萬有引力平方反比律來自於
橢圓律還是週期律

姚珩 [1]* 田芷綾 [2]

[1] 國立臺灣師範大學 物理系
[2] 桃園縣立大溪高級中學

壹、引言

萬有引力定律的發現受到克卜勒（J. Kepler, 1571–1630）行星運動定律深遠的影響，尤其是行星第一運動定律—行星是以橢圓軌道繞日運行（或稱橢圓律），與距離平方反比力的對應關係（Dijksterhuis, 1986），不僅被許多學者視爲是萬有引力定律依靠的重大基石（韋斯特福爾，1999），且其發現的優先權也造成牛頓（I. Newton, 1643–1727）與虎克（R. Hooke, 1635–1703）針鋒相對，激烈爭執（Hall & Knight, 1996），更引起後繼者對橢圓律的重視（Arnold, 1990）。前述或其他多數人所以習慣認爲力平方反比律是由橢圓律得到，最初是由於牛頓的直屬學生於 1728 年曾首先主張：

> "因為行星是以橢圓軌道運行，且太陽位於其中一個焦點上，牛頓便由此演繹出:行星所受的力強度與行星至太陽的距離平方成反比。" (Pemberton, 1728)

然而實情是否真是如此?另有學者指出：

> "牛頓接受克卜勒的橢圓律為一個經驗律，並且從中導出萬有引力平方反比律的這種說法，不斷地被重覆，但這是不正確的 (The claim that Newton accepted the Keplerian ellipse as an empirical law, and derived the inverse-square law of gravitation from it, has often been repeated. But it is incorrect.)。在重新檢視《原理》的第 3 卷，以及牛頓關於克卜勒行星律的各種不同陳述之後，顯示牛頓並未依靠這些由克卜勒所建立被視為精確的經驗律。他與克卜勒行星律間的關係，比任何傳統上的說明描述，皆更為複雜及微妙。"(Wilson, 1974)

作者 Wilson 在該篇論文中主要在強調與佐證：牛頓並未將橢圓律視爲一個絕對精確的定律，而是一種仍需繼續加以檢視，或僅是可供參考的經驗觀察規則，因此，後人將其當作是得出萬有引力定律的基礎時，要相當謹慎。至於牛頓《自然哲學的數學原理》（以下簡稱《原理》）一書內的理論結構與論證方式（牛頓，[1687]

1713），Wilson 則都未觸及。我們在研讀《原理》第 3 卷的宇宙體系，的確發現牛頓在推導萬有引力的平方反比律的程序中，完全沒有出現橢圓律，反而全部使用圓周運動的週期律。但是行星運動很明顯地是更接近於橢圓軌道，而非圓周，爲何牛頓會選擇較粗糙的圓周軌道，而捨棄橢圓軌道?其中的原委與轉折是什麼?萬有引力中的距離平方反比關係式，到底是來自於橢圓律還是週期律?這是我們想釐清、了解的。

貳、牛頓含糊的自述與教科書中的不完整處

牛頓的萬有引力定律基本上是於 1687 年正式發表於《原理》一書裡，但他曾述說自己早於 1665 年左右，是由週期律領悟出萬有引力平方反比律的道理，只是晚了二十年才發表（French, 1971；Jeans, 1975）。然而我們曾專文指出，西方研究牛頓思想的專家學者發現牛頓早期並無「引力」的概念，這從他當時所述有關月球試驗的著作裡可清楚看出，他認爲月球會作圓周運動是受到「離心力」的影響，而非引力的作用（田芷綾、姚 珩，2010）。亦即牛頓雖然早在 1665 年就提出了力平方反比律的數學描述式，但嚴格而言，他所使用的物理概念並不正確，萬有引力原理也不可能在當時成形，他的此段自述是含糊不清的（Cohen, 1980, p231–233）。

一般高中教科書大都按照牛頓在 1665 年所述，由圓周的週期律推導出萬有引力平方反比律。茲僅節錄部份內容如下（吳大猷，1999）：

> “……按牛頓的假設，一個行星軌道半徑為 R，週期為 T，質量為 m，被太陽吸引設為 F_m，正是上述所需的向心力 F_c。由克卜勒第三定律：
>
> $$\frac{R^3}{T^2}=K$$
>
> 這定值 K 與行星的質量 m 無關。故將此式代入向心力關係式
>
> $$(F_c = mv^2/R = 4\pi^2 mR/T^2)$$
>
> 即得
>
> $$F_m = 4\pi^2 Km/R^2$$

對於此段敘述我們會疑惑：當萬有引力尚未被發現之前，如何可知行星受太陽吸引？以及向心力 F_c 如何即是行星受太陽的吸引力 F_m？進一步，我們會再質疑：爲何太陽–行星彼此吸引，則所有物體就會以與距離平方成反比的力相互吸引？這些都是無法可簡單地從教科書中之上述論証來回答的（姚 珩，1998）。

從笛卡兒（R. Descartes, 1596–1650）到萊布尼茲（G. Leibnitz, 1646–1716）當代的物理學家咸認爲一切作用都需靠接觸或碰撞，才能將力傳遞出去（韋斯特福爾，2000）。牛頓深知此觀點的真實性，也明白他所描述的引力並無法滿足當時科學家們的要求，故在其論証中，必定會是嚴謹、深刻、清晰、且極具說服力的，方有可能扭轉其他專家的看法。

另有人主張，牛頓本人於 1689 寫給哲

學家洛克（J. Locke, 1632–1704）的信中記載是使用橢圓來得出引力的平方反比律；因此引力的平方反比律的來源清楚是來自於橢圓律（Turnbull, 2008, v3, p71）。但檢視該書信的主要陳述與《原理》一書 1687 及 1713 年前後兩版本之命題 11 完全相同，僅在說明沿橢圓運動的物體會受到反比於到焦點距離的平方之向心力，這與「萬物」皆存在有與距離平方成反比相互吸引之「萬有(universal)」引力，兩者並非是同一件事。

有些研究者也嘗試從克卜勒面積律及橢圓律推導出距離平方反比律（Macklin, 1971），但仍是在假設太陽–行星之間已存在有吸引力，然後去尋找其引力形式，並未討論牛頓如何發現太陽–行星、或萬物之間有吸引力存在的事實。

事實上，牛頓發現引力定律的過程是逐步形成的，其論証方式也非常細膩、且面面俱到。底下我們將還原牛頓如何主張作圓周或橢圓運動的物體會受到引力作用，及探討其所受引力大小的發現程序，最後，再論述牛頓爲何會宣稱此種作用力是一種遍佈在任何兩物之間的「萬有」引力。

參、週期律與平方反比力

《原理》第 1 卷論物體的運動，主要是討論單一物體圍繞幾何力心運動之純粹數學分析，完全不論及自然現象。該卷一開始便先給出質量、運動量、外力、向心力等八個物理概念的定義，以及全書的論證基礎—也是大家所熟悉的三個運動定律或公理，接著進入主題，從向心力問題的討論切入。第 1 卷雖然有 98 個命題(或 50 個定理)，然而牛頓在第 3 卷中明顯提示，欲了解宇宙體系的讀者，只要仔細讀過第 1 卷中前面 17 個命題的內容，即已足夠（牛頓，1713，349 頁）。

中命題 1 至 3，主要是陳述面積律：物體與某靜止點的連線在相同時間掃過相等面積，與向心力的存在，完全等價同義，即

$$\boxed{\text{面積律}} \Longleftrightarrow \boxed{\text{向心力的存在性}}$$

而命題 4 則甚爲關鍵，在歷史上它首次描述出圓周運動向心力的數學表達式，以及一個相當重要的推論。《原理》如此記載（牛頓，1713，61 頁）：

命題 4　定理 4

> 沿不同圓周等速運動的若干物體之向心力，指向各自圓周的中心，它們之間的比，正比於等時間裡掠過的弧長的平方，除以圓周的半徑。

命題 4　推論 6

> 如果週期正比於半徑的 3/2 次方，則向心力反比於半徑的平方；反之亦然。

此處「等時間裡掠過的弧長」指的就是速率 v，以現今代數來表示命題 4 即爲：若圓半徑爲 r，在其上作等速率圓周運動的物體，所受之向心力 F 爲

$$F \propto \frac{v^2}{r}$$

故作等速率圓周運動的物體，在圓上任一點所受的力大小爲固定值。牛頓常藉著比較相同物體所受作用力的比值，來討論物理的現象與性質，如此可使質量不必出現在力關係式裡，而得到簡化。對於在不同圓周運動的物體，若滿足週期律 $T^2 = kr^3$，k 爲常數，利用圓周速率 $v = 2\pi r / T$，可知

$$F \propto \frac{v^2}{r} = \frac{(2\pi r/T)^2}{r} = 4\pi^2 \frac{r}{T^2}$$

$$= 4\pi^2 \frac{r^3}{T^2} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{4\pi^2}{k} \frac{1}{r^2}$$

因此物體所受之向心力 F 反比於半徑平方，此即爲推論 6。此命題描述：任一物體在不同半徑的圓周上作等速率運動，且也符合週期律時，則圓周運動的週期律便等價於距離平方反比力。即

正圓的 週期律	⟺	距離平方 反比力

肆、橢圓律與平方反比力

牛頓與虎克對平方反比力的討論開始於 1679 年底。虎克首先寫信向牛頓提及他對吸引力的猜想。牛頓很快回覆並討論到：假想人在北極上方，可觀察到在赤道線的高塔上，靜止釋放一重球，且假設當球要抵達地球表面時，在球前方均無阻力，彷彿有一坑道可讓其持續運動，則其運動路徑會是如何？牛頓本身認爲此球將以螺旋形運動，最後抵達地心，如圖 1（Taton & Wilson, 1989, p241）。

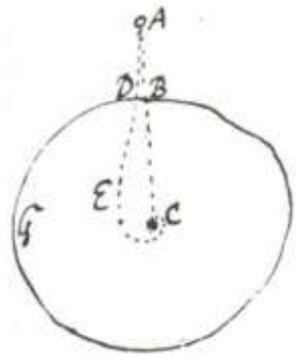

圖 1、在地球內牛頓所繪之螺旋線軌跡

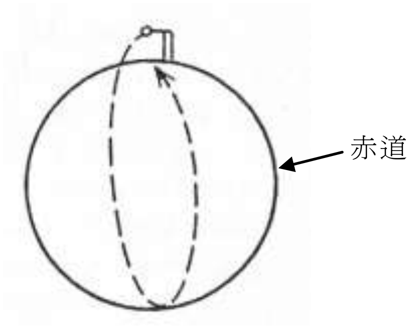

圖 2、在地球內虎克所言之運動軌跡

此問題引起了很大的迴響，最後虎克指出球落入地球內後的軌跡應該是一個封閉曲線（圖 2），並於 1680 年 1 月給牛頓的回音中提及 (Arnold, 1990)：

> “我的看法是吸引力永遠與至中心距離的平方成反比，……所受的引力可依據距離中心如前所言（平方反比）

的比例來計算……。”

由此封信很清楚顯示出，平方反比力似乎首先是由虎克提出。他還嘗試尋找受此力作用物體的運動軌跡，但由於欠缺足夠的數學能力，他無法證明其軌跡爲橢圓。因此虎克便建議牛頓從事此計算，而牛頓最終的確證實出此關係,還證明出其反命題:

命題 11　問題 6

> 物體沿橢圓運動，指向橢圓焦點的向心力反比於其到橢圓焦點距離的平方。(牛頓，1713，71 頁)

在《原理》中，此命題證明冗長，而不易見其原委。細緻而言，意指作橢圓軌道運動之物體在橢圓上任意一點與焦點距離 處，物體所受向心力（圖 2 或向心加速度 ）的大小必定有

$$a = 4\pi^2 \frac{R^3}{T^2}\frac{1}{r^2}$$

其中 T 爲週期，R 爲半長軸長。此形式雖與正圓情形類似，但意義全然不同，此關係式強調對同一橢圓上物體所受之加速度幾乎處處不同（項武義和張海潮，2008）。對固定之橢圓而言，T 與 R 皆爲常數，則 a 與 r^2 成反比，即

$$\boxed{\text{橢圓律}} \Longrightarrow \boxed{\text{距離平方反比力}}$$

但其反命題則不一定成立，《原理》中指出滿足距離平方反比力的運動軌跡必爲圓錐曲線，而不必爲橢圓。

命題 17　問題 9

> 設向心力反比於物體處所到中心的距離的平方，且該力的大小已知，若速率使得半正焦弦長小於 $2\overline{SP}+2\overline{KP}$，則圖形將是橢圓；若速率較大，使得半正焦弦長等於 $2\overline{SP}+2\overline{KP}$，則圖形將是拋物線；若速率更大，則圖形將是雙曲線。(牛頓，1713，79 頁)

此處正焦弦爲半短軸長與半長軸大小比值平方的兩倍，S_1H 爲兩焦點，P 爲軌道上物體，T 爲 S 至 $\overline{PH}$ 之垂足。即

$$\boxed{\text{距離平方反比力}} \Longrightarrow \boxed{\text{橢圓、拋物線或雙曲線}}$$

伍、宇宙體系建立的參考基礎與平方反比力

在《原理》第 3 卷中牛頓才開始將第 1 卷中的數學分析，應用在有關天體運動的自然現象裡。由於橢圓律與平方反比力之間關係的發展，引起了當時眾多一流科學家的注意與投入，彷彿意謂在卷 3 中，對於宇宙體系的探討及距離平方反比關係的發現，橢圓律必定會扮演著重大的關鍵角色。然而在卷 3 裡，全部命題與定理乃建立在六個基本現象，它們卻完全以圓周運動的週期律爲基礎。

現象一

木星的衛星，由其伸向木星中心的半徑所掠過的面積，正比於運行時間；且它們的週期正比於到其中心距離的 3/2 次方。(牛頓，1713，352 頁)

牛頓列出了四顆木星衛星的圓周運動週期及圓周軌道半徑，並確認其週期平方正比於各自衛星到木星半徑的三次方（表 1）。

表 1、木星四顆衛星的週期、半徑之觀測數據，與各衛星的週期平方與軌道半徑立方的比值。（時間單位為天，半徑單位為木星半徑。）

木星衛星編號	1	2	3	4
木星衛星的週期 T	1.77	3.55	7.03	16.69
軌道半徑觀測值 R	5	8	13	23
$\dfrac{R^3}{T^2}$	39.90	40.63	44.45	43.68

接著並描述五顆土星衛星與六顆太陽行星的觀測數據，也具有相同現象 (牛頓，1713，353 頁)。非常特別的，牛頓在此視行星繞日運動爲圓周運動而非橢圓運動。

現象二

土星衛星伸向土星中心的半徑，所掠過的面積正比於運行時間；且它們的週期正比於它們到土星中心距離的 3/2 次方。

現象四

五顆行星以及地球環繞太陽(或太陽環繞地球)的週期，正比於它們到太陽平均距離的 3/2 次方。

而現象三、五、六則定性地描述行星是作繞日運動 (牛頓，1713，354–356 頁)，而非繞地球運動，且月亮爲地球之一個衛星，並滿足面積律。

現象三

五顆行星，水星、金星、火星、木星和土星、在其各自的軌道上環繞太陽運轉。

現象五

行星伸向地球的半徑，所掠過的面積不與時間成正比；但它們伸向太陽的半徑所掠過的面積正比於運行時間。

現象六

月球伸向地球中心的半徑所掠過的面積，正比於運行時間。

利用上面六個基本現象，尤其是符合週期律的現象一、二、四，牛頓明言它們滿足卷 1 的命題 4 推論 6 之正圓週期律，因此便有下列卷 3 中有關距離平方反比力最重要的命題 (牛頓，1713，357–365 頁)：

命題 1　定理 1

使木星衛星連續偏離直線運動，停留在適當軌道上運動的力，指向木星的中心，反比於從這些衛星的處所到木星中心距離的平方。

命題 2　定理 2

使行星連續偏離直線運動，停留在其適當軌道上運動的力，指向太陽，反比於這些行星到太陽中心距離的平方。

命題 5　定理 5

木星的衛星被吸引向木星；土星的衛星被吸引向土星；各行星被吸引向太陽；這些重力使它們偏離直線運動，停留在曲線軌道上。

附註；

迄今為止，我們稱使天體停留在其軌道上的力為向心力；但現已弄清，它不是別的，而是一種起吸引作用的力，此後我們即稱為重力(引力)。

命題 7　定理 7

對於一切物體存在著一種引力，它正比於各物體所包含的物質的量。

推論 I

所以，指向任意一顆行星全體的引力由指向其各部份的引力複合而成。

推論 II

指向任意物體的各個相同粒子的引力，反比於到這些粒子距離的平方；這可由第一卷命題 74 推論 III 證明。(**卷 1 命題 74 推論 III**: 如果位於均勻球外的小球受到的吸引力反比於它到球心距離的平方，而球由吸引粒子組成，則每個粒子的力將隨小球到每個粒子的距離的平方而減小。)

這便是卷 3 中得出宇宙體系內平方反比力的真正出處。在其中，牛頓認爲：因爲天體，含衛星、行星及太陽，其內部均是由許多不同的小部份所組成，兩天體會互相吸引，也可說是由於其內部這些具有質量的各個小部份，彼此互相吸引的結果所造成；因此命題 5 所說的「天體」吸引力即可推得出命題 7 推論 II 所言萬物之間的「萬有」引力。這是牛頓陳述引力的完整內容，清晰令人折服，並展示發現「萬有」引力的整體過程，它不是僅由行星環繞太陽的現象就可獲得，其精神與內涵也不是一般教科書所能呈現出來的。

在檢視卷 3 通篇的內容，我們亦可看出平方反比力僅提及圓周的週期律，完全未觸及橢圓律，那麼卷 1 中命題 11 及 17 的功能何在？大家對橢圓軌道與平方反比力緊密關係的探討，所爲何來？難道這些都是枉然，否則在宇宙體系中爲何完全沒被引用？我們分析基本上可能有三個主要原因，茲分別討論於下。

陸、觀測歸納的普遍性

我們不能僅由沿橢圓運動的行星會受到反比於到焦點(太陽)距離的平方之向心力，便主張「萬物」皆存在有與距離平方成反比之相互吸引力，這不是牛頓的作法。他明白自然科學首重觀測，且所觀測到的現象必須具有廣泛的普遍性，才有可能形成原理。牛頓在第 3 卷提出六個基本現象前，曾先寫下四個「哲學推理規則」，做爲討論現象與原理之間的關係法則。規則 II, III 在描述普遍性理論的特質，規則 IV 則在強調實驗歸納法。他說 (牛頓，1713，350–351 頁)：

規則 II

因此，對於相同的自然現象，必須盡可能地尋求相同的原因。

規則 III

物體的特性，若其程度既不能增加也不能減少，且在實驗所及範圍內為所有物體所共有，則應視為一切物體的普遍屬性。

規則 IV

在實驗哲學中，我們必須將由現象所歸納出的命題，視為完全或基本正確的。在直到出現其他可排除這些命題、或可使之變得更加精確的現象之前，不須在意由想像所可能得到與之相反的種種假說。

牛頓在第 1 卷中，大都採用歐氏幾何的公理系統，亦即演繹法，但他也明白所有的事實必須建立在觀察基礎上，藉通過歸納來揭示事物的本質。牛頓在《光學》的「疑問 31」中，對上述「哲學推理規則 IV」的意涵描寫得更爲透徹，茲節譯如下：

“在自然哲學上，……分析法是經由操作實驗、觀察和使用歸納從中獲得普遍結論所組成的，且不容許任何與此結論相違背者，同時這些結論是來自於實驗或其他某些真理，因為在實驗哲學上，是不看重假設的。雖然從實驗與觀測上用歸納法所進行的論證，不能當作普遍結論的證明，可是它是用歸納法具有多少普遍性，來論證事物性質所允許的最好方法，並且可以看作是很有力的。”(Newton, 1704)

亦即從歸納法獲得事物的普遍性，是論證事物本質的最好方法，然後再對所歸納出來的事實，進行分析，以發現更普遍的原因。牛頓在光學研究上，發現太陽光譜、色散理論與牛頓環，均是直接來自大量的實驗和歸納，所獲得的一種普遍性結果（閻康年，1989）。

在行星系統中，由於尚無完整的木星與土星衛星之橢圓數據，而行星繞日的橢圓規則也還未成爲嚴格的定律（Wilson, 1974），爲了從真實的現象與觀察中進行歸納，也爲了尋求更有力的普遍性，牛頓選取了在木星、土星、地球與其對應衛星、以及行星–太陽此四個系統上，皆可被歸納出來近似的正圓軌道，及其週期規則。然後在卷 3 命題 1~4 的證明中使用卷 1 命題 4 推論 6 之圓周運動週期律與平方反比力的等價性，演繹出普遍結論。而卷 1 命題 11 的橢圓律雖然有其較充分的幾何蘊涵，但終因在觀測上未能歸納出木星、土星、地球諸行星普遍的衛星橢圓軌道，致使未被採用。簡單而言，橢圓律僅可得出行星會受到至太陽距離平方成反比的作用力吸引，但無法推得出萬物之間皆普遍存在的「萬有」引力。

柒、概念建立的一致性

在伽利略（G. Galilei, 1564–1642）提

出運動慣性後，笛卡兒與惠更斯（C. Huygens, 1629–1695）則自探討沿著半徑方向的直線運動，以及裝在旋轉管內球的運動中，分別提出了向外趨勢（outward tendency）與離心力（centrifugal force）觀點，一直到牛頓發表《原理》一書時，向心力（centripetal force）一詞才首次被提及（Cohen, 1980, p229–258）。有的學者認爲牛頓對動力學的分析是從虎克那邊得到了許多啓示：

> "虎克從未言及離心力，軌道運動是由於受到指向中心的力，使得它持續偏離切線路徑所造成的。牛頓在與虎克通信(1679 年)之前並未顯示對圓周運動類似的理解，因每次考慮此問題時，他總是與其他人一樣，談到自中心向後退出的趨勢，即惠更斯所言的離心力。牛頓認為圓周運動是由離開與朝向中心，兩個大小相等、方向相反的力所形成的均衡狀態。虎克則視圓周運動為一種不均衡狀態，受到不平衡的力使物體無法作直線運動。對牛頓來說，這並非是個不重要的學習教訓[原書特別加上強調]。" (Brackenridge, 1995)

上列陳述從某種角度可說是正確的，但從另一角度來看則有誤導之嫌。在等速圓周運動的分析上，牛頓起初的確很明顯是使用著笛卡兒學派的述語，認爲旋轉物體有「自中心後退的趨勢」，然而在分析圓周運動的問題上，即使用了切線位移與徑向位移的合成法，以及對力本質之一致性描述，他前期所使用的技巧，與他後期更成熟作品中所使用的方法，則相當一致。早期所言的徑向位移雖然因朝向外，而無法呈現向心力性質，但後期徑向位移則已很自然地轉化爲可呈現向心力的性質。無論如何，兩個時期所使用的數學與動力學要素則是相同的。此兩個時期在觀點或術語上的不同，可說是牛頓從虎克那學習到的，但若說在分析上的結構與思考細節是由虎克所領引的，則爲一種誤導（Brackenridge,1995,p20–21）。早在 1669 年前對圓周運動的分析（牛頓此時尙無向心力概念），他便已提出底下陳述（圖 3）：

> "物體 A 離開(或來自)圓心 C 的趨勢(endeavor from the center)與在時間 AD 中離開圓周的距離 DB 成比例，.....也有如在趨勢無阻力 (no impediment to the endeavor) 作用時，物體在此段時間可自由地沿著切線 AB 移動，所造成的變化距離。" (Brackenridge, 1995, p59)

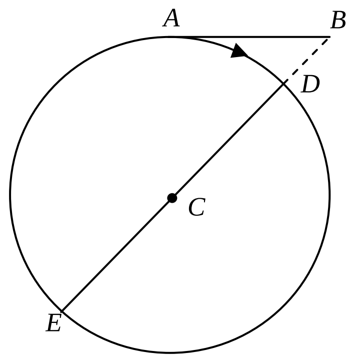

圖 3、 繞著圓心 C 作圓周運動的物體，DB 長代表圓弧 AD 偏離切線 AB 之大小

此處不論是「離開 (或來自) 圓心的趨勢」或「趨勢無阻力作用」時，位移 可代表「阻力」的大小，且可以是朝外的離心力，但也可以是朝內的向心力。牛頓早期作品很明顯地採用了第一種笛卡兒似的說法，後期作品則選用了虎克的述語，但兩種情形，牛頓皆是以位移來代表作用力強度，並指出會與時間平方成反比。牛頓自虎克所學習到的是一種觀點描述，但絕不是一種分析方法。

1679 年之前牛頓一直接受到笛卡兒的渦漩理論，認爲宇宙中緊密的以太渦漩與天體的碰撞是行星間引力存在的原因。其後牛頓拋棄了這些說法，其主要的關鍵性轉變便在於他發現了向心力的存在，以及向心力與克卜勒行星面積律的等價性。這些發現也代表著他拒絕了當時最流行的機械論觀點──力僅能由物體藉著彼此碰撞而傳遞出去。

這段時間也是虎克向牛頓提出，並請他檢視：指向焦點之中心力，讓物體偏離直線形成橢圓軌跡，是否與至力心距離之平方成反比？此問題的確刺激了牛頓，將他在 1669 年前只適用於等速圓周運動分析，推廣至更普遍的非等速橢圓運動問題上。藉著融合面積律的新內涵，與早期等速圓周運動的動力學分析，牛頓最終擁有了一個有效的基礎，來建立其世界體系，其中虎克是位催化者，然而牛頓則依然是位創造者。

牛頓早期在 1665 年他的《雜記》(Waste Book）中對圓周運動所受力的討論，是先以在圓內作部分的直線運動質點，撞及圓周四個位置所形成來回之正方形運動來近似（圖 4，Brackenridge,1995, p46）。

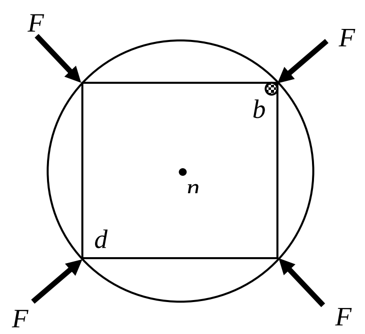

圖 4、以正方形軌跡路徑來近似圓運動路徑。在圓與正方形交界處均有一衝力 *F* 作用在物體上。

姑且不論質點是受向心力或離心力作用，當它與圓周碰撞時，圓周必有一力作用於質點 *b* 上。牛頓稱在 *b* 處所受之作用爲反彈力（force of reflection）或衝力 *F*（impulsive force），若以現代術語嚴格而言則應爲衝量（impulse）I_b，其大小可由線段 *bd* 來表示。若無圓周存在，則在某一固定時刻（如 1/4 之週期）可運動至 *y* 點，他稱不受外力作用時，物體攜帶有運動力（force of motion），或初衝量 I_o， I_o 可由線段 *ab* 或 *by* 來表示（圖 5，Brackenridge, 1995, p50）。

則 $I_b / I_o = bd/ab = 2fa/ab = ab/fa$

上式使用了等腰直角三角形 *fab* 的關係

$$fa^2 + fb^2 = ab^2$$

牛頓進一步首度引用了平行四邊形的合成原理，得到合成位移爲 *bc*，因此，完成一圈作用在質點之平均衝量 ΣI_b 與質點之運動量 I_o 之比 $\Sigma I_b / I_o = 4ab/fa$。

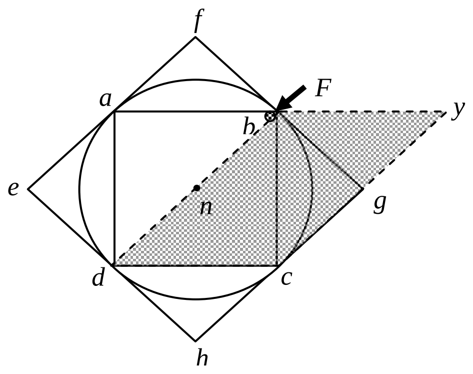

圖 5、 *bc* 線段為陰影區平行四邊形之對角線，衝力 *F* 作用在 *b* 點處之大小可以 *bd* 線段來表示

當四邊形變成正多邊形，最後形成圓形時，則正方形周長可以圓周長代表，則作用在圓周運動質點上之平均衝量與運動量 I_o 之比，為圓周長與半徑之比，或

$$\Sigma I_b / I_o = 2\pi r / r = 2\pi$$

總衝量 ΣI_b =(平均衝力 F)·(週期 T)，運動量 $I_o = mv$ ，又因 $T = 2\pi r / v$ ，則

$$\frac{\Sigma I_b}{I_o} = \frac{FT}{mv} = F \cdot \frac{2\pi r / v}{mv} = F \cdot 2\pi \frac{r}{mv^2} = 2\pi$$

故

$$F = m\frac{v^2}{r}$$

這也就是牛頓後期呈現在《原理》第 1 卷命題 4 中的內容。清楚表示出此概念並非由虎克所提供，而是牛頓自 1665 年開始即一脈相承的思考結果，由此概念，再引用週期律，即可導出平方反比力。

向心力的存在與面積律兩者的緊密關係，虎克未曾知曉，它純屬牛頓之創見。等速圓周運動也一直是牛頓處理的對象，虎克並未對此內容提出任何建言，而前述這些在 1665 至 1679 年間所完成的相關定理，即形成了《原理》第 1 卷最前面的四個重要命題。在第 3 卷裡，或許牛頓並不願意讓人感覺，宇宙體系中的萬有引力定律需要用到虎克所言：與距離平方成反比的力是造成天體作橢圓運動的引力原因；遂想刻意避開，以免陷入發現優先權的爭議。

事實上，早在 1645 年法國天文學家布里阿德（I. Bulliadus,1605–1694）便提及，若把太陽的動力看作與光類似，則太陽的動力或引力在性質上「應當以與距離平方成反比的關係取而代之」。而許多學者的考證也都指出牛頓在 1665 年左右，肯定知道布里阿德的引力平方反比關係（Turnbull, 1960, v2）。 然而單純只有平方反比力的想法（如虎克或牛頓早期所具備的），與全面完成平方反比律的建立，則並非同一件事。甚至進一步可指出，使月亮繞地球運轉的力和使蘋果落地的重力，皆來自於同一力形式，也非僅靠簡短的想法，就能成其大業。就好比牛頓在最初的青年時期，如果他還無法建立圓周的平方反比律，則縱使有虎克的出現與建議，也依然無法促使牛頓完成引力平方反比律。如此也可推知，在第 3 卷中，牛頓清楚揭示了：單純地由他早期所探討不同半徑的圓周運動，配合週期律，而完全不需觸及橢圓律的現象，便可完成平方反比力的建立。潛藏著欲表白他從早期至後期，在科學概念及原理建立上的一致性與獨立性。

捌、主要近似後的嚴謹論證

在觀測數據上牛頓雖然未採用行星的橢圓律，而是以圓形來表示行星軌道，但他當然也明白各個行星繞日運動，嚴格而言，應爲橢圓軌道。然而爲了在引用歸納法時的普遍性要求，他需要先引用圓形軌道，方可涵蓋木星與土星之衛星運動，以形成一共通規則，進一步建立起引力的平方反比律。爲了佐證引力平方反比律，並對宇宙體系的現象作更精確的詮釋，在卷 3 命題 13 牛頓進一步修正了行星軌道：

命題 13

若行星受到反比於它們到太陽距離平方的引力作用，則行星將沿橢圓軌道運動，其公共焦點位於太陽中心，且伸自該中心的半徑所掠過的面積正比於運行時間。(牛頓，1713，369頁)

前半段的證明，可由第1卷命題17得到，而後半段爲任意向心力的面積定律，則可由第1卷命題1直接獲得。由此利用平方反比力的前提，便可嚴謹論證出行星作橢圓軌道運動的現象，縱使平方反比力是由近似的圓周軌道歸納而得。所以牛頓是先尋找普遍性規律，再進一步追求嚴謹性，循序漸進、面面俱到、一一解決，而不指望畢其全功於一役，或要求普遍性與嚴謹性須在一個程序或步驟中就得全部展現完成的奢望。

牛頓思想的研究學者曾指出 (Cohen, 1980, p62–63)：

> “將想像的推理與數學技巧應用到經驗資料上，可稱為「牛頓風格」。此風格基本上可分成三個階段。第一階段：先將自然現象描述為較簡單設想成的物理實體與狀況，且它們可再轉化為數學對象。……如此自然可被簡潔化與理想化，並將自然系統類比近似為可以想像與抽象性處理的數學系統，而自然體系中的物理狀況便成為抽象數學中的規律或命題，自然界的結果也可應用數學方法演繹而得。第二階段：由於數學系統是由理想化的物理系統複製出來，故從數學系統中推導出來的規律或命題，可再轉化回去到理想化的物理系統，再與經驗與觀測所得的資料比較對照。這個從經驗世界形成的對比，與第一階段最初的自然現象比較之後，常常還需要再做修正，又再進行第一與第二階段，直到末了，獲得最相近的結果。如此，牛頓逐漸地在想像中的建構系統上，加入進一步的成份、概念或條件，使得演繹出的結果，能與經驗世界更趨一致。”

在建立平方反比力原理當中，牛頓第一階段便是將天體中行星、衛星的自然現象，描述成各種不同的等速圓周運動的物理狀況，再轉化成第 1 卷中單一質點的數學對象。第二階段裡，則使用第 1 卷中之命題 1 與 2 的面積律，及命題 4 的圓周週期律，演繹獲得推論 6 的平方反比力，並轉化回去與經驗世界中所觀測到的太陽系行星的橢圓軌道對照 (圖 6)。發現可再提高與修正行星圓周軌道的精確性，而將自

然現象中的平方反比力引入至數學系統中，再引用第 1 卷的命題 17，推導出單一質點的橢圓軌道，而能與經驗世界的行星運動軌跡更符合一致，以完成其理論的嚴謹性。而最後的第三階段，便是將所建立的普遍性原理，廣泛使用在地表運動、衛星、月亮、彗星、潮汐……等各種現象上，以佐證原理的成功與有效。

譬如對落體運動的描述，便是一種使用了物理與數學系統互相轉化的觀點，即最初先略去空氣阻力，得到理想化的數學對象，並進行純粹的數學論證：質點若受到與質量成正比的重力 $W = mg$ 作用，由第二運動定律

$$mg = W = F = ma$$

可獲得任何質點的加速度 a 均為定值 g（即重力加速度），且下落距離(s)與經歷時間平方（ t^2 ）成正比，即

$$s = (\frac{g}{2})t^2$$

將此數學規律轉換回物理系統的落體，並與觀測所得的實驗結果比較。若 s 與 t^2 成比例，則完成現象的精確詮釋；若否，代表還需要做進一步的修正，例如需考慮空氣阻力（取與速率成正比的阻力 bv ）的因素，將此因素加入後，再轉變為數學對象，及進行純數學論證：可得

$$mg - bv = F = ma$$

之二階微分方程，解後至二級近似可得

$$s = (g/2)t^2 - (bg/6m)t^3$$

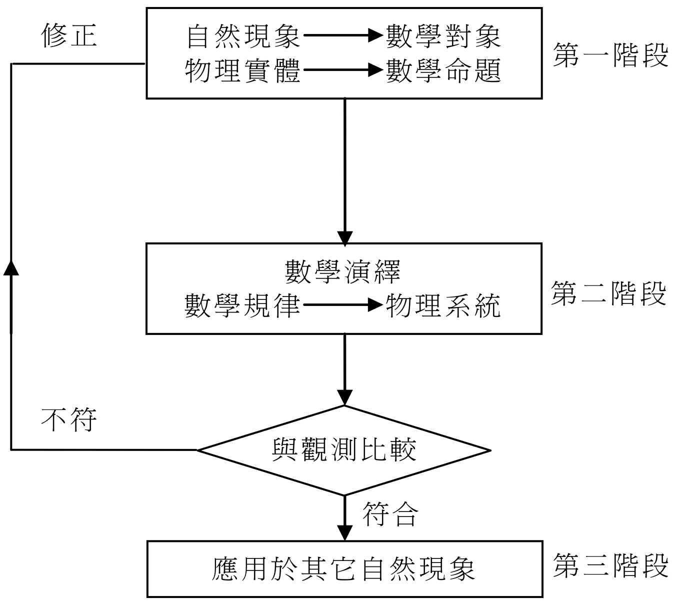

圖 6、牛頓風格的三個階段

再轉化回物理系統的落體，可獲得有阻力存在時，於同一時間其下落距離比無阻力存在時，有較小的預測結果，將它與實驗比較，可顯示彼此更為接近吻合 （Symon, 1968）。

另外，氣體狀態方程式的建立，也是將真實現象先轉成理想氣體，即分子間彼此無作用力，或壓力很小的狀況下，得到壓力得到壓力P、體積V、溫度T與莫耳數n的關係

$$PV = nRT$$

其中 R 為理想氣體常數。接著再加以修正考慮壓力增大，而得到凡德瓦爾斯狀態方程式(Van der Waals equation of state)：

$$\left(p+\frac{a}{V_m^{\,2}}\right)(V_m-b)=RT$$

其中，V_m 為莫耳體積，a、b 為與材料有關的常數（Callen, 1960）。

此外，在量子力學中處理氫原子系統時，也是先考慮主要的、似真的庫侖靜電位能，而獲得波耳的能階，接著再與真實經驗對照修正，則需進一步加入原子或原子核的磁偶極矩，與電子自旋的作用項，以解釋精細結構或超精細結構現象（Cohen-Tannoudji , Diu & Laloë, 1996）。

這些例子屢見不鮮，幾乎遍佈在所有的物理問題中。這種先由理想化的簡單真實狀況切入，演繹出基本原理，然後與外界真實現象對比，做進一步的修正，接著再應用數學方法論證運算，最終尋得最精確的原理。此種嚴謹的思考程序與運算方法，基本上都是由牛頓所強化與奠定的。

玖、結論

在牛頓當時，所觀測到的土星、木星之衛星與月亮軌跡，無法確認為橢圓，反而較接近正圓，使得牛頓必須將行星與其衛星、及太陽與其行星運動的自然現象，先以圓周軌道來代表，並須引用圓周的週期律，以建立起平方反比力原理。一方面，這反映出在觀測上，圓周的週期律較具有廣泛的普遍性事實；另一方面，也代表牛頓對實驗歸納數據真實性的重視；同時，亦顯示出他對行星所受太陽引力、與任意兩物之間皆存在有「萬有」引力，兩者論述的區隔。

從早期對圓周運動的探討開始，牛頓便體悟出物體所受的力，如何以其運動速率及半徑來表示，也從受力為離心力過渡到向心力，並演繹得到向心力與面積律同義，及圓周的週期律與平方反比力等價，最後再推論得：物體若受平方反比力作用，其運動路徑可為橢圓軌道。其概念的建立與完成，有其一致性及漸近性，而非突獲靈感、或臆測而得，這是當時其他科學家皆無法擁有的知識深度。

將自然現象，如行星的圓周運動，轉變為物理問題，再轉化成數學對象，接著應用純粹數學系統演繹出定理，如第 1 卷命題 4 推論 6 之定理所述：物體若各自在不同半徑的圓周上運動，且皆滿足週期律，則這些物體所受的力與半徑平方成反比。再逆推回溯至原初的物理狀況與經驗世界，而得到宇宙體系中，每一物體均受到平方反比力之作用。然後將行星運動的

橢圓軌跡與圓周運動對照，覺得需進一步微調修正，遂再引用數學論證，如卷 1 命題 17：行星若受平方反比力作用，其軌跡則為橢圓。如此逐漸修正，最後終於獲得預期的精確結果──行星與彗星皆以橢圓軌道運動，並尋找到自然現象背後的真實原理及法則──萬物皆以與距離平方成反比之力相互吸引。

牛頓《原理》一書，以平方反比力的建立為核心，所呈現出物理經驗現象與數學抽象思維的對應與交流，圓滿地統合了以「質點」與「運動」為現象描述基礎的機械論觀點，以及科學革命中的數學觀思潮，因此被譽為古典物理的集大成者。他也塑造了物理探討的數學風格，成為後來科學家們最重要的學習典範。

參考文獻

韋斯特福爾 (Westfall, R. 1999)：**牛頓傳。** 北京：中國對外翻譯出版，179。

牛頓 (Newton, I. [1687, 1713] , 1992)：**自然哲學之數學原理。** 台北：大塊文化出版公司。

田芷綾、姚珩 (2010)：**引力理論建立的關鍵—向心力概念的形成。** 台北：科學教育月刊，330，22–33。

吳大猷等 (1999)：**高級中學物理(第一冊)。** 台北：國立台灣科學教育中心，131。

姚 珩 (1998) ：**物理學的基礎—力學。** 台北：台灣書店，181–221。

韋斯特福爾 (Westfall, R. 2000)：**近代科學的建構—機械論與力學。** 上海：復旦大學出版社。

項武義，張海潮 (2008)：**從開普勒到牛頓。** 台北：數學傳播， 32（2）3。

閻康年(1989)：**牛頓的科學發現與科學思想。** 長沙：湖南教育出版社，472–474。

Arnold, V. (1990). *Huygens and Barrow, Newton and Hooke. Boston: Birkhauser Verlag, 16–33.*

Brackenridge, J. (1995). *The Key to Newton’s Dynamics.* Berkeley: University of California Press

Callen, H. (1960). *Thermodynamics.* New York: John-Wiley & sons Inc., 341–342.

Cohen, I B. (1980). *The Newtonian revolution.* New York: Cambridge University Press.

Cohen-Tannoudji, C., Diu, B. & Laloë, F. (1996). *Quantum mechanics.* New York: John-Wiley & sons Inc., 1213–1245.

Dijksterhuis, E. (1986). *The Mechanization of the World Picture.* Princeton: Princeton University Press. 477.

French, A. (1971). *Newtonian Mechanics.* New York: W. W. Norton. 256.

Hall, R & Knight D. (1996). *Isaac Newton, adventurer in thought.* Cambridge: Cambridge University Press. 205.

Jeans, J. (1951). *The Growth of Physical Science.* Cambridge: Cambridge University Press. 186.

Macklin, P. (1971). *Inverse-Square Gravitation from Kepler's First Two Laws.* American Journal of Physics, 39, 1088.

Newton, I. ([1704], 1979). *Optics.* New York: Dover Publications, Inc., 404–405.

Pemberton, H. (1728). *A View of Sir Isaac Newton's Philosophy.* London. 172–174.

Symon, R. (1971). *Mechanics.* 3rd ed. New York: Addison-Wesley, 35–36.

Taton, R. & Wilson, C. (1989). *The General History of Astronomy.* Vol. 2. New York: Cambridge University Press.

Turnbull, H. (2008). *The Correspondence of Isaac Newton.* Vol. 2. & 3. Cambridge: Cambridge University Press.

Wilson, C. (1974). *Newton and Some Philosophers on Kepler’s “Laws”.* Pennsylvania: University of Pennsylvania Press. 231–258.