量子力學中兩個最重要的數學基本定理

【基本定理 Ⅰ】

若 V 為有限維空間，則在 V 上任一厄米特運算子的固有向量，恆可做為空間 V 的基底。（*When V is finite-dimensional , it is always possible to form a basis with the eigenvectors of a Hermitian operator*.）

設在一空間上的厄米特運算子 $\hat{H}$ ，其對應之固有值方程式為

$$\hat{H}\,|\varphi_n\rangle = E_n\,|\varphi_n\rangle \quad , \quad n = 1, 2, \cdots$$

E_n 與 $|\varphi_n\rangle$ 分別為 $\hat{H}$ 之固有值與固有向量，則

$$\{|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, \cdots, |\varphi_n\rangle, \cdots\}$$

為空間中之一完全集（*complete set*），即任一向量$|\Psi\rangle$可表為

$$|\Psi\rangle = \sum_{\ell=1}^{\infty} a_\ell\,|\varphi_\ell\rangle = a_1\,|\varphi_1\rangle + a_2\,|\varphi_2\rangle + \cdots + a_n\,|\varphi_n\rangle + \cdots$$

其中 a_ℓ 為純量。

尋找空間之基底 $\equiv$ 尋找厄米特運算子之固有向量

【基本定理 Ⅰ'】

作用在有限維空間中任意一厄米特運算子，其矩陣表示永遠可寫成對角線形式。（*Any matrix representation of a Hermitian operator acting in a finite dimensional vector space can always be brought into a diagonal form* .）

~~~~~~

【基本定理 Ⅱ】

若二厄米特運算子 $\hat{A}$, $\hat{B}$ 彼此可交換，則此空間上可建立一組基底，同時為運算子 $\hat{A}$, $\hat{B}$ 之固有向量。（*If two Hermitian operators* $\hat{A}$, $\hat{B}$ *commute , one can construct an orthonormal basis of the state space with eigenvectors common to* $\hat{A}$ *and* $\hat{B}$.）

105-9-20
~~~~~~