牛頓力學的先驅惠更斯—機械論的數學化

付麗萍[1]　陳玠同[2]　姚珩[2]

（1.閩南師範大學物理與資訊工程學院 福建 漳州 363000 2.臺灣師範大學物理系 臺灣 臺北 11677）

摘要：牛頓結合圓周運動的向心力和開普勒的週期律得到了萬有引力定律。然而，圓周運動向心力形式主要是來自于惠更斯的結果，而惠更斯之所以會考慮到圓周運動的位置變化，則是在當時的兩大思潮伽利略的數學觀和笛卡爾的機械論的影響下做了非常細膩的統合。他開創了史無前例的嶄新方法—機械論的數學化—分析力作用，使用數學運算尋找出和諧形式結果的思維程式，成為啟發牛頓的重要先驅。

關鍵字：惠更斯；離心力；機械論；牛頓力學；圓周運動

毋容置疑，力學的核心是牛頓的三大運動定律與萬有引力定律。然而，它們是如何建立的？牛頓又是受到什麼樣的影響而提出來？現行的教科書中都未給予說明。經典物理學或牛頓力學是結構嚴謹、論證完整的科學思想體系，它不可能靠一個人在有限的時間內完成。牛頓的確是經典力學的集大成者，但他是如何逐步奠定起當代有效的力學思維與內容，則需要我們認真的研究與慎思。牛頓本人也明言他是站在巨人的肩膀上，才能看得更高更遠，那麼這些巨人是誰？他們的主張是什麼？為什麼可以深深地激勵牛頓，促使他能夠建立起穩定有效的力學架構。本文追尋牛頓力學的脈絡，旨在教學中使教師們的思路更加明晰，提升學史素養。

1 伽利略的數學觀

愛因斯坦認為伽利略(G. Galilei, 1564-1642)是近代物理學之父，而我們對其印象是比薩斜塔落體實驗，因此認為伽利略是物理實驗的開創者，但至今並沒有任何史實資料可證明他做了該塔的實驗。然而，在其生前 1634 年最後一本著作《兩門新科學的對話》的確有著詳細記載的則是斜面實驗，該實驗指出物體下滑的距離(s)是與時間(t)平方成比例：[1]

$$s \propto t^2 \qquad (1)$$

但該書是以定義、定理、命題與證明等幾何學形式所寫成，逐步說明如何有上式的結果，而非從斜面實驗的資料分析得知。在全書 51 個命題中的第一個定理，

開宗明義寫道 (圖 1)：

“從靜止開始做等加速度運動的一個物體，通過任意空間所需時間，等於此一物體以最大和最小速率平均值的等速度運動，通過該空間所需的時間。” [1]

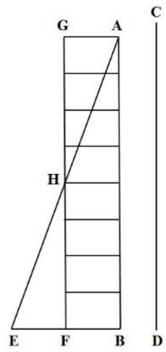

圖 1 物體作等加速度運動的距離與平均速度的關係

若用現在的公式表示，即代表勻加速度物體的位移

$$s \propto \frac{1}{2}(v_0 + v_t) \cdot t \qquad (2)$$

其中v_0與v_t分別代表物體的初速與末速。利用此關係，可建立（如下表 1）得到在第 1、2、3……秒，每秒內的行進距離比為 1：3：5：7.….，然後得知隨時間增加，累積的距離比為 1：4：9：16……，即為上式(1) $s \propto t^2$。接著他用斜面實驗來加以驗證(如圖 2 所示)。[2]

表 1 勻加速度運動 $v \propto t$，會有 $s \propto t^2$ 關係

t	v	Δs	s
0	0	0	0
1	1	$\frac{(0+1)}{2} = \frac{1}{2}$	$0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 1$
2	2	$\frac{(1+2)}{2} = \frac{3}{2}$	$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \cdot 4$
3	3	$\frac{(2+3)}{2} = \frac{5}{2}$	$\frac{4}{2} + \frac{5}{2} = \frac{1}{2} \cdot 9$
4	4	$\frac{(3+4)}{2} = \frac{7}{2}$	$\frac{9}{2} + \frac{7}{2} = \frac{1}{2} \cdot 16$
5	5	$\frac{(4+5)}{2} = \frac{9}{2}$	$\frac{16}{2} + \frac{9}{2} = \frac{1}{2} \cdot 25$
⋮	⋮	⋮	⋮

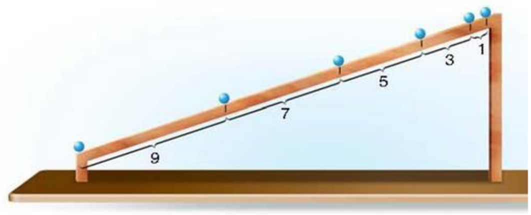

圖 2：斜面上滾動的球每秒之間距比為 1:3:5:7:……

伽利略深信地球上落體的運動必定遵循著最簡單和諧的數學關係，而落體速度變化的最簡式就是與時間成正比的關係，即

$$v \propto t \tag{3}$$

伽利略以複雜世界背後這種簡潔的數學結構，可反應出真實的落體運動現象的信念，作為他全部物理學的思考基礎。他曾不斷多次強調：“(實驗)完全是不必要的。對於我自己縱使沒有做實驗，我也確信就像我告訴您的一樣，因為它必定得如此”。“借著發現某一事實的原因，來獲得其知識，它可提供理解和確定其他現象的思維，並不需訴諸於實驗”。“只有在數學中才能找到堅實的證明，這種力量讓人充滿驚奇與喜悅”。[1]此處所反映：大自然本身是按著最平常、最簡單和最容易的手段進行各種變化過程的觀點，被物理史學家視為是促成十六世紀科學革命的重要因素，此思潮被稱為“物理學的數學觀”或“新柏拉圖主義”。[3]伽利略首先將數學的和諧性引入物理學，使物理學脫離了自古希臘亞里斯多德所主張應以“性質”(nature)來描述物理學的傳統，[4]同時也改變了物理學的整體面貌。

2 笛卡爾的機械論

伽利略之後沒多久，出現了一位絕頂聰明的科學家，也被稱為近代哲學之父——笛卡爾(R. Descartes, 1596-1650)。由於老師們所教的他很快就懂；但他知道的，老師們卻不一定懂，於是他開始懷疑書上所寫以及前人所說的全部知識，而提出了“我疑故我思，我思故我在”的名言。因此他嘗試著去尋找最不可懷疑的事物，以便從那奠立起知識的基礎。後來他發現雖然每件事情皆令人質疑，但有一件事卻永遠無法懷疑，那就是：“三角形之內角和為 180º”，亦即只有幾何學為不可質疑的真實之物，他於是從幾何學的點、線、面開始來建立起物理學的知識。由點、線、面可形成長、寬、高，也就是佔有空間的延伸物，或稱作物體(body)。換言之，應該從這種不可穿透、堅硬的物體做

為科學知識論證的根基。若物體縮成很小之物，它便可稱為質點(particle)，他並堅定認為“一切的感覺現象皆是來自物體或質點的位置改變(即運動)所形成。”此種主張後來被稱為“機械論”(mechanism)。[3]笛卡爾用此觀點詮釋了光的反射、折射、氣壓與磁鐵的吸引排斥。他並描述了做圓周運動的物體的特徵如圖 3，繩上的球或木杆上的螞蟻都具有離開原本的 B、F 點朝向 C、G 點運動的特性，且稱圓周運動上的物體皆具有此種逃離圓心之性質為離心趨勢(endeavor)，或離心傾向(tendency)。[5]

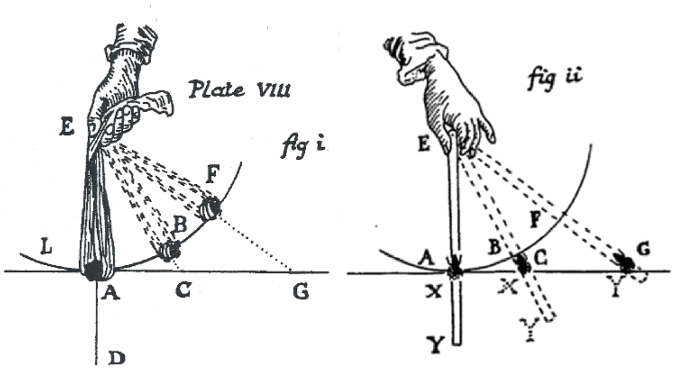

圖 3：笛卡爾離心趨勢圖。

他更以此性質來解釋行星的特殊軌道(圖 4)。笛卡爾認為宇宙間佈滿了流體般的乙太(ether)物質，在快速移動下形成了許多渦漩環流，在渦旋邊上的行星都傾向逃離中心，而此行星也會受其它不同渦漩的作用，最終有些地方所受各種渦漩的離心傾向可互相抵消，達到平衡，而確定出行星的軌道。[5]以現在的觀點來看，此渦漩模型相當粗糙，然而在笛卡爾之前宇宙是分成月亮之下的變化世界，與月亮之上的完美天體結構迥異。他的渦漩理論在歷史上則是首次以日常所見現象來詮釋天體運動，它打破了古希臘與中世紀時期所主張天際與地表明顯區分的傳統宇宙觀。[6]

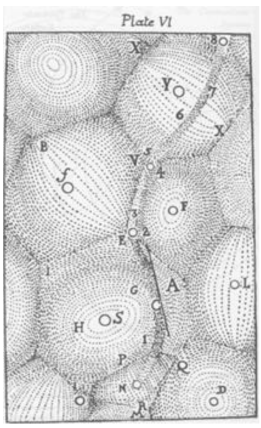

圖 4: 笛卡爾渦漩理論之模型。

3 數學觀與機械論的衝突

新柏拉圖主義的數學觀主張以秩序處理現象，滿足於發現某種精確的數學描述，並將這種描述理解為對宇宙終極結構的一種表達。機械論關心的則是許多個別現象的因果關係；自然界對人的理智是透明的；試著消除生機(vitalism)哲學中的各種蒙矓，並證實自然現象是由不可見的、類似於日常生活中人們所熟知的機制所引起的。此二思潮由於追求不同的目的，常導致彼此相互衝突。對機械因果關係的闡述常常站在與通向精確描述之路相反的方向上；同樣，精確的數學描述卻無法提供現象背後的成因。[3]

例如：伽利略發現重物輕物皆會以相同加速度落下，並可精確描述其速度、位移與時間之關係，卻無法說明是什麼原因造成？行星運動準確地遵循面積律與橢圓軌道，但無法通過機械論解釋為何會有此性質？同樣的，笛卡爾可以說明行星會有特殊的運動軌跡，卻無法精確地指出為何是橢圓？只有盡力或完全消除二種觀點間的不一致，物理學才算充分完成。

4 惠更斯的創見—機械論的數學化

4.1 重性的機械論解釋—重性是離心力的結果

面對這些重大的困難，荷蘭物理學家惠更斯(C. Huygens, 1629-1695)是第一位將機械論與數學方法結合在一起的智者。他首先以機械論觀點說明重性—為何重物會下落—的原因(重性 gravity 並非重力，因當時尚無引力觀點)。惠更斯依循著笛卡爾，認為地球附近所充斥著隱含的乙太，就好似圖 5 中管內充滿的水。當管子沿中心軸 A 旋轉時，由於管內水的離心趨勢作用較大，會朝管端 P 移動，而將木栓 B 壓向管底。重性便是在一個充滿乙太物質的渦旋世界中，一些離心趨勢較弱較缺乏的物體，由於受到離心趨勢較強的乙太物質作用，導致重組與碰撞，而被迫落向中心或拉向地心，遂形成物體墜落現象，因此重性是離心力所造成的結果。[7]

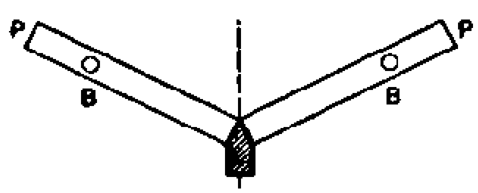

圖 5：木栓 B 放在充滿水的管內，當管旋轉時水會往外推至 P 點，
而木栓將朝管底運動。

4.2 離心力的量化

為了要說明重物下落距離皆會與時間的平方成正比，以及此結果是由地球旋轉帶動乙太物質的離心力所造成。惠更斯聰穎過人，以獨到的見解與特殊的直覺，開創出了將機械論所主張的離心力加以數學化的處理方法，影響深遠。惠更斯的想法最先出現在 1659 年的手稿，正式發表於 1673 年《擺鐘振盪》(The Pendulum Clock) 論文的附錄中，但裡面只有結論無任何證明，在逝世後的 1703 年，後人代為整理出《論離心力》(On Centrifugal force) 的論文中，則有詳細的論述。[8]他的論文有 17 個假設，其中最重要常見的為下面的三個假設。首先，他定出離心力的大小，認為物體若不受任何干擾時，如笛卡爾所言，它將維持直線前進。但在圓周上，做圓周運動的物體總有一股傾向，欲脫離圓弧，回到開始時直線的趨勢，此趨勢稱為“離心力”，其大小為 EG 長度(圖 6)。他接著宣稱：

假設 1：假如兩個一樣的物體在相同時間內完成不同的圓運動，則大圓的離心力會大於小圓的離心力。[8]

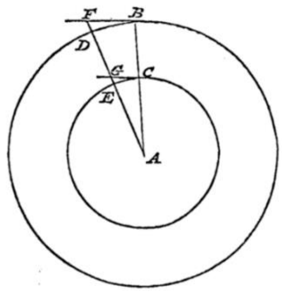

圖 6：惠更斯假設 1 示意圖：在相同週期下，不同圓周上物體的離心力與半徑成正比

假設 3：假如兩個相等物體以同樣的速率分別作不同大小的圓運動，它們的離心力會與直徑成反比，所以小圓的力會比較大。[8]

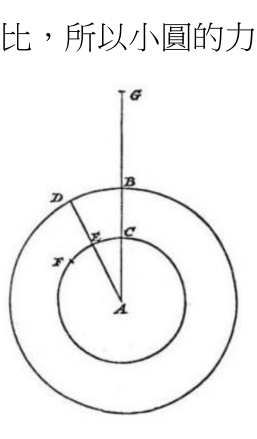

圖 7：惠更斯假設三示意圖：速率固定時，離心力與半徑成反比

假設 2：假如相同的物體在同樣的軌道以不同的速率做旋轉，但兩者都是作等速率運動。其遠離中心的力，速率快的物體會比速率慢的物體還要大。也就是說，假如以繩線系住物體並從桌面穿過圓心，另外一頭懸掛重物，而此物體的重量會等於所抵抗的離心力，且重量大小與速率的平方成正比。[8]

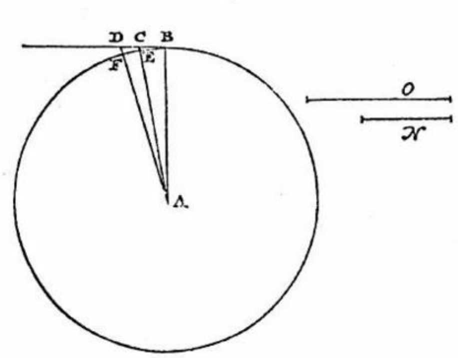

圖 8：惠更斯假設二示意圖：在同一圓上，離心力與速率平方成正比

若以 F 表示離心力，r 表示圓周運動之半徑，ω為角速率，v 為線速率，則假設 1 表示ω固定時，離心力與半徑成正比：

$$F \propto r \tag{4}$$

假設 3 表示 v 固定時，離心力與半徑成反比：

$$F \propto \frac{1}{r} \tag{5}$$

假設 2 表示 r 固定時，離心力與速率平方成正比：

$$F \propto v^2 \tag{6}$$

此三個假設若結合在一起，就形成後來所言離心力 F 與 r、ω、v 之關係為

$$F \propto \frac{v^2}{r} = r\omega^2 \tag{7}$$

雖然，圓周運動在早期托勒密(Ptolemy, 100-170)與後來哥白尼(N. Copernicus, 1473-1543)的天文學都曾充分探討過，但都是以行星為物件，且從未有作用力的觀念。惠更斯是第一位將圓周上運動物體與所受的作用力結合，並提出精緻的力分析的物理學家。最初惠更斯並未寫下上述命題的證明，但他對離心力別出心裁的處理方式與數學運算，已大步邁出當時機械論者的思想局限，也開拓了物理學家的視野，並深深啟發了牛頓。[9] 今天的教師們在講授圓周運動物體與力關係時，其實就

是在使用惠更斯的理念與作法。

4.3 落體下落距離與時間平方成比例

利用以上三個假設，惠更斯接著描述到 (如圖 9)：“當一個物體在 B 點被釋放，作勻速率圓周運動到達 E 點時，有回到 C 點的趨勢，到達 F 點時，有回到 D 點的趨勢。這將會造成一個物體從原本位置沿著連心線離開中心的趨勢。以這種方式在第一段時間它將會以EC之距離遠離，在第二段時間會以FD之距離遠離。而這些EC、FD之距離，以及其它的時間內的距離會以時間平方的方式增加，即它們的比例將會是 1、4、9、16…。…物體的重性是同體積的乙太物質以非常快地速度離開圓心所產生的效果。乙太物質不斷地向後退去，並盡可能沿著半徑方向離開圓心，而使得物體掉落。”[8]

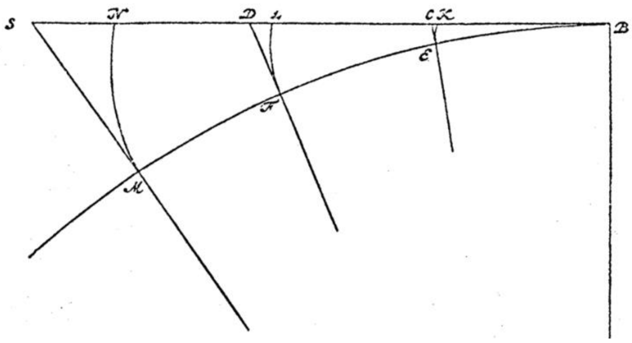

圖 9：當物體在作圓周運動時，在第一段時間，離心力所造成的位移量 EC，與在第二段時間，離心力所造成的位移量 FD，這兩位移之比 $EC{:}FD = 1:4$。

惠更斯沒解釋此段論述的原因，在此稍加說明。[9]如圖 10，作圓周運動的物體，自 B 點移動至 E 點，EC 長代表所受離心力。利用弦切角$\angle CBE$=圓周角$\angle CTB$，加上公用角$\angle C$，可得$\Delta CBE \sim \Delta CTB$，對應邊成比例給出 $BC{:}EC = CT{:}BC$ 或$BC^2 = EC \cdot CT$，而在極短的時間間隔內 CT 則近似於直徑。再參考圖 9，物體自 B 點行經至 F 與 M 點所需時間，分別為行經至 E 點所需時間的 2 倍與 3 倍，即 $BC{:}BD{:}BS \approx 1:2:3$，最後可得$EC{:}FD{:}MS = BC^2{:}BD^2{:}BS^2 = 1:4:9$。

因此，作勻速率圓周運動的地球會帶動其周圍的乙太脫離其原來位置，且乙太沿著連心軸隨著時間向外離開其原來位置的距離，會與時間平方成比例。其騰出的空缺，將導致物體持續予以填補，此種效應不但會造成物體下落，且其下落距離也會與時間平方成比例。

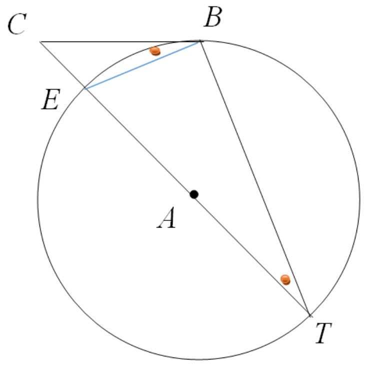

圖 10: 離心力 EC 與 BC^2 成正比

惠更斯便是如此，從機械論中乙太的離心趨勢或離心力出發，引入細膩的數學規劃程式，先將離心力的概念量化，再透過有效的運算分析，合理推導並詮釋出伽利略落體運動的和諧關係。這種創新與徹底的數學方法，不僅解除了數學觀和機械論衝突的鴻溝，並在論證過程中將此兩種不同的思考模式交互使用，獲得許多有意義的成果。這種將原本差異甚大的兩種思潮圓滿結合—先分析力作用情形，然後使用數學運算，最後尋找出和諧的形式結果的方法，從此一直沿用至今。[3]

5 對牛頓的影響

惠更斯將機械論數學化的劃時代創舉，獲得年輕牛頓的高度贊許，1669 年牛頓在《論圓周運動》一書中，[9]寫下非常重要的規律 (參考圖 10，事實上它正是牛頓所繪所用之圖)：

在時間 BE 中，物體 B 離開圓心 A 的離心趨勢與離開圓周的距離 EC 成比例，…有如在無阻力作用時，相對物體在此段時間可自由沿著切線移動，兩者所造成的變化距離，且

$$EC = BC^2/CT \tag{8}$$

此處BC表固定時間之位移，即速率，若在很短的時間下 CT 即為直徑或二倍之半徑，也就代表著離心力 EC 或 $F \propto v^2/r$，這關係就是前面惠更斯所述三個假設的意義。而此規律是促成牛頓日後發現萬有引力的核心關鍵，但它卻完全是惠更斯的主張與方法。

牛頓當時也應用了上述規則，開始探討落體的重性，與作圓周運動月球之離心力兩者之間的關係，並在 1669 年如此陳述：

"我以月亮至地球距離為地球半徑之 60 倍…則地表的重性為月亮被拖離地球之離心力的 4000 倍"[9]

此段話也呼應了他自己所說：距離平方反比律在他二十幾歲時便有了正確想法，所指的即是式(8)與式(7)離心力結果的延伸，而此論述基本上正是遵循著惠更斯的思考方式。代表牛頓不僅接受離心力的概念，更重要的是在思維上發揮了惠更斯所開啟的機械論的數學化方法。由此可知，在牛頓提出三大運動定律與發現萬有引力之前，即在 40 歲左右發表《自然哲學與數學原理》之前，[10]惠更斯的思想一直深刻地影響著牛頓，並處處反應在其著作裡。直至牛頓受到虎克(R. Hooke, 1635-1703)向心強度(central attraction power)的啟示，終於在 1684 年提出了向心力(centripetal force)的概念，再配合開普勒(Kepler, 1571-1630)的行星週期律，才獲得正確的引力定律及豐富的研究結果，此時他在力學上的貢獻才真正超越了其先驅—惠更斯。[11]

6 教學啟示

牛頓力學的建立不是為了解決工程問題，它是一種思想創見，[10,12]是要挖掘自然現象背後所蘊含的原理，正確詮釋運動與變化的成因，進而預測與發現可能的新現象。牛頓的運動定律與萬有引力定律是奠立在伽利略的數學觀、笛卡爾的機械論、與惠更斯的離心力的數學化，是經過長時間的歷史傳承與自我創新，所獲得的知識體系。既是淵源流長，也是無可取代，才成就了今日經典力學完美的形式與內容。

然而，在有限的教學時間裡，教師們往往傳授的是已完成的結論，教學重點放在了如何正確運用物理知識，去應用與解決相關的科學問題。教學的關注點也放到了中考、高考的考點上而很少去“追根溯源”。物理學為何以這樣的風貌展現？它是如何建立起來的？又為何必須是如此？教師們如果清楚了它的源頭與成因，將會更有信心帶領學生如何去思考，且高瞻遠矚，有所堅持便會“言之有物”。學生們在這種潛移默化的薰陶下，也會追根究底，習得有效深刻的思維方法。

参考文獻

[1] 伽利略 G．關於兩門新科學的對話[M]．武際可，譯．北京：北京大學出版，2006．

[2] 李建彬，胡象嶺. 伽利略對自由落體運動的研究與教學設計[J]. 物理教師，2016(12): 5-9.

[3] 韋斯特福爾 R · 近代科學的建構-機械論與力學[M] · 彭萬華，譯 · 上海：復旦大學出版社，2000 ·

[4] Guthrie, W. A History of Greek Philosophy[M.]. vol. I. Cambridge: Cambridge University Press, 1978.

[5] Descartes R. Principle of Philosophy[M]. Boston: Reidel Pub., 1983.

[6] 戴克斯特豪斯 E · 世界圖景的機械化[M] · 張蔔天，譯 · 北京：商務印書館，2015 ·

[7] Jammer M. Concepts of Force[M]. Mineola: Dover Pub., 1999.

[8] Huygens C. On Centrifugal force[J],1659, https://www.princeton.edu/~hos/mike/texts/huygens/centriforce/huyforce.htm

[9] Brackenridge J. The Key to Newton's Dynamics[M]. Berkeley: University of California Press, 1995.

[10] 牛頓 I · 自然哲學之數學原理[M] · 王克迪，譯 · 武漢：武漢出版社，1992 ·

[11] 柯瓦雷 A · 牛頓研究[M] · 張蔔天，譯 · 北京：商務印書館，2016 ·

[12] 陳運保，趙亮. 牛頓第一定律的發展歷史及其教育價值[J]. 物理教師，2016(7): 32-35.