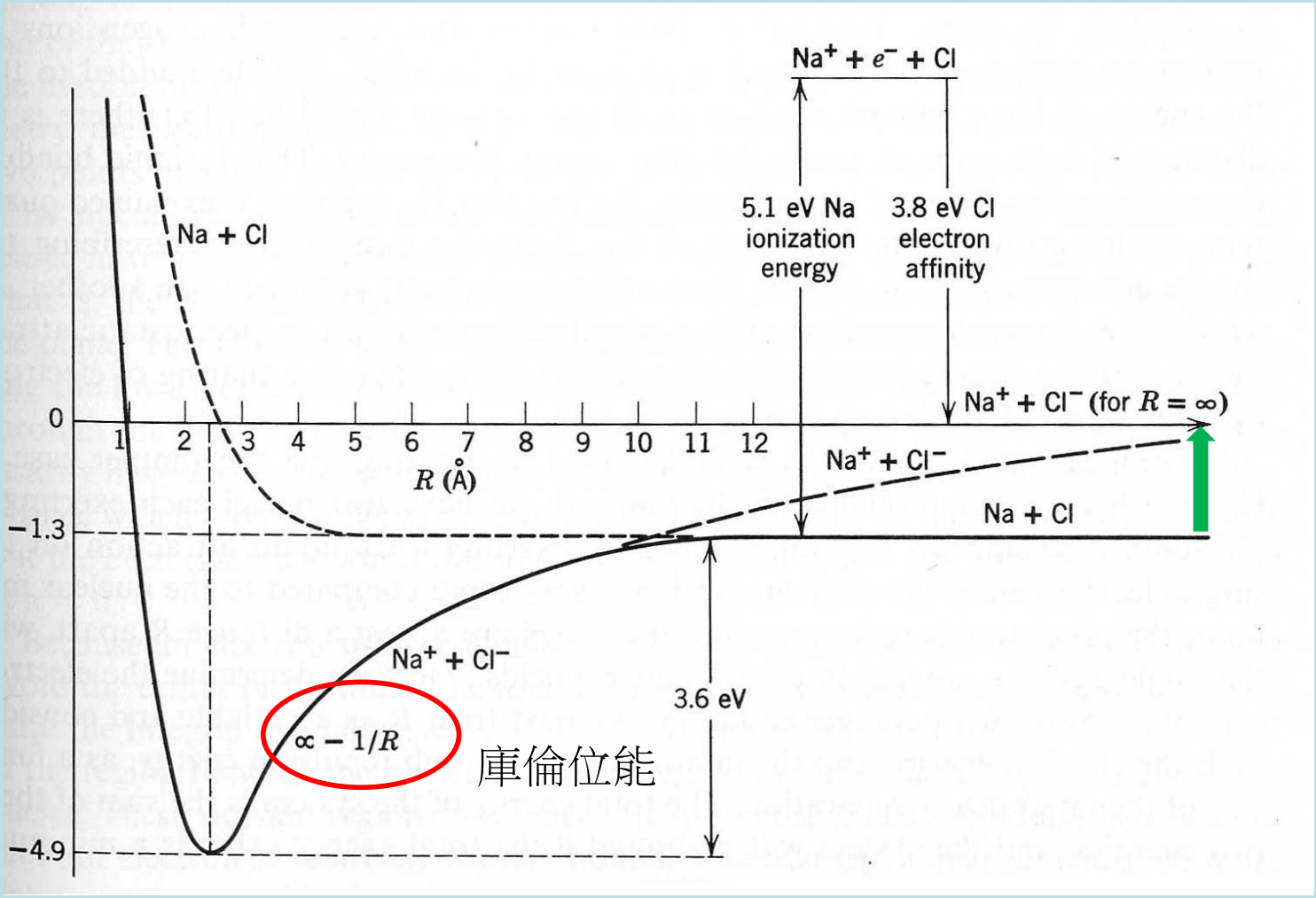


如果降低的能量可以彌補形成離子所耗的能量，就可以形成離子束縛態。



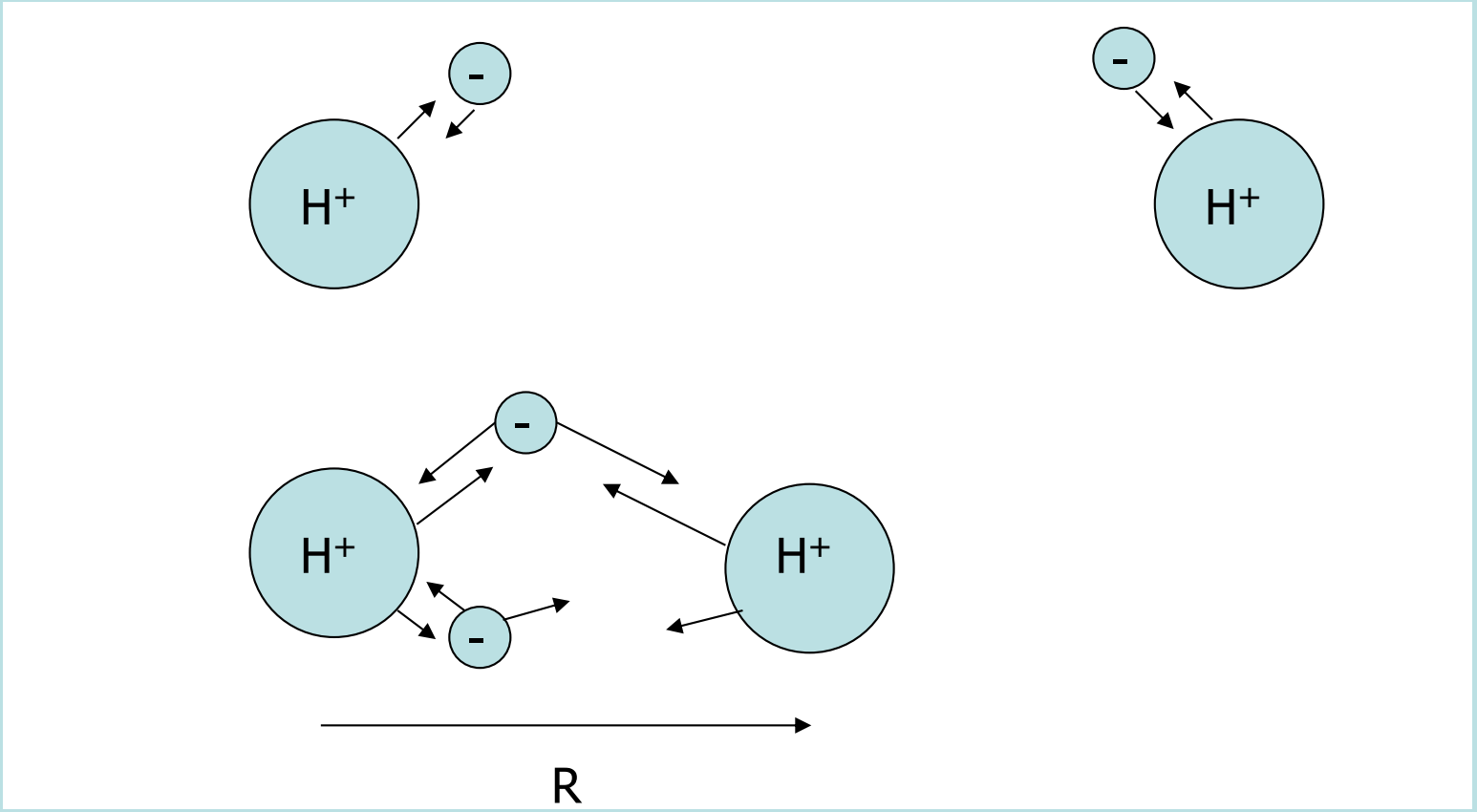
若束縛可釋得1.3eV以上能量，則束縛態能量較低。

離子束縛態



束縛能3.6eV已大於室溫的熱擾動能量，故為穩定的束縛態。

共價鍵束縛態



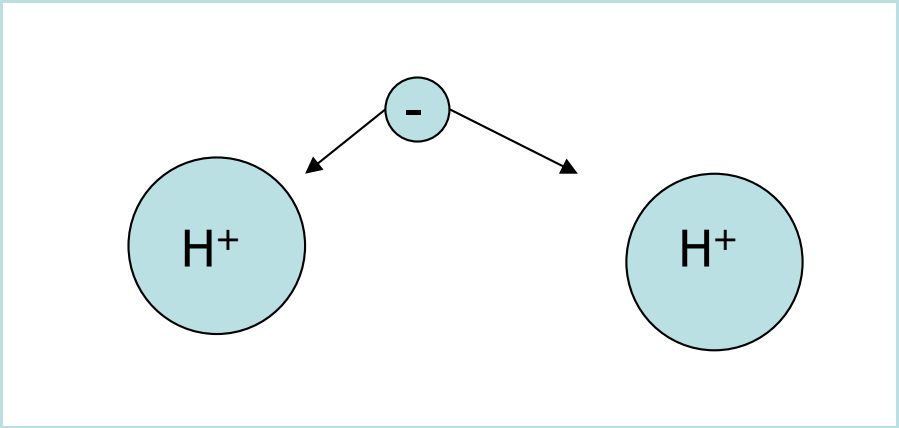
電子共享也可使能量降低，因此形成束縛態。

氫原子核相離甚遠時，電子只能感受一個原子核的吸引力。

但當兩氫原子核靠近時，電子能同時感受兩個原子核的吸引力。

能量降低，所降低的能量與原子核的距離及電子軌道有關。

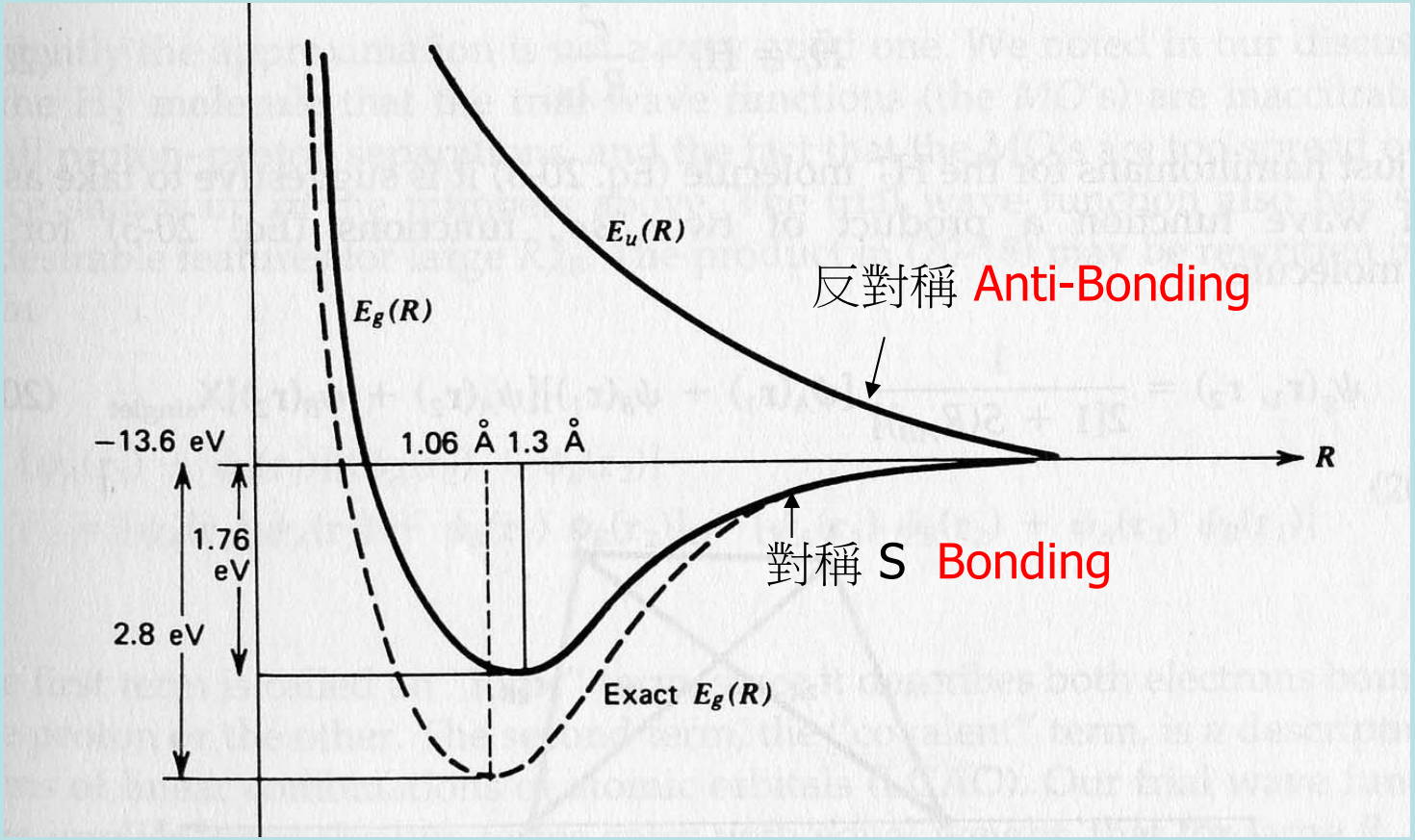
$$\psi(\vec{r}, R)$$



解兩個原子核外的電子能階與對應的能態，

找到電子能態的能階與距離R的關係。

分子中電子能態的能量與距離 R 的關係：



電子因為由兩個原子核共享而增加了負的庫倫位能，

能量會因原子核距離的靠近而降低。

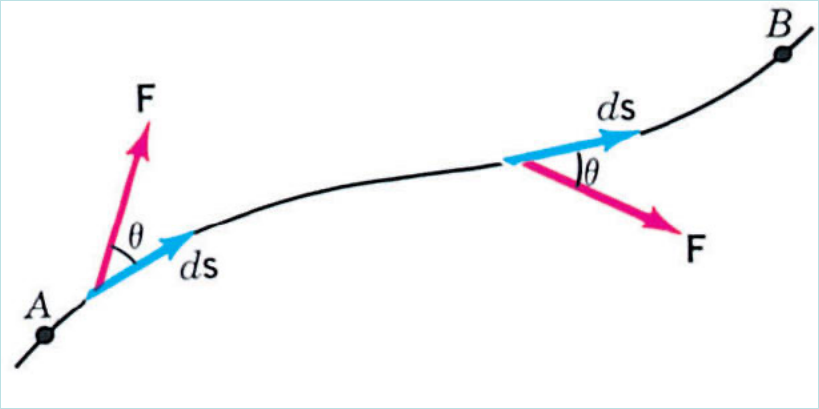
對稱態的確可以形成束縛態

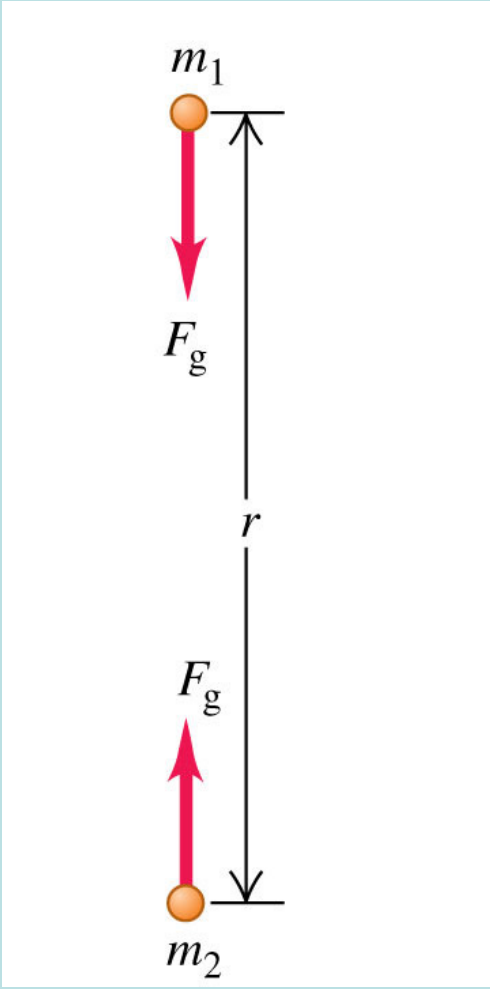
分子軌道 Molecule Orbits σ-bond

3D 空間的功

$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_j} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

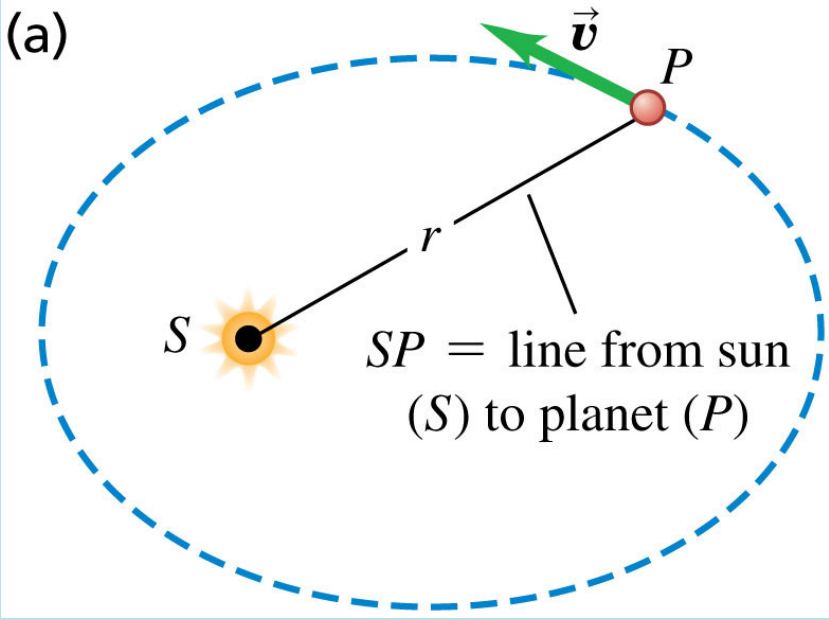
沿某一路徑





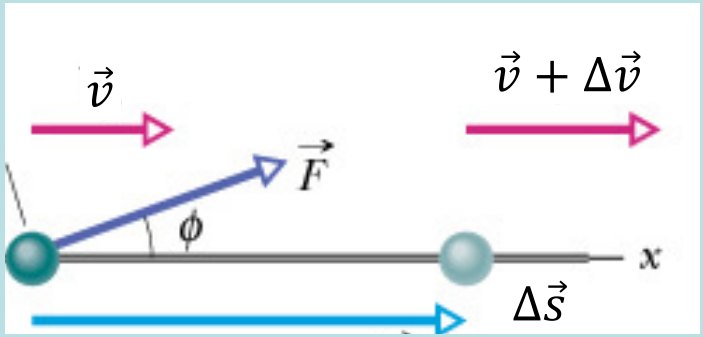
萬有引力只與位置有關，

但粒子運動可以是二維的！



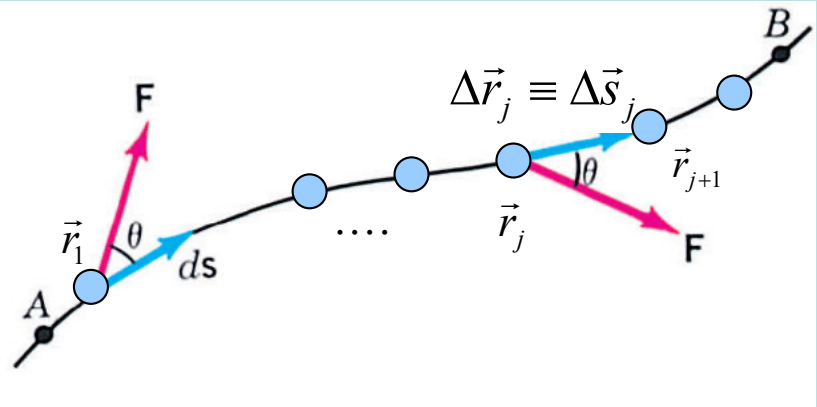
研究 $K = \frac{1}{2}mv^2$ 動能在運動過程中的變化。

考慮一個無限小的過程：



$$\Delta\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}m(\vec{v}+\Delta\vec{v})\cdot(\vec{v}+\Delta\vec{v}) - \frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v} \approx m\Delta\vec{v}\cdot\vec{v}$$
$$= m\Delta\vec{v}\cdot\frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t} = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\cdot\Delta\vec{s} = m\vec{a}\cdot\Delta\vec{s} = \vec{F}\cdot\Delta\vec{s} \equiv W$$

功是力向量與位移向量的內積！



$$\Delta\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \vec{F}\cdot\Delta\vec{s} \equiv W$$

將無限多無限小的過程組合起來，即成為一個有限的過程：

$$\left(\frac{1}{2}mv^2\right)_f - \left(\frac{1}{2}mv^2\right)_i = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta s\to 0}} \sum_{j=0}^{N} \Delta W_j \equiv \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta s\to 0}} \sum_{j=0}^{N} \left(\vec{F}_j\cdot\Delta\vec{s}_j\right) \equiv \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_j} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{s} = W_{i\to f}$$

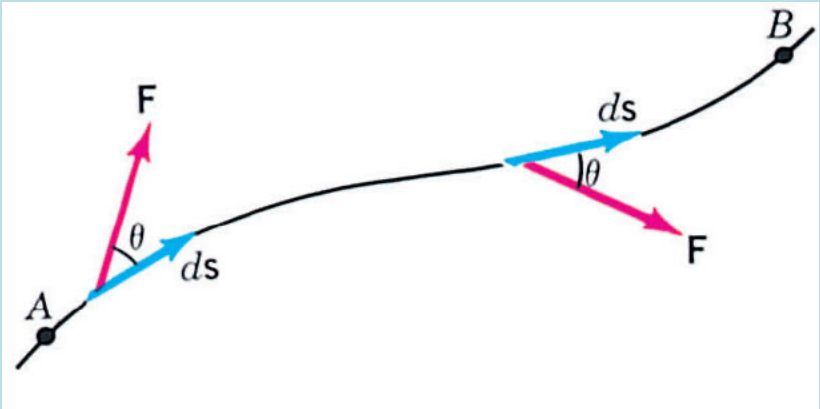
向量的線積分

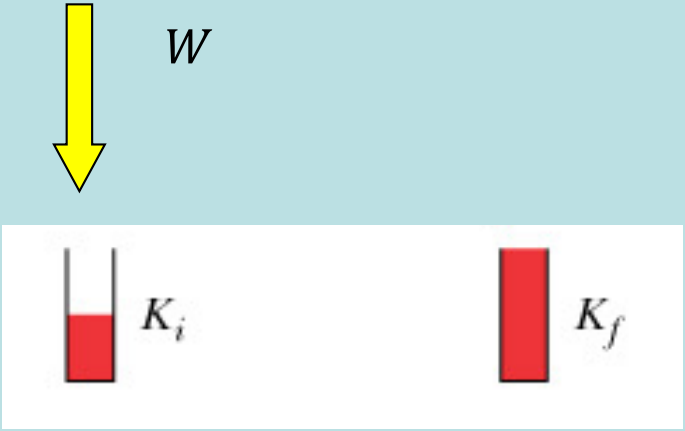
$$W = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta s\to 0}} \sum_{j=0}^{N} \left(F_j\cdot\Delta x_j\right) = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\cdot dx$$

單變數函數的一般積分

3D空間的功與動能

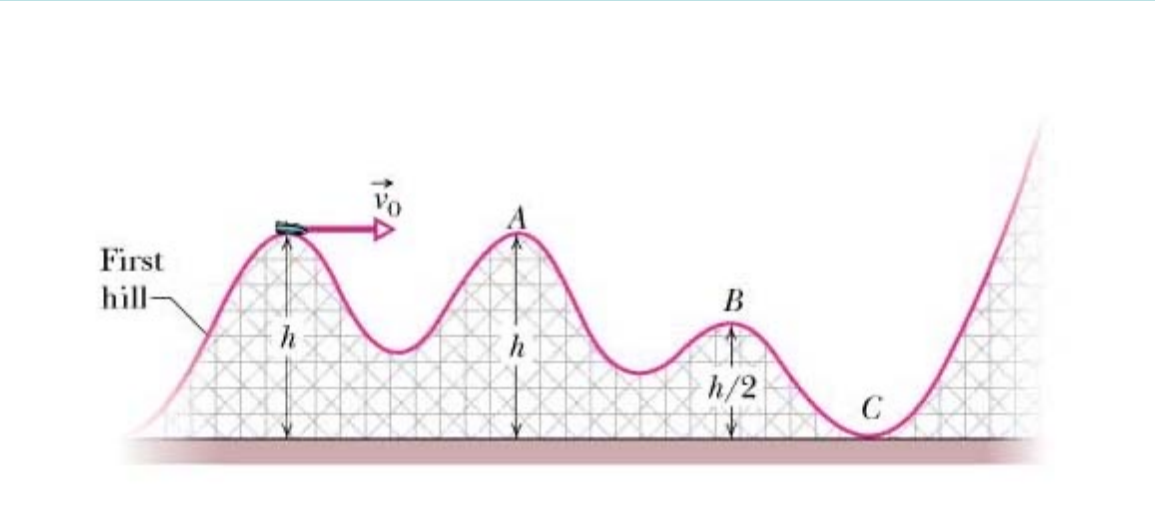
$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_j} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

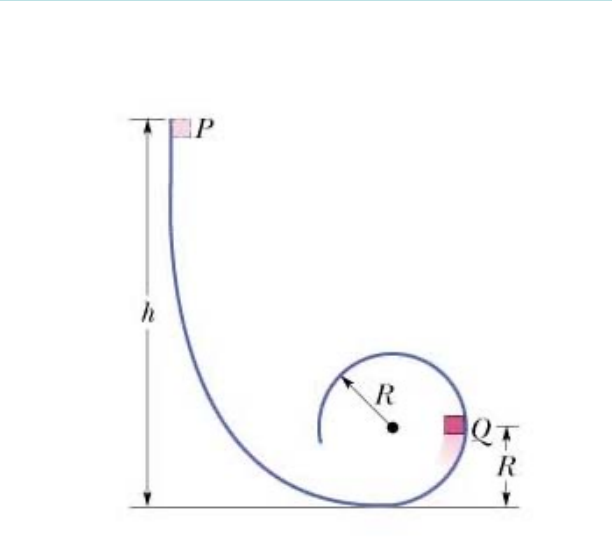




功造成動能的變化

正向力與位移垂直，因此完全不作功





因正向力未知，以牛頓定律計算會相當困難

以能量守恆來討論，正向力根本不會出現在問題中。

$$U(x) = -\int_{c}^{x} F(x') \cdot dx'$$

1D 空間的位能

3D 空間的位能

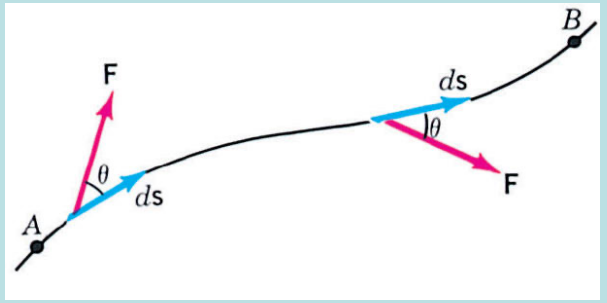
猜測：位能是由參考點$\vec{c}$運動到$\vec{r}$的過程中，此力所作的功負號：

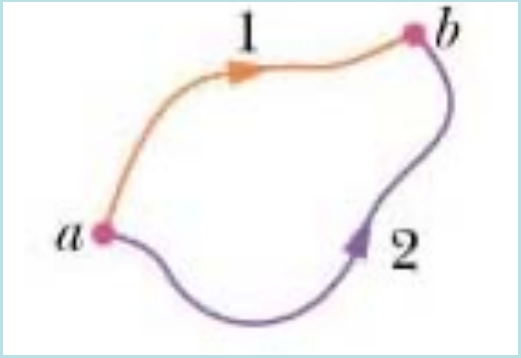
$$U = -\int_{\vec{c}}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{s}\,?$$

但在2D以上的空間，有很多條路徑可以從起點運動到末點。

所以功的計算原則上必須標明沿哪一條路徑。

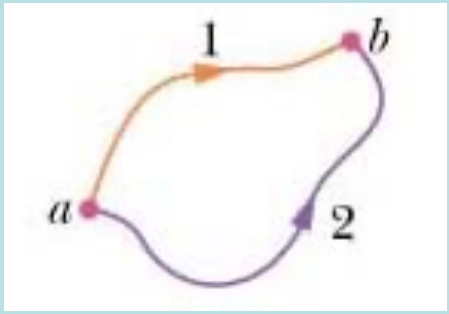
畢竟，功W是一個過程的物理量。





$$W_1 = \int_{a\ 1路徑}^{b} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{s}$$

$$W_2 = \int_{a\ 2路徑}^{b} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{s}$$



$$U = -\int_{\vec{c}}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{s}\,?$$

$$W_1 = \int_{a\ 1\text{路徑}}^{b} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{s}$$

$$W_2 = \int_{a\ 2\text{路徑}}^{b} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{s}$$

$W = -\Delta U = -U(\vec{b}) + U(\vec{a})$ 只和前後點位置有關

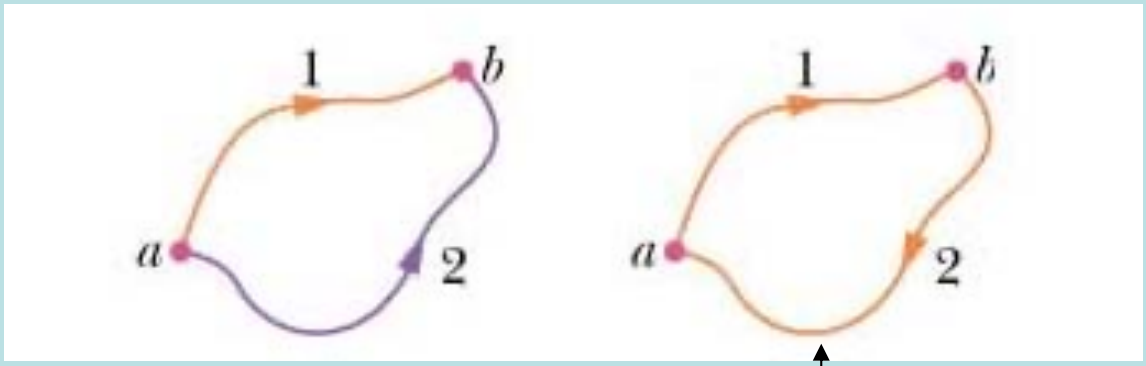
位能若只是一個空間位置的性質，位能差必須與路徑無關。

位能的定義要能夠成立，功必定與路徑無關！

對任意兩條路徑：$W_1 = W_2$　位能存在的必要條件

滿足此條件的力稱為保守力，可以以位能描述。

這個條件可以寫成另一個形式



若是位能定義要唯一 ⇒ $W_1 = W_2$ 對任意兩路徑

將倒行的路徑 2 與路徑 1 組成一封閉路徑！

$$W_1 - W_2 = 0 = \oint \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

沿任一條封閉路徑，力所作的功必為零！

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

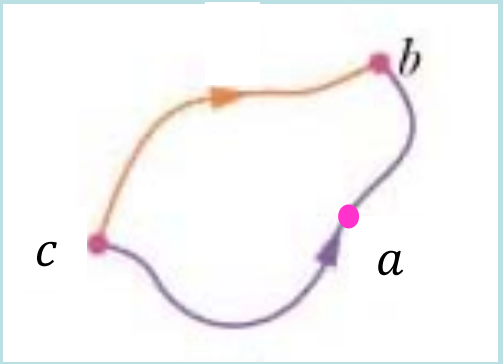
保守力條件

保守力才能定義位能！

如果$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$

可以設一個參考點 $\vec{c}$ 使得$U(\vec{c}) = 0$。定義位能為：

$$U(\vec{r}) - U(\vec{c}) = U(\vec{r}) = -\int_{\vec{c}}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$



$$\Delta U = U(\vec{b}) - U(\vec{a}) = \int_{\vec{c}}^{\vec{b}} \vec{F} \cdot d\vec{s} - \int_{\vec{c}}^{\vec{a}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\vec{c}}^{\vec{b}} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{\vec{a}}^{\vec{c}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = W$$

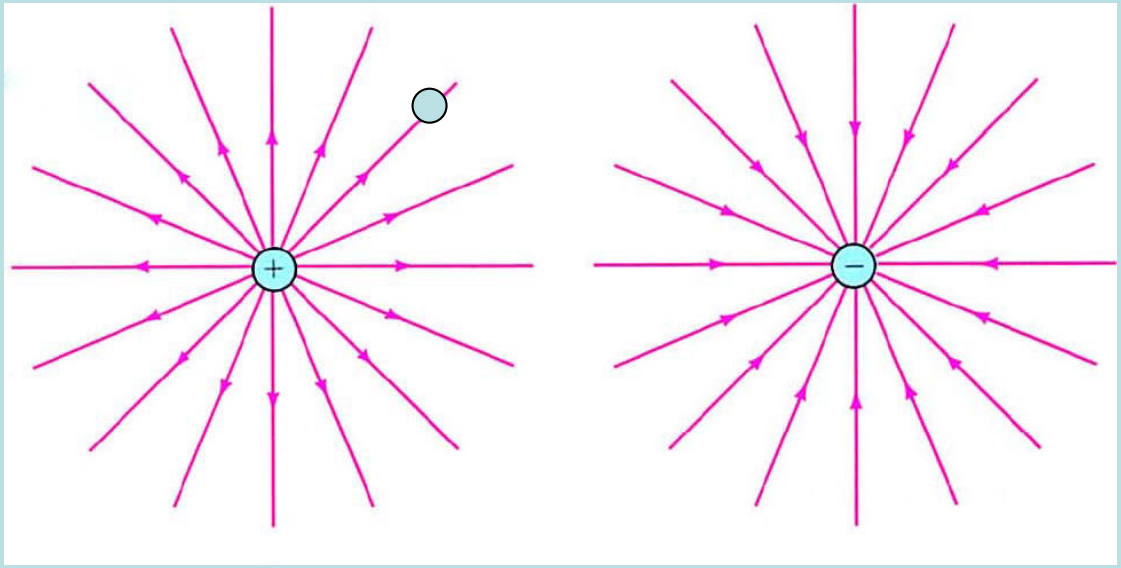
功可以寫成一個物理量U的前後差，保守力條件為位能存在的充分條件：

位能$U(\vec{r})$就是由參考點 $\vec{c}$ 沿任一路徑運動到 $\vec{r}$ 的過程中，此力所作的功的負數。

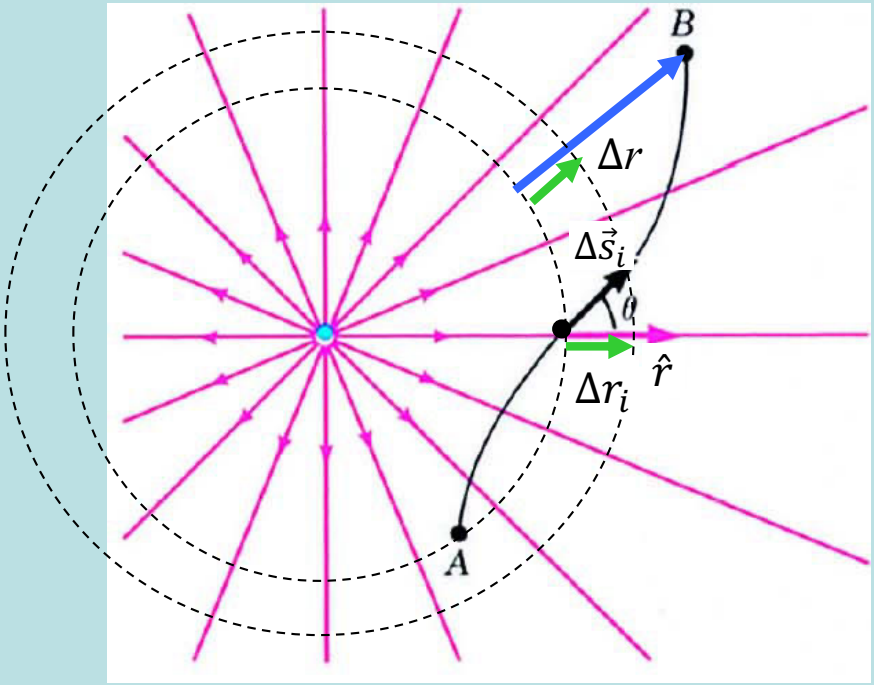
$K + U$ 守恆



萬有引力與靜電力是不是保守力？



考慮一固定於原點的質量M旁可運動的小質量m， m所受萬有引力為 $\vec{F} = \frac{GMm}{r^2}\hat{r}$



$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$= \lim_{\Delta r \to 0} \sum_i \frac{GMm}{r_i^2}\hat{r}_i \cdot \Delta\vec{s}_i = \lim_{\Delta r \to 0} \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r_i^2}\Delta r_i$$

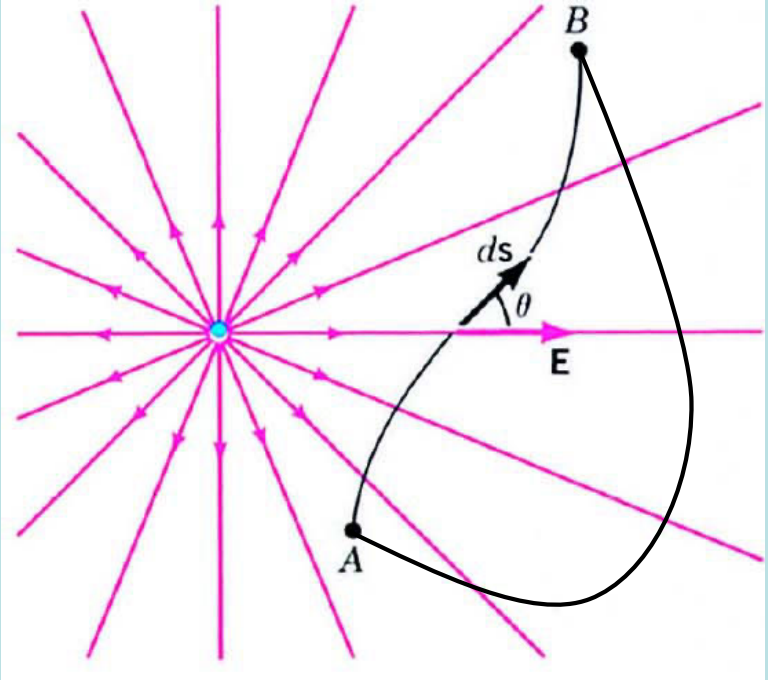
$\Delta\vec{s}_i$投影於力的方向就是距離r的變化 $\hat{r} \cdot \Delta\vec{s} = \Delta r$

$$= \int_{r_A}^{r_B} \frac{GMm}{r^2} \cdot dr$$

沿此路徑(黑)所作功與沿徑向$\hat{r}$的路徑(藍)相等！

3D空間中萬有引力的功與一維$\hat{r}$空間等價！

$$= -\left(\frac{GMm}{r_B} - \frac{GMm}{r_A}\right)$$



3D空間中萬有引力的功與一維$\hat{r}$空間等價！

$$W = -\left(\frac{GMm}{r_B} - \frac{GMm}{r_A}\right)$$

很明顯無論走哪一條路徑，功都是相等的。

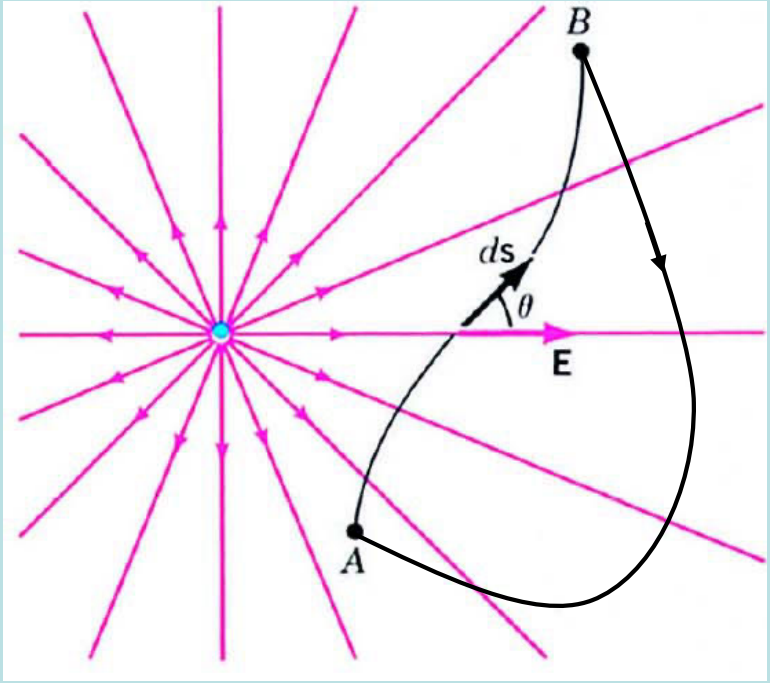
靜電力為保守力，可以定義電位能

$$U(B) - U(A) = -W = \left(\frac{GMm}{r_B} - \frac{GMm}{r_A}\right)$$

$$U(\vec{r}) = \frac{GMM}{r}$$

萬有引力位能

從A出發再回到A，形成一封閉曲線。

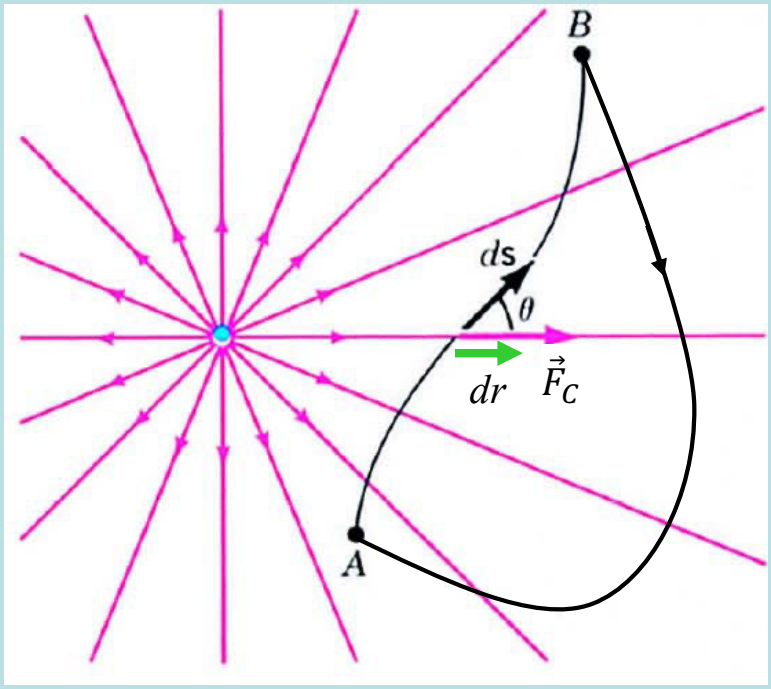


$$\oint \vec{F}_E \cdot d\vec{s} = -\left(\frac{GMm}{r_A} - \frac{GMm}{r_A}\right) = 0$$

沿任一封閉曲線，萬有力所作的功必為零！

同樣的證明適用於任何中心力，

中心力是力的方向沿著半徑 r 方向，大小由距離決定



$$\vec{F}_C = f(r)\cdot\hat{r}$$

$$W = \int \vec{F}_C \cdot d\vec{s} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} f(r)\cdot(\hat{r}\cdot d\vec{s}) = \int_{r_i}^{r_f} f(r)\cdot dr$$

三維的中心力所作的功等同於沿 r 方向一維的力

從A出發再回到A，形成一封閉曲線:

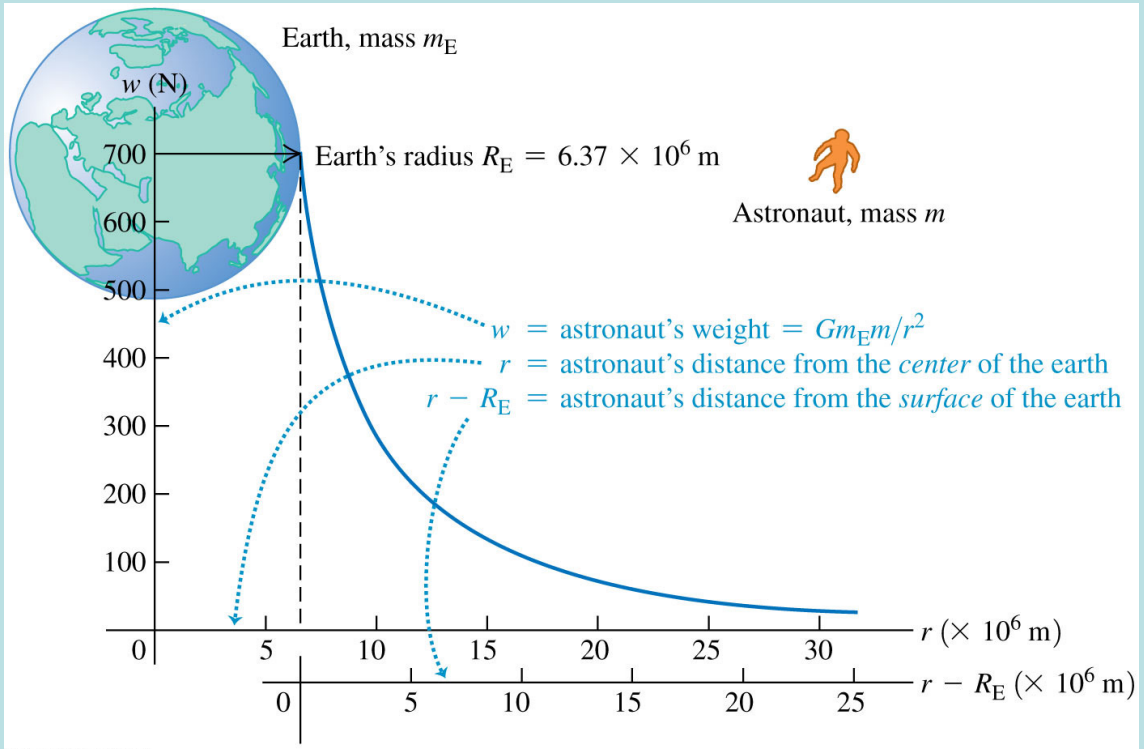
$$\oint \vec{F}_C \cdot d\vec{s} = \int_{r_i}^{r_i} f(r)\cdot dr = 0$$

任何中心力（原子力、萬有引力）都是保守力！都可定義位能。

$$U(\vec{r}) = -\int_{\vec{c}}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \left(\frac{GMm}{r} - \frac{GMm}{r_c}\right)$$

選擇 $U(\infty) = U(c) = 0$

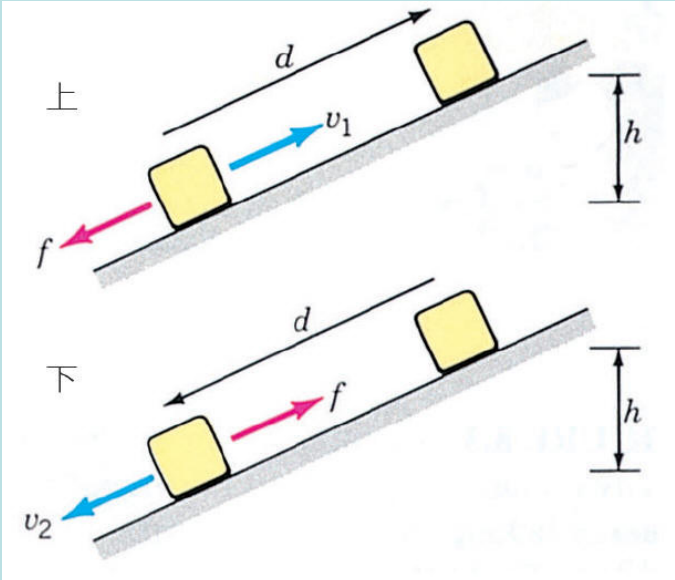
$$U(\vec{r}) = -\int_{\vec{c}}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r}$$



摩擦力是否是保守力？

動摩擦力大小是常數，但方向與速度有關

$W = -f_k d$　　動摩擦力與位移永遠反向，所作必為負功



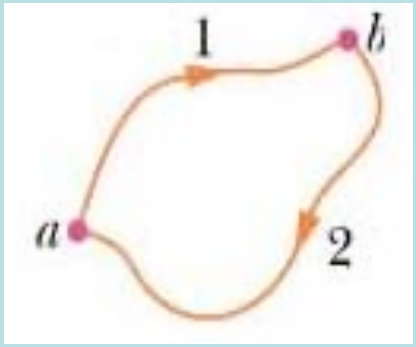
將方塊在斜面上移到高處後，再移回到原位

$W_f = -f_k d - f_k d = -2f_k d \neq 0$　　摩擦力不是保守力

相對地，同樣過程中，重力所作的功為零。

$W_g = -mgh + mgh = 0$

在三度空間中也是如此：



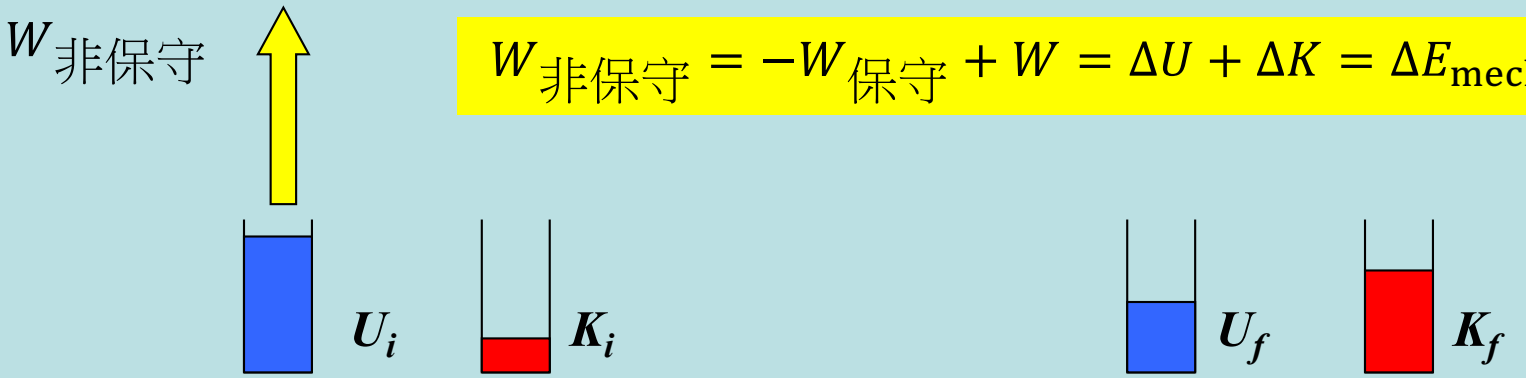
$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = -f_k \oint d\vec{s} = -f_k S \neq 0$$

S是封閉路徑的全長。

摩擦力不是保守力

將粒子與保守力的施力者視為一個系統，所施的力可以位能處理。

非保守力所作的功無法寫成一個位能的前後差，只能以功來處理。



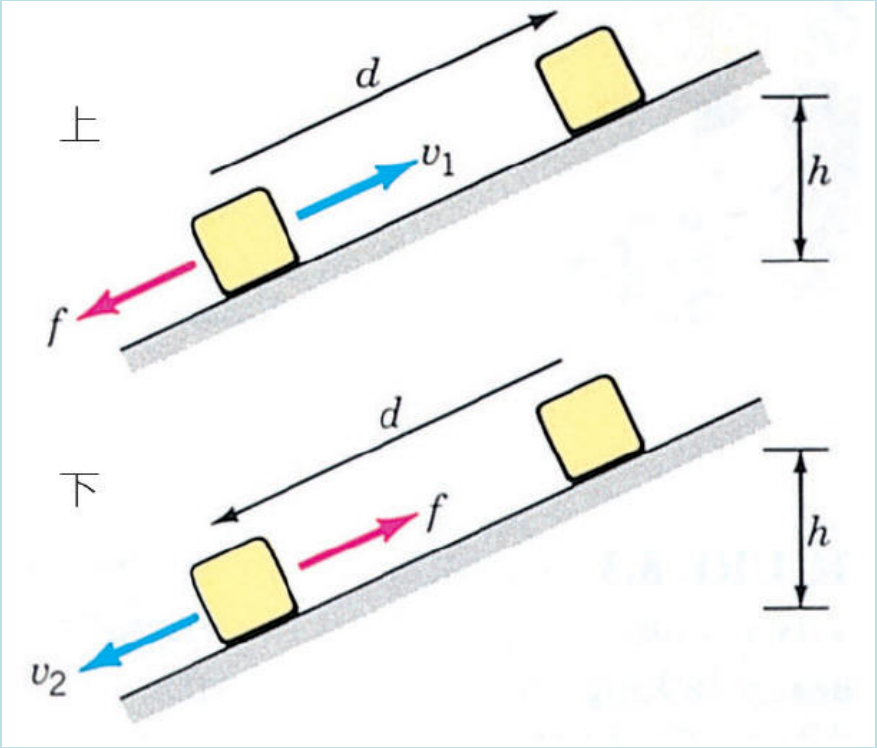
$$W_{非保守} = -W_{保守} + W = \Delta U + \Delta K = \Delta E_{\text{mech}}$$

推廣後的功與動能原理

機械能並不守恆。

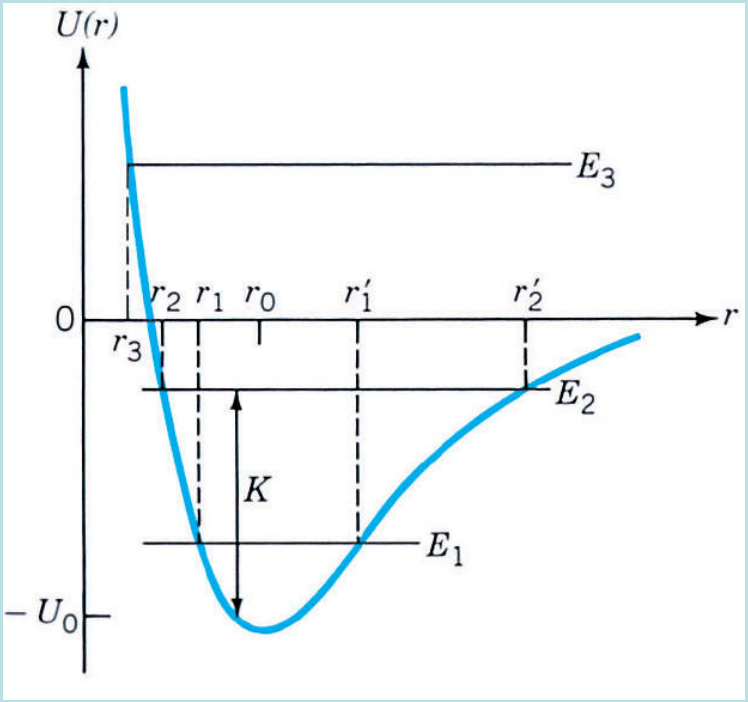
非保守力的功等於機械能的變化。

摩擦力的功為負值，所以摩擦力使機械能減小。



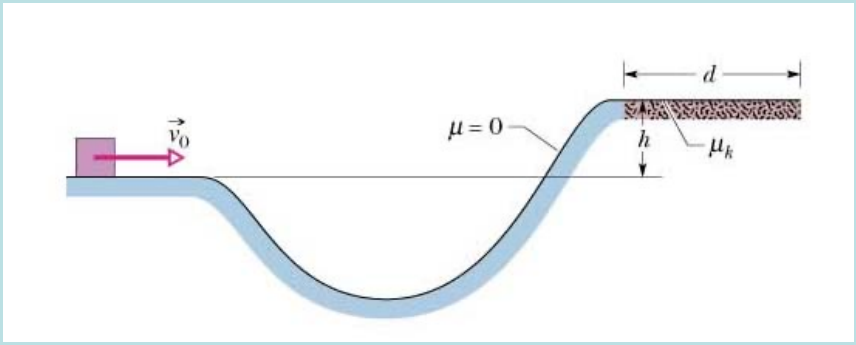
$$W = -f_k d = \Delta(K + U) = \Delta E_{\text{mech}}$$



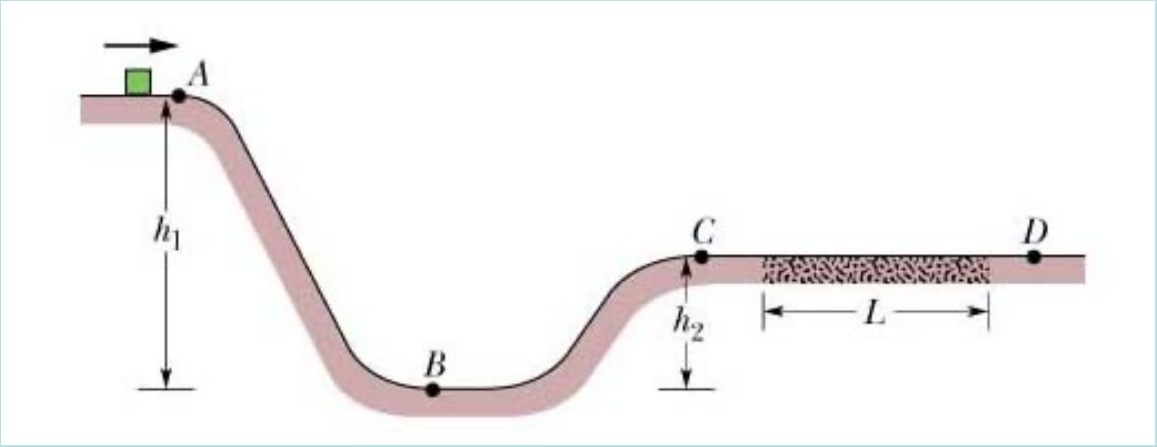


位能可以自然轉為動能，摩擦力會慢慢消耗機械能。

自然界有一個傾向趨向最低位能處！



$$W = -f_k d = \Delta(K + U) = \Delta E_{\text{mech}}$$



有摩擦，似乎機械能就不守恒！

但有摩擦，溫度會增加！

焦耳的實驗發現：

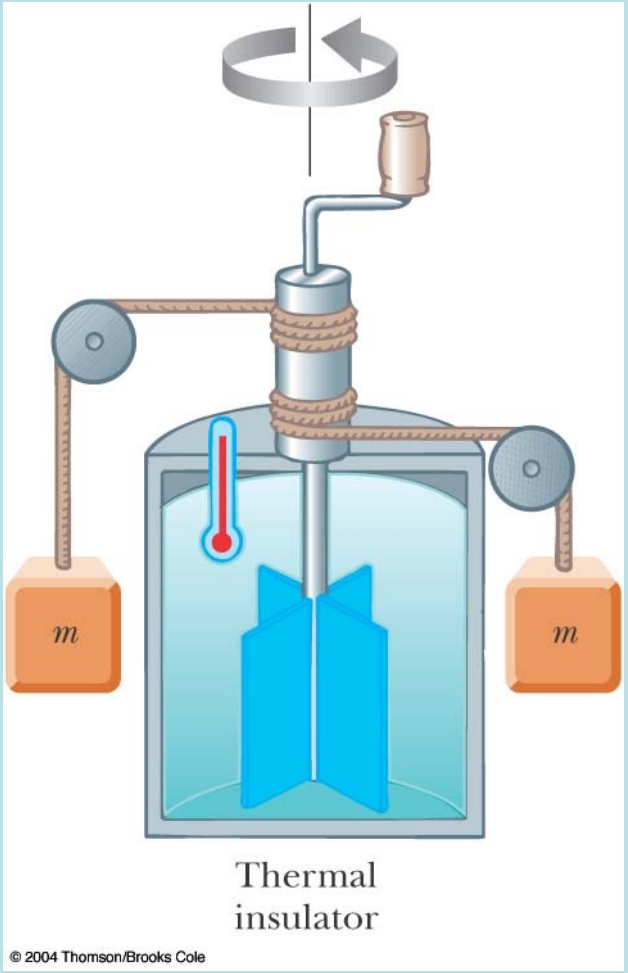
摩擦力所作的功等於熱量，

物體吸收熱量後，熱量正比於溫度差：

$$-W_{\text{friction}} = Q = mc(T_f - T_i) = mcT_f - mcT_i$$

原來，摩擦力的功也可以寫成一個物理量的前後差！

只是這個物理量與位置無關，而是與溫度有關！



如果將溫度考慮進來，

摩擦作的功，也如位能，可以寫成一個物理量在前後狀態的改變！

此物理量顯然與外在運動狀態無關，定義為內能：

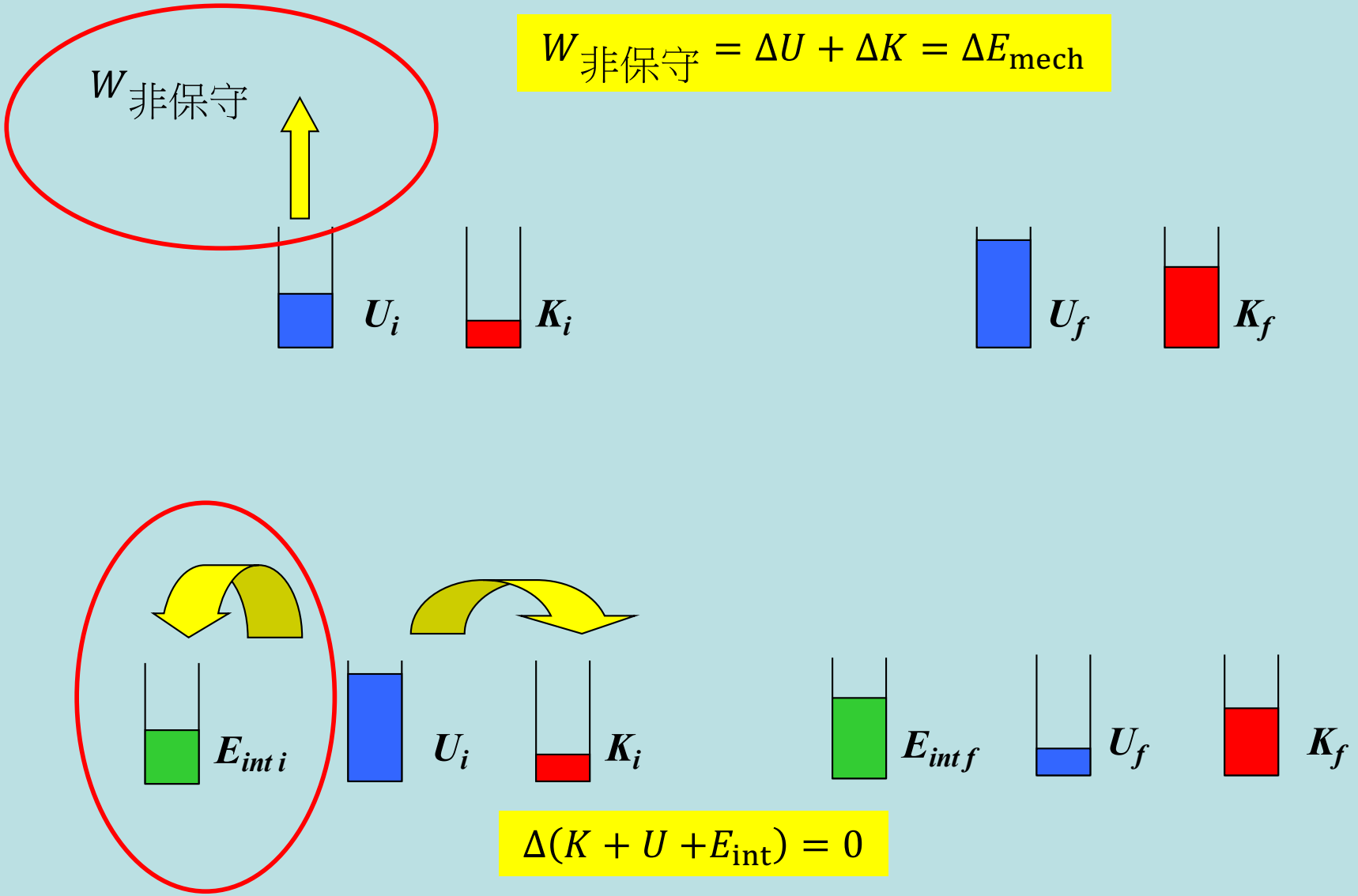
$$-W_{\text{friction}} = mcT_f - mcT_i = \Delta E_{\text{int}}$$

$E_{\text{int}}(T) \sim mcT$ 內能是溫度的函數

$$W_{\text{friction}} = \Delta(K + U)$$

$$\Delta(K + U + E_{\text{int}}) = 0$$

$K + U + E_{\text{int}}$依舊是守恆量

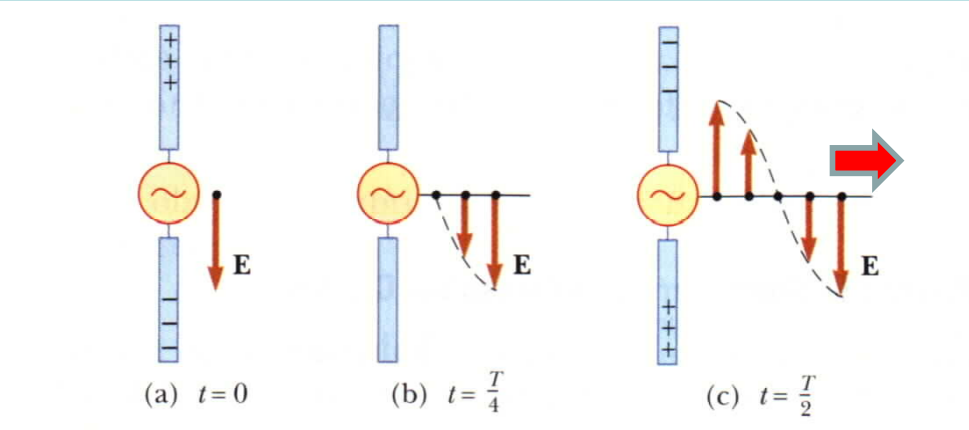


機械能如果被擴展到包括內能，能量還是會守恆！

每次遇到新的現象，能量似乎就不守恆，

但仔細研究就會發現減少的部分一樣可以寫成一個物理量的前後差，

將此物理量設成新的能量形式，加入新的能量形式，能量依舊守恆！



$P > \langle I^2 \rangle_{\text{avg}} \cdot R$ P是外加功率。$\langle I^2 \rangle \cdot R$電阻消耗的功率，似乎能量不守恆。

電磁學理論可以計算出兩者的差：

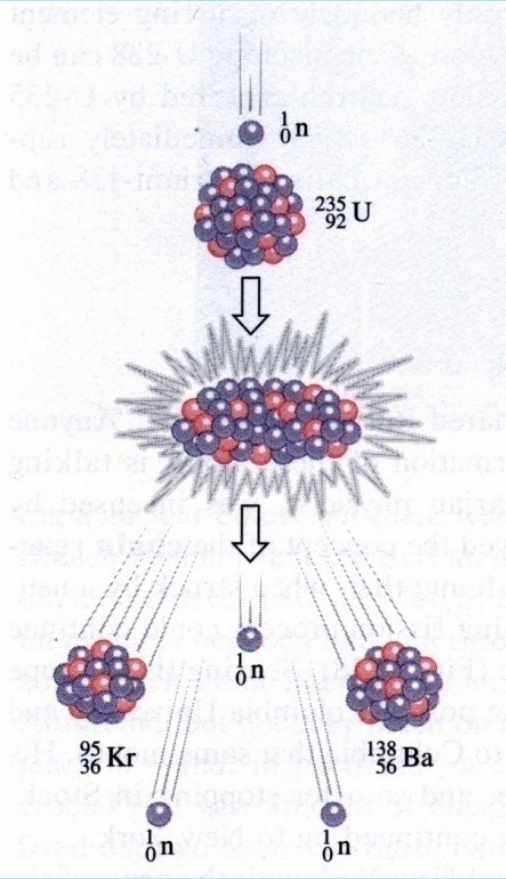
$$P - \langle I^2 \rangle \cdot R = \langle \varepsilon_0 E^2 \rangle \cdot c$$

能量流量=能量密度×流速

電磁波帶走的能量

加上電磁波帶走的能量，總能量依舊守恆。

質能守恆



原子核分裂時，末動能顯然大於起始動能。

似乎能量憑空增加了。但原子核的總質量也有變化。

相對論修改了能量的形式：

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$E \equiv mc^2 + K \sim mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \cdots$$

質量是帶著能量的，實驗顯示：

$$K_f - K_i \sim \Delta m \cdot c^2 = m_f c^2 - m_i c^2$$

能量$E = mc^2 + K$依舊是一個守恆量。

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

靜止的物體因為其質量，能量亦不為零

能量與質量可以彼此互相轉換。

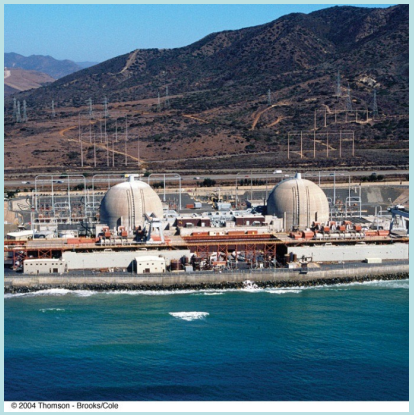
$$E \equiv mc^2 + K$$



質量的減少可能變為動能的增加！

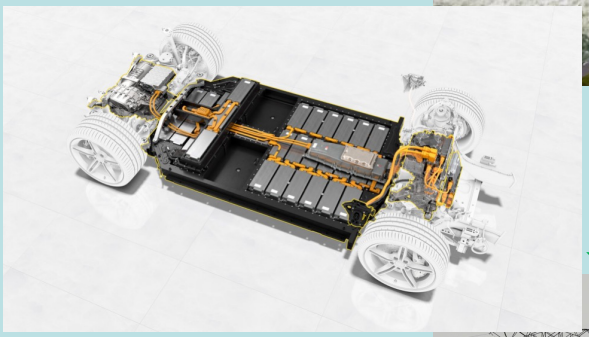
質量是能量的一種形式，能量守恆蘊含質量可以轉換為其他形式的能量，

其他形式的能量亦可轉換為質量，質量不再守恆。











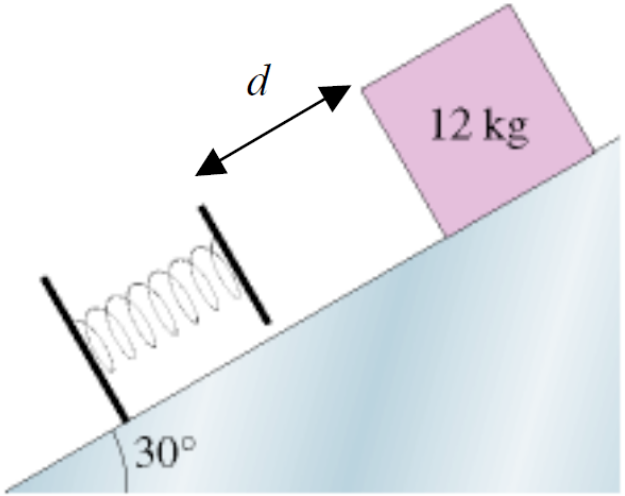




能量的具體特徵是能驅動。

能量可以來回在許多形式之間轉換、儲存、傳輸。

2. 一質量為 12 kg 的方塊，沿一 30°角的斜面自靜止狀態滑下，滑行距離 d 之後接觸一個彈簧，此彈簧的彈力係數 k 為 2000 N/m。



接觸彈簧後，此方塊繼續向前下滑行距離 $x = 0.27$ m 後才停止。請問距離 d 是多少 m？(10)

停止時，重力位能的減少應該等於彈力位能：

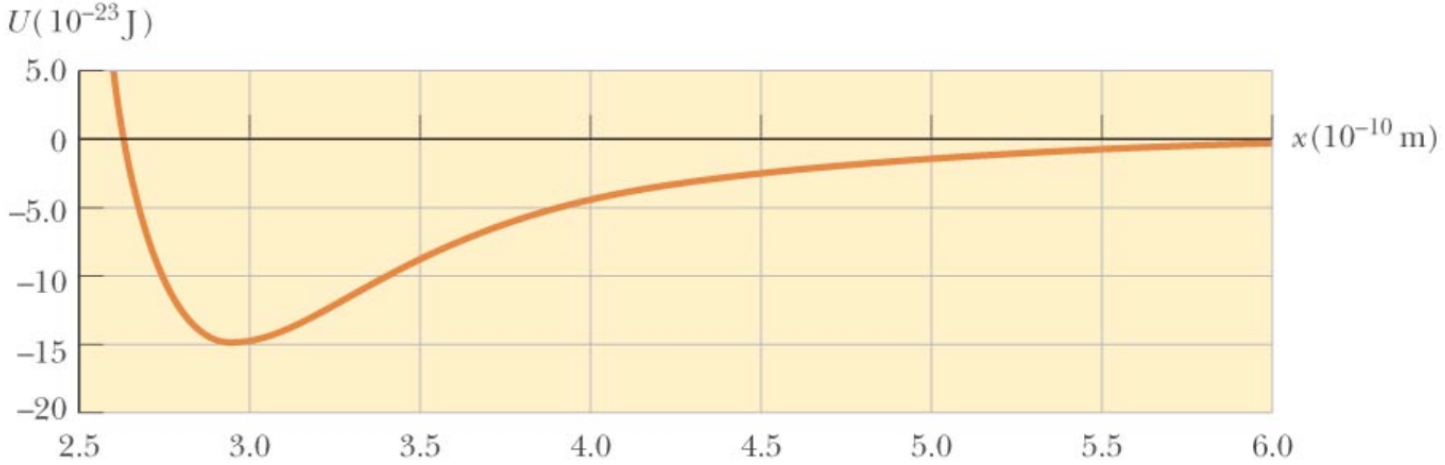
$$12 \times g \times (0.27 + d) / 2 = 2000 \times 0.27^2 / 2$$

$$d = 0.97 \text{ m}$$

1. 未構成鍵結的電中性原子彼此之間也會有一個原子力，已知此力的大小只跟兩原子之間的距離 x 有關。此力的位能可以以如下的 Lennard-Jones Potential 來近似：

$$U(x) = 4\varepsilon\left[\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x}\right)^{6}\right]$$

其中 ε,σ 是正常數。考慮某一對原子，此兩常數為：$\sigma = 2.63\times10^{-10}\,\text{m}$，$\varepsilon = 1.51\times10^{-22}\,\text{J}$。



A. 將兩個原子一起放在 x 軸上，為討論方便起見，其中一個固定在原點。它對另一個原子的作用力，有一平衡點，問在此平衡點處兩者的距離 x_0 為多少 m？ (8)

B. 將此原子從距離為 2.5×10^{-10} m 處自靜止釋放，當它到達距離 4.5×10^{-10} m 時，動能是多少 J？(7)

C. 若重新將此原子從距離為 2.75×10^{-10}m 處自靜止釋放，兩個原子的最大距離會是多少 m？(5)

1. 在平衡點處，力為零：$F=-\frac{dU}{dx}=4\varepsilon\left[12\left(\frac{\sigma^{12}}{x^{13}}\right)-6\left(\frac{\sigma^{6}}{x^{7}}\right)\right]$，力為零：

$\left[12\left(\frac{\sigma^{12}}{x^{13}}\right)-6\left(\frac{\sigma^{6}}{x^{7}}\right)\right]=0$，$x_0^6=2\sigma^6$，$x_0=\sqrt[6]{2}\sigma=2.95\times10^{-10}\,\mathrm{m}$。

在距離為 2.5×10^{-10} m 處，位能及總機械能（動能為零）為

$U=E=4\varepsilon\left[\left(\frac{2.63}{2.5}\right)^{12}-\left(\frac{2.63}{2.5}\right)^{6}\right]=2.91\times10^{-22}\,\mathrm{J}$，到達距離 4.5×10^{-10} m 時，位能是$U=4\varepsilon\left[\left(\frac{2.63}{4.5}\right)^{12}-\left(\frac{2.63}{4.5}\right)^{6}\right]=-0.23\times10^{-22}\,\mathrm{J}$，兩者的差即是動能：

$K=E-U=3.14\times10^{-22}\,\mathrm{J}$。

這點是一個 turning point，另一個 turning point 在位能與其相等處，設其位置為 $x\times10^{-10}\,\mathrm{m}$。

$U=4\varepsilon\left[\left(\frac{2.63}{x}\right)^{12}-\left(\frac{2.63}{x}\right)^{6}\right]=4\varepsilon\left[\left(\frac{2.63}{2.75}\right)^{12}-\left(\frac{2.63}{2.75}\right)^{6}\right]$

$\left(\frac{2.63}{x}\right)^{12}-\left(\frac{2.63}{x}\right)^{6}=-0.180$，$\left(\frac{2.63}{x}\right)^{6}=\frac{1-\sqrt{1-0.72}}{2}=0.23$，$x=3.35$。故其位置為$3.35\times10^{-10}\,\mathrm{m}$。