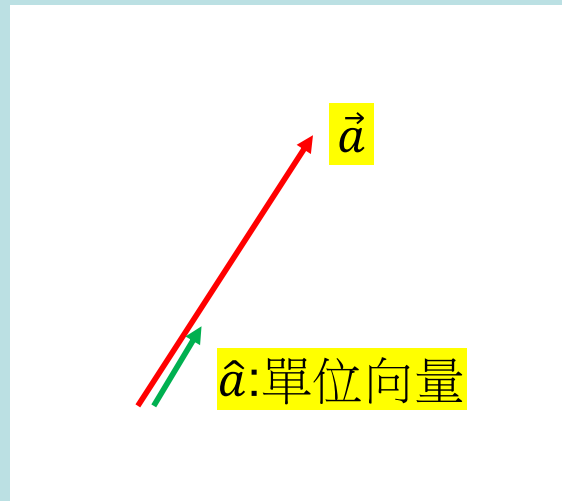


Motion in 2-3 Dimensions



© 2012 Pearson Education, Inc.

3D 向量 Vector

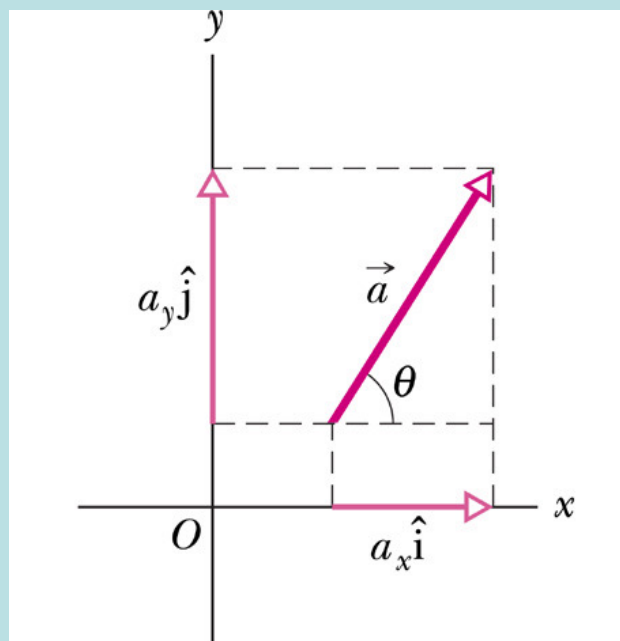


圖示法

二三度空間中許多物理量是向量！

向量包含兩個要素：大小及方向！

$$\vec{a} = a \cdot \hat{a}$$

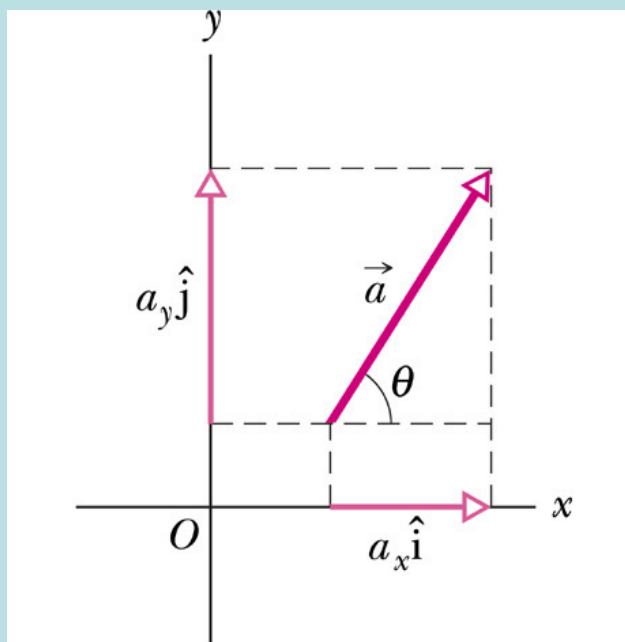


向量可以用它的分量表示！

把一向量投影在選取的座標軸上即是它的分量！

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} = (a_x, a_y)$$

分量法



分量法與圖示法式等價的。

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} = (a_x, a_y)$$

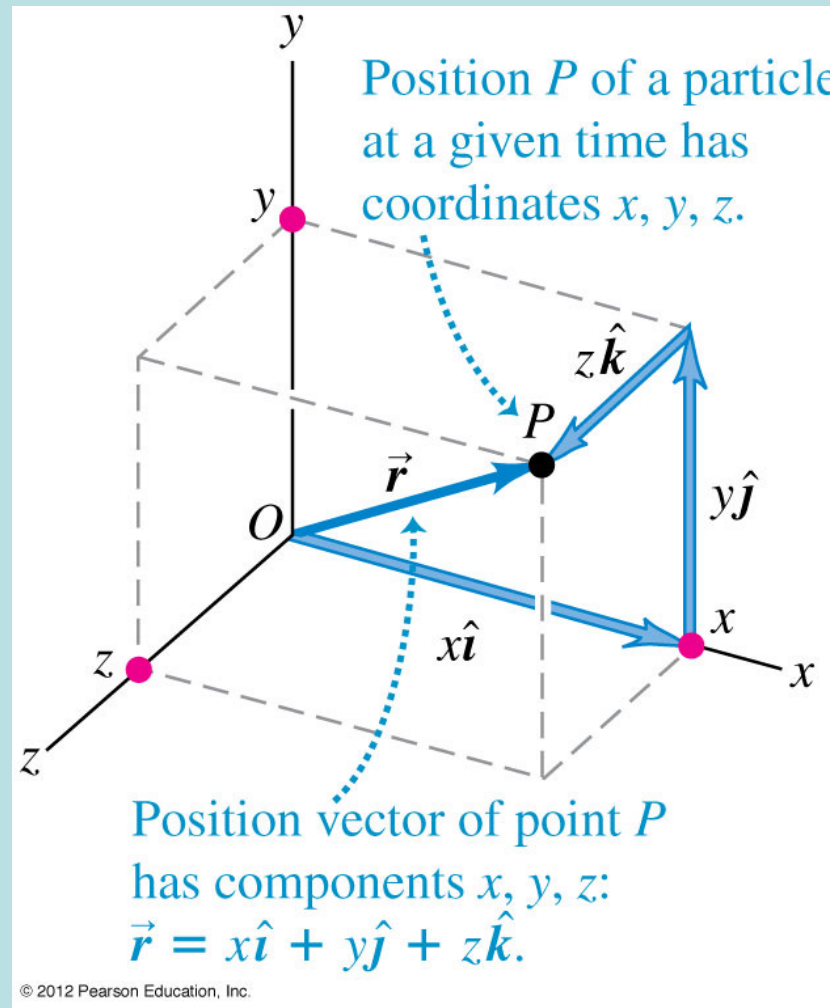
由分量可以得到向量的大小

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

由分量可以得到向量的方向：

$$\cos \theta = \frac{a_x}{a}$$

分量的值與座標軸的選取有關！



位置是一個向量 $\vec{r} = (x, y, z) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^3 r_i \hat{e}_i \quad \hat{e}_i \quad i = 1, 2, 3 \text{ 為座標軸。}$$

運動中的位置向量會隨時間變化 $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

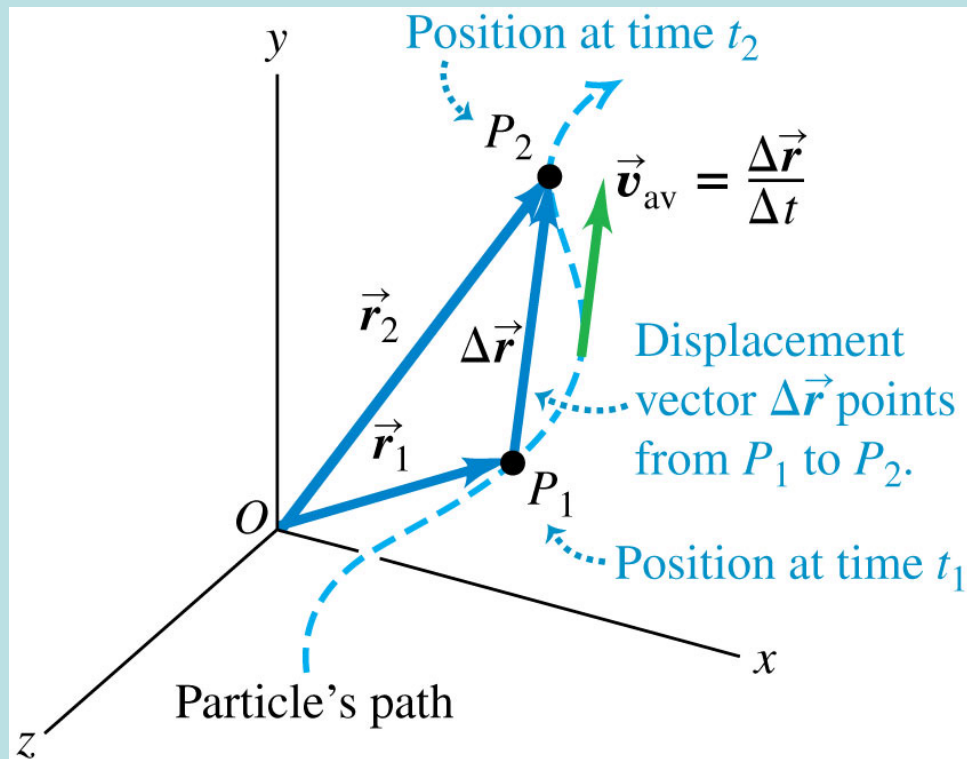
位置的變化：位移 $\Delta\vec{r}$ 也是一個向量。

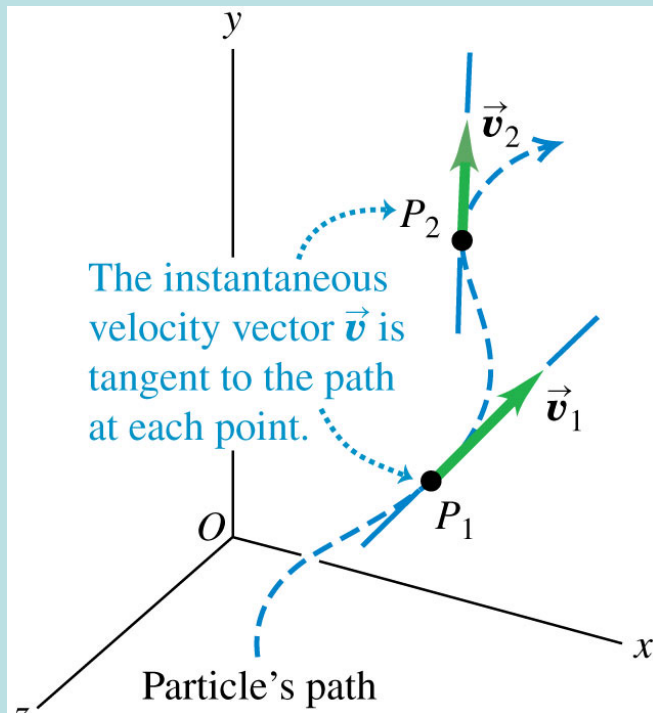
其分量就是位置向量各分量的差！變化的投影即是投影的差。

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (\Delta x, \Delta y, \Delta z) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

平均速度向量，就是位置向量的平均變化率，或說單位時間的位移向量。

$$\vec{v}_{\text{ave}} \equiv \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$





瞬時速度向量Vector，就是位置向量的瞬時變化率。

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

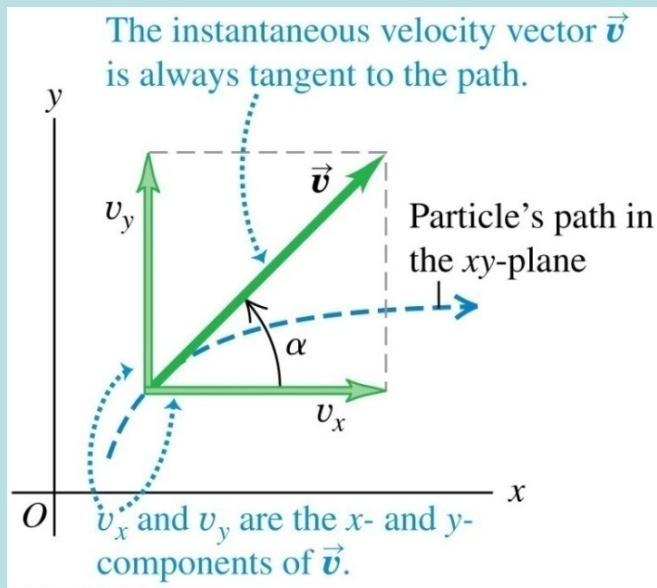
$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t} \right) = \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} \right)$$

$$= \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = (v_x, v_y, v_z)$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt}$$

$$v_z = \frac{dz}{dt}$$



如此定義的速度向量： $\vec{v}$

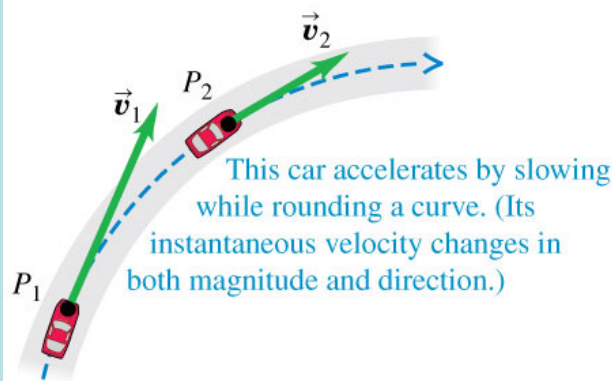
方向 $\hat{v}$ 是沿著運動的切線方向，

大小 v 是移動的速率。

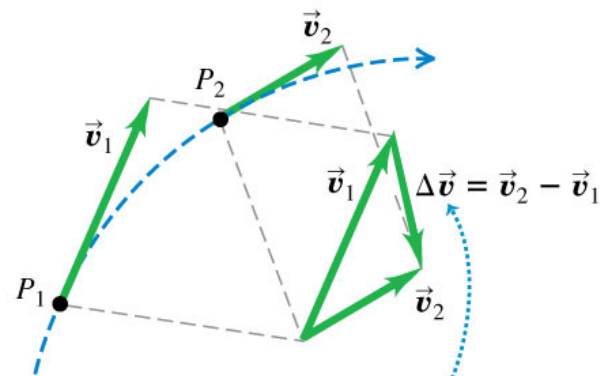
加速度向量（以圖形討論）

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

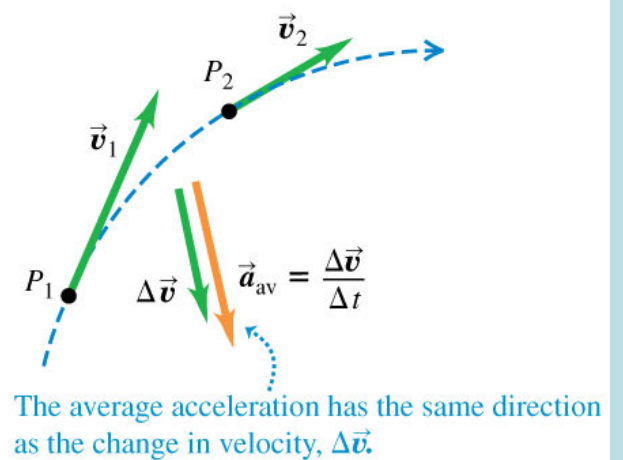
(a)



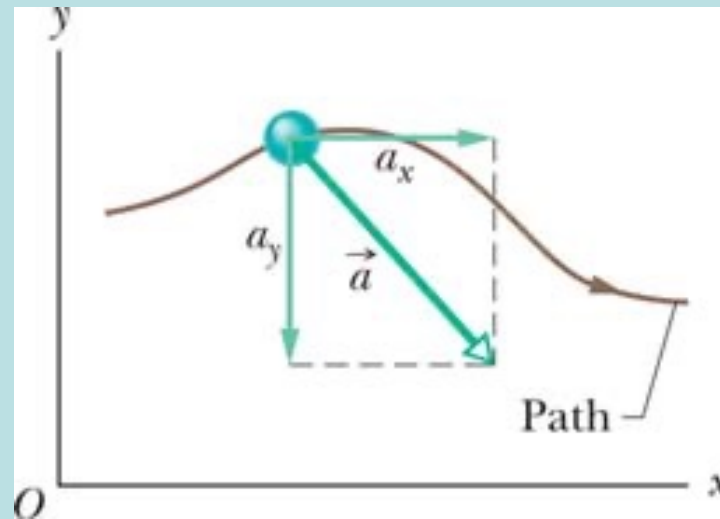
(b)



(c)



加速度向量一樣可以以分量計算：

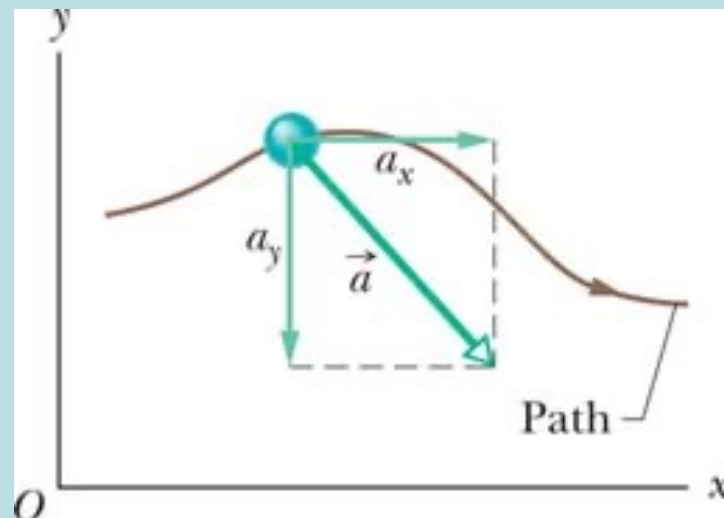
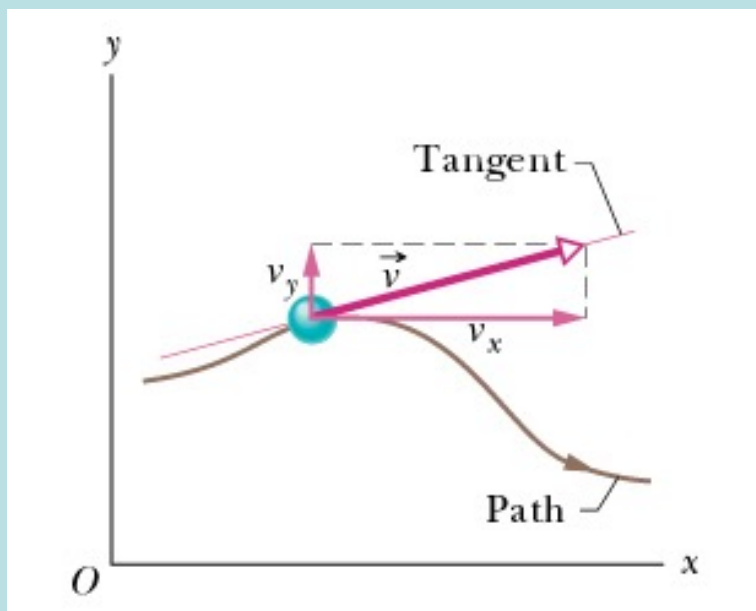


$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta v_x}{\Delta t}, \frac{\Delta v_y}{\Delta t}, \frac{\Delta v_z}{\Delta t} \right) = \left(\frac{d^2 x}{dt^2}, \frac{d^2 y}{dt^2}, \frac{d^2 z}{dt^2} \right)$$

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$a_y = \frac{d^2 y}{dt^2}$$

$$a_z = \frac{d^2 z}{dt^2}$$



$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt}$$

$$v_z = \frac{dz}{dt}$$

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$a_z = \frac{d^2z}{dt^2}$$

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^3 r_i \hat{e}_i \quad \hat{e}_i \quad i = 1, 2, 3 \text{ 為座標軸。}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^3 r_i \hat{e}_i = \sum_{i=1}^3 \frac{d}{dt} (r_i \hat{e}_i) = \sum_{i=1}^3 \frac{dr_i}{dt} \hat{e}_i$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \sum_{i=1}^3 \frac{d^2r_i}{dt^2} \hat{e}_i$$

$\hat{e}_i$ 為座標軸與時間無關。

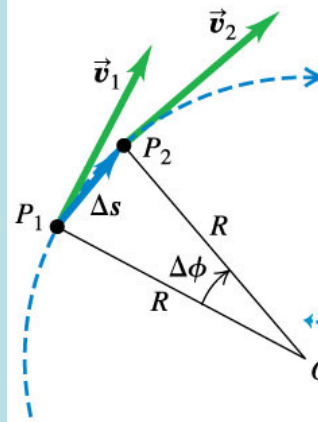
3.4 • CALC The position of a squirrel running in a park is given by $\vec{r} = [(0.280 \text{ m/s})t + (0.0360 \text{ m/s}^2)t^2]\hat{i} + (0.0190 \text{ m/s}^3)t^3\hat{j}$. (a) What are $v_x(t)$ and $v_y(t)$, the x - and y -components of the velocity of the squirrel, as functions of time? (b) At $t = 5.00 \text{ s}$, how far is the squirrel from its initial position? (c) At $t = 5.00 \text{ s}$, what are the magnitude and direction of the squirrel's velocity?

3.44 •• CALC The position of a dragonfly that is flying parallel to the ground is given as a function of time by $\vec{r} = [2.90 \text{ m} + (0.0900 \text{ m/s}^2)t^2]\hat{i} - (0.0150 \text{ m/s}^3)t^3\hat{j}$. (a) At what value of t does the velocity vector of the insect make an angle of 30.0° clockwise from the $+x$ -axis? (b) At the time calculated in part (a), what are the magnitude and direction of the acceleration vector of the insect?

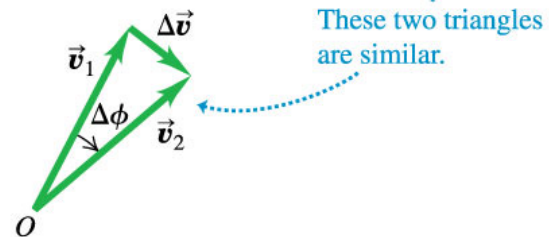
等速圓周運動的加速度

以圖形法來計算：

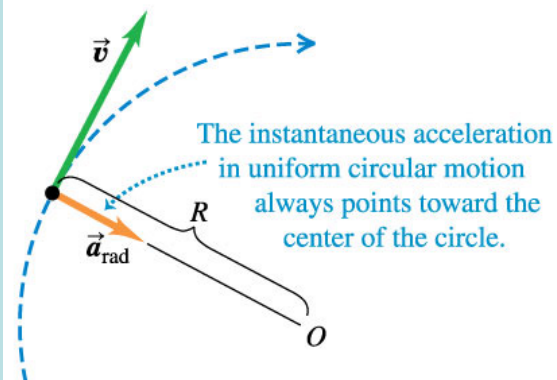
(a) A particle moves a distance Δs at constant speed along a circular path.



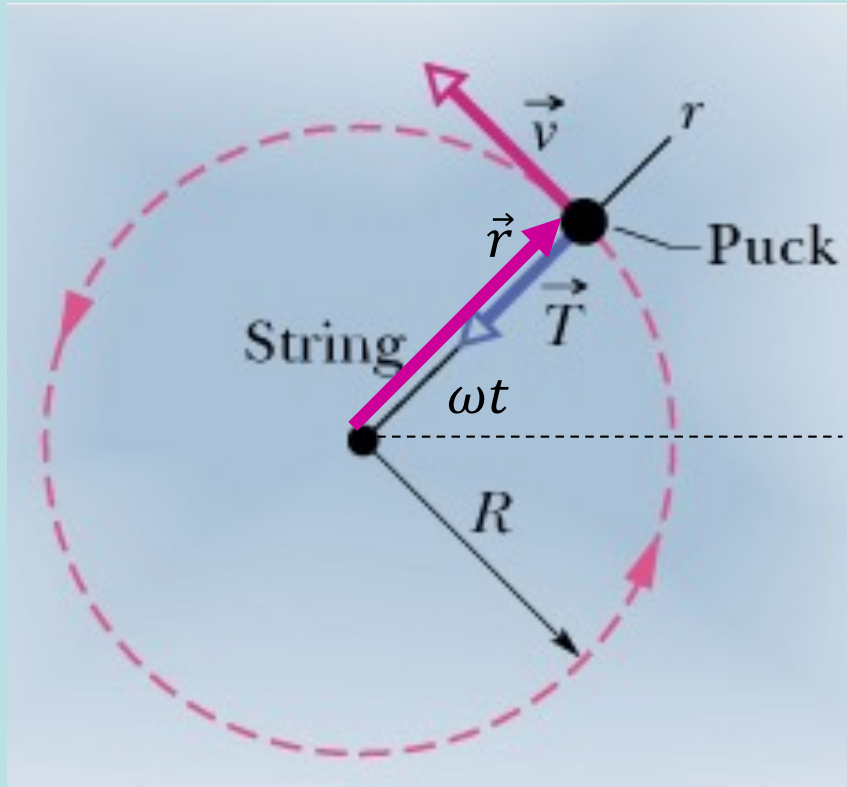
(b) The corresponding change in velocity and average acceleration



(c) The instantaneous acceleration



以等速圓周運動的位置向量 $\vec{r}$ 的分量，直接計算向心加速度向量 $\vec{a}$ ：



等速圓周運動夾角是等速增加！

設 ω 為角度增加的速度，稱角速度。

$$\theta = \omega t$$

$$\vec{r} = (r \cos \omega t, r \sin \omega t) = r \cdot \hat{r}$$

$$\hat{r} = (\cos \omega t, \sin \omega t)$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = r \frac{d}{dt} (\cos \omega t, \sin \omega t)$$

$$= r \left(\frac{d}{dt} \cos \omega t, \frac{d}{dt} \sin \omega t \right)$$

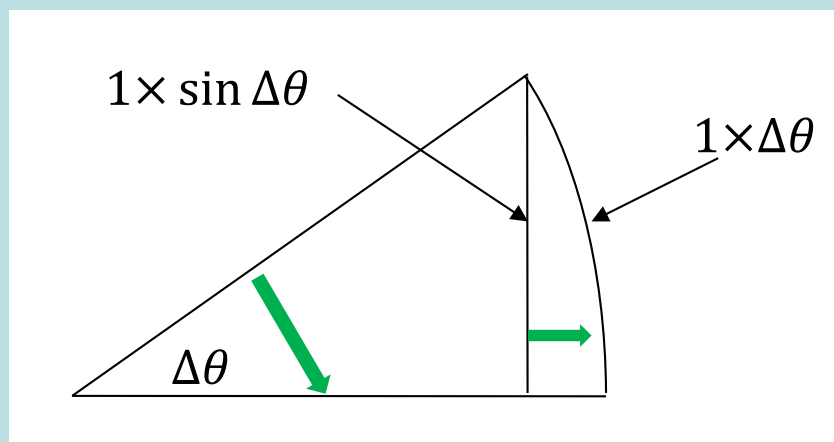
需要三角函數的微分！

三角函數的微分

$$\frac{d}{d\theta}(\sin \theta) = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(\theta + \Delta\theta) - \sin \theta}{\Delta\theta} = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta \cos \Delta\theta + \sin \Delta\theta \cos \theta - \sin \theta}{\Delta\theta}$$

$\Delta\theta \rightarrow 0$ $\cos \Delta\theta \rightarrow 1$ 第一項與第三項似乎可以抵消：

為了研究 $\frac{\sin \Delta\theta}{\Delta\theta}$ ，取一半徑為1，弧角為 $\Delta\theta$ 的圓弧：



$\Delta\theta \rightarrow 0$

$\sin \Delta\theta \rightarrow \Delta\theta$

角度很小時，正弦函數趨近於以徑度為單位的弧角大小。

$$\frac{\sin \Delta\theta}{\Delta\theta} \rightarrow 1$$

$$\frac{d}{d\theta}(\sin \theta) = \cos \theta$$

$$= \cos \theta \cdot \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta\theta}{\Delta\theta}$$

以上推導用了 $\cos \Delta\theta \rightarrow 1$ ，但必須進一步研究 $\cos \Delta\theta$ 如何趨近1：

$$\cos \Delta\theta \rightarrow \sqrt{1 - (\sin \Delta\theta)^2} = [1 - (\sin \Delta\theta)^2]^{1/2} \rightarrow 1 + ?$$

若 $\cos \Delta\theta$ 與1的差，是一次項 $\propto \Delta\theta$ ，除以趨近於零的 $\Delta\theta$ 後，還是會有貢獻。

可以利用二項式定理來計算：

$$(1 + a)^n \sim (1 + a) \cdot (1 + a) + \cdots (1 + a) = 1 + na + O(a^2)$$

當 $a \ll 1$ 時，高階項可以忽略！

$$(1 + a)^n \sim 1 + na \quad \text{二項式定理}$$

可以證明此式即使 n 不是自然數也對，任意 b 都對。

當 $a \ll 1$ 時，

$$(1 + a)^b \sim 1 + ab$$

$$\cos \Delta\theta \rightarrow \sqrt{1 - (\sin \Delta\theta)^2} = [1 - (\sin \Delta\theta)^2]^{1/2} \rightarrow 1 - \frac{1}{2} (\sin \Delta\theta)^2 \rightarrow 1 - \frac{1}{2} \Delta\theta^2$$

角度很小時，餘弦函數趨近於1+弧角大小的平方，沒有一次項。

三角函數對小角度的泰勒展開：

$$\cos \Delta\theta = 1 - \frac{1}{2} \Delta\theta^2 + \frac{1}{4!} \Delta\theta^4 + \dots$$

$$\sin \Delta\theta = \Delta\theta - \frac{1}{3!} \Delta\theta^3 + \frac{1}{5!} \Delta\theta^5 + \dots$$

$$\frac{d}{d\theta}(\sin \theta) = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(\theta + \Delta\theta) - \sin \theta}{\Delta\theta}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta \cos \Delta\theta + \sin \Delta\theta \cos \theta - \sin \theta}{\Delta\theta} \\ &\rightarrow \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta \left[1 - \frac{1}{2} \Delta\theta^2\right] + \Delta\theta \cdot \cos \theta - \sin \theta}{\Delta\theta} \\ &= \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{-\sin \theta \cdot \frac{1}{2} \Delta\theta^2 + \Delta\theta \cdot \cos \theta}{\Delta\theta} = \cos \theta \end{aligned}$$

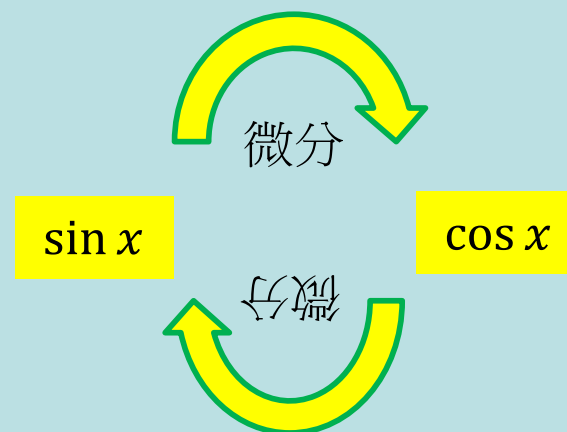
$$\cos \Delta\theta \rightarrow 1 - \frac{1}{2} \Delta\theta^2$$

正弦函數的微分是餘弦函數

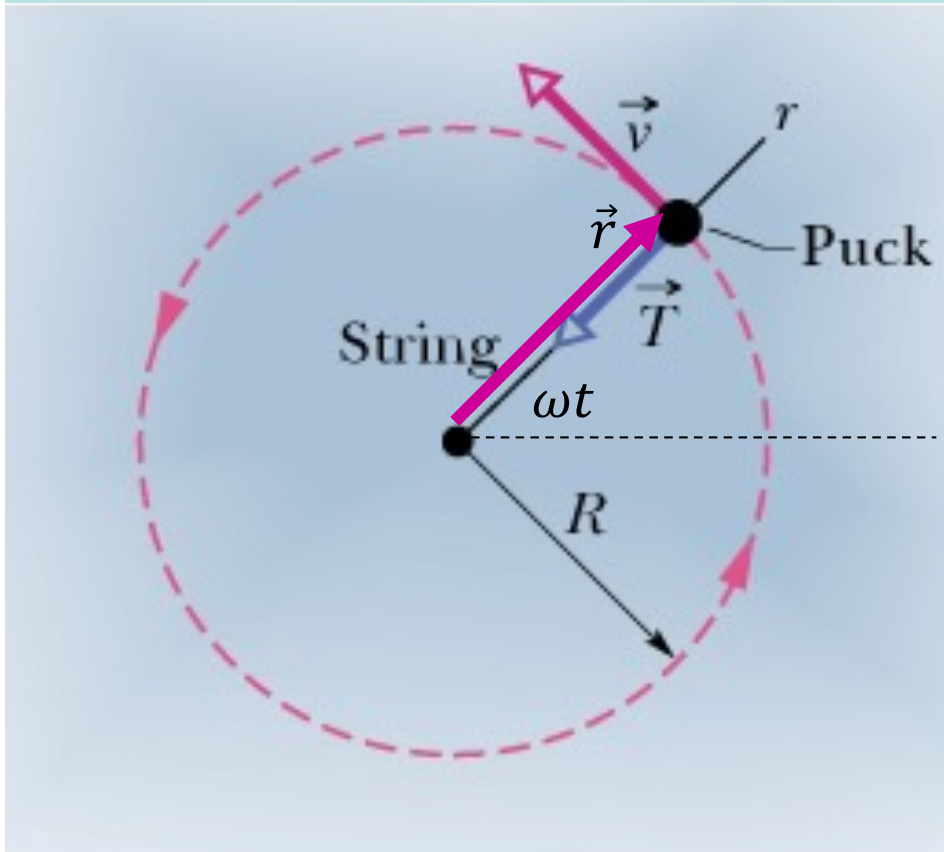
$$\frac{d}{d\theta}(\sin \theta) = \cos \theta$$

餘弦函數的微分是負的正弦函數

$$\frac{d}{d\theta}(\cos \theta) = -\sin \theta$$



等速圓周運動的加速度



$$\vec{r} = (r \cos \omega t, r \sin \omega t) = r \cdot \hat{r}$$

$$\hat{r} = (\cos \omega t, \sin \omega t)$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

$$\theta = \omega t \quad \text{連鎖率}$$

$$= r \frac{d}{dt} (\cos \omega t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \cos \theta}{\Delta \theta} \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \frac{\Delta \cos \theta}{\Delta \theta} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = r \frac{d(\cos \theta)}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$
$$= -r \sin \theta \frac{d}{dt} (\omega t) = -r\omega \sin \omega t$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$$

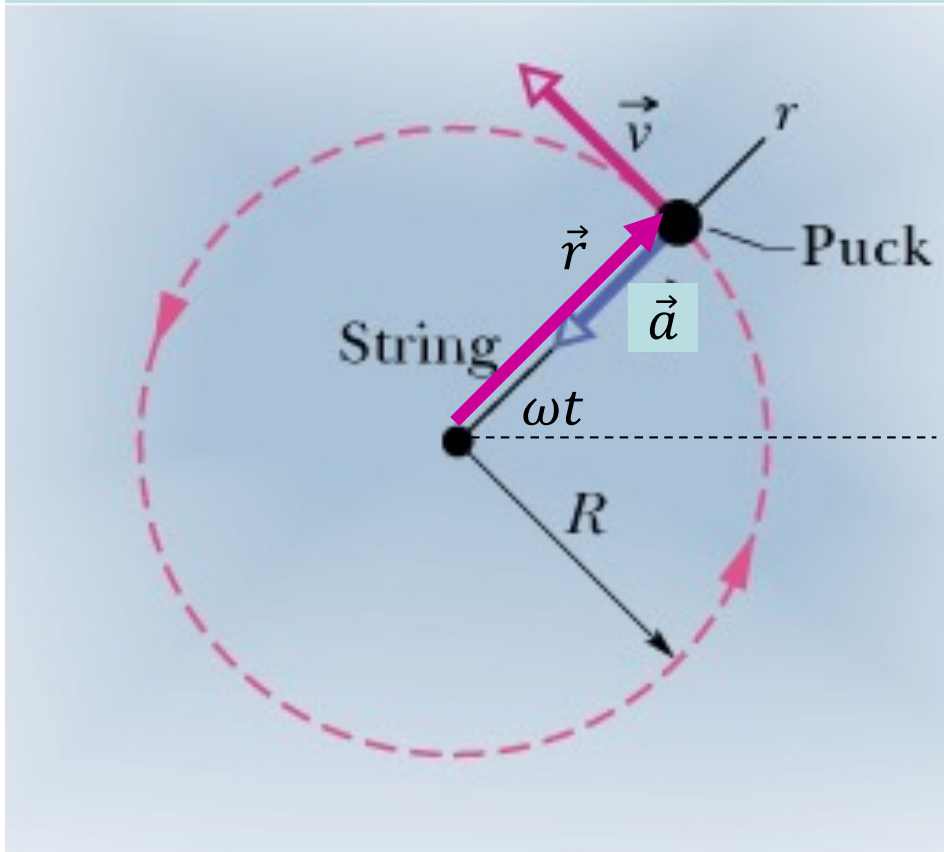
$$= (-r\omega \sin \omega t, r\omega \cos \omega t)$$

$$= r\omega (-\sin \omega t, \cos \omega t) = r\omega \hat{v}$$

$$v = r\omega$$

$$\hat{r} \cdot \hat{v} = 0$$

等速圓周運動的加速度



$$\vec{v} = (-r\omega \sin \omega t, r\omega \cos \omega t)$$

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(-r\omega \frac{d}{dt} (\sin \omega t), r\omega \frac{d}{dt} \cos \omega t \right) \\ &= \left(-r \frac{d \sin \theta}{d\theta} \cdot \frac{d}{dt} (\omega t), r \frac{d \cos \theta}{d\theta} \cdot \frac{d}{dt} (\omega t) \right)\end{aligned}$$

$$= (-r\omega^2 \cos \omega t, -r\omega^2 \sin \omega t)$$

$$\vec{a} = -r\omega^2 (\cos \omega t, \sin \omega t) = -r\omega^2 \hat{r}$$

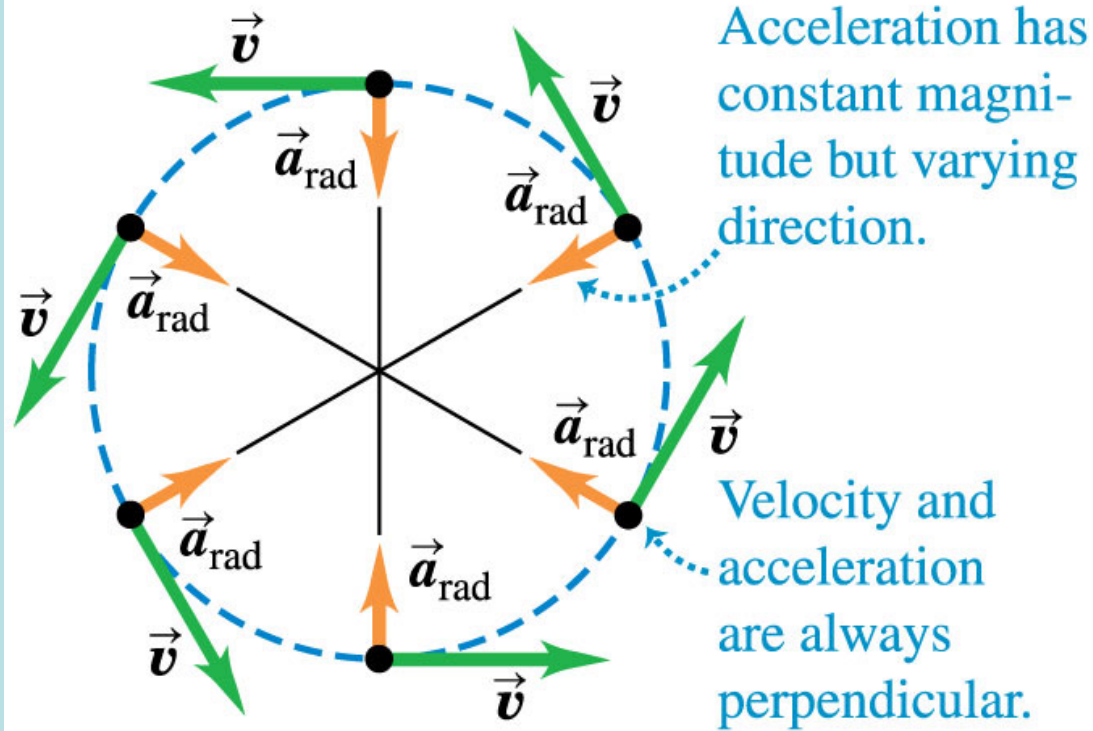
$$\hat{r} = (\cos \omega t, \sin \omega t)$$

向心加速度指向圓心

向心加速度大小：

$$a = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}$$

(a) Uniform circular motion

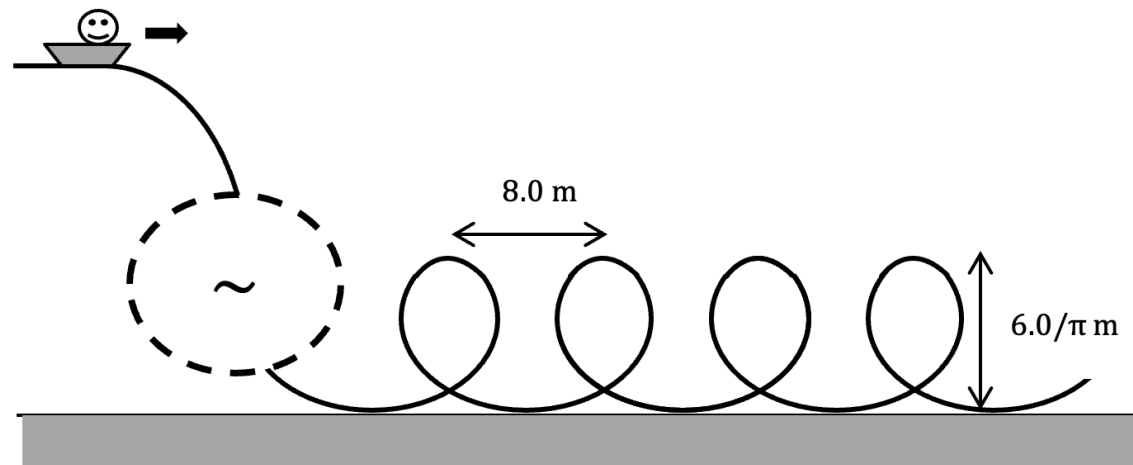


© 2012 Pearson Education, Inc.



$$a = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}$$

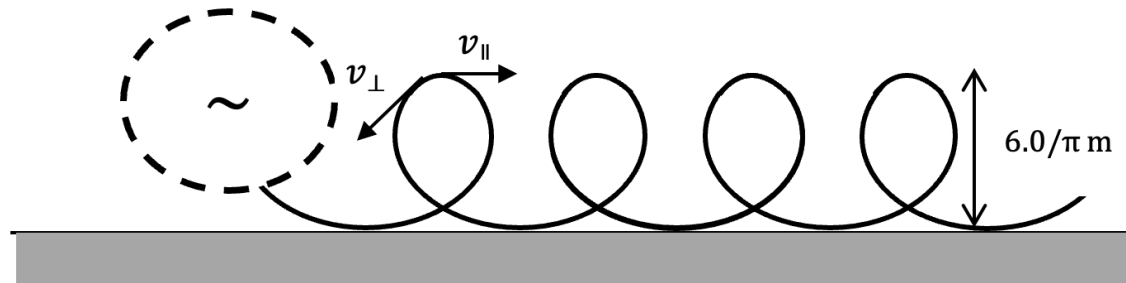
1. 考慮一雲霄飛車，列車由高處下滑，進入一段螺旋型的軌道。在此段，軌道繞水平軸旋轉，因速度很快，旋轉可以近似視為等速，每一圈旋轉時間為 1.0 s ，同時軌道水平前進 8.0 m 。螺旋軌道的最低點就接近地面，最高點的高度為 $6.0/\pi\text{ m}$ 。與軌道相比車廂極小，可視為一質點。重力加速度： $g \sim 10\text{ m/s}^2$ 。
- A. 當某乘客的車廂到達螺旋軌道的一頂點時，她的項鍊突然斷裂，於是墜子與項鍊分離。計算墜子離開後，多久會落到地面。假設墜子落地前，並沒有其他撞擊。
- 提示：拋體運動，水平與垂直方向運動是互相獨立。
- B. 承上題，計算項鍊突然斷裂時車廂的速率大小。
- 提示：先算平行旋轉軸、及垂直旋轉軸的速度分量。
- C. 承上題，計算墜子落地處，與該頂點（也就是墜子脫離項鍊處）之間的水平距離。



解答

A. 當一個乘客的列車車廂到達螺旋軌道的一個最高點時，速度沿水平方向，因此墜子在鉛直方向等於一初速為零的自由落體，落地時間等於： $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0.62 \text{ s}$ 。

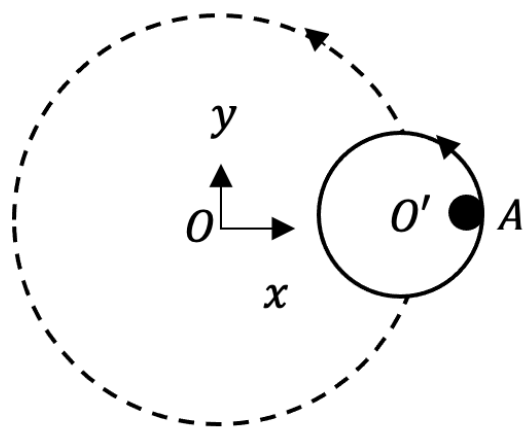
B. 沿旋轉軸的速度分量， $v_{\parallel} = \frac{8.0}{1.0} = 8.0 \text{ m/s}$ 。垂直旋轉軸的速度分量： $v_{\perp} = \frac{2\pi \cdot 3/\pi}{1.0} = \frac{2\pi \cdot R}{1.0} = 6.0 \text{ m/s}$ 。因此速率為 $v = 10.0 \text{ m/s}$



C. 投影在水平平面上，此墜子作等速運動。其初速度即沿軌道方向，速率為 $v = 10.0 \text{ m/s}$ ，墜子落地處，與該最高點之間的水平距離等於： $vt = 6.2 \text{ m}$ 。

向量是可以疊加的，所以位移、速度、加速度都可以疊加！

考慮有某一個旋轉咖啡杯設施，由上方往下看如下圖。咖啡杯圓心 O' 與設施中心 O 的距離為 $\overline{OO'} = a$ ， O' 繞 O 保持作等速圓周運動（圖上虛線圓），角速度為 ω 。從地面上觀察，咖啡杯本身又繞自己的圓心 O' 保持作等速圓周運動，角速度為 4ω 。設兩個旋轉都是逆時鐘方向。咖啡杯的水平切面（圖上實線圓）可以圓近似，假設杯壁很薄可以忽略，乘客 A （下圖中黑點）及座椅的位置可以近似看成貼在杯壁上的一個點。杯的半徑為 $\overline{O'A} = 0.25a$ 。



為方便討論，假設啟動過程發生在 $t < 0$ ，可以忽略。在 $t = 0$ 時，乘客與咖啡杯已經進入上述的雙重圓周運動了。同時設 $t = 0$ 時， O, O' 與乘客 A 恰位於一直線上，如圖所示。此直線設為 x 軸，另一垂直於 x 軸的水平方向設為 y 軸，以 O 為原點。在 $t > 0$ 以後，乘客相對於座椅保持靜止狀態。

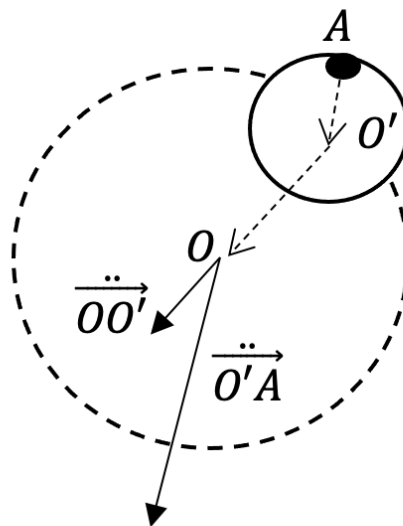
A. 在過程中，乘客會受到水平方向的力。假設座椅的坐墊很平滑，對乘客的摩擦力可以忽略，乘客也沒繫安全帶。則此水平方向的力大致是來自座椅靠背的正向力 N 與靠背與乘客間的靜摩擦力 f_s ，使乘客相對座椅保持靜止的狀態。計算在時間 $t > 0$ 時，靠背的正向力 N 與靠背的靜摩擦力 f_s 的量值。假設靠背的靜摩擦係數 $\mu_s = 0.8$ ，將 $\mu_s N$ 及 f_s 兩力對時間 t 作圖，說明在 $t > 0$ ，乘客都不會滑動。(10)

B. 若樂園公司考慮更換靠背的材質，靠背的摩擦力是考慮的關鍵性質。靠背的靜摩擦係數 μ_s ，必須大於一個臨界值 μ_{sc} ，才能使得乘客在 $t > 0$ 時，即使沒繫安全帶，也不會發生滑動。計算 μ_{sc} 。(10)

提示：當 μ_s 逐漸下降時，考慮 $\mu_s N$ 及 f_s 分別對時間 t 的作圖，或 $\mu_s N - f_s$ 對時間 t 的作

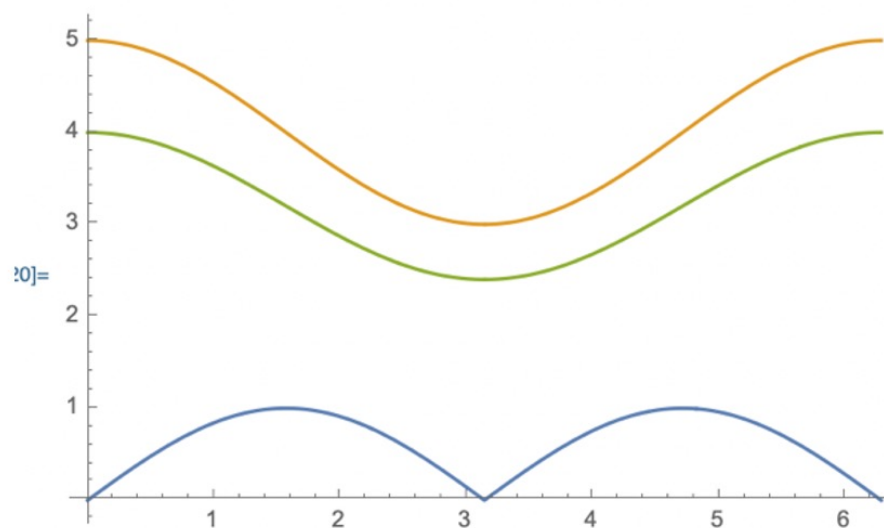
C. 在 $t = \pi/4\omega$ 時，乘客的珍珠耳環突然鬆脫，假設此時耳環距地高度為 h ，落地前耳環沒有發生其他撞擊，且可以忽略阻力。結束後乘客想去尋找鬆脫飛離的耳環，問珍珠落地位置的 x, y 座標會是多少。乘客與鬆脫前耳環的位置近似可以看成同一個位於杯壁上的點。(10)

A. 乘客的位置向量可以寫成： $\vec{r} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A}$ ，他的加速度向量： $\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{\overrightarrow{OO'}} + \ddot{\overrightarrow{O'A}}$ ， $\ddot{\overrightarrow{OO'}}$ 與 $\ddot{\overrightarrow{O'A}}$ 恰為兩個等速圓周運動的向心加速度。在時間 t 時， $\ddot{\overrightarrow{OO'}}$ 的大小為 $a\omega^2$ ，與 x 軸夾角為 $\omega t + \pi$ ， $\ddot{\overrightarrow{O'A}}$ 的大小為 $0.25a(4\omega)^2 = 4a\omega^2$ ，與 x 軸夾角為 $4\omega t + \pi$ 。因此 $\ddot{\overrightarrow{OO'}}$ 與 $\ddot{\overrightarrow{O'A}}$ 的夾角為 $3\omega t$ 。 $\ddot{\overrightarrow{O'A}}$ 的方向垂直於靠背，也就是正向力的方向。因此可先將 $\ddot{\overrightarrow{OO'}}$ 投影到垂直 $\ddot{\overrightarrow{O'A}}$ 的方向： $a\omega^2 \sin 3\omega t$ ，這即是靠背的靜摩擦力，大小為 $f_s = |a\omega^2 \sin 3\omega t|$ 。 $\ddot{\overrightarrow{OO'}}$ 投影到平行於 $\ddot{\overrightarrow{O'A}}$ 的方向，再加上 $\ddot{\overrightarrow{O'A}}$ ，即是正向力： $N = a\omega^2 \cos 3\omega t + 4a\omega^2$ 。所受總力的大小即為： $a\omega^2 \sqrt{17 + 8 \cos 3\omega t}$

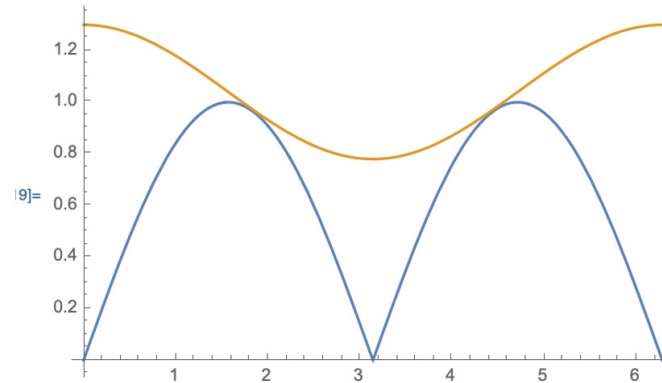


將所需靜摩擦力 $f_s = |a\omega^2 \sin 3\omega t|$ 、靠背的正向力 $N = a\omega^2 \cos 3\omega t + 4a\omega^2$ 以及 $\mu_s N$ ，對時間 t 作圖：很明顯地，在整個過程， $f_s < \mu_s N$ ，因此即使沒繫安全帶，乘客也不會有滑動發生。

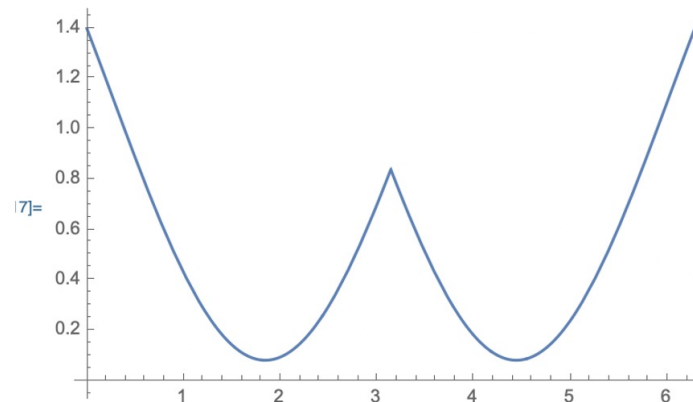
Screenshot



B. 由上圖可知，當 μ_s 很大時， $f_s < \mu_s N$ 。若將 μ_s 慢慢降低，直到 $\mu_s N$ 的曲線與 f_s 的曲線在某一點上相切後，乘客會開始在過程中的一個階段，感覺 $f_s > \mu_s N$ ，因此會有滑動。這個兩曲線相切時的 μ_s ，就是臨界值 μ_{sc} 。注意圖形是對稱的，所以我們只要針對 $\sin 3\omega t > 0$ 的部分來討論即可。

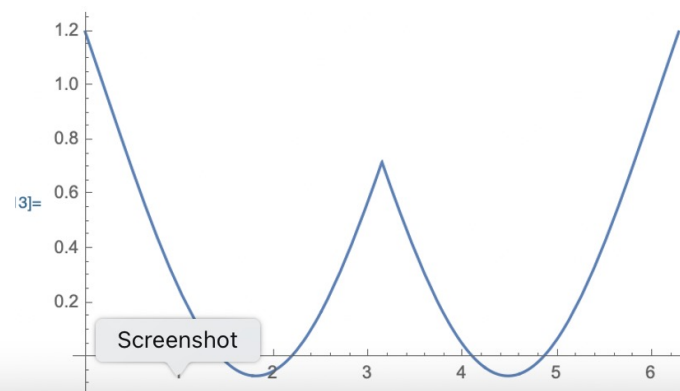


也可以考慮 $\mu_s N - f_s$ 對時間 t 的作圖，當 μ_s 很大時， $\mu_s N - f_s$ 恆正。



若將 μ_s 慢慢降低， $\mu_s N - f_s$ 的最小值，會慢慢下降，直到觸及橫軸與之相切，這時 $\mu_s N - f_s = 0$ 及 $\frac{df_s}{dt} - \mu_s \frac{dN}{dt} = 0$ ，兩個條件同時成立。這時對應的 μ_s ，就是臨界值 μ_{sc} 。

如果 μ_s 繼續降低， $\mu_s N - f_s$ 的最小值就會穿過橫軸，那麼就有一個範圍的時間，在其中 $\mu_s N < f_s$ ，乘客就會滑動。



因此， $\mu_s = \mu_{sc}$ 時，記兩曲線相切處時間為 t_1 ，兩曲線的切線斜率相等：

$$\frac{df_s}{dt}(t_1) = \mu_s \frac{dN}{dt}(t_1)$$

而且在同一時間，曲線函數值也相等：

$$f_s(t_1) = \mu_s N(t_1)$$

代入 $f_s = a\omega^2 \sin 3\omega t$ 及 $N = a\omega^2 \cos 3\omega t + 4a\omega^2$ ，第一個條件得到：

$$\cos 3\omega t_1 = -\mu_s \sin 3\omega t_1$$

$$\cot 3\omega t_1 = -\mu_s$$

因此 $\sin 3\omega t_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\mu_s^2}}$ ， $\cos 3\omega t_1 = -\frac{\mu_s}{\sqrt{1+\mu_s^2}}$ 代入第二個條件得到：

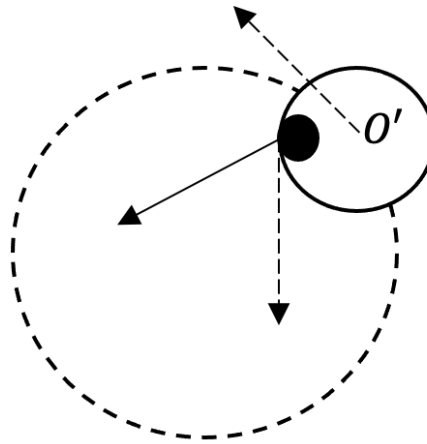
$$\frac{1}{\sqrt{1+\mu_s^2}} = -\frac{\mu_s^2}{\sqrt{1+\mu_s^2}} + 4\mu_s$$

$$\mu_{sc} = \frac{1}{\sqrt{15}} \sim 0.25$$

C. 在 $t = \pi/4\omega$ 時，杯的圓心轉了 $\pi/4$ ，杯對自己的圓心轉了 π ，因此乘客的位置在

$$\vec{r} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A} = \left(\frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{a}{4}, \frac{a}{\sqrt{2}} \right),$$

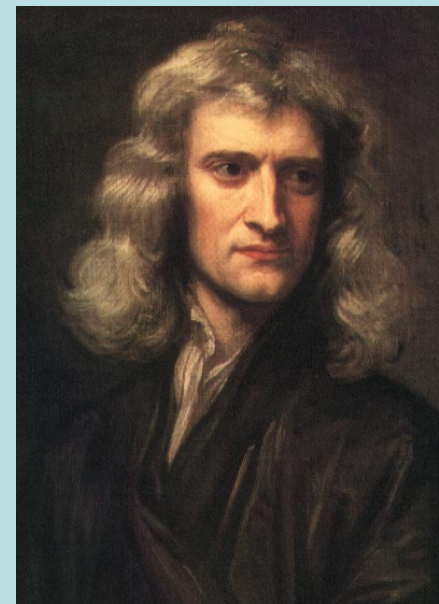
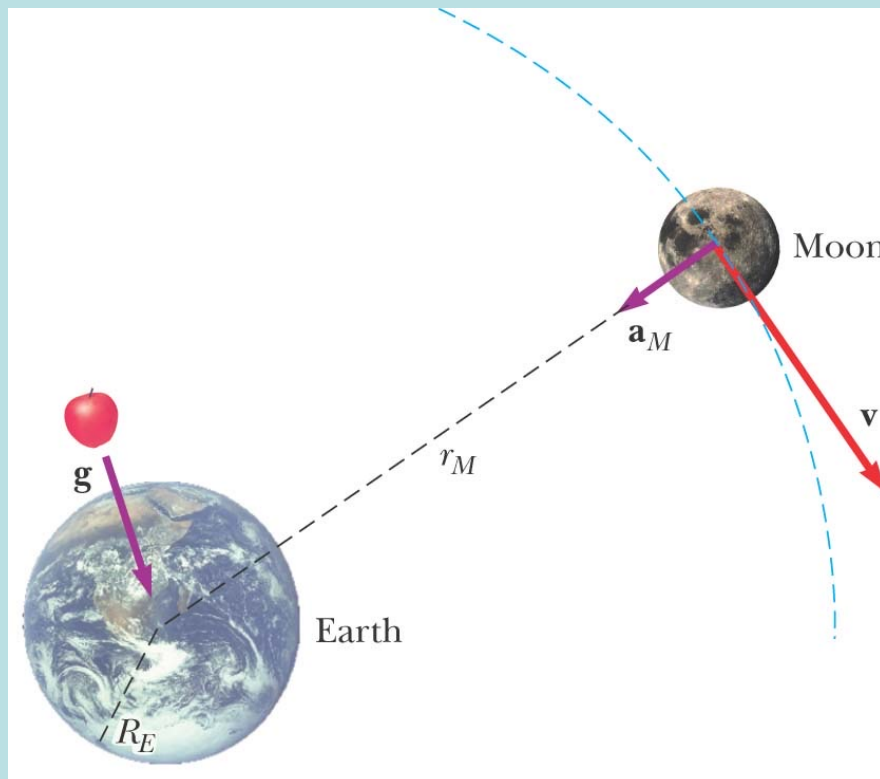
珍珠脫離後的初速則為：



$$\vec{v}_0 = a\omega(0, -1) + a\omega\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = a\omega\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)$$

珍珠落地前所需時間為： $\sqrt{\frac{2h}{g}}$ ，落地前位移為 $\Delta\vec{r} = a\omega\sqrt{\frac{2h}{g}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)$ 。

因此珍珠落地位置向量為： $\left(\frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{a}{4} - a\omega\sqrt{\frac{h}{g}}, \frac{a}{\sqrt{2}} + a\omega\sqrt{\frac{h}{g}}(1 - \sqrt{2})\right)$

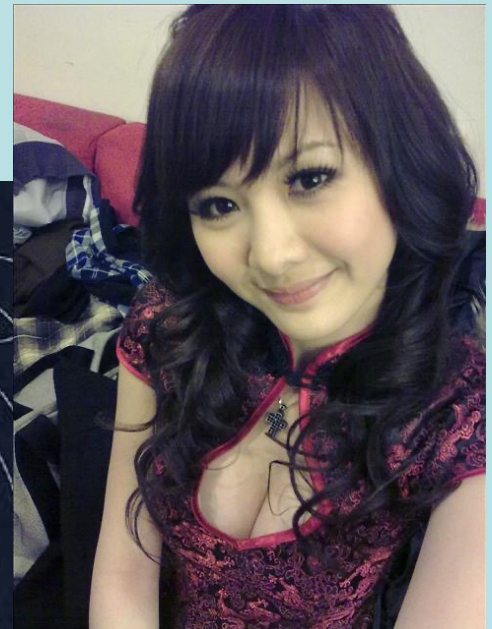
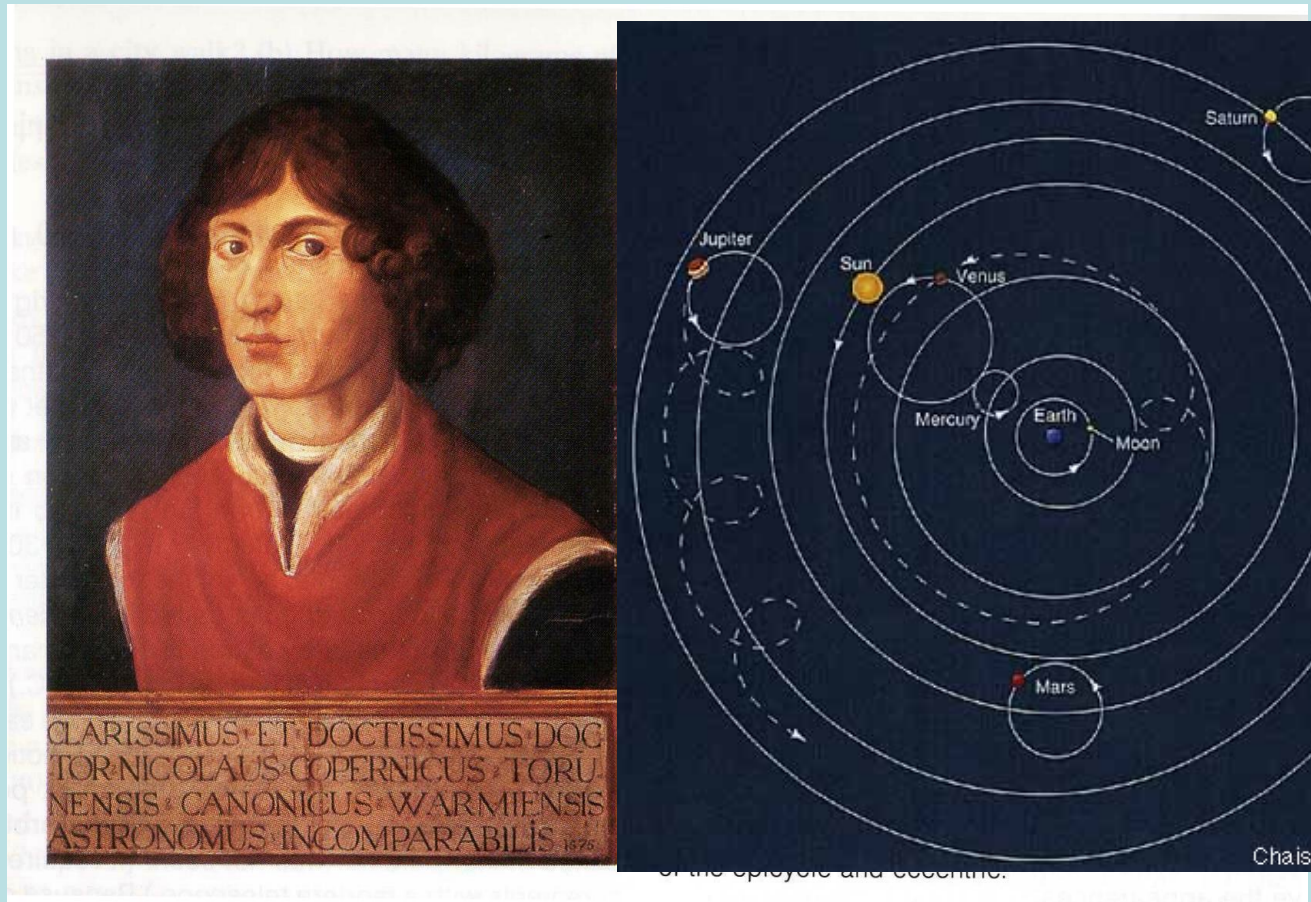


月球的運動也是等加速度運動（以大小而言）！
加速度的方向也是指向地球！

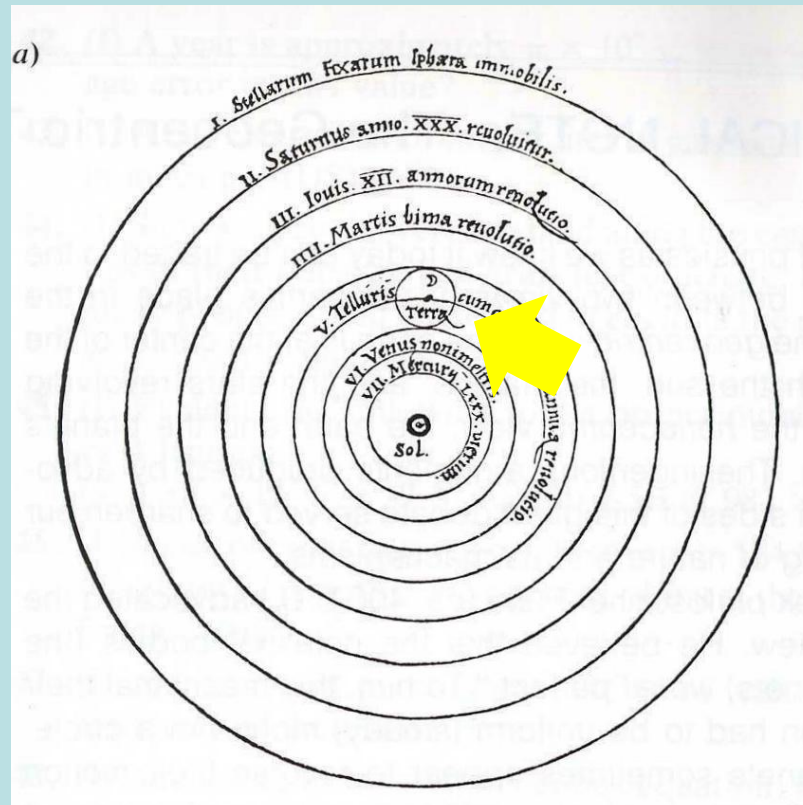
Isaac Newton
(1642-1727)

Is. Newton

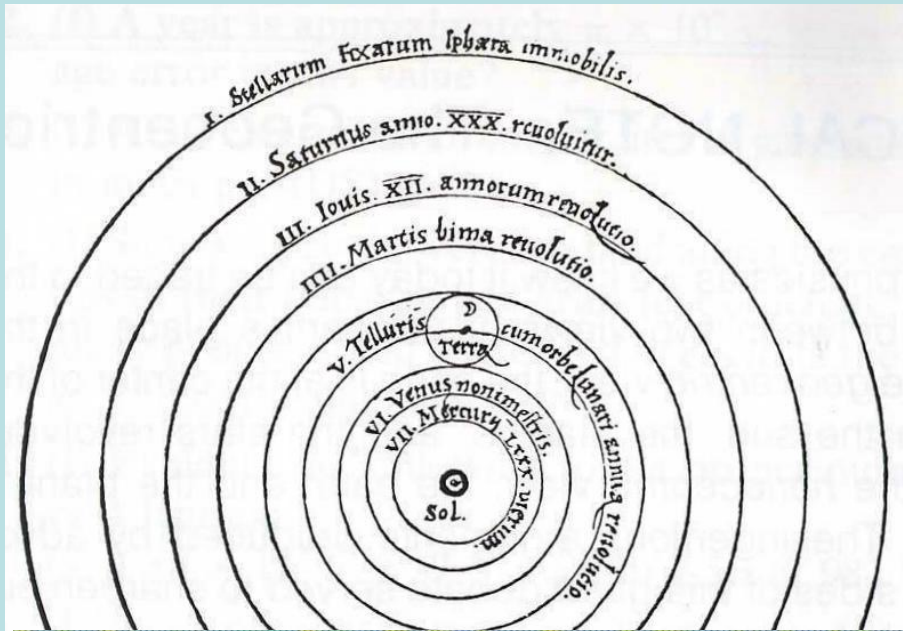
Copernicus 哥白尼 (1473-1543)



哥白尼批評托勒密的系統“....” **not pleasing to the mind**
他寧願忍受當時還無法解釋的地球移動，卻堅持心靈的快樂！
原來科學不只是忠於現象，科學還必須賞心悅目！
科學必須簡化現象為單純的定律！簡單使人快樂！



哥白尼的圖像也有一個不是非常精美之處！



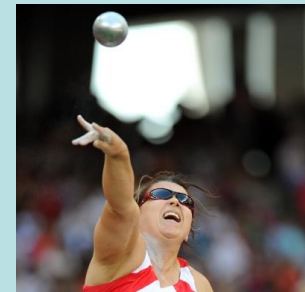
月球是離地極近，繞地球轉的天體。

為什麼它不像地球表面上的物體會落回地面？

月球為什麼一直飄在空中！



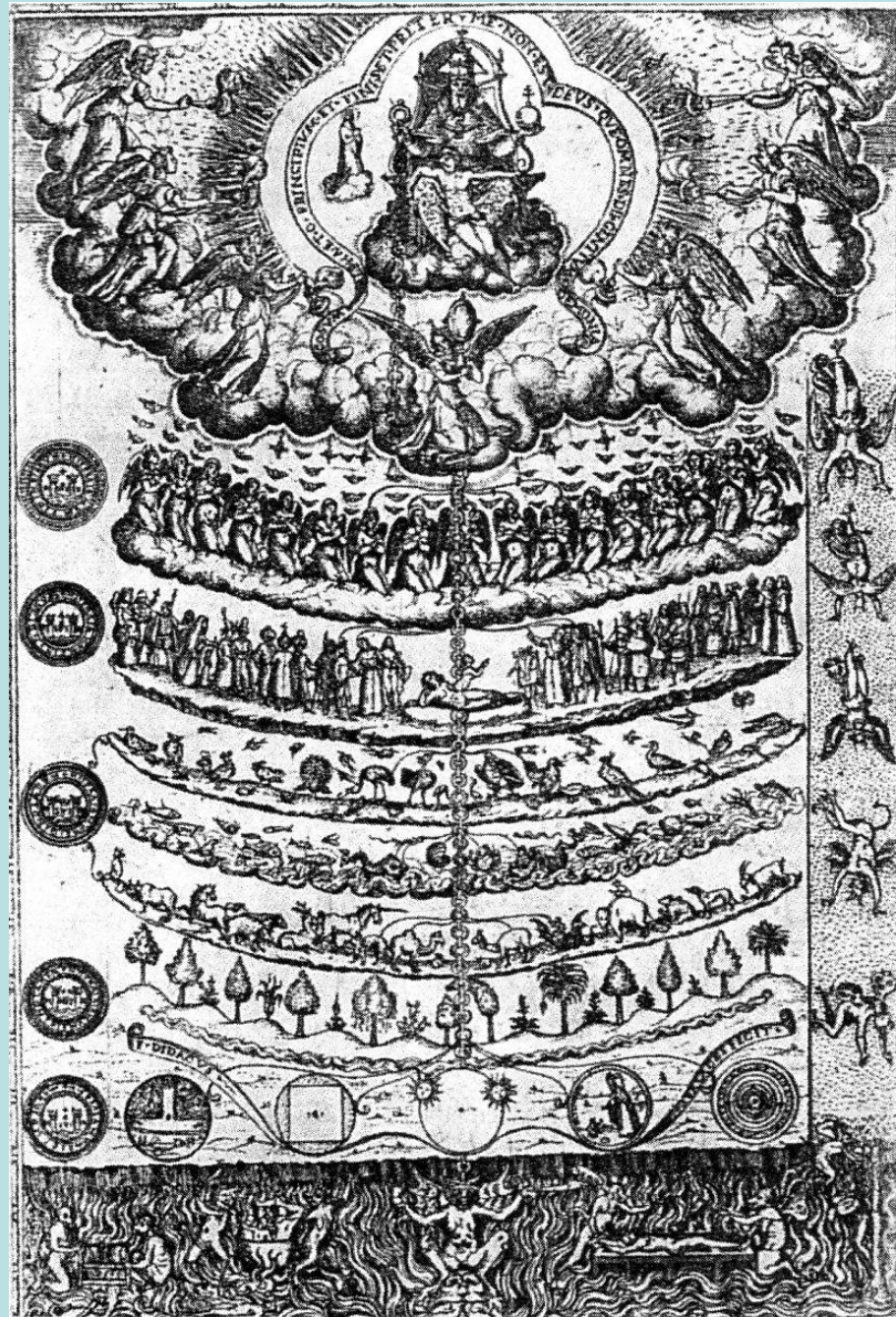
或許這本來就是如此！沒甚麼值得大驚小怪的！



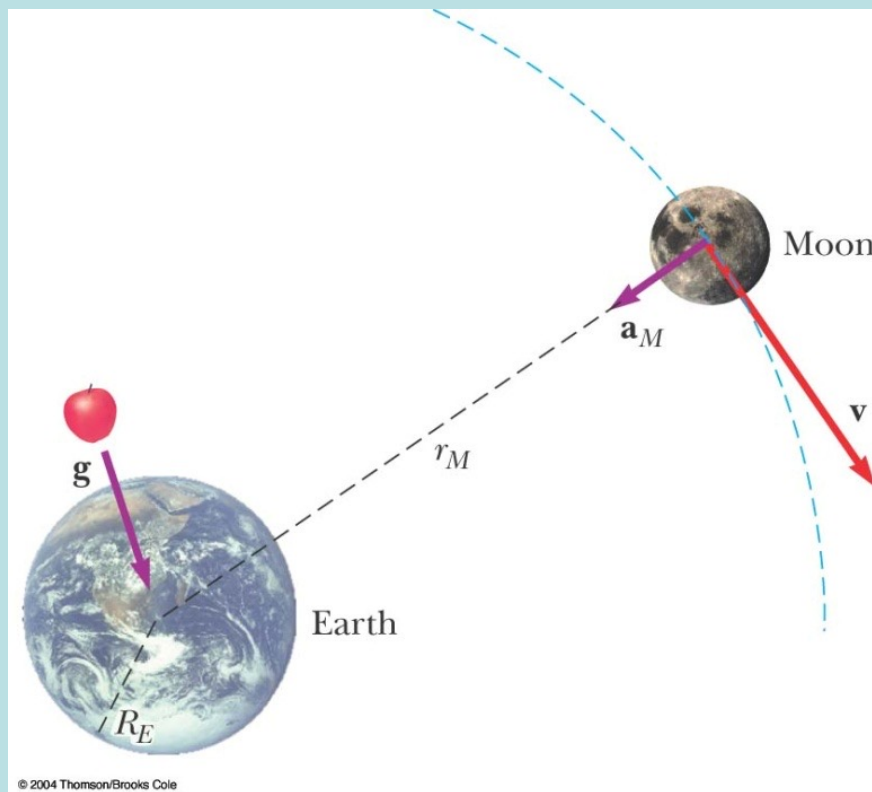
月球是神聖的天上的天體，
當然與塵世中世俗的物體，本質不同，遵守不同的法律，作不同的運動。
一個恆常運動，一個會落下。

如同貴族與平民，本質不同，遵守不同的法律。





自然與社會都有階級



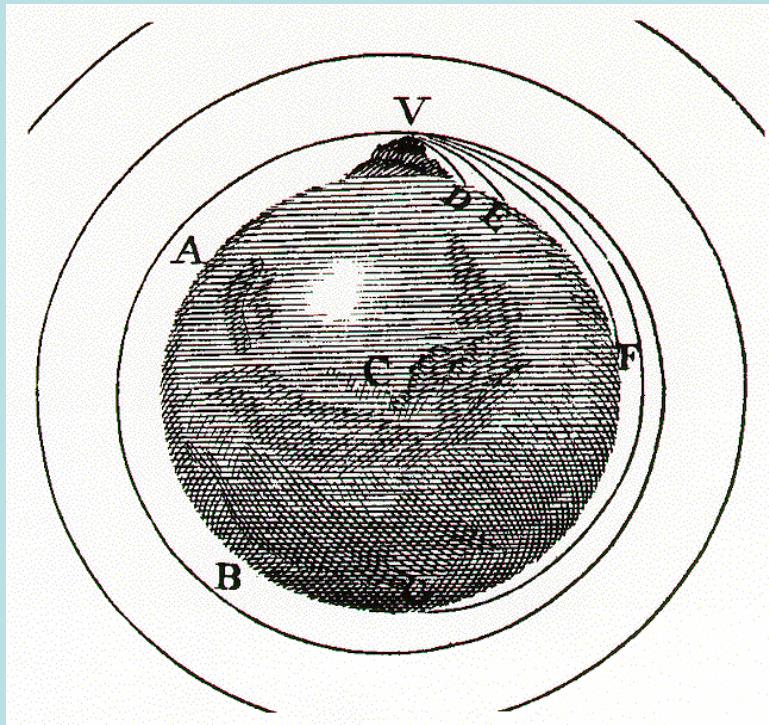
天上的月球與地上的物體，運動速度大小與方向雖然完全不同，
但運動的加速度卻都指向地心！

伽利略主張對物體運動的研究應該由速度轉移到**加速度**！

如果以加速度來研究，月球與蘋果的運動在本質上是一樣的。



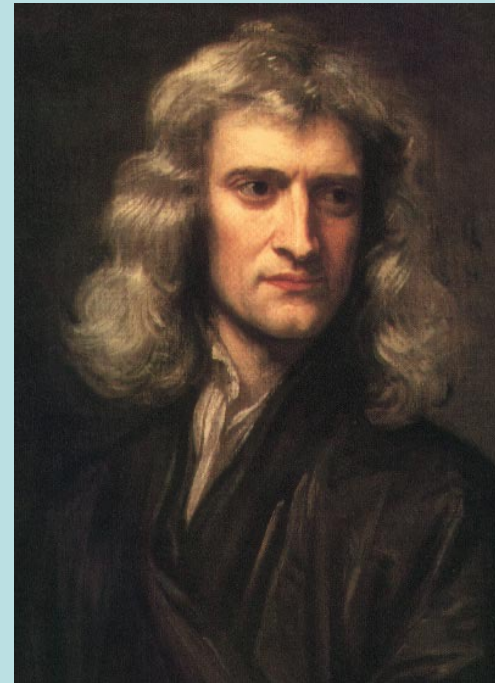
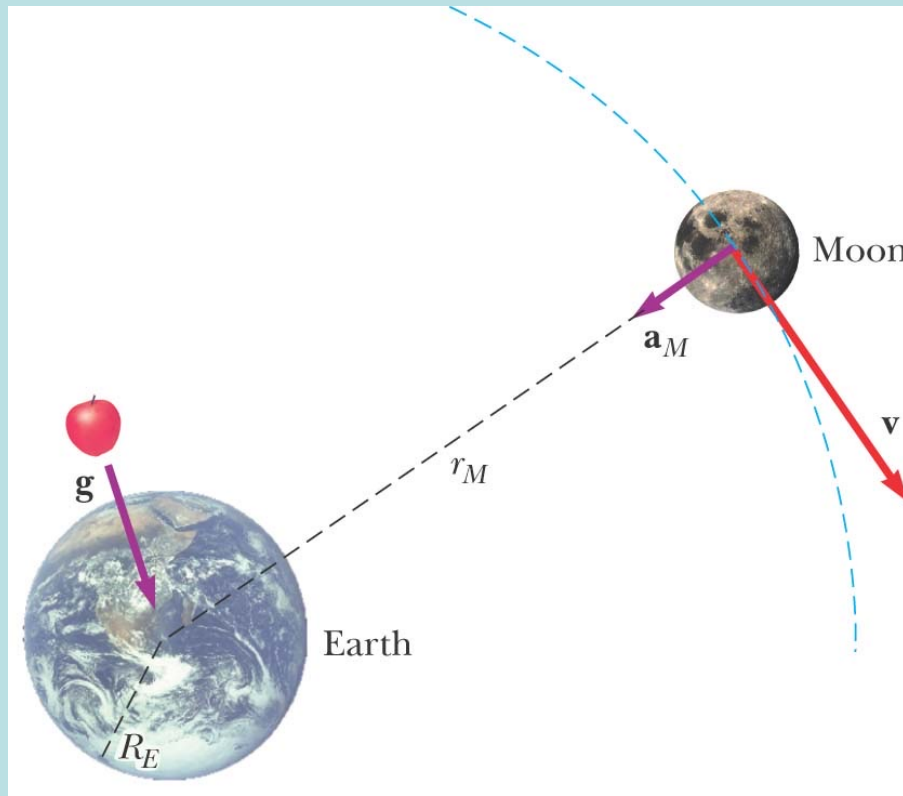
=



塵世的物體可以成為神聖的天體！

天體與地面物體本質上是平等的！

天體與蘋果服從同樣的物理定律



Isaac Newton
(1642-1727)

物理定律是普遍的 (universal)



無論貴賤，法律一體適用！

Nature is exceedingly simple and comfortable to herself.

Whatever reasoning holds for greater motions, should hold for lesser ones as well!

Newton “Conclusio”