運動方程式

1. 單單只有並不能決定質點的運動，我們必須知道所受力*F*究竟是多少。更精確說，我們必須知道質點所受力如何由質點的性質例如位置、速度、質量等，以及環境的性質來求得。如果知道力如何計算，上式便形成運動函數必須滿足的方程式，稱為**運動方程式**（Equation of Motion）。因為方程式包含微分項，所以是一個微分方程式。
2. 地表附近的下落運動：實驗顯示在地表附近物體所受力皆垂直向下，力的大小與質量成正比：。

我們首先考慮一維的垂直上下運動，並設垂直軸向上為*y*軸，因此只要考慮*y*方向的運動方程式：

或。

注意負號是因為重力是往下。此式陳述函數的二次微分是一個常數。**我們可以先將此式寫成速度的方程式**：

。

此式顯示速度的一次微分是一個常數，很容易猜到什麼樣的函數微分是一個常數，就是線性函數，因此我們可以確定。注意線性項的係數已經決定（*-g*），但因為常數的微分是零，**我們可以在任一解中加上任意常數**，就像上式中的，所得的函數都滿足運動方程式。所以我們的解還沒有完全確定。

如果學過積分的同學，這個步驟其實就是積分，微分與積積分是反運算，因此如果速度****的微分是*-g*，速度就是*-g*的積分，，注意積分中的下限，是可以取任意值，這反映在所得的解中，也有一個未定的常數。其時一般計算函數*f*的積分時，也是利用微積分基本定理”微分與積積分是反運算”，去猜一個微分後會得到*f*的函數，所以和上述的步驟事實上是一樣的。

這個解微分方程式的過程可以繼續，速度是位置的一次微分：

，

函數也可以很容易猜出來，它必須包含二次項及線性項：。注意在此我們又可以加上另一個任意的常數而不影響*y*滿足運動方程式。這是微分方程式的一個特徵，這表示只有運動方程式並不能完全決定質點未來的位置，落體運動可以自由落下，也可以先上拋再下墜。此處欠缺的資料是起始位置與起始速度，起始條件必須事先給定。事實上這是一個數學定理，可以證明，**給定特定的起始條件，在此包含起始位置與起始速度，牛頓的運動方程式只有唯一一個解**。在我們現在討論的例子中，有了起始位置與起始速度，常數就可以決定：，。因此我們得到了運動方程式的一個解，它又滿足起始條件：

。

根據上述的數學定理，這樣的解只有一個，所以上式就是唯一的解：質點的未來位置便完全被決定了

1. 拋體運動：拋體運動所受力與下落運動一樣，只是現在拋體可以在水平方向運動。設水平方向為x軸，現在的運動方程式變成：

。

請注意*x*軸及*y*軸的方程式是互相獨立的，所以*y*方向的運動是不受*x*方向運動的影響。這就是有名的拋體水平與垂直方向運動的獨立性，因此拋體的水平座標運動與下落運動一模一樣。在此我們也需要知道起始條件：，有了這些資料，兩個方程式都可以完全解出來：

。

1. 考慮一質點，質量為*m*，在一維x軸上運動，若所受外力沿x軸方向，但與位置無關，力的大小為時間的線性函數。運動方程式可以寫成：

或是

 由速度的時間微分是線性函數，不難猜出速度應該是時間的二次函數，但是如同自由落體，我們可以任意加上一個常數：



很明顯地，此常數可由起始速度確定：。速度是位置的微分，速度是時間的平方函數，很容易猜到位置必然是三次方函數：



而常數*c*2由起始位置決定：。因此完整的解為：



**習題一**：假設一個質量為的粒子，在一維的x軸上運動，受一沿+x方向的力，力的大小只是時間*t*的函數：，在此式中*t*的單位是s，力的單位是N，已知此粒子在時間時，位置在，速度為，計算粒子位置函數：，計算在時粒子的位置與速度。

1. 以類似的方法求運動方程式的解，我們還可以舉一個比較有用的例子。考慮一質點，質量為*m*，在一維x軸上運動，若所受外力沿x軸方向，但與位置無關，力的大小為時間的週期函數。這其實與帶電質點受到一個電磁波的電塲帶動而隨之震盪的情況有些類似。運動方程式可以寫成：

或是

 由速度的時間微分不難猜出速度應該是cos函數，但是如同自由落體，我們可以任意加上一個常數：



很明顯地，此常數可由起始速度確定：，也就是。速度是位置的微分，速度是cos函數，很容易猜到位置必然是sin函數：



而常數*c*2由起始位置決定：。因此完整的解為：



從此解可以看出質點亦隨著外力作相同的週期運動，有趣的是外力的頻率越大，*ωD*越大，質點的週期運動的振幅越小。

1. 拋體運動考慮簡單的空氣阻力：先考慮比較簡單的阻力（Drag Force），在速度不是很快時，阻力與質點速度大小成正比，而與速度方向相反，因此：，所以運動方程式可以寫成：，用分量來表示即：

，

這兩個運動方程式都較為複雜。但即使還未求解，我們已經可以從式子本身得到重要訊息，那就是：即使加入了阻力，水平與垂直運動依然是獨立的。所以拋體的水平座標運動與下落運動依舊一模一樣。

1. 我們先從第一個式子的求解出發：



我們依舊可以將此式改寫成速度的方程式：

。

對於此式，當我們猜到一個解後，將它乘上一個常數，仍然會是滿足同一方程式的另一個解：



這樣的微分方程式，稱為齊次(Homogeneous)方程式，通常式中所有的項都與未知函數(v)或它的各階微分成正比。現在我們先來猜一個解，此式顯示速度的導函數與自己成正比，我們已經知道有一種函數滿足這樣的性質，那就是指數函數，所以我們可以大膽猜想：，請注意現在我們不能隨意加上一個常數，但是可以在指數函數前**乘上一個任意常數*C***：，如此我們便得到一系列的解，可以來fit起始條件。和之前的下落運動一樣，常數*C*可以由起始條件決定，在此為起始速度：。，因此速度函數就解出來了：

。

這是有名的指數遞減函數，請注意隨著時間增加，速度會漸漸減小，而且減小的速度比任何時間冪次的反比函數（）來得快。

於是現在位置函數滿足

，

顯示位置函數的微分是一指數函數，我們已知道只有指數函數的微分會正比於指數函數，因此我們可以猜想：

，

注意此處我們可加一任意常數，而不能乘上常數。同理，常數則可由起始位置決定，假設我們取起始位置為原點，那麼，因此

。

很有趣地，質點的x座標最大只能達到。

1. *y*方向的運動滿足運動方程式，



這也是有空氣阻力下自由落體所滿足的方程式。它的求解與以上方法類似，首先用表示，上式可以寫成：。

這個微分方程式有一個很簡單的解法：我們可以引進一個新的函數：，那麼這個新函數的微分與：，而方程式的右手邊就正比於*V*，因此*V*所滿足的方程式與所滿足的就完全相同：

，

所以*V*的解與相同：，這裡一樣有一個常數*V*0可以調整以滿足起始條件：，由*V*即可得到。因此



還有另一個比較麻煩，卻更有啟發性的解法。我們要解的式子與*x*方向的方程式只差一個常數，因為有一個項不是*v*或其微分，因此不是齊次方程式，稱為非齊次方程式，這個項就稱為非齊次項。其實我們之前考慮的很多方程式如，都是非齊次方程式。這樣的非齊次方程式有一個特徵，當我們猜到一個解之後，可以在其上加上對應的齊次方程式（意思是移除非齊次項之後所得的齊次方程式）的解，而仍然滿足一樣的非齊次方程式，因為齊次方程式的解都含有未定的常數，因此我們就得到一系列的解，來附合起始條件：

（非齊次）

（齊次）

則可得為非齊次方程式的解

（非齊次）

而這裡要猜的解非常簡單，因為一個常數即可：，常數的微分為零（左方為零），此常數又剛好使式子的右方為零。而所對應的齊次方程式就是*x*方向的方程式，其解為，因此必定是的解。現在我們得到一系列的解，便可以從其中挑出一個符合邊界條件的解：，，因此。

。

請注意當時間很大時，此速度會趨近於，這就是終端速度（Terminal Velocity），當質點速度到達終端速度時，空氣阻力洽等於重力，因此便不再有加速度，而成等速運動。假如y方向初速為0，就是水平拋體，或是由靜止起垂直下落的運動，那麼公式就更簡單了：。

由的結果，同理很容易得到（記得指數微分還是指數，一次項微分則是常數），同樣*C2*是由起始位置決定。若設起點為原點，則，。

1. 簡諧振盪運動：考慮彈簧運動，其運動方程式可以寫成：

，或是進一步簡化，

在此符號。這是一個齊次微分方程式。彈簧運動的解*x*(*t*)，兩次微分後，與自己成正比，而且比例常數是負的。我們已知正弦及餘弦函數正好都滿足這樣的性質，而且，正弦及餘弦函數的倍數，都是解；兩者的和，也會滿足一樣的性質（兩次微分後，與自己成正比，而且比例常數是負的），所以我們可以把解寫成



來包含所有的可能性，在此常數*a,b*可以任意。

這個性質事實上適用於任一個齊次微分方程式：，如果有兩個解同時滿足此方程式：，，他們的線性組合也滿足這個方程式。證明非常簡單，只要將上述第一式乘加上第二式乘，就得到

得證。

這一系列的解中，有兩個任意數。正如下落運動一樣，任意數由起始條件決定：如果給定起始位置及起始速度，常數*a,b*可以決定：，，因此。所以所得的結果：滿足運動方程式及起始條件，根據上述微分方程式基本定理，這樣的解是唯一的，因此我們寫下的就是唯一解了。

這個結果還可以用另一個方法表示，將常數*a,b*用另外兩個常數來代替，它們的關係是，如此以上的解就可以寫成



兩個常數便是振幅與相角。如同起始條件，它們在每一次運動都不一樣，可以自由調整。相反地，常數則是角速度，由彈簧及質點的性質決定，由它可算出頻率及周期：。因此，。

1. 簡諧振盪器（彈簧質點組）的震盪常常會因阻力而漸漸縮小振幅，這樣的情況我們可以在運動方程式中引進一個阻力來描述：

如此運動方程式可以寫成：

或者：

阻力項是一次微分，大致與彈力項相差90°相角，因此單純的三角函數無法滿足此方程式。根據直覺，在阻力影響下，震盪器一般還是會振盪，但振幅會減小。我們可以大膽假設，其解還是一三角函數，但振幅是一個時間的函數：

注意此振盪的角頻率有可能不是彈簧組的自然角頻率。

將此解代入方程式之中：

因為振幅與時間有關，因此此解的微分除了餘弦函數，也有與它相差90°相角的鄭嫌函數。要求要求的係數為零：

要求的係數為零，同時代入

可以得到：

因此我們可以得到一個解，同時可以調整常數滿足起始條件：

所以，阻力使振幅對時間呈現指數衰減，角頻率也減小！

但這個角頻率的公式只有在一定條件下才有意義。如果阻力太大：，根號中的式子就是負的，就成了虛數，因此以上的解並不適用。這時的解會是一個隨時間指數遞減的函數！所以阻力夠大時，震盪就完全不會發生。在日常的避震上，這正是我們所希望看到的結果。這也暗示複數會在微分方程式的求解扮演有用的角色。以下會以複數來進一步得到這個結果。



1. 如果我們希望有阻力的震盪器繼續震盪，就必須對其施力。如果力是一個常數，那一個週期中將有一半運動是與力反向，因此就無法做功。所以要對震盪器施力，力本身也須是一個週期力，才有較好的效果。

假設簡諧振盪器（彈簧質點組）施加一如第5點中的週期性外力來驅動它，如此運動方程式必須再加上一項：

或者

注意週期外力的角頻率與彈簧內在的角頻率是獨立的參數，以下會顯示彈簧的反應與兩者的關係密切相關。

這是一個非齊次微分方程式。我們先忽略阻力以簡化方程式：

所以首先讓我們猜一個解。因為cos函數的二次微分還是cos函數，因此很自然可以猜到一個解：，只是現在常數*A*不是任意的，將此解代入方程式可得：，因此

我們得到一個解，可稱為共振解：

這個解很重要，因為它顯示振盪器對外加驅動力的反應是會隨之以**同樣頻率**振盪，而有趣的是反應的大小（即是振幅*A*），和外加力的頻率*ωD*有關，*ωD*與彈簧的自然頻率*ω*越接近，反應（即是振幅*A*）也就越大，這種現象稱為共振（resonance）。

如同之前的敘述，我們可以在猜到的非齊次方程解之上，加入對應的齊次方程解（在此就是第9點中的簡諧震盪）。我們在上述的共振解再加上一個無驅動外力彈簧的解，也就是，而不影響它滿足方程式。也就是，因為滿足，而滿足，很明顯是滿足的。所加上的彈簧解中的兩個常數，正好可以調整以滿足起始條件。所以我們得到解，也滿足起始條件，因此是完整解也惟一。

1. 第10點中的共振解

有一個奇怪的地方，*ωD*與彈簧的自然頻率*ω*越接近，振幅*A*也就越大；但時，共振解竟是無限大（發散）。在真實世界中因為必須考慮摩擦阻力，這樣的發散並不會發生。

現在我們就將摩擦阻力考慮進來：

要解這個方程式，利用複變函數最方便。如果我們將這個式子裡的*x*是推廣為一個複數*z*：，那麼*z*的實數部與虛數部都同時滿足這個方程式：，因此，。所以如果能解出複數*z*，再取其實數部，即可得到原方程式的實數解*x*。

這看起來是使事情變得複雜，但沒想到卻使得求解變得極簡單。原因是因為複數的指數函數非常簡單，他的任何次微分都與自己成正比，而比例常數可以是任意複數：，在這裡複數的指數函數定義為：及，這樣的定義維持指數函數最重要的特性：，證明：



以及，例如：

，。

相對地實數的指數函數二次微分也與自己成正比，但比例常數必為正，正弦函數的二次微分與自己成正比，但比例常數必為負，所以複數的指數函數是把兩者融合在一起。

有了這個關係，現在如果我們大膽地猜複數*z*的方程式的解正比於指數函數：，並且將此式代入，你立刻會發現每一個微分都與自己成正比，而比例常數就是，所以可以得到：，也就是原來的微分方程式現在一項對一項地轉化為代數方程式：。這個代數方程式中的未知數*α*有兩個解：，若阻力不大：，則根號是實數，於是我們得到兩個複數解：

因為微分方程式是齊次，我們可以將這兩個複數解各乘上一個複數常數再相加（線性組合），所得到的依舊會是一個解：



我們很有系統而且輕易地得到兩個複數解，而其實數部就是我們原來尋找的的實數解：



最後一個式子中，我們重新定義常數為*a*,*b*以簡化，在此常數*a,b*可以任意。因此我們得到一系列的解，有兩個任意數。正如下落運動一樣，任意數由起始條件決定，所得的結果將滿足運動方程式及起始條件，根據上述微分方程式基本定理，這樣的解是唯一的，因此我們寫下的就是唯一解了。將阻力係數*b*趨於零，你會發現這兩個解就剛好對應第9點中簡諧振盪的兩個解。所以我們可以整理一個較容易懂的式子：

以上的解法很容易地就可以推廣到任意的齊次微分方程式：用同樣的推理，任意齊次微分方程式，先推廣為複數，，猜解為：，代入則將微分方程式轉化為代數方程式就是，代數方程式中的未知數*α*有*n*個解，得複數*z*的一般解為，最後取實數部即可得實數解。

1. 現在加入外力，運動方程式又多了一項：，多出來的一項使它成了非齊次微分方程式。但我們依舊可以將它先推廣為複數的微分方程式：，注意我們將右手邊的餘弦函數以對應的虛數指數函數來代替，這可以保證方程式的實數部就是原來的微分方程式，而複數解的實數部就是實數解。現在我們可以依舊猜解為：，只是你可以很快發現這一次未知數*α*只有一種可能：，常數也只有一種可能：，因此：

，

經過一些整理：，，。

而複數解，其實數部即原方程式的實數解

實數解：。

這個就稱為共振解，並沒有任何自由度可以附合起始條件。但正如我們說過很多次的：對於非齊次方程式，當我們猜到一個解之後，可以在其上加上對應的齊次方程式（意思是移除非齊次項之後所得的齊次方程式）的解，而仍然滿足一樣的非齊次方程式，因為齊次方程式的解都含有未定的常數，因此我們就得到一系列的解，來附合起始條件。這裡對應的齊次方程式就是去除外力項，第11點中的。它的實數解：。果然有兩個未知常數可以附合起始條件。因此整個解：。這個解滿足微分方程式，而且可以滿足起始條件，根據微分方程式基本定理，它必然是唯一的解。有趣的是，非共振解會逐漸減小，而共振解則不會，因此過了一段時間，非共振解即可忽略，起始條件的影響會消失，只有共振解的效應必須考慮：，。正如之前已討論過的，這個解的頻率等於外加力的頻率，而振幅有共振現象，外力頻率越接近彈簧的自然頻率，振動也就越大！

